

حل تمارين الدرس 6-3: مشتقات بدوال جيبية

تمرين ① ص 186 المطلوب إيجاد مشتقة الدوال:

$$f(x) = 4 \sin 3x - x$$

$$f'(x) = 4(\cos 3x)(3) - 1 = 12 \cos 3x - 1$$

تمرين ② $f(x) = 4x^2 - 3 \tan 2x$

$$f'(x) = 4(2x) - 3(\sec^2 2x)(2) = 8x - 6 \sec^2(2x)$$

تمرين ③ $P(t) = \tan^3 2t - \csc^4 3t$

$$\begin{aligned} P'(t) &= 3(\tan^2 2t)(\tan 2t)' - 4(\csc^3 3t)(\csc 3t)' \\ &= 3 \tan^2 2t (\sec^2 2t \times 2) - 4 \csc^3 3t [-\csc 3t (\cot 3t) \times 3] \\ &= 6 \tan^2 2t \sec^2 2t + 12 \csc^4 3t \cot 3t \end{aligned}$$

تمرين ④ $P(t) = t^2 + 2 \cos^2 4t$

$$\begin{aligned} P'(t) &= 2t + 2 \times 2(\cos 4t)(\cos 4t)' \\ &= 2t + 4 \cos 4t \times (-\sin 4t) \times 4 \\ &= 2t - 16 \sin 4t \cos 4t \end{aligned}$$

$$(2t - 8 \sin 8t)$$

تمرين ⑤ $f(x) = x \cdot \cos(5x^2)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \cos(5x^2) + x \cdot [-\sin(5x^2) \times 10x] \\ &= \cos 5x^2 - 10x^2 \sin(5x^2) \end{aligned}$$

تمرين ⑥ $f(x) = x^2 \cdot \sec 4x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot \sec 4x + x^2 \times (\sec 4x)' \times (\tan 4x) \times 4 \\ &= 2x \sec 4x + 4x^2 (\sec 4x)(\tan 4x) \end{aligned}$$

تمرين ⑦ $f(x) = \frac{\sin x^2}{x^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sin x^2)' \cdot x^2 - (\sin x^2) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{(\cos x^2)(2x)x^2 - (\sin x^2)(2x)}{x^4} \\ &= \frac{2x^3 \cos x^2 - 2x \sin x^2}{x^4} \\ &= \frac{x(2x^2 \cos x^2 - 2 \sin x^2)}{x^4} \end{aligned}$$

تمرين (8) م 186

$$f(x) = \frac{x^2}{\csc^4 2x}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2)'(\csc^4 2x) - x^2(\csc^4 2x)'}{(\csc^4 2x)^2}$$

$$= \frac{2x(\csc^4 2x) - x^2 [4(\csc^3 2x)(\csc 2x \times \cot 2x)(2)]}{[\csc 2x]^8}$$

$$= \frac{2x(\csc^4 2x) - 8x^2 [\csc 2x]^4 \cdot \cot 2x}{[\csc 2x]^8}$$

$$= \frac{\cancel{\csc^4 2x} [2x - 8x^2 \cdot \cot 2x]}{\cancel{\csc^4 2x} [\cancel{\csc 2x}]^8}$$

$$= \frac{2x - 8x^2 \cot 2x}{[\csc 2x]^4}$$

افضل

تبليط $f(x)$ بحل الاستيفاء

تمرين (9)

$$f(t) = \sin 3t \cdot \sec 3t$$

$$= \sin 3t \times \frac{1}{\cos 3t} = \tan 3t$$

$$f'(x) = (\sec^2 3t)(3t)'$$

$$= 3 \sec^2 3t$$

تذكر: $\sec 0 = \frac{1}{\cos 0}$

تبليط P في Q

تمرين (10)

$$f(t) = \sqrt{\cos 5t} \cdot \sec 5t$$

$$= \sqrt{\cos 5t} \times \frac{1}{\cos 5t} = 1$$

فإن $f(t) = 1 \Rightarrow f'(t) = \text{صفر}$

من الممكن الاستيفاء بضرب البسطة

$$P' = \frac{-4 \cos 4w}{\sin^2 4w}$$

عند $w = 0$ أو

تمرين (11)

$$f(w) = \frac{1}{\sin 4w}$$

$$f(w) = \csc 4w$$

$$f'(w) = -(\csc 4w)(\cot 4w) \cdot 4$$

$$= -4(\csc 4w)(\cot 4w)$$

قاعدة الضرب

تمرين (12)

$$f(w) = w^2 \cdot \sec^2 3w$$

$$f'(w) = (2w)(\sec^2 3w) + w^2 [2(\sec 3w)(\sec 3w)(\tan 3w)]$$

$$= 2w \sec^2 3w + 6w^2 (\sec^3 3w)(\tan 3w)$$

عند استخدام قاعدة الضرب

تمرين (13)

$$f(x) = 2 \sin 2x \cdot \cos 2x$$

$$(f(x) = \sin 4x) \rightarrow (أو تذكر: \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta)$$

$$f'(x) = (\cos 4x) \times 4 = 4 \cos 4x$$

النتيجة: $(4 \cos^2 4x - 4 \sin^2 4x)$

مَرْنِ (14) ص 186 $f(x) = 4\sin^2 3x + 4\cos^2 3x$

يستخدم هنا: $(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1)$

$$f(x) = 4(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$f(x) = 4(1) = 4$$

$$f'(x) = 0$$

مَرْنِ (15) $f(x) = \tan \sqrt{x^2 + 1}$

$$f'(x) = (\sec^2 \sqrt{x^2 + 1}) (\sqrt{x^2 + 1})'$$

$$= (\sec^2 \sqrt{x^2 + 1}) \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \sec^2 \sqrt{x^2 + 1}$$

مشتقة تحت الجذر
الجذر نفسه $2x$

مَرْنِ (16) $f(x) = 4x^2 (\sin x \cdot \sec 3x)$

$$f'(x) = (4x^2)' (\sin x \cdot \sec 3x) + 4x^2 (\sin x \cdot \sec 3x)'$$

$$= 8x (\sin x \cdot \sec 3x) + 4x^2 [\cos x \cdot \sec 3x + \sin x (\sec 3x \tan 3x)]$$

$$= 8x \sin x \cdot \sec 3x + 4x^2 [\cos x \cdot \sec 3x + 3 \sin x \cdot \sec 3x \cdot \tan 3x]$$

مشتقة (sin) مرفوعة لأعلى 3

مَرْنِ (17) $f(x) = \sin^3 (\cos \sqrt{x^3 + 2x^2})$

$$f'(x) = (3) x [\sin^2 (\cos \sqrt{x^3 + 2x^2})] x [\sin (\cos \sqrt{x^3 + 2x^2})]'$$

$$= (3) [\sin^2 (\cos \sqrt{x^3 + 2x^2})] x [\cos (\cos \sqrt{x^3 + 2x^2}) x (\cos \sqrt{x^3 + 2x^2})']$$

$$= 3 [\sin^2 (\cos \sqrt{x^3 + 2x^2})] x [\cos (\cos \sqrt{x^3 + 2x^2}) x (-\sin \sqrt{x^3 + 2x^2}) x (\frac{3x^2 + 4}{2\sqrt{x^3 + 2x^2}})]$$

$$= -\frac{3}{2} \sin^2 (\cos \sqrt{x^3 + 2x^2}) \cos (\cos \sqrt{x^3 + 2x^2}) (\sin \sqrt{x^3 + 2x^2}) x (\frac{3x^2 + 4}{\sqrt{x^3 + 2x^2}})$$

مركبي (18) ص 186

$$f(x) = \tan^4(\sin^2(x^3+2x))$$

4-
 مشتقة الزاوية داخل القوس
 مشتقة التان

$$f'(x) = 4 \left[\tan^3(\sin^2(x^3+2x)) \right] \cdot \left[\tan(\sin^2(x^3+2x)) \right]$$

$$= 4 \tan^3(\sin^2(x^3+2x)) \left[\sec^2(\sin^2(x^3+2x)) (\sin^2(x^3+2x)) \right]$$

$$= 4 \tan^3(\sin^2(x^3+2x)) \left[\sec^2(\sin^2(x^3+2x)) \times 2 \sin^1(x^3+2x) \times (3x^2+2) \cos(x^3+2x) \right]$$

2-1
 مشتقة الزاوية
 مشتقة التان

مشتقة (sin) نفس الزاوية x مشتقة الزاوية

مركبي (19)

$$f(x) = \sin x^2$$

$$f'(x) = (\cos x^2) (2x)$$

$$= 2x \cdot \cos x^2$$

دالة مركبة

$$f(x) = \sin^2 x = (\sin x)^2$$

$$f'(x) = 2 (\sin x)^1 (\sin x)'$$

$$= 2 \sin x (\cos x) \quad (\text{بـ } = \sin 2x)$$

مشتقة sin x
 مشتقة الزاوية

مركبي (20)

$$f(x) = \sin(2x)$$

$$f'(x) = \cos(2x) \times (2x)'$$

$$= 2 \cos 2x$$

مشتقة cos x
 مشتقة الزاوية

مركبي (20)

$$f(x) = \cos \sqrt{x}$$

$$f'(x) = (-\sin \sqrt{x}) (\sqrt{x})'$$

$$= (-\sin \sqrt{x}) \times \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin \sqrt{x}$$

مركبي (20)

$$f(x) = \sqrt{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(\cos x)'}{2\sqrt{\cos x}} = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$$

$$\left(-\frac{1}{2} \sin x (\cos x)^{-\frac{1}{2}} \right)$$

مركبي (20)

$$f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$f'(x) = \left[-\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \right] \left(\frac{1}{2}x \right)'$$

$$= \left[-\sin \frac{1}{2}x \right] \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}x$$

مركز (21) م 186 المطلوب إيجاد المشتقة

مشتقة جزئية

a) $f(x) = \sin^2 x \cdot \tan x$

$$f'(x) = (\sin^2 x)' \tan x + \sin^2 x (\tan x)'$$

$$= 2x \cos x^2 \cdot \tan x + \sin^2 x (\sec^2 x)$$

2 Sin مرفوع لا يس

b) $f(x) = \sin^2 (\tan x)$

$$f'(x) = 2 [\sin'(\tan x)] (\tan x)'$$

$$= 2 [\sin(\tan x)] \cdot \sec^2 x$$

مشتقة الزاوية دافق القوس

c) $f(x) = \sin(\tan^2 x)$

$$f'(x) = [\cos(\tan^2 x)] (\tan^2 x)'$$

$$= [\cos(\tan^2 x)] [2 \cdot \tan x \cdot \sec^2 x]$$

مشتقة الزاوية دافق القوس

2 Sec مرفوع لا يس

d) $f(x) = \sec^2(\tan x)$

$$f'(x) = 2 [\sec(\tan x)]' [\sec(\tan x)]$$

$$= [2 \sec(\tan x)] [\sec(\tan x) \cdot \tan(\tan x) \cdot x (\tan x)']$$

$$= [2 \sec(\tan x)] [\sec(\tan x) \cdot \tan(\tan x) \cdot x \sec^2 x]$$

مشتقة Sec نفس الزاوية tanx

مشتقة جزئية

a) $f(x) = \sec x^2 \cdot \tan x^2$

$$f'(x) = (\sec x^2)' \tan x^2 + (\sec x^2) (\tan x^2)'$$

$$= \sec x^2 \cdot \tan x^2 (2x) \tan x^2 + (\sec x^2) (\sec^2 x^2) (2x)$$

مشتقة Sec الزاوية x² مشتقة tan الزاوية x²

2x Sec x² و 2x tan x²

$$= 2x \sec x^2 (\tan x^2)^2 + 2x [\sec x^2]^3$$

$$= 2x \cdot \sec x^2 [\tan^2 x^2 + \sec^2 x^2]$$

2 Sec مرفوع لا يس

c) $f(x) = \sec[\tan^2 x]$

$$f'(x) = \sec(\tan^2 x) \cdot \tan(\tan^2 x) \cdot (\tan^2 x)' = \sec(\tan^2 x) \cdot \tan(\tan^2 x) \cdot 2 \tan x \cdot \sec^2 x$$

$$= 2 \tan x \sec^2 x [\sec(\tan^2 x) \cdot \tan(\tan^2 x)]$$

مشتقة tan x²

مركزى (23) 1870 مطلوب صندوب الحى عند $a = \frac{\pi}{8}$ $f(x) = \sin 4x$

نقطة التماس: $x_1 = \frac{\pi}{8} \rightarrow y_1 = \sin(4 \times \frac{\pi}{8}) = 1$

مشتق الحى
بالراديان

مشتق الحى: $f'(x) = 4 \cos 4x$ و $f'(\frac{\pi}{8}) = 4 \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$f'(\frac{\pi}{8}) = 4 \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

الحى صندوب: $0 = 0(x - \frac{\pi}{8}) + 1 \Rightarrow y = 1$

(او $y = 0(x - \frac{\pi}{8}) + 1 \Rightarrow y = 1$)

مركزى (24) مطلوب صندوب الحى عند $a = 0$ $f(x) = \tan 3x$

$x_1 = 0 \rightarrow y_1 = \tan(3 \times 0) = 0$

$f'(x) = 3 \sec^2 3x \rightarrow m = f'(0) = 3 \sec^2(3 \times 0) = 3$

صندوب الحى: $y = m(x - x_1) + y_1$

$y = 3(x - 0) + 0 \rightarrow y = 3x$

مركزى (25) مطلوب صندوب الحى عند $a = \frac{\pi}{2}$ $f(x) = x^2 \cdot \cos x$

$x_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$

مشتق الحى

$f'(x) = (2x) \cdot \cos x + (x^2) \cdot (-\sin x)$

$m = f'(\frac{\pi}{2}) = (2 \frac{\pi}{2}) \cos \frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2})^2 (-\sin \frac{\pi}{2})$
 $= (\pi) \times 0 + (\frac{\pi^2}{4}) \cdot (-1) = -(\frac{\pi^2}{4})$

صندوب الحى

$y = m(x - x_1) + y_1$

$y = -\frac{\pi^2}{4}(x - \frac{\pi}{2}) - 0$

مركزى (26) مطلوب صندوب الحى عند $a = \frac{\pi}{2}$ $f(x) = x \cdot \sin x$

نقطة التماس: $x = \frac{\pi}{2} \rightarrow y_1 = \frac{\pi}{2} \times \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

مشتق الحى

$f'(x) = (1) \sin x + x \cdot \cos x$

$m = f'(\frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \times \cos \frac{\pi}{2}$
 $= 1 + \frac{\pi}{2} \times 0 = 1$

صندوب الحى

$y = m(x - x_1) + y_1$

$y = 1(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}$

$y = x$

تمرين (27) ص 187 $S(t) = t^2 - \sin 2t$ دالة موقع المطلوب السرعة المتجهة في الزمن $t_0 = 0$ (نشتق أولاً)

$$v(t) = S'(t) = 2t - 2 \cos 2t$$

$$v(0) = 2(0) - 2 \cos(2 \times 0) = 0 - 2 \times 1 = -2 \text{ ft/s}$$

تمرين (28) ص 187 $S(t) = 4 + 3 \sin t$ مطلوب السرعة المتجهة عند $t_0 = \pi$

$$v(t) = S'(t) = 0 + 3 \cos t$$

$$v(\pi) = 0 + 3 \cos \pi = -3 \text{ ft/s}$$

تمرين (29) $S(t) = \cos t$ مطلوب السرعة المتجهة عند $t_0 = \pi$ متعة متعة

$$v(t) = S'(t) = (-\sin t)t = t(\cos t) \quad (1)$$

$$v(\pi) = \frac{(-\sin \pi)(\pi) - (\cos \pi) \times 1}{(\pi)^2} = \frac{1}{\pi^2} \text{ ft/s}$$

تمرين (30) $S(t) = t \cdot \cos(t^2 + \pi)$ المطلوب السرعة المتجهة عند $t_0 = 0$ متعة متعة

$$v(t) = S'(t) = 1 \cdot \cos(t^2 + \pi) + t \left[-\sin(t^2 + \pi) \times 2t \right]$$

$$= \cos(t^2 + \pi) - 2t^2 \sin(t^2 + \pi)$$

$$v(0) = \cos(0^2 + \pi) - 2(0)^2 \times \sin(0^2 + \pi) = -1$$

تمرين (31) $f(t) = 4 \sin 3t$ يجد موقع رأس الزنبرك متعلق بالسقف

السرعة المتجهة للزنبرك في زمن t

$$v(t) = S'(t) = 4 \times 3 \cos 3t = 12 \cos 3t$$

ما أقصى سرعة للزنبرك (متى يكون $v(t)$ أكبر ما يمكن)

ذلك عند أكبر متعة 1 ($\cos 3t$ وحي 1)

وتكون السرعة القصوى: $v = 12 \times 1 = 12$

ما الموقع عندما يصل لأعلى سرعة له، $f(t)$

بما $f(t)$ عندما تكون $v = 12$ (حسب b)

$$12 \cos 3t = 12 \Rightarrow \cos 3t = 1$$

$$\sin 3t = 0$$

$$f(t) = 4 \times 0 = 0$$

فيكون:

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$(\cos 3t)^2 + (\sin 3t)^2 = 1$$

$$1 + (\sin 3t)^2 = 1 \Rightarrow \sin 3t = 0 \Rightarrow f(t) = 4 \times 0 = 0$$

عند حركته
 $\cos 3t = 1$
 $3t = 0$
 $t = 0$
 $f(t) = 4 \sin(3 \times 0) = 0$

عند ذلك

$$t=5$$

تمرين (32) ص 187 [a] متى يكون في التمرين السابق $u(t)=0$

$$u(t)=0 \Rightarrow 12 \cos 3t = 0 \Rightarrow \cos 3t = 0$$

$$3t = \frac{\pi}{2} \cdot n \quad \text{لكل } n \text{ عدد صحيح موزي}$$

$$t = \frac{\pi}{6} n \quad (\text{أو } \frac{\pi}{6} k) \quad \text{نقسم على 3}$$

$$\cos 3t = 0 \quad \leftarrow \text{ممتان عدالمعدلة: } \cos 3t = 0$$

[b] ماصوق الزنبرك عندما

$$0 = \text{تكون سرعة المصباح}$$

$$u(t)=0 \Rightarrow 12 \cos 3t = 0$$

$$\cos 3t = 0 \quad [\text{الطوب } P(t)]$$

$$3t = \frac{\pi}{6} n \quad \text{دعنا}$$

$$P(t) = 4 \sin 3t = 4 \left(\sin \frac{\pi}{6} n \right)$$

$$= 4 \sin \left(\frac{\pi}{2} n \right) \rightarrow +4$$

$$\rightarrow -4$$

[c] متى يغير الزنبرك اتجاهه

عندما تكون سرعة لأعلى ثم تصبح لأعلى

(أو العكس) وعند هذه القيمة تكون سرعة = 0

وذلك عند أعلى نقطة يصلها (الارتفاع 4)

وعند أنخفض نقطة يصلها (الارتفاع -4)

$$t = \frac{\pi}{6} n$$

تمرين (33) ص 187 [a] باستخدام $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \frac{3}{1} \quad [a]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right) \times 3 = 1 \times 3 = 3 \quad \text{أو:}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{4t} = \frac{1}{4} \quad [b]$$

$$\text{أو: } \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{4} \times \frac{\sin t}{t} \right] = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{5x} \quad [c]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{5} \times \frac{\cos x - 1}{x} \right] = \frac{1}{5} \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \quad [d]$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

$$\begin{aligned} x^2 &= u \\ \lim_{x \rightarrow 0} u &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \end{aligned}$$

a) $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{2t}{\sin t} \right)$

$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{2}{1} = 2$

مَكْرَنِي (34) م. 187

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^2 - 1}{x^2}$

$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos u - 1}{u} = 0$
بفرض $u = x^2$
 $x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 5x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{\sin 6x}{6x}) \times 6x}{(\frac{\sin 5x}{5x}) \times 5x}$
نقرب ونقسم البسط على $6x$
نقرب ونقسم المقام على $5x$
 $= \frac{1 \times 6}{1 \times 5} = \frac{6}{5}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \times \frac{1}{x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \times \frac{1}{\cos 2x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} 2x \times \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{1}{\cos 2x}$
نقرب ونقسم أول كسر على 2

$= 2 \times 1 \times \frac{1}{\cos(2 \times 0)} = 2 \times 1 \times 1 = 2$

أطواب $f^{(75)}(x)$ و $f^{(150)}(x)$

مَكْرَنِي (35) $f(x) = \sin 2x$

$f^0(x) = \sin 2x$

$f'(x) = 2 \cos 2x$

$f''(x) = -4 \sin 2x$

$f'''(x) = -8 \cos 2x$

$f^{(4)}(x) = 16 \sin 2x$

$f^{(5)}(x) = 32 \cos 2x$

① $f^{(75)}(x) = 2^{75} \cos 2x$
 $f^{(75)}(x) = (-1)^{75} \times 2^{75} \cos 2x = -2^{75} \cos 2x$

② $f^{(150)}(x) = -2^{150} \sin 2x$
 $f^{(150)}(x) = (-1)^{150} \times 2^{150} \sin 2x = 2^{150} \sin 2x$

المطلوب 2 نفرض θ عدد افتحان (رتبة) θ

$+ \cos 2x : f^0$
 $- \sin 2x : f^1$
 $- \cos 2x : f^2$
 $+ \sin 2x : f^3$

$(2)^1 \cos 2x$
 $(2)^2 \sin 2x$
 $(2)^3 \cos 2x$
 $(2)^4 \sin 2x$
 $(2)^5 \cos 2x$

ثم نبدأ بالتكرار مرة أخرى
نأخذ باقي متتالية (عدد افتحان)
على 4
ونكرر حسب الموجود داخل
الدائرة

تمرین (36) 187 $f(x) = \cos 3x$ مطلوب $f^{(77)}(x)$ و $f^{(120)}(x)$

$f'(x) = 3(-\sin 3x) \leftarrow 3x - \sin 3x \leftarrow \text{مشتق } f' = 3 \text{ و مشتق } \sin 3x$
 $f''(x) = 3^2 x - \cos 3x \leftarrow 3^2 x - \cos 3x \leftarrow \text{مشتق } f'' = 3^2 \text{ و مشتق } \cos 3x$
 $f'''(x) = 3^3 x - \sin 3x \leftarrow 3^3 x - \sin 3x \leftarrow \text{مشتق } f''' = 3^3 \text{ و مشتق } \sin 3x$
 $f^{(4)}(x) = 3^4 x - \cos 3x \leftarrow 3^4 x - \cos 3x \leftarrow \text{مشتق } f^{(4)} = 3^4 \text{ و مشتق } \cos 3x$

شکرا کی 4 مرات

$\frac{77}{4} = 19 \text{ و باقی } 1$
 نأخذ من f أي $-\sin 3x$

المطلوب $f^{(77)}(x)$
 (1) المعامل 3^{77}
 (2) مشتق $-\sin 3x$

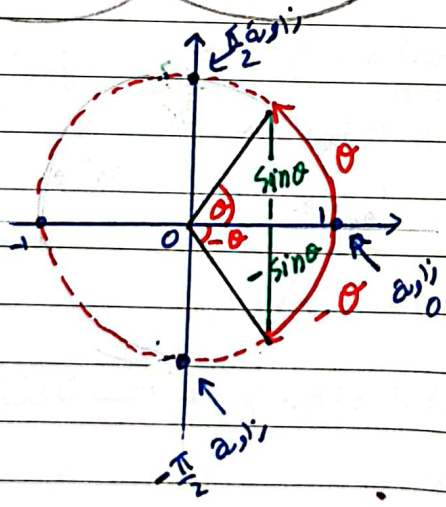
$f^{(77)}(x) = 3^{77}(-\sin 3x) = -3^{77} \sin 3x$

ثانياً: مطلوب $f^{(120)}(x)$

(1) المعامل 3^{120}
 (2) مشتق $\cos 3x$

$f^{(120)}(x) = 3^{120} \cos 3x$

$\frac{120}{4} = 30$ و باقی 0
 نأخذ من f نفساً أي $\cos 3x$
 (أولاً من f أي $\cos 3x$)



تمرین (37) وضع: $\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \sin \theta = 0$

ناقص نظرية 1- كما في الربع الأول $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
 سناقص هذا التوبع الرابع: $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$
 $\sin(-\frac{\pi}{2}) < \sin \theta < \sin 0$
 ونلاحظ: $0 \leq \sin \theta \leq \theta$
 نقرب به (بتغير الزاوية):

$-\theta \leq -\sin \theta \leq 0$
 $\lim_{\theta \rightarrow 0^-} (-\theta) \leq \lim_{\theta \rightarrow 0^-} (-\sin \theta) \leq \lim_{\theta \rightarrow 0^-} 0$
 $0 \leq \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \sin \theta \leq 0$

حسب نظرية النظرية $\Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \sin \theta = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta = 0$$

مركبي (38) باستخدام نظرية 6.1، والمطابقة: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ أثبت أن نظرية 6.2

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \rightarrow \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = \lim_{\theta \rightarrow 0} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = 1$$

كما ورد في دليل المعلم E

وبما أن $\cos \theta$ دالة متصلة و $\cos 0 = 1$ نستنتج $\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$

مركبي (39) استخدم المطابقة: $\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$ لإثبات نظرية 6.2

$$\left(\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \right)$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (f(x) = \cos x)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x \cos h - \cos x}{h} - \frac{\sin x \sin h}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \right)$$

$$= \cos x \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$= \cos x \times 0 - \sin x \times 1 = -\sin x$$

نستخدم المطابقة المعطاة

بما أن $h \rightarrow 0$ نقابل x بمصطلح ثابت

مركبي (40) أوجد مشتقة $\csc x / \cot x / \sec x$ باستخدام قاعدة ناتج المشتقة

$$(1) f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad (\cos x \neq 0)$$

$$\text{بحسب قاعدة المشتقة} \rightarrow f'(x) = \frac{(1)' \cos x - 1(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{0 \times \cos x - (-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin x \times 1}{\cos x \times \cos x} = \tan x \times \sec x$$

$$(2) f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (\tan x \neq 0)$$

$$\text{بحسب قاعدة مشتق النسبة} \rightarrow f'(x) = \frac{(\cos x)' \sin x - (\cos x)(\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$(3) f(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\text{بحسب قاعدة المشتقة} \rightarrow f'(x) = \frac{(1)' \sin x - 1(\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{0 \times \sin x - \cos x}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\cos x}{\sin x \times \sin x} = -\cot x \csc x$$