



## الدرس 6-2 | الحجم: شرائح وأقراص وحلقات

## Lesson 6-2 | Volume: Slicing, Disks, Washers



2 Compute volume by means of definite integration using areas of cross sections.

حساب الحجم بالتكامل المحدود مع استخدام مساحات المقاطع العرضية

Exercises (1-4)

P429

جد حجم الجسم مع مساحة المقطع العرضي  $A(x)$

Find the volume of the solid with cross-sectional area  $A(x)$

1)  $A(x) = x + 2$  .  $-1 \leq x \leq 3$

A)  $V = \frac{124}{3}$

B)  $V = 12\pi$

☒ C)  $V = 12$

D)  $V = 10$

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^3 A(x) dx \\ &= \int_{-1}^3 (x + 2) dx \\ &= \left. \frac{1}{2}x^2 + 2x \right|_{-1}^3 \\ &= 12 \end{aligned}$$



جد حجم المجسم مع مساحة المقطع العرضي  $A(x)$ Find the volume of the solid with cross-sectional area  $A(x)$ 

2)  $A(x) = 10e^{0.01x} \quad 0 \leq x \leq 10$

A)  $V = 1000(e^{0.1} - 1)$

B)  $V = 1000(e^{0.1} + 1)$

C)  $V = 1000(e^{10} - 1)$

D)  $V = 1000(e^1 - 1)$

$$A = \int_0^{10} 10e^{0.01x} dx$$

$$= \frac{10}{0.01} e^{0.01x} \Big|_0^{10}$$

$$= 1000[e^{0.1} - e^0]$$

$$= 1000(e^{0.1} - 1)$$

جد حجم المجسم مع مساحة المقطع العرضي  $A(x)$ Find the volume of the solid with cross-sectional area  $A(x)$ 

3)  $A(x) = \pi(4 - x)^2 \quad 0 \leq x \leq 2$

A)  $V = \frac{56}{3}\pi$

B)  $V = \frac{72}{3}\pi$

C)  $V = \frac{56}{3}$

D)  $V = 56\pi$

$$V = \int_0^2 \pi(4 - x)^2 dx$$

$$= \frac{56\pi}{3}$$



جد حجم الجسم مع مساحة المقطع العرضي  $A(x)$ Find the volume of the solid with cross-sectional area  $A(x)$ 

4)  $A(x) = 2(x+1)^2$ ,  $1 \leq x \leq 4$

A)  $V = 78\pi$

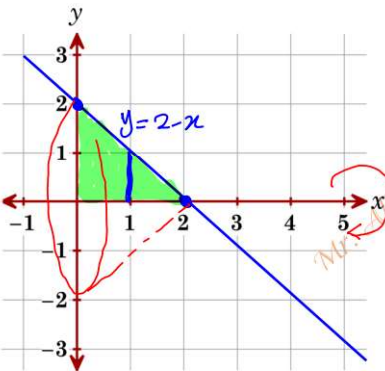
B)  $V = \int_1^4 4(x+1)^4 dx$

C)  $V = \pi \int_1^4 2(x+1)^2 dx$

D)  $V = \int_1^4 2(x+1)^2 dx$  ✓

$$V = \int_1^4 2(x+1)^2 dx \checkmark$$

$$= 78$$

3 Find the volume of a solid of revolution using the **method of disks**.  
إيجاد حجم مجسم باستخدام طريقة الأقراصExercises (17,19,25)  
Exercises (27,28)P430  
P43117- Let R be the region bounded by:  $y = 2 - x$ ,  $y = 0$ , and  $x = 0$ . Compute the volume of the solid formed by revolving R about  $x$ -axis.١٧- احسب حجم الجسم الذي تكون من دوران المنطقة المظلمة بمنحنيات الدوران  $y = 2 - x$  و  $x = 0$  و  $y = 0$  حول المحور  $x$ 

$$V = \pi \int_0^2 [f(x)]^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 (2-x)^2 dx$$

$$= \frac{8}{3}\pi$$

A)  $\frac{8\pi}{3}$

B)  $\frac{16\pi}{3}$

C)  $\frac{32\pi}{5}$

D)  $\frac{32\pi}{3}$



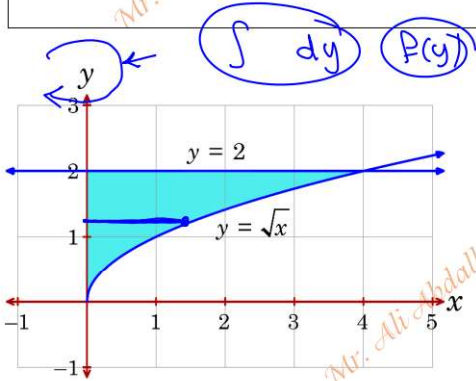


19- Let R be the region bounded by  $y = 2$ ,  $y = \sqrt{x}$  and  $x = 0$ . Compute the volume of the solid formed by revolving R about y-axis.

١٩- احسب حجم الجسم الذي تكون من دوران

النطقة الماطة بمنحنيات الدوال  $y = \sqrt{x}$  و  $y = 2$

و حول المحور  $y$   $x = 0$



$$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$$

$$V = \pi \int [g(y)]^2 dy$$

$$= \pi \int_0^2 (y^2)^2 dy = \pi \int_0^2 y^4 dy = \frac{32\pi}{5}$$

A)  $\frac{8\pi}{3}$

B)  $\frac{16\pi}{3}$

C)  $\frac{32\pi}{5}$

D)  $\frac{32\pi}{3}$

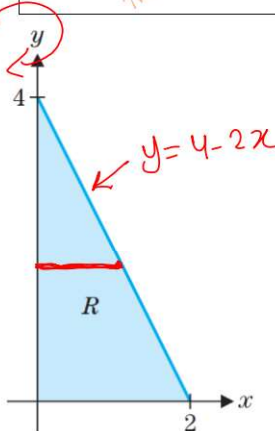


25. Let R be the region bounded by  $y = 4 - 2x$ , the x-axis and the y-axis. Compute the volume of the solid formed by revolving R about the y-axis

٢٥- لتكن R هي النطقة المحددة بواسطة  $y = 4 - 2x$

والمحور  $x$  والمحور  $y$ . احسب حجم الجسم الذي تكون

من دوران R حول محور  $y$ .



$$y = 4 - 2x \Rightarrow 2x = 4 - y \Rightarrow x = 2 - \frac{1}{2}y \checkmark$$

$$V = \pi \int_0^4 \left(\frac{4-y}{2}\right)^2 dy = \frac{16\pi}{3}$$

A)  $\frac{8\pi}{3}$

B)  $\frac{16\pi}{3}$

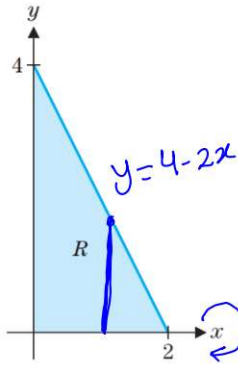
C)  $\frac{32\pi}{5}$

D)  $\frac{32\pi}{3}$



25. Let  $R$  be the region bounded by  $y = 4 - 2x$ , the  $x$ -axis and the  $y$ -axis. Compute the volume of the solid formed by revolving  $R$  about the  $x$ -axis

٢٥- لتكن  $R$  هي المنطقة المحددة بواسطة  $y = 4 - 2x$  والصور  $x$  والصور  $y$ . احسب حجم الجسم الذي تكون من دوران  $R$  حول محور  $x$ .



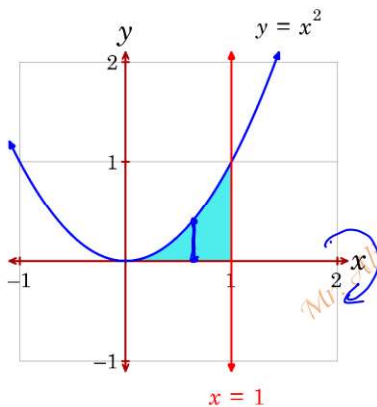
$$\begin{aligned} V &= \pi \int [P(x)]^2 dx \\ &= \pi \int_0^2 (4-2x)^2 dx \\ &= \frac{32}{3} \pi \end{aligned}$$

- A)  $\frac{8\pi}{3}$  B)  $\frac{16\pi}{3}$   
C)  $\frac{32\pi}{5}$  D)  $\frac{32\pi}{3}$



27. Let  $R$  be the region bounded by  $y = x^2$ ,  $y = 0$  and  $x = 1$ . Compute the volume of the solid formed by revolving  $R$  about the  $x$ -axis.

٢٧- لتكن  $R$  هي المنطقة المحددة بواسطة  $y = x^2$  و  $y = 0$  و  $x = 1$ . احسب حجم الجسم الذي تكون من دوران  $R$  حول محور  $x$ .



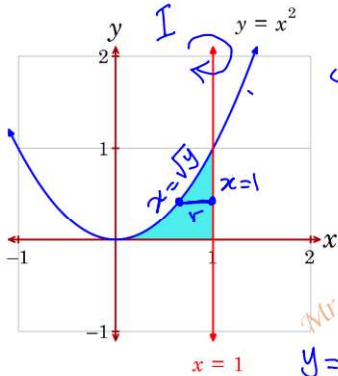
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx \\ &= \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5} \end{aligned}$$

- A)  $\frac{8\pi}{3}$  B)  $\frac{13\pi}{15}$   
C)  $\frac{\pi}{5}$  D)  $\frac{\pi}{6}$



27. Let  $R$  be the region bounded by  $y = x^2$ ,  $y = 0$  and  $x = 1$ . Compute the volume of the solid formed by revolving  $R$  about the  $x = 1$ .

٢٧- لتكن  $R$  هي المنطقة المحدودة بواسطة  $y = x^2$  و  $y = 0$  و  $x = 1$ . احسب حجم الجسم الذي تتكون من دوران  $R$  حول  $x = 1$ .



نصف قطر القرص  $r = 1 - \sqrt{y}$

$$V = \pi \int r^2 dy$$

$$= \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{y})^2 dy = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

A)  $\frac{8\pi}{3}$

B)  $\frac{13\pi}{15}$

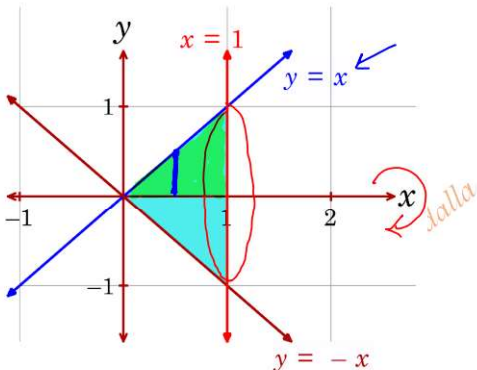
C)  $\frac{\pi}{5}$

D)  $\frac{\pi}{6}$



28. Let  $R$  be the region bounded by  $y = x$ ,  $y = -x$  and  $x = 1$ . Compute the volume of the solid formed by revolving  $R$  about the  $x$ -axis.

٢٨- لتكن  $R$  هي المنطقة المحدودة بواسطة  $y = x$  و  $y = -x$  و  $x = 1$ . احسب حجم الجسم الذي تتكون من دوران  $R$  حول محور  $x$ .



$$V = \pi \int_0^1 x^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{3} x^3 \Big|_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{3}}$$

A)  $\frac{8\pi}{3}$

B)  $\frac{13\pi}{15}$

C)  $\frac{\pi}{5}$

D)  $\frac{\pi}{3}$

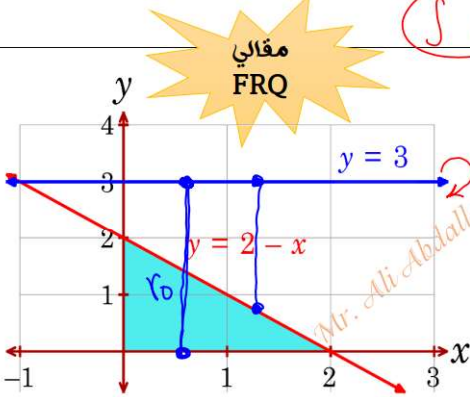




**17** Find the volume of a solid of revolution by using the method of washers. Example 1.6 P413  
Ex (19,20,22,24) P414

17- Let R be the region bounded by:  $y = 2 - x$ ,  $y = 0$ , and  $x = 0$ . Compute the volume of the solid formed by revolving R about the line  $y = 3$ .

١٧- احسب حجم الجسم الذي تكون من دوران المنطقة المظلمة بالمنحنيات الدوال  $y = 0$  و  $y = 2 - x$  حول المستقيم  $y = 3$



$$= \pi \left[ 16 - 4 - \frac{8}{3} \right] = \frac{28}{3} \pi$$

$$r_o = \text{upper} - \text{lower} = 3 - 0 = 3$$

$$r_i = 3 - (2 - x) = 1 + x$$

$$V = \pi \int_0^2 3^2 - (1+x)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 9 - (1+2x+x^2) dx$$

$$= \pi \int_0^2 8 - 2x - x^2 dx$$

$$= \pi \left[ 8x - x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{28}{3} \pi$$

$$\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b}$$



Term 3 - 2023/2024

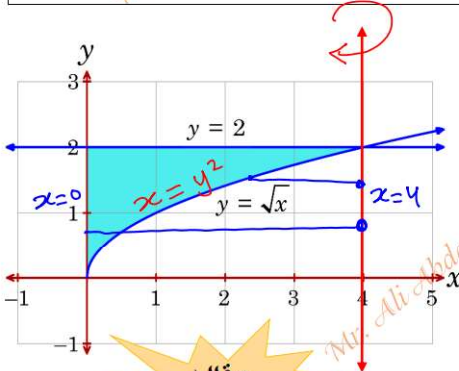
38

Garde 12 Advanced

Mr. Ali Abdalla

19- Let R be the region bounded by  $y = 2$ ,  $y = \sqrt{x}$  and  $x = 0$ . Compute the volume of the solid formed by revolving R about  $x = 4$ .

١٩- احسب حجم الجسم الذي تكون من دوران المنطقة المظلمة بالمنحنيات الدوال  $y = \sqrt{x}$  و  $y = 2$  حول المستقيم  $x = 4$



$$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$$

$$r_o = 4 - 0 = 4$$

$$r_i = 4 - y^2$$

$$V = \pi \int_0^2 4^2 - (4 - y^2)^2 dy = \pi \int_0^2 16 - 16 + 8y^2 - y^4 dy$$

$$= \pi \int_0^2 8y^2 - y^4 dy$$

$$= \pi \left[ \frac{8}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5 \right]_0^2$$

$$= \pi \left[ \left( \frac{64}{3} - \frac{32}{5} \right) - 0 \right] = \frac{224}{15} \pi$$



Term 3 - 2023/2024

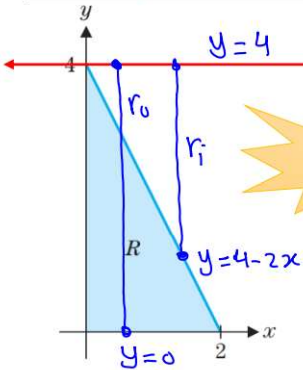
39

Garde 12 Advanced

Mr. Ali Abdalla

25. Let  $R$  be the region bounded by  $y = 4 - 2x$ , the  $x$ -axis and the  $y$ -axis. Compute the volume of the solid formed by revolving  $R$  about  $y = 4$

٢٥- لتكن  $R$  هي المنطقة المحددة بواسطة  $y = 4 - 2x$  والمحاور  $x$  و  $y$ . احسب حجم الجسم الذي تكون من دوران  $R$  حول  $y = 4$



مقال  
FRQ

$$r_o = 4 - 0 = 4$$

$$r_i = 4 - (4 - 2x) = 2x$$

$$V = \pi \int_0^2 4^2 - (2x)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 16 - 4x^2 dx$$

$$= \pi \left[ 16x - \frac{4}{3}x^3 \right]_0^2$$

$$= \pi \left[ \left( 32 - \frac{32}{3} \right) - 0 \right] = \frac{64\pi}{3}$$



25. Let  $R$  be the region bounded by  $y = 4 - 2x$ , the  $x$ -axis and the  $y$ -axis. Compute the volume of the solid formed by revolving  $R$  about  $y = -4$

٢٥- لتكن  $R$  هي المنطقة المحددة بواسطة  $y = 4 - 2x$  والمحاور  $x$  و  $y$ . احسب حجم الجسم الذي تكون من دوران  $R$  حول  $y = -4$

مقال  
FRQ

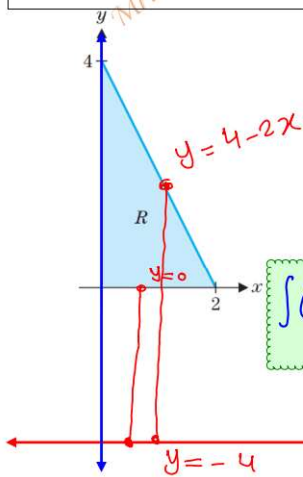
$$r_o = 4 - 2x - (-4) \quad r_i = 0 - (-4)$$

$$r_o = 8 - 2x \quad r_i = 4$$

$$V = \pi \int_0^2 (8 - 2x)^2 - 4^2 dx$$

$$= \pi \left[ \frac{(8 - 2x)^3}{3(-2)} - 16x \right]_0^2$$

$$= \frac{128}{3}\pi$$

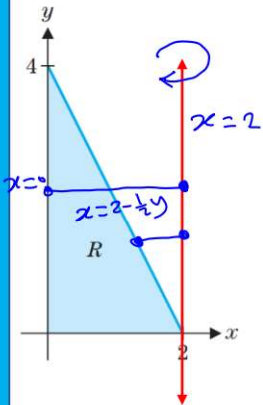




25. Let  $R$  be the region bounded by  $y = 4 - 2x$ , the  $x$ -axis and the  $y$ -axis. Compute the volume of the solid formed by revolving  $R$  about (a)  $x = 2$

٢٥- لتكن  $R$  هي المنطقة المحددة بواسطة  $y = 4 - 2x$  والصور  $x$  والصور  $y$ . احسب حجم الجسم الذي تكون من دوران  $R$  حول  $x = 2$

مقالتي  
FRQ



$$\int dy$$

$$y = 4 - 2x$$

$$\Rightarrow 2x = 4 - y$$

$$x = \frac{4-y}{2} = 2 - \frac{1}{2}y$$

$$r_o = 2 - 0 = 2$$

$$r_i = 2 - (2 - \frac{1}{2}y) = \frac{1}{2}y$$

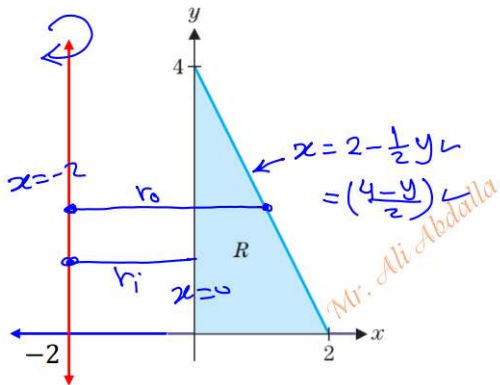
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 2^2 - (\frac{1}{2}y)^2 dy \\ &= \pi \int_0^4 4 - \frac{1}{4}y^2 dy \\ &= \pi [4y - \frac{1}{12}y^3]_0^4 \\ &= \pi [(16 - \frac{16}{3}) - 0] \\ &= \frac{32\pi}{3} \end{aligned}$$



25. Let  $R$  be the region bounded by  $y = 4 - 2x$ , the  $x$ -axis and the  $y$ -axis. Compute the volume of the solid formed by revolving  $R$  about  $x = -2$

٢٥- لتكن  $R$  هي المنطقة المحددة بواسطة  $y = 4 - 2x$  والصور  $x$  والصور  $y$ . احسب حجم الجسم الذي تكون من دوران  $R$  حول  $x = -2$

مقالتي  
FRQ



$$\begin{aligned} r_o &= 2 - \frac{1}{2}y - (-2) = 4 - \frac{1}{2}y \\ r_i &= 0 - (-2) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 (4 - \frac{1}{2}y)^2 - 2^2 dy \\ &= \pi \left[ \frac{(4 - \frac{1}{2}y)^3}{3(-\frac{1}{2})} - 4y \right]_0^4 \\ &= \frac{64}{3} \pi \end{aligned}$$

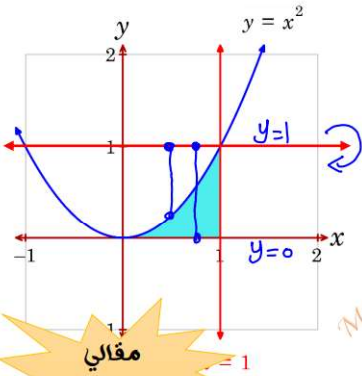






27. Let R be the region bounded by  $y = x^2$ ,  $y = 0$  and  $x = 1$ . Compute the volume of the solid formed by revolving R about  $y = 1$

٢٧- لتكن R هي المنطقة المحددة بواسطة  $y = x^2$  و  $y = 0$  و  $x = 1$ . احسب حجم الجسم الذي تكون من دوران R حول  $y = 1$



$$r_o = 1 - 0 = 1$$

$$r_i = 1 - x^2$$

$$V = \pi \int_0^1 1^2 - (1 - x^2)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 1 - (1 - 2x^2 + x^4) dx = \pi \int_0^1 2x^2 - x^4 dx$$

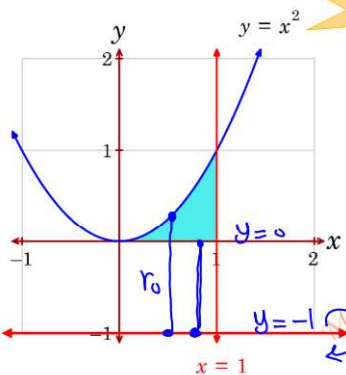
$$= \pi \left[ \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1$$

$$= \pi \left[ \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right) - 0 \right] = \boxed{\frac{7\pi}{15}}$$



27. Let R be the region bounded by  $y = x^2$ ,  $y = 0$  and  $x = 1$ . Compute the volume of the solid formed by revolving R about  $y = -1$

٢٧- لتكن R هي المنطقة المحددة بواسطة  $y = x^2$  و  $y = 0$  و  $x = 1$ . احسب حجم الجسم الذي تكون من دوران R حول  $y = -1$



مقال  
FRQ

$$r_o = x^2 - (-1) = x^2 + 1$$

$$r_i = 0 - (-1) = 1$$

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 + 1)^2 - 1^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 x^4 + 2x^2 dx$$

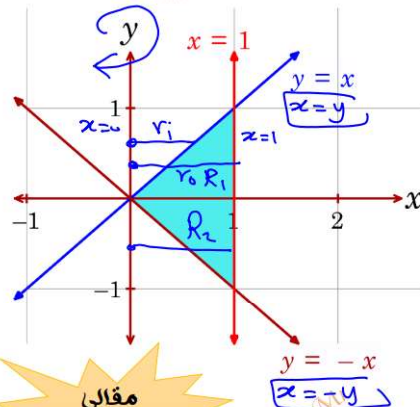
$$= \pi \left[ \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1$$

$$= \pi \left[ \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \right) - 0 \right] = \boxed{\frac{13\pi}{15}}$$





28. Let  $R$  be the region bounded by  $y = x$ ,  $y = -x$  and  $x = 1$ . Compute the volume of the solid formed by revolving  $R$  about the  $y$ -axis



مفاتيح  
FRQ

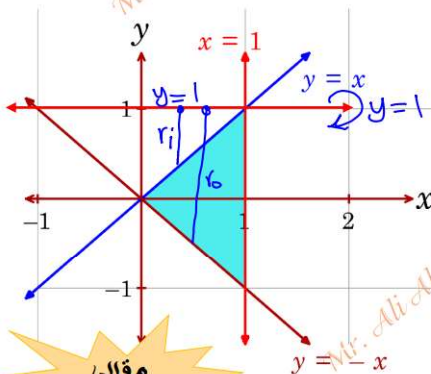
28- لتكن  $R$  هي المنطقة المحدودة بواسطة  $y = x$  و  $y = -x$  و  $x = 1$ . احسب حجم الجسم الذي تكون من دوران  $R$  حول محور  $y$

$$\begin{aligned} R_1 : r_o &= 1 - 0 = 1, r_i = y - 0 = y \\ R_2 : r_o &= 1 - 0 = 1, r_i = -y - 0 = -y \\ V &= \pi \int_0^1 (1^2 - y^2) dy + \pi \int_{-1}^0 (1^2 - (-y)^2) dy \\ &= \pi \int_0^1 (1 - y^2) dy + \pi \int_{-1}^0 (1 - y^2) dy \\ &= \pi \left[ y - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 + \pi \left[ y - \frac{1}{3} y^3 \right]_{-1}^0 \\ &= \pi \left[ \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 0 \right] + \pi \left[ 0 - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) \right] \\ &= \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 (1^2 - y^2) dy \\ &= 2\pi \left[ y - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 \\ &= 2\pi \left[ 1 - \frac{1}{3} - 0 \right] \\ &= \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$



28. Let  $R$  be the region bounded by  $y = x$ ,  $y = -x$  and  $x = 1$ . Compute the volume of the solid formed by revolving  $R$  about  $y = 1$



مفاتيح  
FRQ

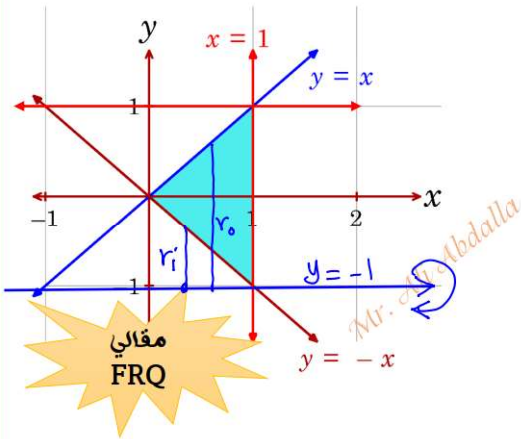
28- لتكن  $R$  هي المنطقة المحدودة بواسطة  $y = x$  و  $y = -x$  و  $x = 1$ . احسب حجم الجسم الذي تكون من دوران  $R$  حول  $y = 1$

$$\begin{aligned} r_o &= 1 - (-x) = 1 + x \\ r_i &= 1 - x \\ V &= \pi \int_0^1 (1+x)^2 - (1-x)^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 (1+2x+x^2 - 1+2x-x^2) dx \\ &= \pi \int_0^1 4x dx \\ &= 2\pi x^2 \Big|_0^1 = 2\pi \end{aligned}$$



28. Let  $R$  be the region bounded by  $y = x$ ,  $y = -x$  and  $x = 1$ . Compute the volume of the solid formed by revolving  $R$  about  $y = -1$

28- لتكن  $R$  هي المنطقة المحدودة بواسطة  $y = x$  و  $y = -x$  و  $x = 1$ . احسب حجم المجسم الذي تكون من دوران  $R$  حول  $y = -1$



$$r_o = x - (-1) = x + 1, \quad r_i = -x - (-1) = -x + 1$$

$$V = \pi \int_0^1 (x+1)^2 - (-x+1)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1) dx$$

$$= \pi \int_0^1 4x dx$$

$$= 2\pi x^2 \Big|_0^1 = 2\pi$$

