Alpha
Education Center

الإمارات
THE EMIRATES

الحل

اوراق عمل

الحل مادة الحل

الرياضيات

الصف الثاني عشر متقدم

الفصل الدراسي الثاني

2024/2023

اسم الطالب : ....

المدرســـــة : ....

الحل الحل الحل

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

Khateebacademy.com

الوحدة الرابعة : تطبيقات التفاضل

3-4 القيم العظمى والصغرى

4-4 الدوال المتزايدة والمتناقصة

5-4 التقعر واختبار المشتقة الثانية

6-4 نظرة عامة على رسم المنحنيات

7-4 القيم المثلى

8-4 المعدلات المرتبطة

9-4 معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم

الوحدة الخامسة : التكامل

1-5 الدوال الاصلية

2-5 المجموع والرمز سيجما

3-5 المساحة

4-5 التكامل المحدود

5-5 النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

6-5 التكامل بالتعويض

الوحدة الرابعة: تطبيقات الاشتقاق /// الدرس الثالث: القيم العظمى والصغرى

قواعد الاشتقاق (مراجعة من الفصل الأول)

#	الدالة	المشتقة	#	الدالة	المشتقة
1	c	0	15	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
2	x^n	nx^{n-1}	16	$\log_a(f)$	$\frac{f'}{f\times\ln a}$
3	$f\pm g$	$f'\pm g'$	17	$\sin x$	$\cos x$
4	$c\times f$	$c\times f'$	18	$\cos x$	$-\sin x$
5	$f\times g$	$f'\times g+f\times g'$	19	$\tan x$	$\sec^2 x$
6	$\frac{f}{g}$	$\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$	20	$\cot x$	$-\csc^2 x$
7	$\frac{c}{g}$	$\frac{-c\times g'}{g^2}$	21	$\sec x$	$\sec x\tan x$
8	$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	22	$\csc x$	$-\csc x\cot x$
9	$(f)^n$	$n(f)^{n-1}\times f'$	23	$\sin^{-1}x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10	$(f\circ g)(x)$	$f'(g(x))\times g'(x)$	24	$\cos^{-1}x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
11	$y=f(u)$ $u=g(x)$	$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$	25	$\tan^{-1}x$	$\frac{1}{1+x^2}$
12	$g=f^{-1}(x)$	$\frac{1}{f'(g(x))}$	26	$\cot^{-1}x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
13	a^f	$a^f\times f'\times\ln a$	27	$\sec^{-1}x$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
14	e^f	$e^f\times f'$	28	$\csc^{-1}x$	$\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

الاعداد (القيم) الحرجة

يعرف العدد الحرج للدالة f بانها النقطة c في مجال الدالة f والتي تكون عندها

اما $f'(x)=0$ او $f'(x)$ غير موجودة

ملاحظة (ممكن ان تكون احدى اطراف الفترة المغلقة اذا حققت احد الشروط السابقة)

<u>ملاحظة:</u> في بيان الدالة f تكون الاعداد الحرجة هي النقاط التي عندها

(1) المشتقة تساوي صفر (مماسات افقية)

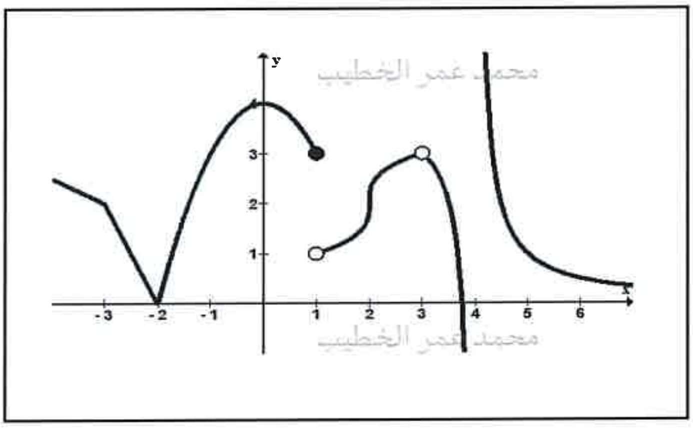
(2) المشتقة غير موجودة عند

(أ) نقاط عدم الاتصال (المعرفة عندها الدالة)

(ب) النقاط التي عندها المماسات الرأسية

(ج) النقاط التي عندها روؤس مدببه (ركن ، ناب)

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f لإكمال الجدول التالي:

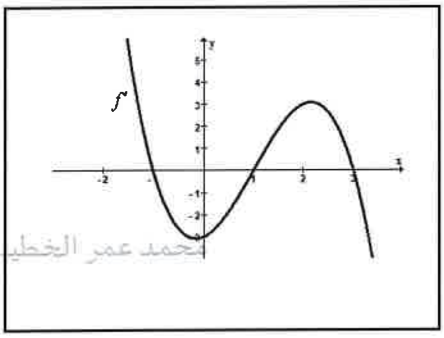


الأعداد الحرجة	$x=2$	$x=1$	$x=0$	$x=-2$	$x=-3$
السبب	مماس رأسي المشتقة غير موجودة	عدم اتصال المشتقة غير موجودة	مماس افقي المشتقة تساوي صفر	رأس مدبب المشتقة غير موجودة	رأس مدبب المشتقة غير موجودة

ملاحظة: ليس للدالة اعداد حرجة عند $x=3$ و $x=4$ لان هذه الاعداد خارج مجال الدالة (ليس لها صورة)

ملاحظة: في بيان الدالة f' تكون الاعداد الحرجة هي نقاط التقاطع مع محور السينات (محور x)
او قيم x التي عندها الدالة f' غير معرفة. (لا يوجد صور للعدد في رسمة f')

(1) بالاعتماد على الشكل المجاورالذي يمثل بيان الدالة f' اوجد الاعداد الحرجة للدالة f

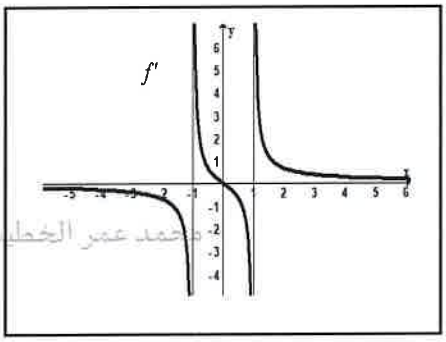


نقاط التقاطع مع محور x .

x = -١ , ١ , 3 .

---

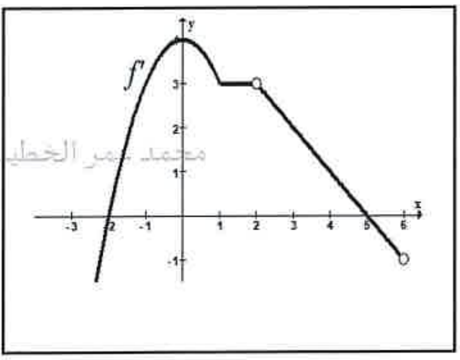
(2) اذا كانت الدالة f معرفه على R ، و الشكل المجاور يمثل بيان الدالة f'
فاوجد الاعداد الحرجة للدالة f



x = -١ , ٠ , ١

---

(3) اذا كانت الدالة f معرفه على الفترة $(-\infty, 6]$ ، و الشكل المجاور يمثل بيان الدالة f'
فاوجد الاعداد الحرجة للدالة f



x = -2 , 2 , 5 , 6

* العدد ١ ليس عدد حرج.
العدد ٠ ليس عدد حرج.

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x^3-3x$ على الفترة $[-2,3]$.

$f'(x)=3x^2-3$.

$f'(x)=0$

$3x^2-3=0$

$x=-1\,,\,1 \in [-2,3]$

الاعداد الحرجة هي -١ و ١

---

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x^4-4x^3-8x^2+1$ على الفترة $[-1,3]$.

$f'(x)=4x^3-12x^2-16x$

$f'(x)=0$

$4x^3-12x^2-16x=0$

$4x(x^2-3x-4)=0$

$x=0\,,\ x=-1\,,\ x=4$.

الاعداد الحرجة هي ١- و ٠ فقط

لان 4 خارج المجال.

---

(3) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sqrt[3]{x^2-4}$

$D=(-\infty,\infty)$

$f(x)=(x^2-4)^{1/3}$.

$f'(x)=\frac{1}{3}(x^2-4)^{-2/3}\cdot 2x$

$=\dfrac{2x}{3(x^2-4)^{2/3}}$.

$f'(x)=0$

البسط = صفر

$2x=0$

$x=0$

$f'(x)$ غ.م

المقام = صفر

$x^2-4=0$

$x=\pm 2$

الاعداد الحرجة هي $0\,,\pm 2$

---

(4) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sqrt{x}$

$D=[0,\infty)$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x)=0$

لا يوجد حل

$f'(x)$ غ.م

$x=0$

الاعداد الحرجة هي $x=0$

---

(5) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=e^{x^2-1}$

$D=(-\infty,\infty)$

$f(x)=e^{x^2-1}$

$f'(x)=e^{x^2-1}\cdot 2x$.

$f'(x)=0$

$2x=0 \Rightarrow x=0$

$e^{x^2-1}=0$ لا يوجد حل

الاعداد الحرجة هي $x=0$

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x^{\frac{1}{3}}(x+8)$

$D=(-\infty,\infty)$

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}(x+8)+x^{1/3}\cdot 1$$

$$=\frac{x+8}{3x^{2/3}}+x^{1/3}$$

$$=\frac{x+8+3x^{2/3}\cdot x^{1/3}}{3x^{2/3}}$$

$$=\frac{x+8+3x}{3x^{2/3}}=\frac{4x+8}{3x^{2/3}}$$

$f'(x)=0$

$x=-2$

$f'(x)$ غ.م

$x=0$

$x=-2,0$ الاعداد الحرجة

---

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\frac{x^2+12}{x+2}$

$D=R/\{-2\}$.

$$f'(x)=\frac{2x(x+2)-(x^2+12)\cdot 1}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{2x^2+4x-x^2-12}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{x^2+4x-12}{x+2}$$

$f'(x)=0$

$x^2+4x-12=0$

$x=-6,2$

$f'(x)$ غ.م

$x=-2$

خارج المجال

الاعداد الحرجة هي $-6,2$.

---

(3) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

اولاً نحدد المجال

$4-x^2\geq 0$

$$\underset{-2}{\overset{--\;\bullet\;++\;\bullet\;--}{}}\quad\underset{2}{}$$

$D=[-2,2]$

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0$

$f'(x)$ غ.م

$4-x^2=0$

$x=\pm 2$.

الاعداد الحرجة هي

$x=0,\pm 2$

---

(4) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

$D=[-2,2]$

$$f'(x)=1\cdot\sqrt{4-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$=\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$=\frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow 4-2x^2=0$

$x=\pm\sqrt{2}$

$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow 4-x^2=0$

$x=\pm 2$

الاعداد الحرجة هي $\pm\sqrt{2},\pm 2$

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x) = x - 2\cos x$ على الفترة $[0, 2\pi]$

$f'(x) = 1 + 2\sin x$

$f'(x) = 0$

$1 + 2\sin x = 0$

$2\sin x = -1$

$\sin x = -1/2$.

$x < \pi/6$

$Q_3 \rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

$Q_4 \rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

الاعداد الحرجة هي

$x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

---

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x) = x - \sin 2x$ على الفترة $[0, \pi]$

$f'(x) = 1 - 2\cos 2x$.

$f'(x) = 0$

$1 - 2\cos 2x = 0$

$2\cos 2x = 1$

$\cos 2x = 1/2$

$2x < \pi/3$

$Q_1 \rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

$Q_4 \rightarrow 2x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

$x = \frac{5\pi}{6}$

الاعداد الحرجة هي

$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

---

(3) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x) = \sin x + \cos x$

$D = (-\infty, \infty)$

$f'(x) = \cos x - \sin x$

$f'(x) = 0$

$\cos x - \sin x = 0$

$\sin x = \cos x$.

بالقسمة على $\cos x$

$\frac{\sin x}{\cos x} = 1$

$\tan x = 1$

$x < \pi/4$

$Q_1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$Q_3 \rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + n\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} + n\pi \end{array}\right\}$$ الفرق بين الحلين π لذلك

$x = \frac{\pi}{4} + n\pi$.

هذه هي الاعداد الحرجة

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sin x\cos x$ على الفترة $[0, 2\pi]$

$f'(x) = \cos x\cdot\cos x + \sin x(-\sin x)$

$= \cos^2 x - \sin^2 x.$

$f'(x) = 0$.

$\cos^2 x - \sin^2 x = 0$

$\sin^2 x = \cos^2 x.$

$\sin x = \pm \cos x.$

$\tan x = \pm 1$

$\tan x = 1$

$x < \pi/4$

$Q_1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$Q_3 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

$\tan x = -1$

$x < \pi/4$

$Q_2 \rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$

$Q_4 \rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$

الاعداد الحرجة هي $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

---

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $f(x)=(x^2-3)e^x$

$D = (-\infty, \infty)$

$f'(x) = 2x\, e^x + (x^2-3)\, e^x$

$= e^x[\,2x + x^2 - 3\,]$

$= e^x(x^2 + 2x - 3).$

$f'(x) = 0.$

$e^x = 0$, $x^2 + 2x - 3 = 0$

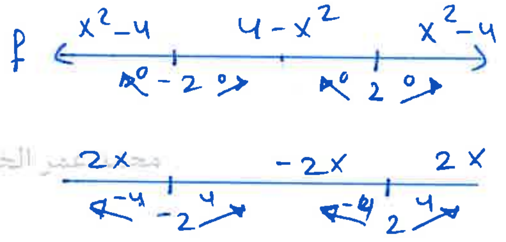
لا يوجد حل $x = -3, 1$

الاعداد الحرجة هي $-3, 1$

---

(3) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=|x^2-4|$

الحل جبريا //.

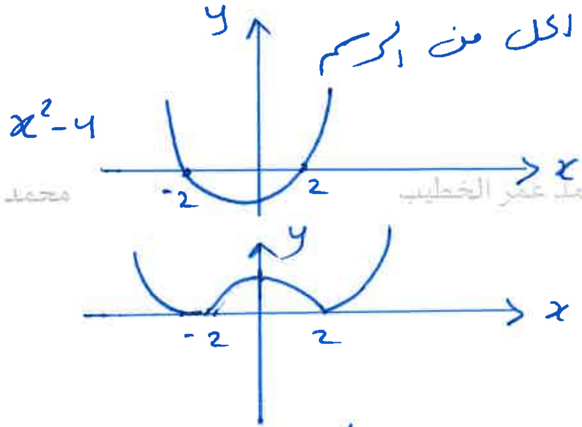


$f'(x) = 0$, $f'(x)$ غ.م

$x = 0$ $x = \pm 2$

$0, \pm 2$ الاعداد الحرجة هي

الحل من الرسم



الاعداد الحرجة هي $0, \pm 2$

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x) = x^{3/4} - 4x^{1/4}$

$D = [0, \infty)$

$f'(x) = \frac{3}{4} x^{-1/4} - x^{-3/4}.$

نخرج عامل مشترك $x^{-3/4}$ (الأس الأصغر)

$= x^{-3/4}\left(\frac{3}{4} \frac{x^{-1/4}}{x^{-3/4}} - 1\right)$

$= x^{-3/4}\left(\frac{3}{4} \cdot x^{1/2} - 1\right)$

$= \frac{3\sqrt{x} - 4}{4x^{3/4}}.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$

$3\sqrt{x} - 4 = 0$

$\sqrt{x} = \frac{4}{3}.$

$x = \frac{16}{9}.$ ✓

$f'(x)$ غ.م

$x = 0$

الاعداد الحرجة هي $0, \frac{16}{9}.$

---

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3} + 4x^{-2/3}$

$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3} + 4/x^{2/3}.$

$D = R \backslash \{0\}$

$f'(x) = \frac{4}{3} x^{1/3} + \frac{4}{3} x^{-2/3} - \frac{8}{3} x^{-5/3}.$

$= \frac{4}{3} x^{-5/3}\left[\frac{x^{1/3}}{x^{-5/3}} + \frac{x^{-2/3}}{x^{-5/3}} - 2\right]$

$= \frac{4}{3} x^{-5/3}\left[x^2 + x - 2\right]$

$= \frac{4}{3} \frac{x^2 + x - 2}{x^{5/3}}.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$

$x^2 + x - 2 = 0$

$x = -2, \quad x = 1$

$f'(x)$ غ.م

$x = 0$ خارج المجال

الاعداد الحرجة هي

$-2, 1$

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$

$D=(-\infty,\infty)$

$f(x)=(x^3-3x^2)^{1/3}$.

$f'(x)=\frac{1}{3}(x^3-3x^2)^{-2/3}\cdot(3x^2-6x)$

$=\frac{3x^2-6x}{3(x^3-3x^2)^{2/3}}$.

$f'(x)=0 \Rightarrow$

$3x^2-6x=0 \Rightarrow x=0,2$

$f'(x)$ غ.م

$x^3-3x^2=0$

$x=0\ , \quad x=3$.

الاعداد الحرجة هي

$0\ ,\ 2\ ,\ 3$.

---

* سؤال طويل

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=(x^{2/5}-3x^{1/5})^2$

$D=(-\infty,\infty)$

$f'(x)=2(x^{2/5}-3x^{1/5})\cdot(\frac{2}{5}x^{-3/5}-\frac{3}{5}x^{-4/5})$

$=2x^{1/5}(x^{1/5}-3)\cdot\frac{1}{5}x^{-4/5}(2x^{1/5}-3)$

$=\frac{2}{5}x^{-3/5}(x^{1/5}-3)(2x^{1/5}-3)$.

$=\frac{2(x^{1/5}-3)(2x^{1/5}-3)}{5x^{3/5}}$

$f'(x)=0 \Rightarrow$ البسط = صفر

$x^{1/5}-3=0\ , \quad 2x^{1/5}-3=0$

$x^{1/5}=3\ , \quad 2x^{1/5}=3$

$x=3^5 \qquad x^{1/5}=\frac{3}{2}$

$x=243\ , \quad x=(\frac{3}{2})^5$

$x=243\ , \quad x=\frac{243}{32}$.

$f'(x)$ غ.م

$x=0$

الاعداد الحرجة هي

$0\ ,\ 3^5\ ,\ (\frac{3}{2})^5$.

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sin^{-1}(1-\frac{1}{x^2})$

مجال الدالة

$-1\le 1-\frac{1}{x^2}\le 1$

$-2\le -\frac{1}{x^2}\le 0$

$2\ge \frac{1}{x^2}\ge 0$

$0\le \frac{1}{x^2}\le 2$

$\frac{1}{2}\le x^2$

$\sqrt{\frac{1}{2}}\le |x|$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\le |x|$

$x\le -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\le x$

$D=\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(1-\frac{1}{x^2})^2}}\cdot\frac{2}{x3}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow$ لا يوجد حل

$f'(x)$ غ.م ، $1-(1-\frac{1}{x^2})^2=0$

$x=0$

خارج المجال.

$(1-\frac{1}{x^2})^2=1$

$1-\frac{1}{x^2}=1$ او $1-\frac{1}{x^2}=-1$

$-\frac{1}{x^2}=0$, $-\frac{1}{x^2}=-2$

لا يوجد حل

$x^2=\frac{1}{2}$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ الاعداد الحرجة هي $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

---

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة:

$$f(x)=\begin{cases}7-2x^2 & x\le 1\\ x^3-12x & x>1\end{cases}$$

f : $7-2x^2$ | x^3-12x

5 | -11

1

f' : $-4x$ | $3x^2-12$

1

$f'(x)$ غ.م

$x=1$ عدم اتصال.

$f'(x)=0$

يوجد حالتين

(i) $4x=0$ قاعدة اليسار

$x=0$

(ii) $3x^2-12=0$

$x=-2$, $x=2$

خارج المجال الفرعي

الاعداد الحرجة هي $0 , 2$

(1) اذا كانت للدالة $f(x)=x^4-2ax^2+8x$ **عدد حرج عند** $x=2$ **فاوجد قيمة الثابت** a

الشرط

$f'(2)=0$

$f'(x)=4x^3-4ax+8$

$f'(2)=0$

$4(2)^3-4a(2)+8=0$

$32-8a+8=0$

$40=8a$

$\boxed{a=5}$

---

(2) اذا كانت للدالة $f(x)=x^2e^{kx}$ **عدداً حرجاً عند** $x=\frac{2}{3}$ **فاوجد قيمة الثابت** k

الشرط

$f'(\frac{2}{3})=0$

$f'(x)=2x\,e^{kx}+x^2e^{kx}\cdot k$

$=e^{kx}(2x+kx^2)$

$f'(2/3)=0$

$e^{2/3\,k}\left(2\cdot\frac{2}{3}+k\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)=0$

$e^{2/3\,k}\left(\frac{4}{3}+\frac{4}{9}k\right)=0$

$e^{2/3\,k}=0$ لا يوجد حل

$\frac{4}{3}+\frac{4}{9}k=0$

$\frac{4}{9}k=\frac{-4}{3}\Rightarrow\boxed{k=-3}$

---

(3) اذا كانت للدالة $f(x)=x^3+ax^2+bx$ **اعداد حرجة عند** $x=-1,x=2$

فاوجد قيمة الثوابت a,b

الشروط

$f'(-1)=0$

$f(2)=0$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(-1)=0$

$3(-1)^2+2a(-1)+b=0$

$3-2a+b=0$

$-2a+b=-3$

$2a-b=3\quad\dots①$

$f'(2)=0$

$3(2)^2+2a(2)+b=0$

$12+4a+b=0$

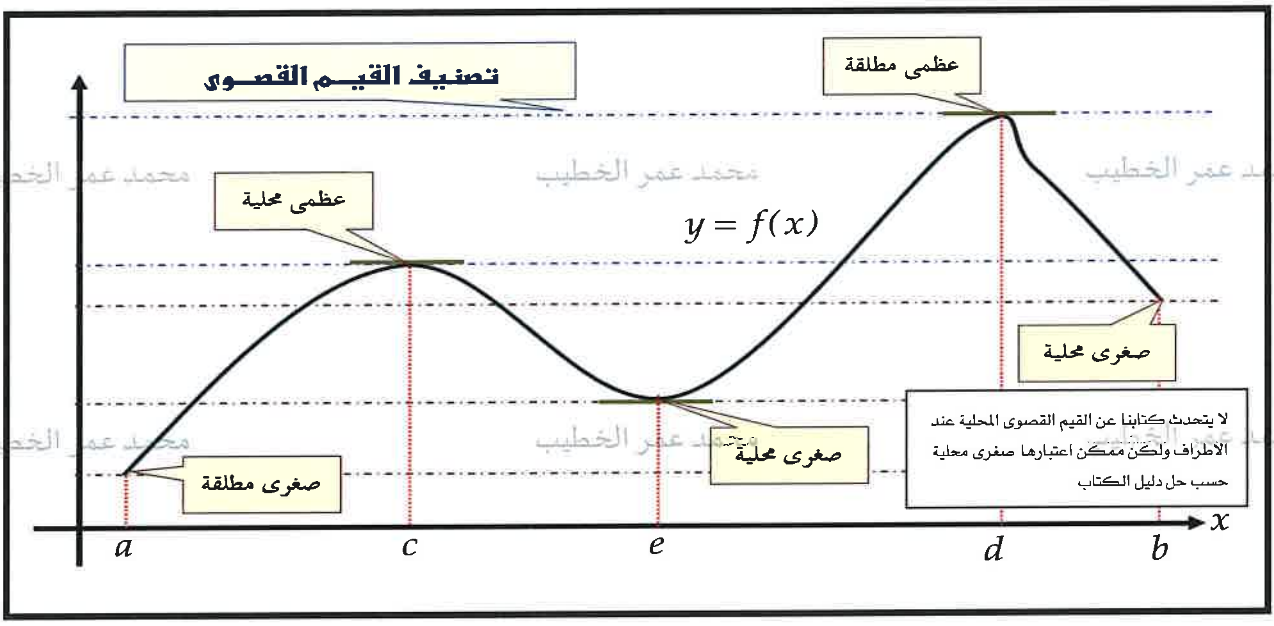
$4a+b=-12\quad\dots②$

بالجمع

$$\begin{array}{r} 2a-b=-3 \\ 4a+b=-12 \\ \hline 6a=-9 \end{array}\rightarrow\boxed{a=-3/2}$$

$\boxed{b=-6}$

القيم القصوى (المطلقة) والقيم القصوى المحلية



تصنيف القيــم القصــوى

لا يتحدث كتابنا عن القيم القصوى المحلية عند الاطراف ولكن ممكن اعتبارها صغرى محلية حسب حل دليل الكتاب

القيم القصوى (المطلقة)

اذا كانت f دالة مجالها الفترة S, $c \in S$ فان $f(c)$ تكون:

1. **قيمة عظمى مطلقة** للدالة f على S اذا كانت $f(c) \geq f(x)$ لكل $x \in S$.
2. **قيمة صغرى مطلقة** للدالة f على S اذا كانت $f(c) \leq f(x)$ لكل $x \in S$.

ملاحظة: القيم العظمى المطلقة والصغرى المطلقة تسمى القيم القصوى او القيم القصوى المطلقة.

القيم القصوى (المحلية)

اذا كانت c نقطة داخلية في مجال الدالة f فان $f(c)$ تكون:

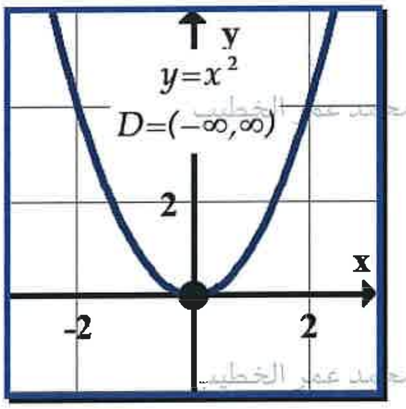
1. **قيمة عظمى محلية** اذا كانت $f(c) \geq f(x)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي c .
2. **قيمة صغرى محلية** اذا كانت $f(c) \leq f(x)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي c.

نظرية فيرمات : اذا كانت $f(c)$ قيمة قصوى محلية فان c عدد حرج للدالة f

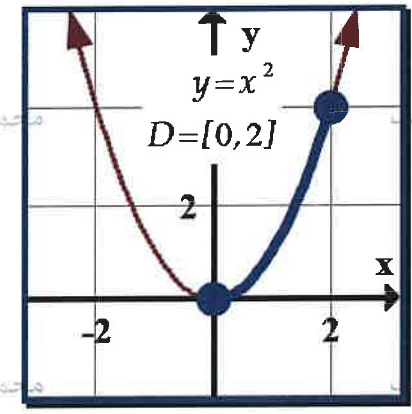
اي ان $f'(c) = 0$ او غير موجودة والعكس غير صحيح

الجدول التالي والرسومات البيانية التالية تمثل اشكال مختلفة لقيم قصوى مطلقة.

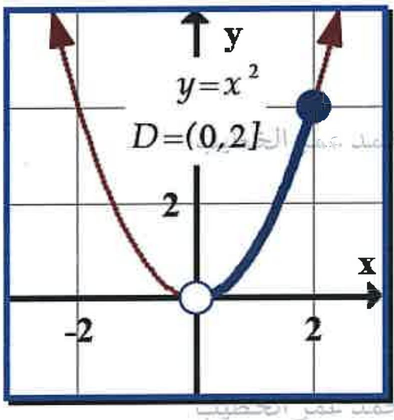
(أ) قيمة صغرى فقط



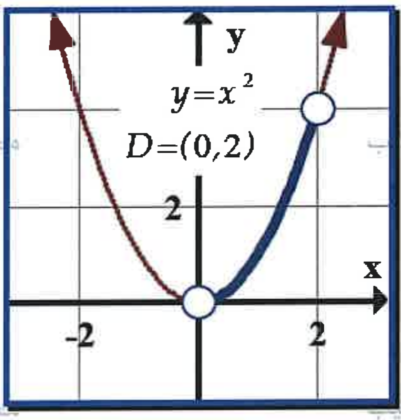
(ب) قيمة عظمى وقيمة صغرى



(ج) قيمة عظمى فقط



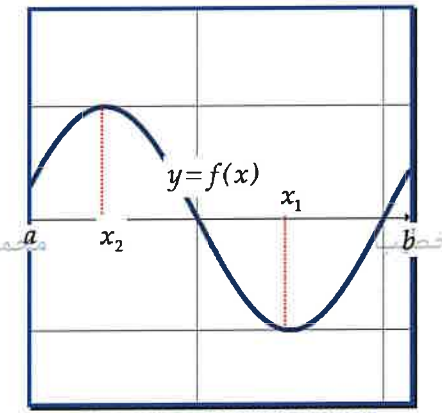
(د) لا توجد قيمة عظمى ولا صغرى



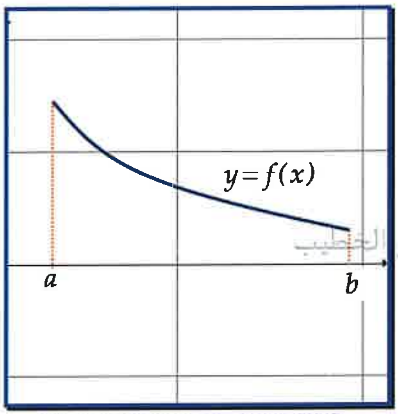
قاعدة الدالة	مجال D	القيم القصوى المطلقة فوق D
(أ) $y=x^2$	$(-\infty,\infty)$	لا يوجد قيمة عظمى مطلقة قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x=0$
(ب) $y=x^2$	$[0,2]$	قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x=2$ قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x=0$
(ج) $y=x^2$	$(0,2]$	قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x=2$ لا يوجد قيمة صغرى مطلقة
(د) $y=x^2$	$(0,2)$	لا توجد قيم قصوى مطلقة

نظرية القيمة القصوى

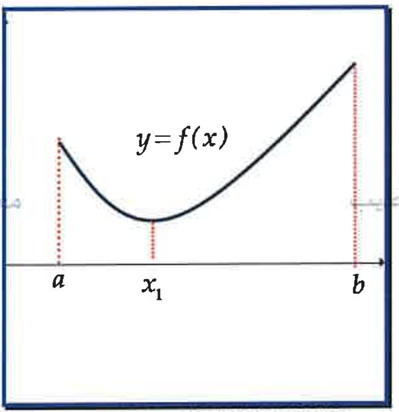
اذا كانت f دالة متصلة على فترة مغلقة $[a,b]$ فان الدالة f تكون لها قيمة عظمى (مطلقة) وقيمة صغرى(مطلقة) على هذه الفترة.



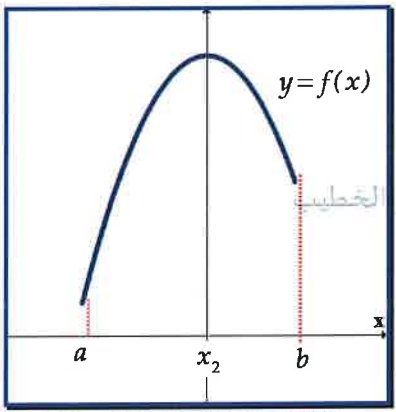
قيمة عظمى وقيمة صغرى
فقط عند نقاط داخلية



قيمة عظمى وقيمة صغرى
عند النقاط الطرفية



قيمة صغرى عند نقطة داخلية
وقيمة عظمى عند نقطة طرفية



قيمة عظمى عند نقطة داخلية
وقيمة صغرى عند نقطة طرفية

ملاحظات:

(1) اذا كانت f لا تحقق الشروط على الفترة المغلقة $[a,b]$ فانه ليس من الضروري ان يكون للدالة f قيمة عظمى (مطلقة) او قيمة صغرى (مطلقة) على هذه الفترة .

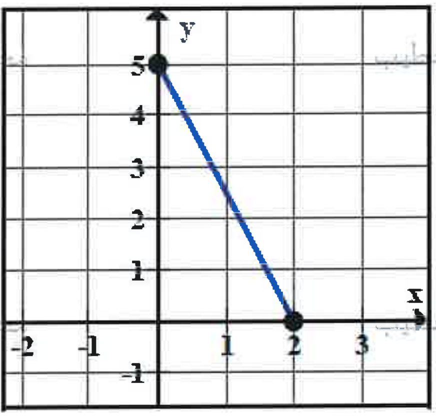
(2) اذا كانت مجال الدالة f الفترة المفتوحة (a,b) فانه لا يوجد للدالة f قيمة عظمى (مطلقة) او قيمة صغرى (مطلقة) عند الاطراف.

القيم القصوى المطلقة والمحلية بيانياً

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f

اوجد في كل حالة مما ياتي القيم القصوى (العظمى المطلقة ، الصغرى المطلقة) وحدد مكانها

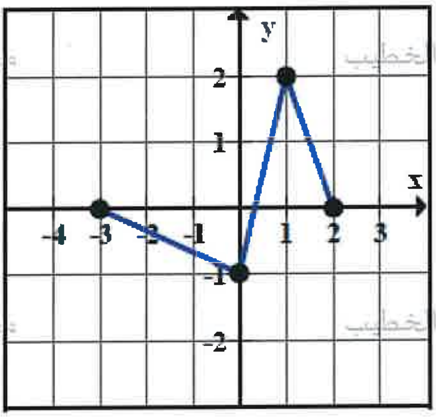
(1)



القيمة العظمى المطلقة 5 عند $x=0$

القيمة الصغرى المطلقة 0 عند $x=2$

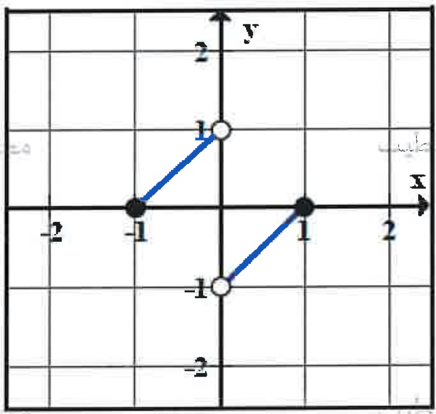
(2)



القيمة العظمى المطلقة 2 عند $x=1$

القيمة الصغرى المطلقة -1 عند $x=0$

(3)

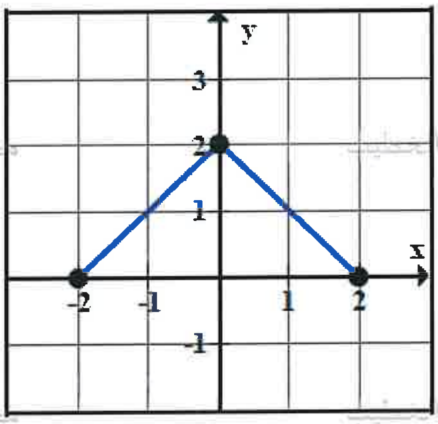


لا يوجد قيم قصوى مطلقة

* قيمة عظمى محلية 0 عند $x=1$

* قيمة صغرى محلية 0 عند $x=-1$

(4)



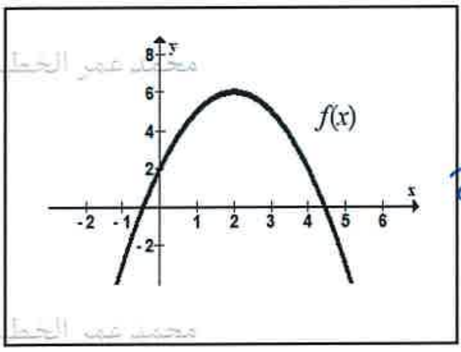
القيمة العظمى المطلقة 2 عند $x=0$

القيمة الصغرى المطلقة 0 عند $x=\pm 2$

يمثل كل شكل من الاشكال الاتية بيان الدالة $f(x)$ اكمل كل مما يأتي

ملاحظة : كل قيمة قصوى مطلقة هي قيمة قصوى محلية ولا داعي لذكر انها قيمة قصوى محلية يكفي ان تقول انها قيمة قصوى مطلقة الا اذا كانت وحيدة

اولاً :

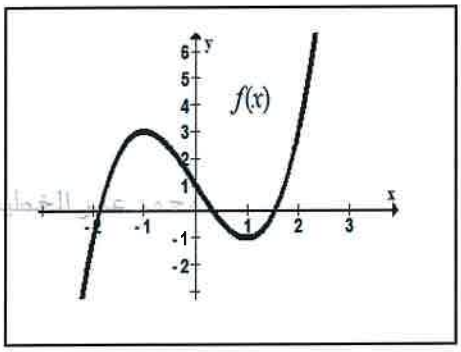


(أ) الاعداد الحرجة للدالة هي ....$x = 2$..........

(ب) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) .....6 عند $x=2$ وهي مطلقة

(ج) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت)..........لا يوجد..........

ثانياً :

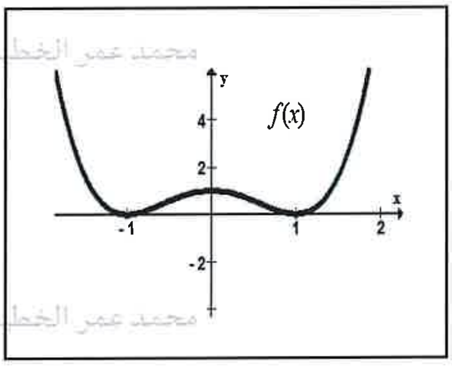


(أ) الاعداد الحرجة للدالة هي ....$x = -1$ و $x = 1$.......

(ب) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) ......3 عند $x = -1$

(ج) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت) ......-1 عند $x = 1$

ثالثاً :

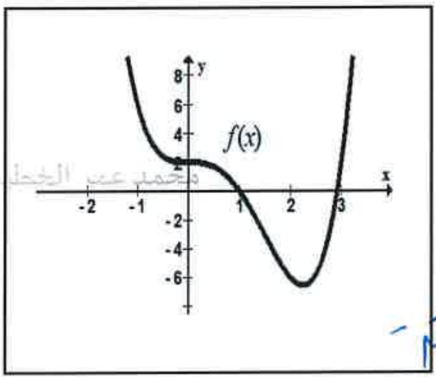


(أ) الاعداد الحرجة للدالة هي ....$x = -1$ و 0 و 1.......

(ب) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) ......1 عند $x = 0$

(ج) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت) ......0 عند $x = \pm 1$ وهي مطلقة

رابعاً :



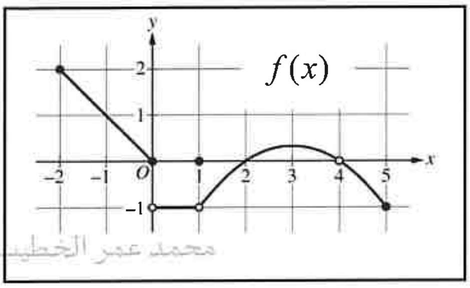
(أ) الاعداد الحرجة للدالة هي ....$x = 0$, $x = 2$.......

(ب) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) ......لا يوجد......

(ج) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت) ......-6 عند $x = 2$ وهي مطلقة -

ملاحظة سيتم مناقشة القيم القصوى المحلية بشكل موسع في الدرس الرابع مع التزايد والتناقص

(1) يمثل الشكل الاتي بيان الدالة $f(x)$ اكمل كل مما يأتي



(أ) هل الدالة تحقق شروط نظرية القيمة القصوى

على الفترة $[-2,5]$ مع ذكر السبب لا الدالة غير متصلة

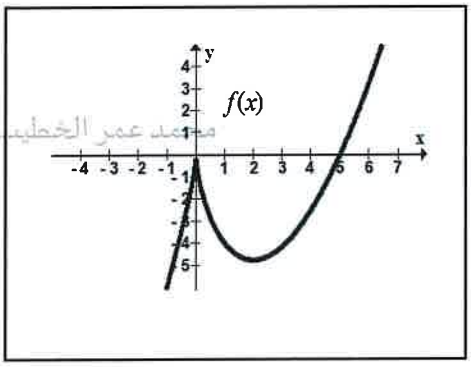
(ب) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت) 2

(ج) القيمة الصغرى المطلقة (ان وجدت) 1-

(د) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) عند 1 عند $x=3$

---

(2) يمثل الشكل الاتي بيان الدالة $f(x)$ اكمل كل مما يأتي



(أ) هل الدالة تحقق شروط نظرية القيمة القصوى

على الفترة $(-\infty,\infty)$ مع ذكر السبب لا الفترة غير مغلقة

(ب) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت) لا يوجد

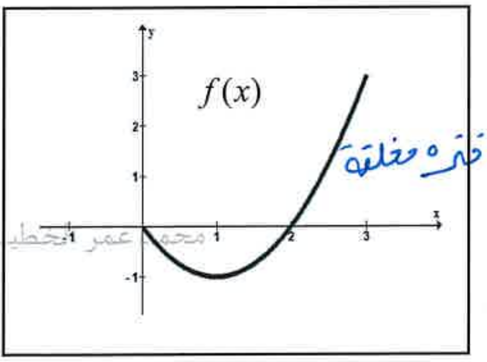
(ج) القيمة الصغرى المطلقة (ان وجدت) لا يوجد

(د) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) عند $x=0$

(هـ) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت) عند $x=2$

---

(3) يمثل الشكل الاتي بيان الدالة $f(x)$ اكمل كل مما يأتي



(أ) هل الدالة تحقق شروط نظرية القيمة القصوى

على الفترة $[0,3]$ مع ذكر السبب نعم لأن الدالة متصلة على فترة مغلقة

(ب) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت) 3 عند $x=3$

(ج) القيمة الصغرى المطلقة (ان وجدت) 1- عند $x=1$

(د) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) 0 عند $x=0$

(هـ) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت) لا يوجد غير المطلقة

القيم القصوى (المطلقة) تحليلاً

اختبار القيم

(1) ايجاد جميع النقاط الحرجة في الفترة المغلقة المعرفة عليها الدالة

(2) ايجاد قيمة الدالة عند النقاط الحرجة واطراف الفترة المغلقة.

(3) تكون اكبر هذه القيم عظمى مطلقة وتكون اصغر هذه القيم صغرى مطلقة.

(1) اوجد القيم القصوى (المطلقة) للدالة : $f(x)=x^3-3x+1$ على الفترة $[0,3]$.

$f'(x) = 3x^2 - 3$.

$f'(x) = 0$

$3x^2-3=0$

$x = -1$, 1

الاعداد الحرجة هي $x=1$ فقط

$f(0) = 1$

$f(3) = 19$

$f(1) = -1$

عظمى مطلقة 19 ، صغرى مطلقة -1

---

(2) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ على الفترة $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$.

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

$= \dfrac{x^2-1}{x^2}$

$f'(x) = 0$

$1-x^2=0$

$x = \pm 1$

$f'(x)$ غ.م ،

$x=0$

خارج المجال

الاعداد الحرجة هي $x=1$ فقط

$f(1) = 2$

$f(1/2) = 2.5$

$f(2) = 2.5$

عظمى مطلقة 2.5 ، صغرى مطلقة 2

---

(3) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ على الفترة $[-3,2]$.

$f'(x) = \dfrac{1\cdot(x^2+1) - 2(2x)}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

$f'(x) = 0$

$1-x^2=0$

$x = \pm 1$

$f'(x)$ غ.م ،

$x^2+1=0$

لا يوجد حل .

الاعداد الحرجة هي $x = \pm 1$

$f(-3) = -0.3$

$f(2) = 0.4$

$f(1) = 0.5$

$f(-1) = -0.5$

عظمى مطلقة 0.5 ، صغرى مطلقة -0.5

(1) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=x^2+e^x$ على الفترة $[0,1]$.

$f'(x) = 2x + e^x$

$f'(x) = 0$

$2x + e^x = 0 \Rightarrow x = -0.35$ من الآلة .

لا يوجد حل في هذه الفترة .

$f(0) = 1$

$f(1) = 1 + e$

عظمى مطلقة $1+e$ وصغرى مطلقة 1

---

(2) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=\tan^{-1}(x^2)$ على $[0,1]$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x$$

$$= \frac{2x}{1+x^4} .$$

$f'(x) = 0$ ، $f'(x)$: غ.م

$2x = 0$ ، $1 + x^4 = 0$

$x = 0$ ، لا يوجد حل

الأعداد الحرجة $x = 0$

$f(0) = \tan^{-1} 0 = 0$

$f(1) = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$

عظمى مطلقة $\frac{\pi}{4}$ ، صغرى مطلقة 0 .

---

(3) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ على الفترة $[-1,1]$.

$f(x) = (4-x^2)^{-1/2}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(4-x^2)^{-3/2} \cdot (-2x)$$

$$= \frac{x}{(4-x^2)^{3/2}} .$$

$f'(x) = 0$ ، $f'(x)$ غ.م

$x = 0$ ، $4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

الأعداد الحرجة فقط $x = 0$

$f(0) = 1/2$

$f(-1) = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.7$

$f(1) = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.7$

عظمى مطلقة $1/\sqrt{3}$ ، صغرى مطلقة $1/2$

---

(4) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=x\sqrt{3-x}$ على الفترة $[-1,3]$.

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{3-x} + x \cdot \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$

$$= \sqrt{3-x} - \frac{x}{2\sqrt{3-x}}$$

$$= \frac{2(3-x)-x}{\sqrt{3-x}} = \frac{6-3x}{2\sqrt{3-x}} .$$

$f'(x) = 0$ ، $f'(x)$ غ.م

$x = 2$ ، $x = 3$.

الأعداد الحرجة هي $2, 3$.

$f(-1) = -2 \rightarrow$ صغرى مطلقة

$f(3) = 0$

$f(2) = 2 \rightarrow$ عظمى مطلقة

(1) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x) = x^2 e^{-x}$ على $[0,4]$.

$f'(x) = 2x e^{-x} + x^2 e^{-x}(-1)$

$= e^{-x}(2x - x^2)$

$= \frac{2x - x^2}{ex}$

$f'(x) = 0$

$2x - x^2 = 0$

$x = 0 , x = 2 ,$

$f'(x)$ غ.م

$e^x = 0$

لايوجد حل

الاعداد الحرجة هي $0 , 2$

$f(0) = 0$

$f(4) = 16/e^4$

$f(2) = 4/e^2$

عظمى مطلقة $\frac{4}{e^2}$ ، صغرى مطلقة 0.

---

(2) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x) = \sin x + \cos x$ على $[0,2\pi]$.

$f'(x) = \cos x - \sin x$

$f'(x) = 0$

$\cos x - \sin x = 0$

$\cos x = \sin x$

$\sin x = \cos x$

★ بالقسمة على $\cos x$

$\tan x = 1$

$x < \frac{\pi}{4}$

$Q_1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$Q_3 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

الاعداد الحرجة هي $\frac{5\pi}{4} , \frac{\pi}{4}$

$f(0) = 1$

$f(2\pi) = 1$

$f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

$f(\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2}$

عظمى مطلقة $\sqrt{2}$ ، صغرى مطلقة $-\sqrt{2}$

---

(3) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x) = \sin^{-1}(x)$

اولاً...

اوجد مجال الدالة

$D = [-1,1]$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$f'(x) = 0$

لايوجد حل

$f'(x)$ غ.م

$1 - x^2 = 0$

$x = \pm 1$

الاعداد الحرجة هي ± 1

$f(1) = \sin^{-1}(1) = \pi/2$

$f(-1) = \sin^{-1}(-1) = -\pi/2$

عظمى مطلقة 1 ، صغرى مطلقة -1

(1) أوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}$ على مجالها.

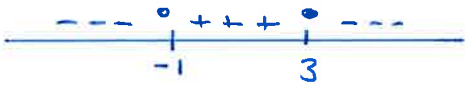
أولاً...

أوجد مجال الدالة

مجال الدالة

$3+2x-x^2 \geq 0$

الاصفار 3 و -1



$D = [-1, 3]$.

$$f'(x) = \frac{2-2x}{2\sqrt{3+2x-x^2}}$$

$f'(x) = 0$ $f'(x)$ غ.م

$2-2x=0$ $x = -1, 3$.

$x=1$

الاعداد الحرجة هي 3 و -1 و 1 .

$f(-1) = 0$

$f(3) = 0$

$f(1) = 2$

عظمى مطلقة 2 وصغرى مطلقة 0

---

(2) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة

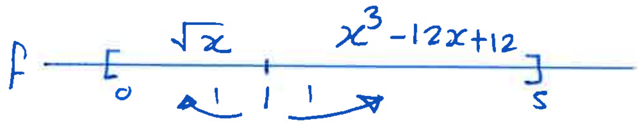
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x<1\\ x^3-12x+12 & 1\leq x\leq 5\end{cases}$$

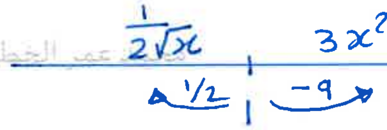
أولاً...

أوجد مجال الدالة

$x \geq 0$

$D = [0, 5]$





$f'(x) = 0$

(i) $\frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ لا يوجد حل

(ii) $3x^2-12=0$

$x = 2 , x = -2.$

ضا 2 ، لمجال الفرعي

$f'(x)$ غ.م

(i) $x = 0$ (المشتقة) اصفار المقام

(i) $x = 1$. نقطة التفرع

الاعداد الحرجة هي 2 , 1 , 0

$f(0) = 0$

$f(5) = 77$

$f(1) = 1$

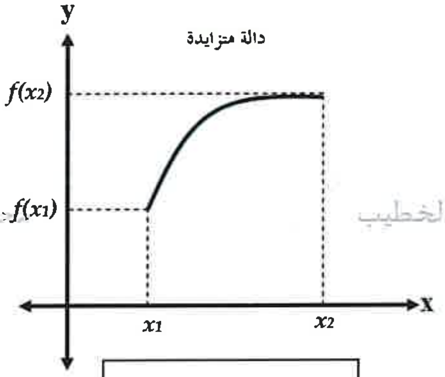
$f(2) = -4.$

عظمى مطلقة 77 وصغرى مطلقة -4

الوحدة الرابعة: تطبيقات الاشتقاق /// الدرس الرابع: الدوال المتزايدة والمتناقصة

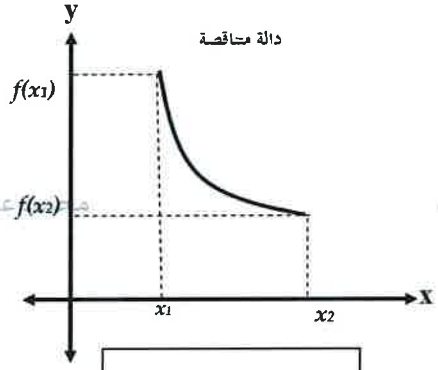
الدوال المتزايدة والمتناقصة

تعريف الدالة المتزايدة والدالة المتناقصة



$$x_1 < x_2$$
$$f(x_1) < f(x_2)$$

كلما زادت قيمة x تزيد قيمة y (العلاقة طردية)



$$x_1 < x_2$$
$$f(x_1) > f(x_2)$$

كلما زادت قيمة x تقل قيمة y (العلاقة عكسية)

العلاقة بين سلوك الدالة (التزايد والتناقص) واشارة مشتقة الدالة (اشارة f')

اذا كانت

$$f'(x) > 0$$

لكل x في الفترة (a,b)

فان الدالة $f(x)$

تكون متزايدة

على الفترة (a,b)

$$f'(x) = 0$$

لكل x في الفترة (a,b)

فان الدالة $f(x)$

تكون ثابتة

على الفترة (a,b)

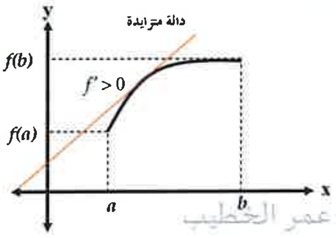
$$f'(x) < 0$$

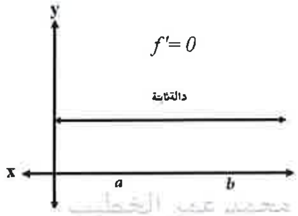
لكل x في الفترة (a,b)

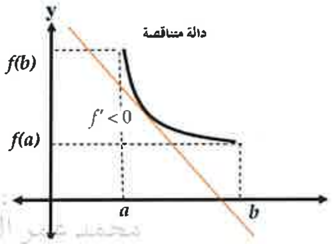
فان الدالة $f(x)$

تكون متناقصة

على الفترة (a,b)

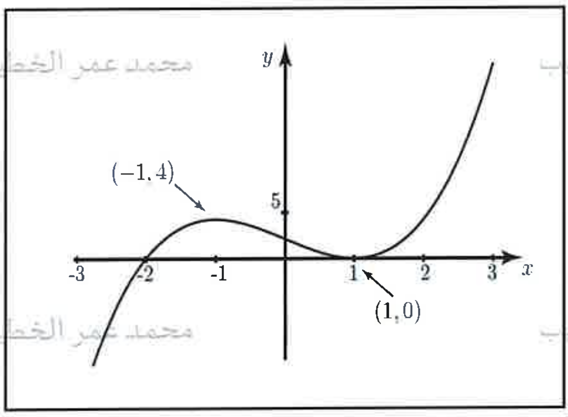






فترات التزايد وفترات التناقص للدالة (بيانياً)

يمثل كل شكل من الاشكال الاتية بيان الدالة $f(x)$ اوجد ← مباشر .



(1) الاعداد الحرجة للدالة هي .... -١ و ١

(2) فترات التزايد هي........ (-∞ , -١) ∪ (١ , ∞)

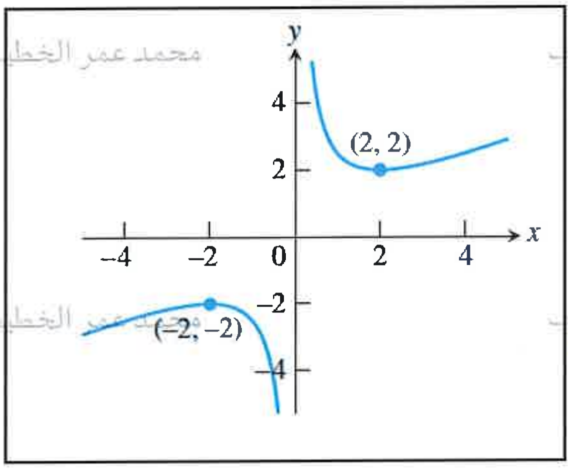
(3) فترة التناقص هي........ (-١ , ١)

(4) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت)........ لا يوجد

(5) القيمة الصغرى المطلقة هي(ان وجدت)........ لا يوجد

(6) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت)........ ٤ عند x = -١

(7) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت)........ 0 عند x = ١



(1) الاعداد الحرجة للدالة هي .... -2 و 2

(2) فترات التزايد هي........ (-∞ , -2) ∪ (2 , ∞)

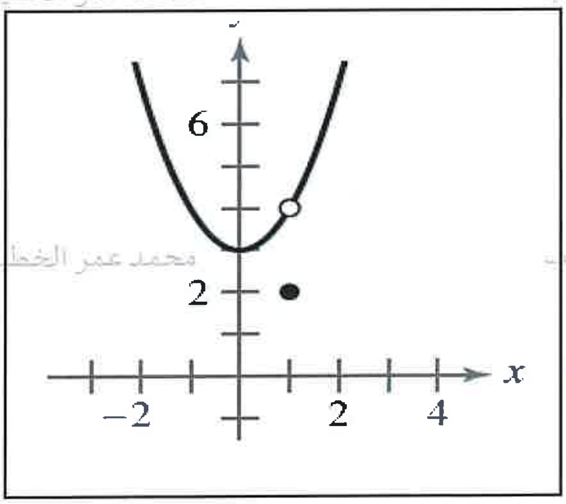
(3) فترات التناقص هي........ (-2 , 0) ∪ (0 , 2)

(4) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت)........ لا يوجد

(5) القيمة الصغرى المطلقة(ان وجدت)........ لا يوجد

(6) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت)........ -2 عند x = -2

(7) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت)........ 2 عند x = 2



(1) الاعداد الحرجة للدالة هي .... 0 و ١

(2) فترة التزايد هي........ (0 , ١) ∪ (١ , ∞)

(3) فترة التناقص هي........ (-∞ , 0)

(4) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت)........ لا يوجد

(5) القيمة الصغرى المطلقة (ان وجدت)........ 2 عند x = ١

(6) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت)........ لا يوجد

(7) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت)........ 3 عند x = 0

فترات التزايد وفترات التناقص للدالة (تحليلياً)

(1) إيجاد جميع النقاط الحرجة وتعينها على خط الاعداد.

(2) دراسة اشارة دالة المشتقة f' .

(3) تحديد سلوك الدالة f من خلال اشارة الدالة f' .

أ) اذا كانت اشارة الدالة f' موجبة (+ +) على فترة فان الدالة f تكون متزايدة على هذه الفترة.

ب) اذا كانت اشارة الدالة f' سالبة (--) على فترة فان الدالة f تكون متناقصة على هذه الفترة.

(1) اوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$.

$D = (-\infty, \infty)$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 6x = 0$

$x = 0 \ , \ x = 2$

الاعداد الحرجة .

فترات التزايد $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

فترة التناقص $(0, 2)$

---

(2) اوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x) = x - \sqrt{x-1}$.

$D = [1, \infty)$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$= \frac{2\sqrt{x-1} - 1}{2\sqrt{x-1}}$

$f'(x) = 0$

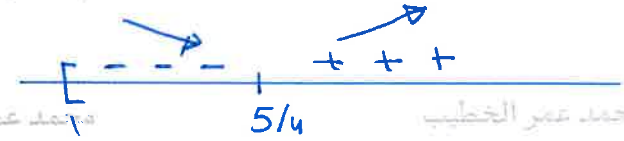
$2\sqrt{x-1} - 1 = 0$

$2\sqrt{x-1} = 1$

$\sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x - 1 = \frac{1}{4}$

$x = \frac{5}{4}$

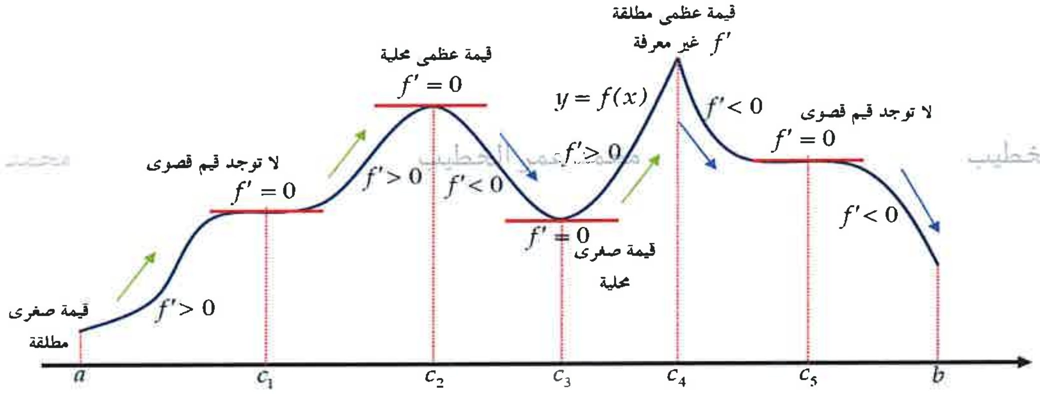
$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow x = 1$



فترة التناقص $(1, \frac{5}{4})$

فترة التزايد $(\frac{5}{4}, \infty)$

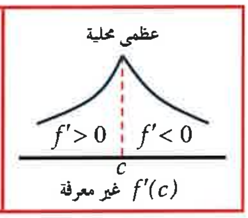
القيم القصوى المحلية: اختبار المشتقة الاولى للقيم القصوى المحلية

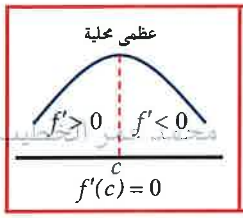


أ) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة ، c نقطة حرجة داخلية للدالة.

1) فان الدالة f يكون لها قيمة عظمى محلية اذا كانت المشتقة تغيير اشارتها من موجب (+) الى سالب (-)

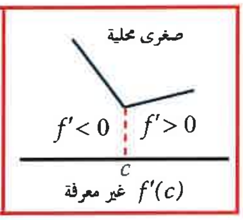
النقطة الحرجة	c	
	$x < c$	$x > c$
إشارة f'	+	−
سلوك الدالة f	الدالة تزايدية	الدالة تناقصية
	للدالة عند c قيمة عظمـــــي محلية	

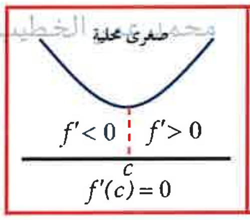




2) فان الدالة f يكون لها قيمة صغرى محلية اذا كانت المشتقة تغيير اشارتها من سالب (-) الى موجب(+)

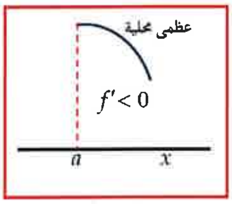
النقطة الحرجة	c	
	$x < c$	$x > c$
إشارة f'	−	+
سلوك الدالة f	الدالة تناقصية	الدالة تزايدية
	للدالة عند c قيمة صغـــــرى محلية	





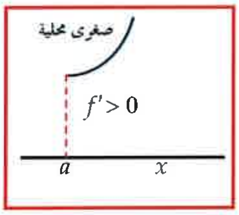
ب) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة ، a نقطة طرفية من اليسار.

(بداية فترة التناقص)



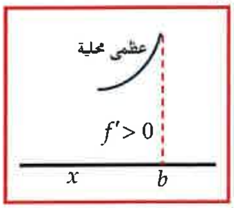
هذا التعريق من خارج الكتاب للفقرة ب

(بداية فترة التزايد)



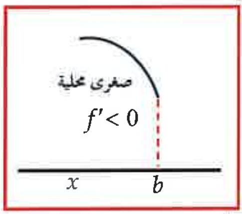
ج) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة ، b نقطة طرفية من اليمين.

(نهاية فترة التزايد)



هذا التعريق من خارج الكتاب للفقرة ج

(نهاية فترة التناقص)



كل قيمة قصوى مطلقة ليست على الاطراف ممكن اعتبارها قيمة قصوى محلية

ص.م ← صغرى محلي

ع.م ← عظمى محلي.

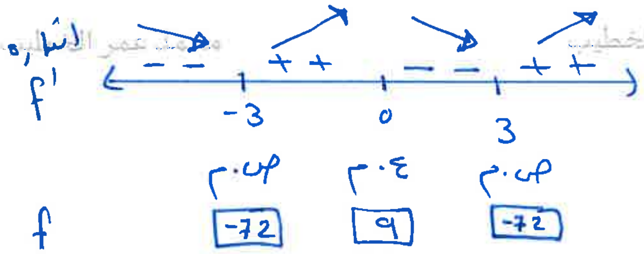
(1) لتكن : $f(x)=x^4-18x^2+9$ اوجد

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

$f'(x) = 4x^3 - 36x$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 3$.

الاعداد الحرجة هي $0, \pm 3$



فترات التناقص $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$

فترات التزايد $(-3, 0) \cup (3, \infty)$

$f(-3) = -72$

$f(3) = -72$

$f(0) = 9$

عظمى محلي 9 عند $x = 0$.

صغرى محلي -72 عند $x = \pm 3$

---

(2) لتكن : $f(x)=2x\sqrt{x+1}$ اوجد

$D = [-1, \infty)$

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

$$f'(x) = 2 \cdot \sqrt{x+1} + 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$= 2\sqrt{x+1} + \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

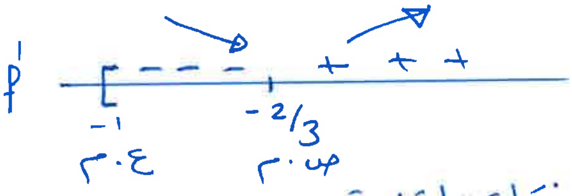
$$= \frac{2(x+1) + x}{\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{2x+2+x}{\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2/3$.

$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow x = -1$

الاعداد الحرجة هي $-1, \frac{-2}{3}$



فترات التناقص $(-1, \frac{-2}{3})$

فترة التزايد $(\frac{-2}{3}, \infty)$

قيمة عظمى محلي عند $x = -1$ وهي $f(-1) = 0$

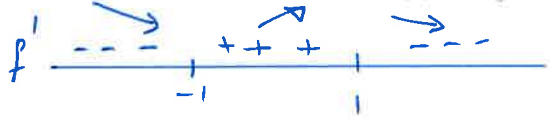
قيمة صغرى محلي عند $x = \frac{-2}{3}$. وهي $\frac{-4}{3\sqrt{3}} = -\frac{4\sqrt{3}}{9}$

(1) لتكن : $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ اوجد

$D=(-\infty,\infty)$

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

الاعداد الحرجة هي ± 1



م.ص . م.ع

فترات التناقص $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

فترة التزايد $(-1,1)$

قيمه عظمى محليه $\frac{1}{2}$ عند $x=1$

قيمه صغرى محليه $-\frac{1}{2}$ عند $x=-1$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0$

$1-x^2=0$

$x=\pm 1$

$f'(x)$ غ.م

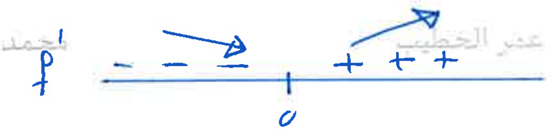
$x^2+1=0$

لا يوجد حل

$D=(-\infty,\infty)$

(2) لتكن : $f(x)=\tan^{-1}(x^2)$ اوجد

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.



فتره التناقص $(-\infty,0)$

فتره التزايد $(0,\infty)$

قيمه صغرى محليه 0 عند $x=0$

$$f'(x)=\frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot 2x$$

$$=\frac{2x}{1+x^4}$$

$f'(x)=0$

$x=0$

$f'(x)$ غ.م

$1+x^4=0$

لا يوجد حل

الاعداد الحرجة $x=0$

(3) بين ان الدالة $f(x)=\sin^{-1}(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}x)$ **متزايدة على مجالها (R)**

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}x)^2}}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}>0$$

لما ان f' دائماً موجبة فان f داله متزايدة على R

$D = (-\infty, \infty)$

(1) لتكن : $f(x)=x^2e^{-x}$ اوجد

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

$f'(x) = 2x e^{-x} + x^2 e^{-x}(-1)$

$= e^{-x}(2x - x^2)$

$= \frac{2x - x^2}{e^x}$.

$f'(x) = 0$

$2x - x^2 = 0$

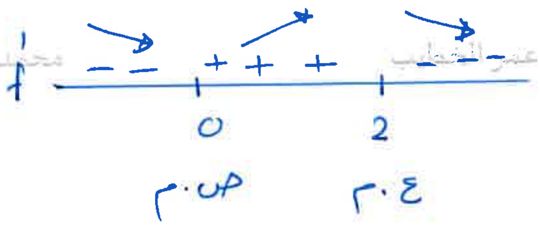
$x = 0, x = 2$

$f'(x)$ غ.م

$e^x = 0$

لا يوجد حل

الاعداد الحرجة $x = 0 , 2$



فترات التناقص $(-\infty,0) \cup (2,\infty)$

فترة التزايد $(0,2)$

قيمة صغرى محلية 0 عند $x=0$

قيمة عظمى محلية $\frac{4}{e^2}$ عند $x=2$

$D = R / \{0\}$

(2) لتكن : $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ اوجد

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

$f'(x) = \frac{2x(x) - (x^2-1)\cdot 1}{x^2}$

$= \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2}$

$= \frac{x^2+1}{x^2}$

$f'(x) = 0$

$x^2 + 1 = 0$

لا يوجد حل

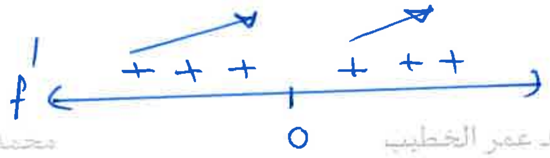
$f'(x)$ غ.م

$x^2 = 0$

$x = 0$

خارج المجال

لا يوجد اعداد حرجة



فترات التزايد $(-\infty,0) \cup (0,\infty)$

لا يوجد فترة تناقص .

لا يوجد قيم قصوى محلية

(1) لتكن : $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ اوجد

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

$D = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

$f'(x) = 0$

$x = 0$

خارج المجال

$f'(x)$ غ.م

$x = \pm 1$

خارج المجال

لا يوجد اعداد حرجة

$(-\infty, -1)$ فترة التناقص

$(1, \infty)$ فترة التزايد

لا يوجد قيم قصوى محلية

(2) لتكن : $f(x) = x \ln x$ اوجد

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

$D = (0, \infty)$

$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$

$= \ln x + 1$

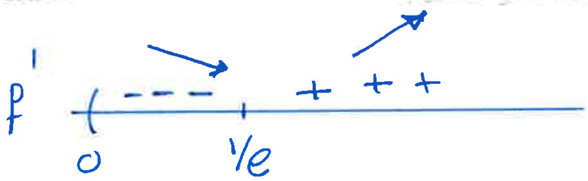
$f'(x) = 0$

$\ln x + 1 = 0$

$\ln x = -1$

$x = e^{-1}$

$x = 1/e$



$(0, 1/e)$ فترة التناقص

$(\frac{1}{e}, \infty)$ فترة التزايد

قيمة صغرى محلية $-\frac{1}{e}$ عند $x = \frac{1}{e}$

(1) لتكن : $f(x)=x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}$ اوجد.

$D = (-\infty , \infty)$

(أ) الاعداد الحرجة للدالة **(ب)** فترات التزايد والتناقص للدالة **(ج)** القيم القصوى المحلية.

$f'(x) = \frac{4}{3} x^{1/3} + \frac{4}{3} x^{-2/3}$

$= \frac{4}{3} x^{-2/3} \left(\frac{x^{1/3}}{x^{2/3}} + 1 \right)$

$= \frac{4}{3} x^{-2/3} (x+1)$

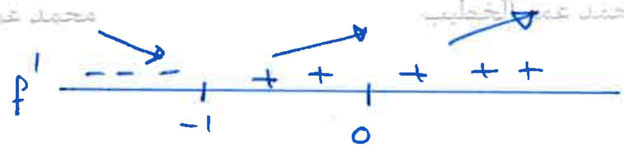
$= \frac{4}{3} \cdot \frac{x+1}{x^{2/3}}$.

$f'(x) = 0$

$x = -1$

$f'(x)$ غ.م

$x = 0$



فترة التناقص $(-\infty , -1)$

فترة التزايد $(-1 , \infty)$

قيمة صغرى محلية -3 عند $x=-1$

* يوجد مماس رأسي عند $x=0$ وليس قيمة قصوى محلية.

---

(2) اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة $f(x)=\sin x+\cos x$

$D = (-\infty , \infty)$

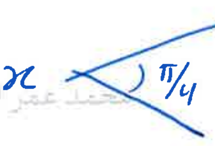
$f'(x) = \cos x - \sin x$.

$f'(x) = 0$.

$\cos x - \sin x = 0$

$\sin x = \cos x$

$\tan x = 1$



$Q_1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$Q_3 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$.

الفرق بين الحلين π.

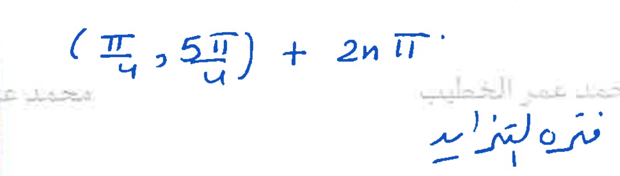
الاعداد الحرجة هي

$x = \frac{\pi}{4} + n\pi$.

ناخذ قيم مختلفة لـ n مثلاً

$n = 0 , n = 1 , n = 2$

$n = -1 , n = -2$



فترة التناقص

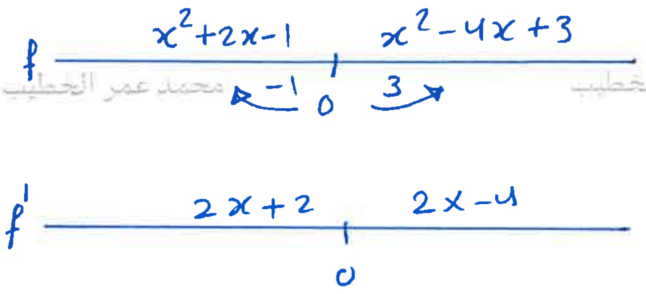
$(\frac{\pi}{4} , \frac{5\pi}{4}) + 2n\pi$.

فترة التزايد

$(\frac{5\pi}{4} , \frac{9\pi}{4}) + 2n\pi$.

(1) اوجد القيم القصوى المحلية للدالة

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & x<0 \\ x^2-4x+3 & x\geq 0 \end{cases}$$



$f'(x)=0$

(i) $2x+2=0$

$x=-1$ ✓

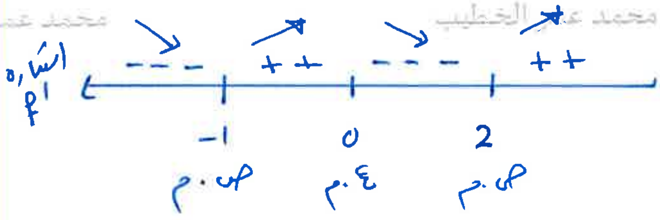
(ii) $2x-4=0$

$x=2$ ✓

$f'(x)$ غ.م

$x=0$

عدم اتصال



فترات التناقص

$(-\infty,-1)\cup(0,2)$

فترات التزايد

$(-1,0)\cup(2,\infty)$

قيمة صغرى محلية -2 عند $x=-1$

قيمة صغرى محلية -1 عند $x=2$

قيمة عظمى محلية 3 عند $x=0$

---

(2) لتكن : $f(x)=\sin x\cos x$ على $[0,2\pi]$ اوجد القيم القصوى المحلية وحدد اي منها قصوى

$f'(x)=\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot(-\sin x)$

$=\cos^2 x-\sin^2 x.$

$f'(x)=0$

$\cos^2 x-\sin^2 x=0$

$\sin^2 x=\cos^2 x$

$\sin x=\pm\cos x.$

$\tan x=\pm 1$

$\tan x=1$

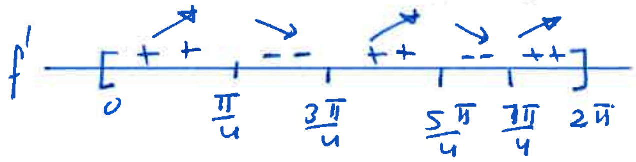
$x\ \angle\,\pi/4 \begin{cases} Q_1\to x=\pi/4 \\ Q_3\to x=\frac{5\pi}{4}\end{cases}$

$\tan x=-1$

$x\ \angle\,\pi/4 \begin{cases} Q_2\to x=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4} \\ Q_4\to x=2\pi-\pi/4=\frac{7\pi}{4}\end{cases}$

الاعداد الحرجة هي

$\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{5\pi}{4}\ ,\ \frac{3\pi}{4}\ ,\ \frac{7\pi}{4}.$



عظمى محلية عند $x=\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{5\pi}{4}\ ,\ 2\pi$

صغرى محلية عند $x=0\ ,\ \frac{3\pi}{4}\ ,\ \frac{7\pi}{4}.$

عظمى مطلقة $\frac{1}{2}$

صغرى مطلقة $-\frac{1}{2}$

فترات التزايد والتناقص بيانياً من الدالة $f'(x)$

الخطوات

ايجاد جميع النقاط الحرجة وتعينها على خط الاعداد.

أ) اذا كان بيان الدالة f' فوق محور السينات فان اشارة f' موجبة (+) اي ان الدالة f تكون متزايدة على هذه الفترة.

ب) اذا كان بيان الدالة f' تحت محور السينات فان اشارة f' سالبة (-)اي ان الدالة f تكون متناقصة على هذه الفترة.

يفضل تحويل الرسم الى خط اعداد (اشارة المشتقة)

تطابق الرسم مع الخط

(الرسم f' والخط f')

فوق محور x ← موجب

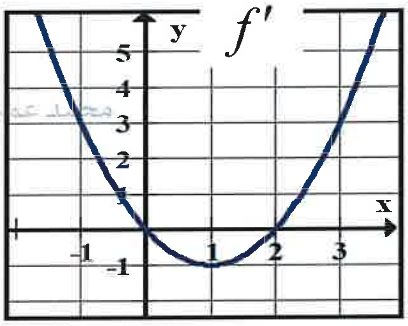
تحت محور x ← سالب

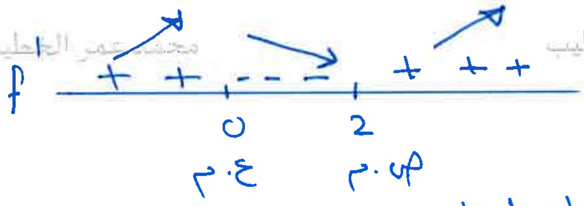
اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f'(x)$ في ايجاد

1) فترات التزيد والتناقص للدالة $f(x)$

2) قيم x التي عندها القيم القصوى المحلية للدالة ثم حدد نوعها.

a)



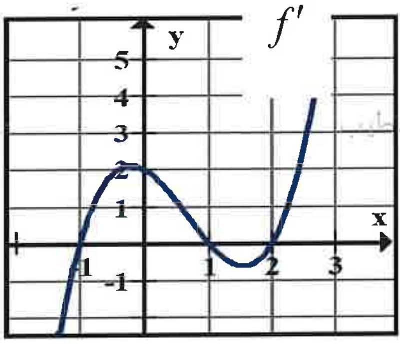


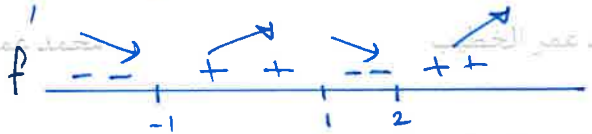
فترات التزايد $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$

فترة التناقص $(0, 2)$

عظمى محلية عند $x = 0$, صغرى محلية $x = 2$

b)





فترات التزايد $(-1, 1) \cup (2, \infty)$

فترات التناقص $(-\infty, -1) \cup (1, 2)$

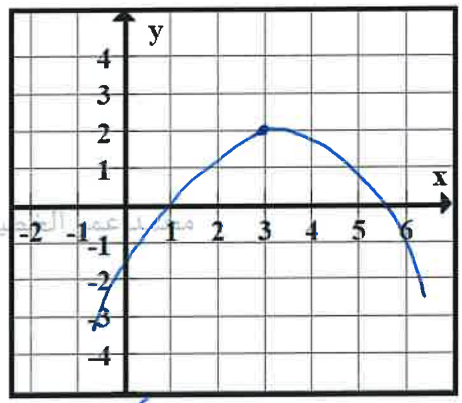
صغرى محلية عند $x = -1 , 2$

عظمى محلية عند $x = 1$

(1) استخدم المعطيات التالية في رسم بيان تقريبي للدالة $f(x)$

$$f(3)=2 \quad , f'(3)=0$$
$$f'(x)>0 , x<3$$
$$f'(x)<0 , x>3$$

f' + + + | 3 | − − −



يوجد رسومات صحيحة كثيرة .

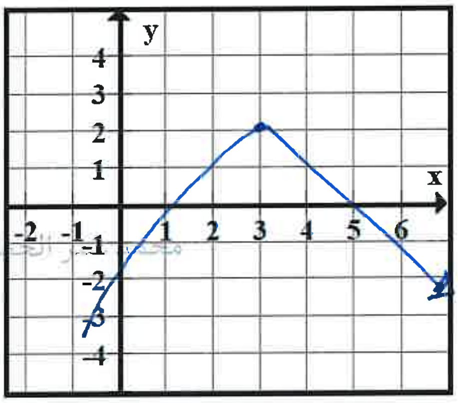
(2) استخدم المعطيات التالية في رسم بيان تقريبي للدالة $f(x)$

$$f(3)=2 \quad , f'(3)$$ غير موجودة

ركن
ناب
عدم اتصال

$$f'(x)>0 , x<3$$
$$f'(x)<0 , x>3$$

f' + + + | 3 | − − −



(3) استخدم المعطيات التالية في رسم بيان تقريبي للدالة $f(x)$

$$f(3)=2$$
$$f'(x)<0 , x\neq 3$$

− − − | 3 | − − −

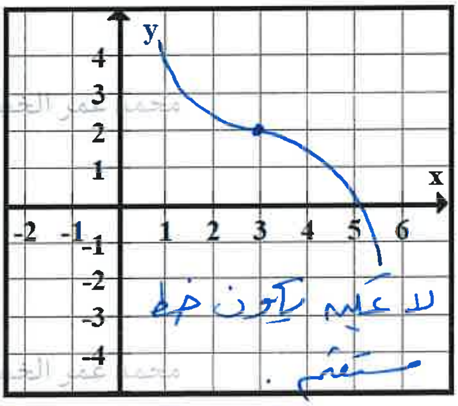
ممكن خط مستقيم

(4) استخدم المعطيات التالية في رسم بيان تقريبي للدالة $f(x)$

مماس افقي

$$f(3)=2 \quad , f'(3)=0$$
$$f'(x)<0 , x\neq 3$$

− − − | 3 | − − −



لا يمكن أن يكون خط مستقيم .

(1) اذا كانت f دالة متزايدة لها معكوس f^{-1}، فاثبت ان الدالة f^{-1} متزايدة

الاثبات : بما ان f متزايدة فان $f' > 0$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(u)} > 0$$

بما ان مشتقة الدالة العكسية موجبة فان الدالة العكسية تكون متزايدة .

---

(2) اذا كانت f و g دوال متزايدة، فاثبت ان الدالة $h(x) = f(g(x))$ دالة متزايدة

الاثبات: بما ان f, g دوال متزايدة فان $f' > 0$ ، $g' > 0$

$$h'(x) = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{موجب}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{موجب}} > 0$$

بما ان $h'(x)$ موجبة فان $h(x)$ تكون متزايدة .

---

(3) اذا كانت $f'(x) > g'(x)$ لكل $x > a$ حيث $f(a) = g(a)$، فاثبت ان $f(x) \geq g(x)$

الاثبات: لتكن

$h(x) = f(x) - g(x)$

$h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0$

∴ الدالة $h(x)$ متزايدة

لكل $x > a$

∴ $h(x) > h(a)$

$f(x) - g(x) > f(a) - g(a)$

$f(x) - g(x) > 0$

$f(x) > g(x)$ #

---

(4) استخدم السؤال السابق في اثبات ان $x - 1 > \ln x$ لكل $x > 1$

الاثبات : لتكن $f(x) = x - 1$

$f'(x) = 1$

$g(x) = \ln x$

$g'(x) = \frac{1}{x}$.

$f(1) = g(1) = 0$

لكل $x > 1$ فان $\frac{1}{x} < 1$

$g'(x) < f'(x)$ ، $g(1) = f(1)$

$g(x) < f(x)$. من السؤال السابق

$\ln x < x - 1$ #

الوحدة الرابعة : تطبيقات الاشتقاق /// الدرس الخامس : التقعر و اختبار المشتقة الثانية

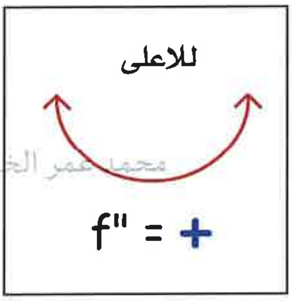
التقعر

الرسم البياني للدالة $y=f(x)$ يكون مقعراً للاعلى على الفترة المفتوحة I

(1) اذا كان منحنى الدالة يقع فوق جميع مماسته.

او (2) اذا كان $y'=f'(x)$ دالة متزايدة على الفترة المفتوحة I.

او (3) اذا كان $\underline{f''(x)>0}$ على الفترة المفتوحة I.

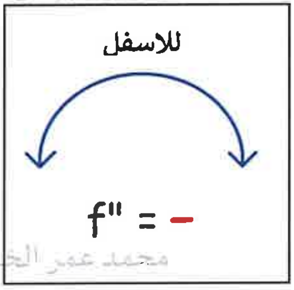


الرسم البياني للدالة $y=f(x)$ يكون مقعراً للاسفل على الفترة المفتوحة I

(1) اذا كان منحنى الدالة يقع تحت جميع مماسته.

او (2) اذا كان $y'=f'(x)$ دالة متناقصة على الفترة المفتوحة I.

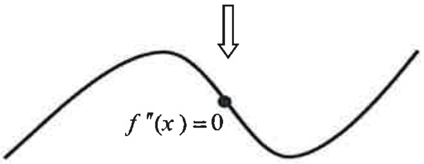
او (3) اذا كان $\underline{f''(x)<0}$ على الفترة المفتوحة I.



نقطة الانعطاف

اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المفتوحة (a,b) والتمثيل البياني يغير اتجاه التقعر عند النقطة $c\in(a,b)$ فان النقطة $(c,f(c))$ تسمى نقطة انعطاف.

ملاحظة: اذا كانت الدالة غير متصلة عند $x=c$ فانها لا تعتبر نقطة انقلاب (انعطاف)

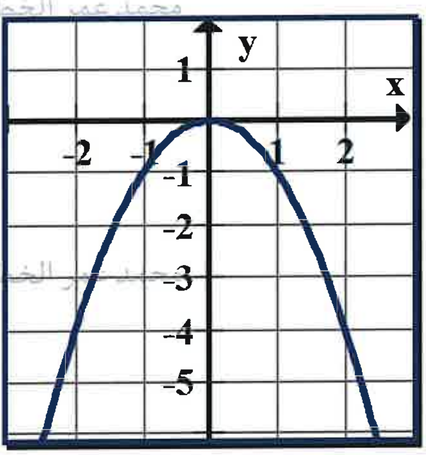


فترات التقعر للدالة (بيانياً) من الدالة f

الحل مباشرة من الرسم

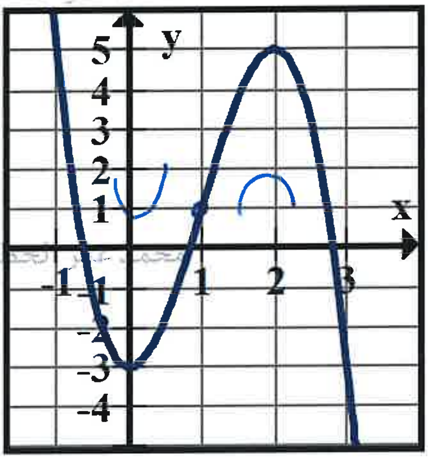
اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f ، اوجد في كل حالة مما ياتي .

(1) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (2) نقاط الانعطاف.



فترة التقعر للاسفل $(-\infty , \infty)$

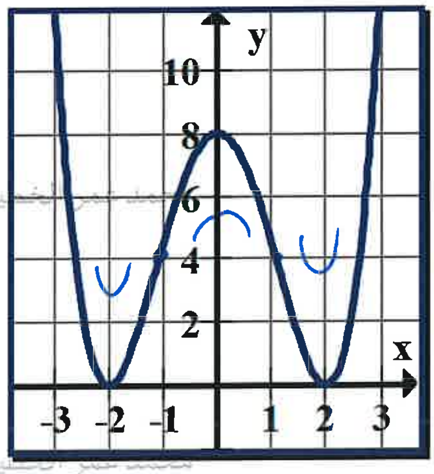
لا يوجد نقطة انعطاف



فترة التقعر للاعلى $(-\infty , ١)$

فترة التقعر للاسفل $(١ , \infty)$

نقطة الانعطاف $(١ , ١)$ زوج مرتب



فترة التقعر للاعلى

$(-\infty , -١) \cup (١ , \infty)$

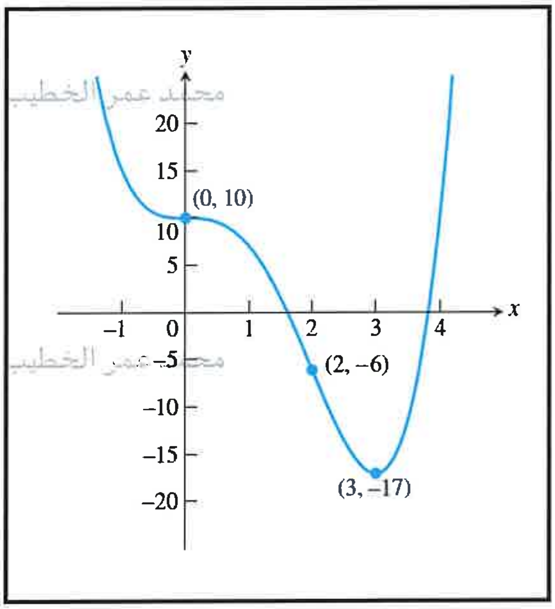
فترة التقعر للاسفل

$(-١ , ١)$

نقاط الانعطاف $(-١ , ٤)$ و $(١ , ٤)$

(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f للاجابة عن الاسئلة التالية:

(أ) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $(0 , 3)$



(ب) اوجد فترات التناقص للدالة $(-\infty , 3)$

(ج) اوجد فترات التزايد للدالة $(3 , \infty)$

(د) اوجد القيم القصوى المطلقة وبين نوعها

صغرى مطلقة -17 عند $x = 3$

(هـ) اوجد فترة التقعر للاسفل. $(0 , 2)$

(و) اوجد فترات التقعر للاعلى $(-\infty , 0) \cup (2 , \infty)$

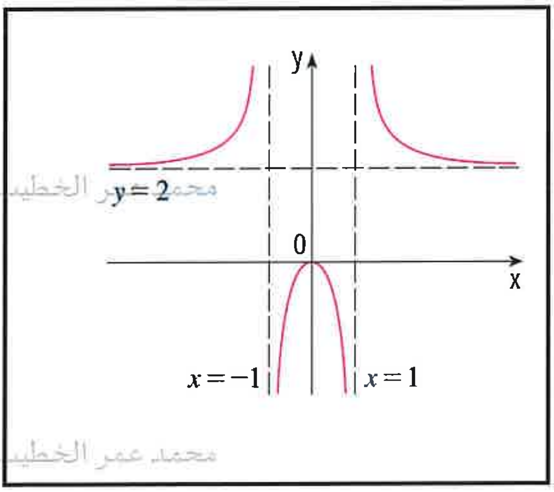
(ي) اوجد نقاط الانعطاف للدالة $(2 , -6) \cup (0 , 10)$

(ل) اوجد الفترة التي تكون عندها اشارة الدالة f' والدالة f'' سالبتين $(0 , 2)$

---

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f للاجابة عن الاسئلة التالية:

(أ) اوجد الاعداد الحرجة للدالة 0



(ب) اوجد فترات التناقص للدالة $(0 , 1) \cup (1 , \infty)$

(ج) اوجد فترات التزايد للدالة $(-\infty , -1) \cup (-1 , 0)$

(د) اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

قيمة عظمى محلية 0 عند $x = 0$

(هـ) اوجد فترات التقعر للاسفل $(-1 , 1)$

(و) اوجد فترات التقعر للاعلى $(-\infty , -1) \cup (1 , \infty)$

(ي) هل يوجد نقاط انعطاف للدالة لا يوجد

فترات التقعر للدالة (تحليلياً)

(1) ايجاد جميع النقاط التي تجعل المشتقة الثانية تساوي صفر او غير موجودة وتعينها على خط الاعداد.

(2) دراسة اشارة المشتقة الثانية f''.

(3) تحديد سلوك الدالة f من خلال اشارة الدالة f''.

أ) اذا كانت اشارة الدالة f'' موجبة (+)على فترة فان الدالة f تكون مقعرة للاعلى على هذه الفترة.

ب) اذا كانت اشارة الدالة f'' سالبة (-)على فترة فان الدالة f تكون مقعرة للاسفل على هذه الفترة.

لتكن: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

اوجد (أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) نقاط الانعطاف

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 0$

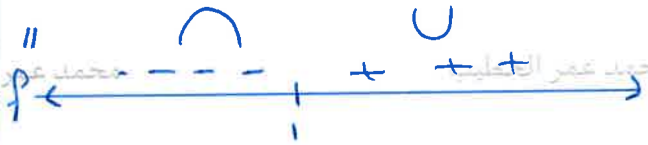
$6x - 6 = 0$

$x = 1$

* نقطة شك عند $x=1$

ممكن تكون عندها للدالة

نقطة انعطاف وممكن لا .



فترة التقعر للاسفل $(-\infty, 1)$

فترة التقعر للاعلى $(1, \infty)$

نقطة الانعطاف

$(1, f(1))$

$(1, -1)$

(1) لتكن: $f(x)=x+\frac{1}{x}$ اوجد

$D = R / \{0\}$

(أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) نقاط الانعطاف

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - x^{-2}$

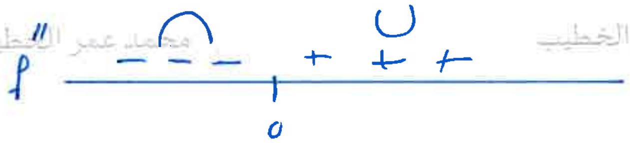
$f''(x) = +2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

$f''(x) = 0$

لايوجد حل

$f''(x)$ غ.م

$x = 0$



فتره التقعر للاسفل

$(-\infty, 0)$

فتره التقعر للاعلى

$(0, \infty)$

* لايوجد للدالة نقطة انعطاف عند $x=0$ لان الدالة غير متصلة عند $x=0$

---

(2) لتكن: $f(x)=(x+2)^{\frac{1}{5}}+4$ اوجد

$D = (-\infty, \infty)$

(أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) نقاط الانعطاف

$f'(x) = \frac{1}{5}(x+2)^{-4/5}$

$f''(x) = -\frac{4}{25}(x+2)^{-9/5}$

$= \frac{-4}{25(x+2)^{9/5}}$

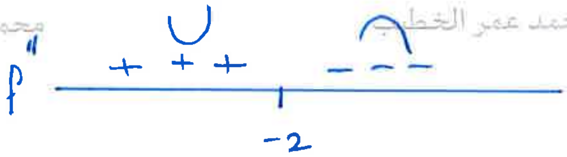
$f''(x) = 0$

لايوجد حل

$f''(x)$ غ.م

$x = -2$

نقطة شوذ



$(-\infty, -2)$ فتره التقعر للاعلى

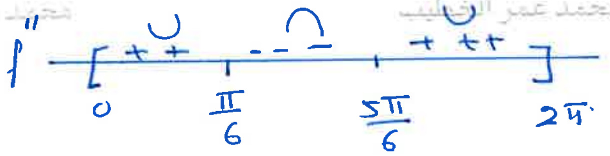
$(-2, \infty)$ فتره التقعر للاسفل

نقطة الانعطاف

$(-2, 4)$

(1) لتكن: $f(x) = x^2 + 4\sin x$ على $[0, 2\pi]$

اوجد (أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) نقاط الانعطاف



للاعلى

$(0, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5\pi}{6}, 2\pi)$

للاسفل

$(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$

نقاط الانقلاب عند $x = \frac{\pi}{6}$

$(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi^2}{36} + 2)$

$(\frac{5\pi}{6}, \frac{25\pi}{6} + 2)$

$f'(x) = 2x + 4\cos x$

$f''(x) = 2 - 4\sin x$

$f''(x) = 0$

$2 - 4\sin x = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x \begin{cases} \frac{\pi}{6} \end{cases}$ $Q_1 \rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

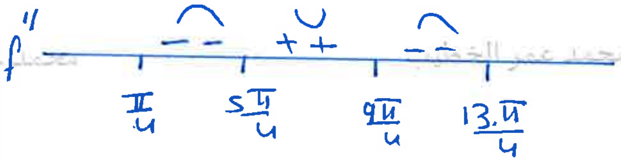
$Q_2 \rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$

---

(2) لتكن: $f(x) = \sin x - \cos x$

اوجد (أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) نقاط الانعطاف

تأخذ بعض قيم $n \in Z$



للاسفل

$(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}) + 2n\pi$

للاعلى

$(5\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}) + 2n\pi$

نقاط الانعطاف عند

$x = \frac{\pi}{4} + n\pi .$

$f'(x) = \cos x + \sin x$

$f''(x) = -\sin x + \cos x$

$f''(x) = 0$

$-\sin x + \cos x = 0$

$\sin x = \cos x$

$\tan x = 1$

$x \begin{cases} \pi/4 \end{cases}$ $Q_1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$Q_3 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}.$

$x = \frac{\pi}{4} + n\pi$

$x = \frac{5\pi}{4} + n\pi$

الفرق بينهم π

$x = \frac{\pi}{4} + n\pi .$

(1) لتكن: $f(x)=xe^{-4x}$

$D=(-\infty,\infty)$

اوجد (أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) نقاط الانعطاف

$f'(x)=1\cdot e^{-4x}+xe^{-4x}\cdot(-4)$

$=e^{-4x}(1-4x)$

$f''(x)=e^{-4x}(-4)\cdot(1-4x)+e^{-4x}(-4)$

$=-4e^{-4x}(1-4x+1)$

$=-4e^{-4x}(2-4x)$

$=-4\frac{(2-4x)}{e^{-4x}}$

$f''(x)=0$

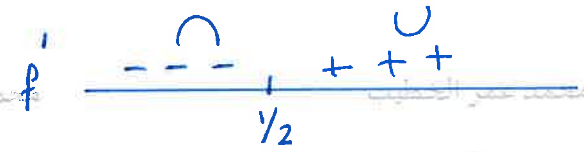
$2-4x=0$

$x=1/2$

$f''(x)$ غ.م

$e^{-4x}=0$

لايوجد حل



للاسفل $(-\infty,1/2)$

للاعلى $(1/2,\infty)$

نقطة الانعطاف $(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-2})$

---

(2) لتكن: $f(x)=x^{4/3}+4x^{1/3}$

$D=(-\infty,\infty)$

اوجد (أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) نقاط الانعطاف

$f'(x)=\frac{4}{3}x^{1/3}+\frac{4}{3}x^{-2/3}$

$f''(x)=\frac{4}{9}x^{-2/3}-\frac{8}{9}x^{-5/3}$

$=\frac{4}{9}x^{-5/3}\left(\frac{x^{-2/3}}{x^{-5/3}}-2\right)$

$=\frac{4}{9}x^{-5/3}(x-2)$

$=\frac{4}{9}\frac{x-2}{x^{5/3}}$

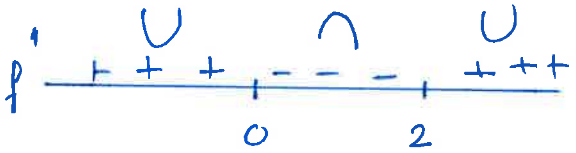
$f''(x)=0$

$x-2=0$

$x=2$

$f''(x)$ غ.م

$x=0$



للاعلى $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$

للاسفل $(0,2)$

نقطة الانعطاف عند

$x=0\ ,\ x=2$

(1) لتكن: $f(x)=\tan^{-1}x^{2}$

اوجد **(أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل** **(ب) نقاط الانعطاف**

$$f'(x)=\frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot 2x$$

$$=\frac{2x}{1+x^4}$$

$$f''(x)=\frac{2(1+x^4)-2x(4x^3)}{(1+x^4)^2}$$

$$=\frac{2+2x^4-8x^4}{(1+x^4)^2}$$

$$=\frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$$

$f''(x)=0$

$2-6x^4=0$

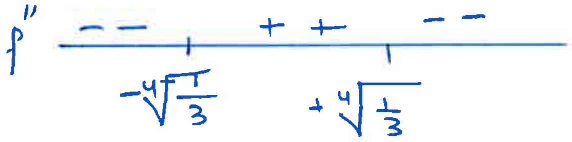
$x^4=1/3$

$x=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$

$f''(x)$ غ.م

$1+x^4=0$

لا يوجد حل.



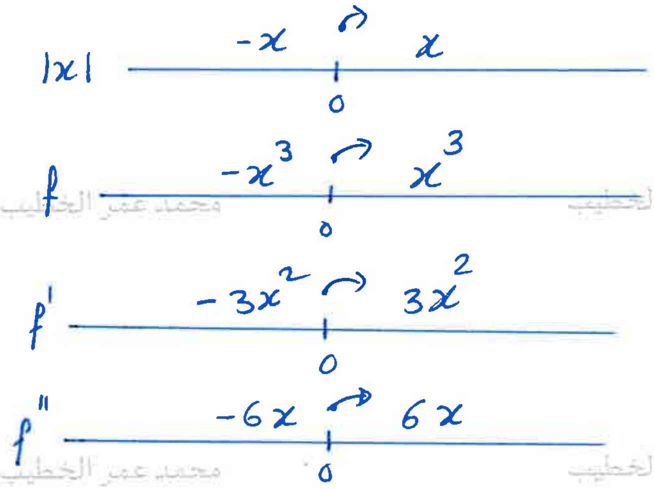
للاسفل $(-\infty,-\sqrt[4]{\frac{1}{3}})\cup(\sqrt[4]{\frac{1}{3}},\infty)$

للاعلى $(-\sqrt[4]{\frac{1}{3}},\sqrt[4]{\frac{1}{3}})$

نقاط الانعطاف عند $x=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$

(2) لتكن: $f(x)=x^{2}|x|$

اوجد **(أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل** **(ب) نقاط الانعطاف**



$f''(x)=0$

$6x=0$

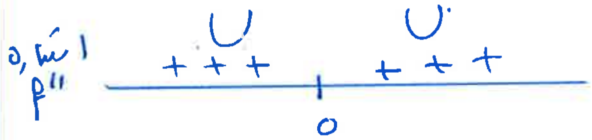
$x=0$

$-6x=0$

$x=0$

$f''(x)$ غ.م

لا يوجد



للاعلى $(-\infty,\infty)$

للاسفل لا يوجد

لا يوجد نقاط انعطاف

السؤال الشامل

	$f'(x)<0$	$f'(x)>0$
$f''(x)>0$	تناقص وتقعر للاعلى 	تزايد وتقعر للاعلى 
$f''(x)<0$	تناقص وتقعر للاسفل 	تزايد وتقعر للاسفل 

اكمل الخريطة التالية

$$f(x)=x^3-6x^2$$

$f'(x)=$ ..$3x^2-12x$..

$f''(x)=$ ..$6x-12$..

الاعداد الحرجة هي

$x=0$, $x=4$

اصفار المشتقة الثانية هي

$x=2$

$(4,\infty)$	$(0,4)$	$(-\infty,0)$	الفترات
+ +	− −	+ +	اشارة $f'(x)$
تزايد	تناقص	تزايد	سلوك $f(x)$

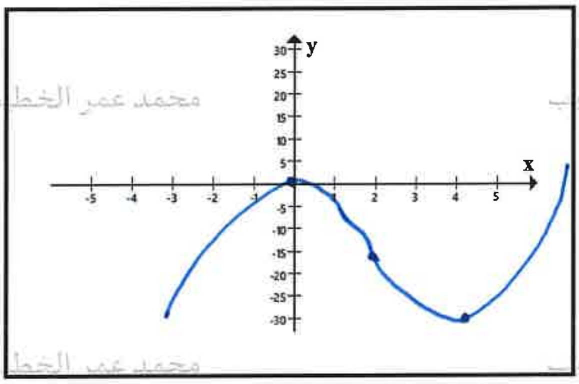
$(2,\infty)$	$(-\infty,2)$	الفترات
+ +	− −	اشارة $f''(x)$
للاعلى	للاسفل	سلوك $f(x)$

يوجد قيمة عظمى محلية للدالة عند x تساوي $x=0$

يوجد قيمة صغرى محلية للدالة عند x تساوي $x=4$

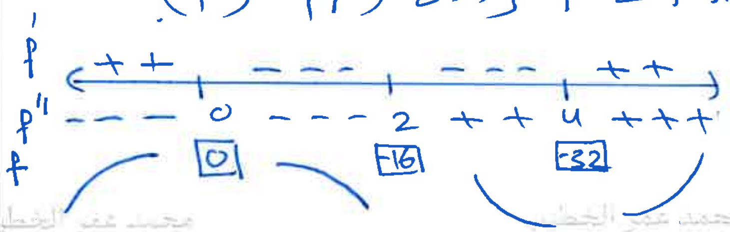
يوجد نقطة انقلاب للدالة عند x تساوي

$x=2$



استفد من المخطط السابق في رسم بيان الدالة $f(x)$

* الخط المزدوج: 2 (مهم للرسم)



لتكن $f(x) = x^4 + 4x^3 - 1$

(1) اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة **(2)** اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

(3) اوجد فترات التقعر للاعلى وللاسفل **(4)** اوجد نقاط الانعطاف للدالة **(5)** ارسم الدالة

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2$

$f'(x) = 0$

$4x^3 + 12x^2 = 0$

$x = 0, \quad x = -3.$

f' : − − − | + + + | + + +

−3 ص.م , 0

$(-\infty, -3)$ تناقص

$(-3, \infty)$ تزايد

$x = -3$ عند -28 صغرى محلية

$f''(x) = 12x^2 + 24x$

$f''(x) = 0$

$x = -2, \quad x = 0$

f'' : + + ∪ | − − ∩ | + + + ∪

−2 , 0

$(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ للاعلى

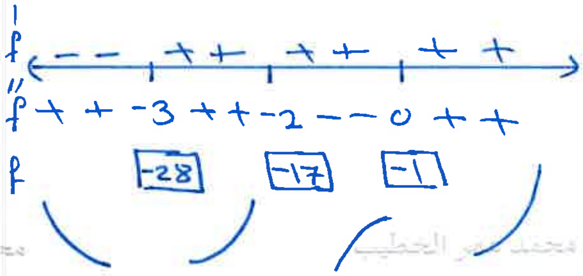
$(-2, 0)$ للاسفل

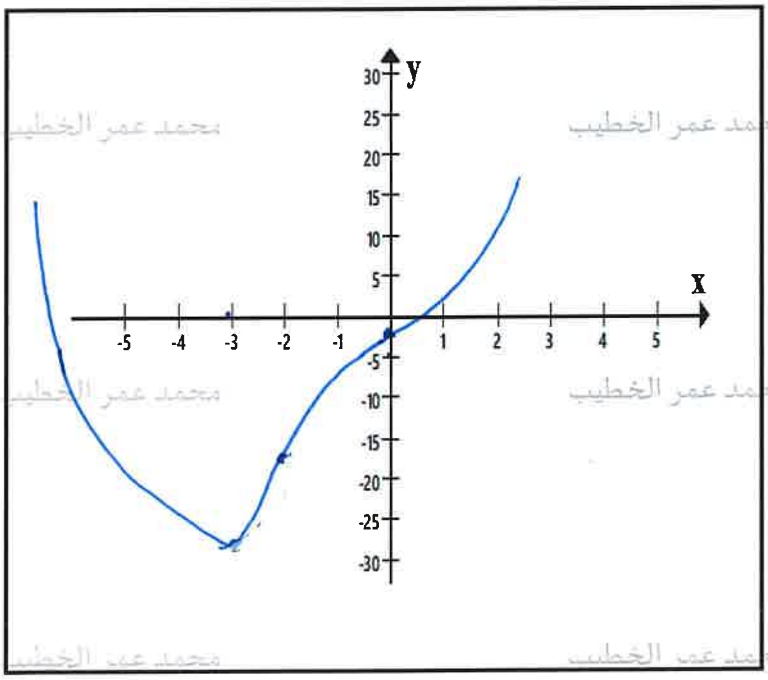
نقاط الانعطاف عند

$x = -2, \quad x = 0.$

(مهم)

* الخط المزدوج لرسم الدالة.





لتكن $f(x)=x+3(1-x)^{1/3}$

(1) اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة **(2)** اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

(3) اوجد فترات التقعر للاعلى وللاسفل **(4)** اوجد نقاط الانعطاف للدالة **(5)** ارسم الدالة

$$f'(x) = 1 + (1-x)^{-2/3}(-1)$$

$$= 1 - (1-x)^{-2/3}$$

$$= 1 - \frac{1}{(1-x)^{2/3}}$$

$$= \frac{(1-x)^{2/3}-1}{(1-x)^{2/3}}$$

$f'(x) = 0$

$(1-x)^{2/3} = 1$

$(1-x)^2 = 1$

اما $1-x = 1$

$x = 0$

او $1-x = -1$

$x = 2$

$f''(x)$ م.ع

$1-x=0$

$x=1$

الاعداد الحرجة هي 0 و 1 و 2

$$f' \quad + + \; \nearrow \;|_0\; - - \;\searrow\; |_1\; - - \;|_2\; + + \;\nearrow$$

تزايد $(-\infty,0) \cup (2,\infty)$

تناقص $(0,2)$

عظمى محلية عند $x=0$

صغرى محلية عند $x=2$

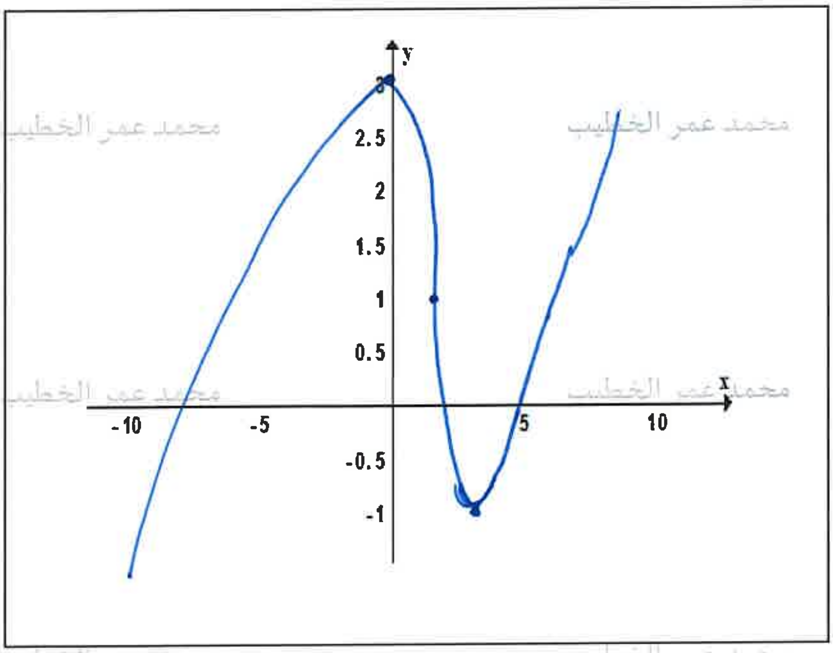
$$f''(x) = \frac{2}{3}(1-x)^{-5/3} = \frac{2}{3(1-x)^{5/3}}$$

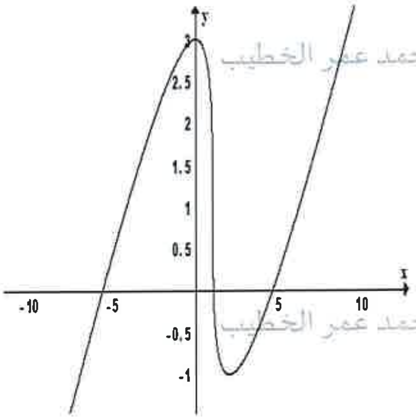
$f''(x)=0$ لا يوجد حل ، $f''(x)$ م ع

$1-x=0$

$x=1.$

$$f'' \quad - - - \;\cap\; |_1 \; + + + \;\cup$$





$$f' \quad + + \;|\; - - \;|\; - - \;|\; + +$$

$$f'' \quad - - \;0\; - - \;1\; + + \;2\; + +$$

$$f \quad \frown \;\boxed{3}\; \frown \;\boxed{1}\; \smile \;\boxed{-1}\; \smile$$

لتكن $f(x)=e^{-x^2/2}$ حيث $f'(x)=-xe^{-x^2/2}$ و $f''(x)=(x^2-1)e^{-x^2/2}$

(1) اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة (2) اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

(3) اوجد فترات التقعر للاعلى وللاسفل (4) اوجد نقاط الانعطاف للدالة (5) ارسم الدالة

$$f'(x) = \frac{-x}{e^{x^2/2}}$$

$f'(x)=0$

$x=0$

$f'(x)$ غ.م

لايوجد حل.

$x=0$ هي الاعداد الحرجة

f' : + + + + | 0 | − − −

م.ع

تزايد $(-\infty,0)$

تناقص $(0,\infty)$

$$f''(x) = \frac{x^2-1}{e^{x^2/2}}$$

$f''(x)=0$

$x^2-1=0$

$x=\pm 1$

$f''(x)$ غ.م

لايوجد حل

f'' : + + ∪ | -1 | − − − ∩ | 1 | + + ∪

للاعلى $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

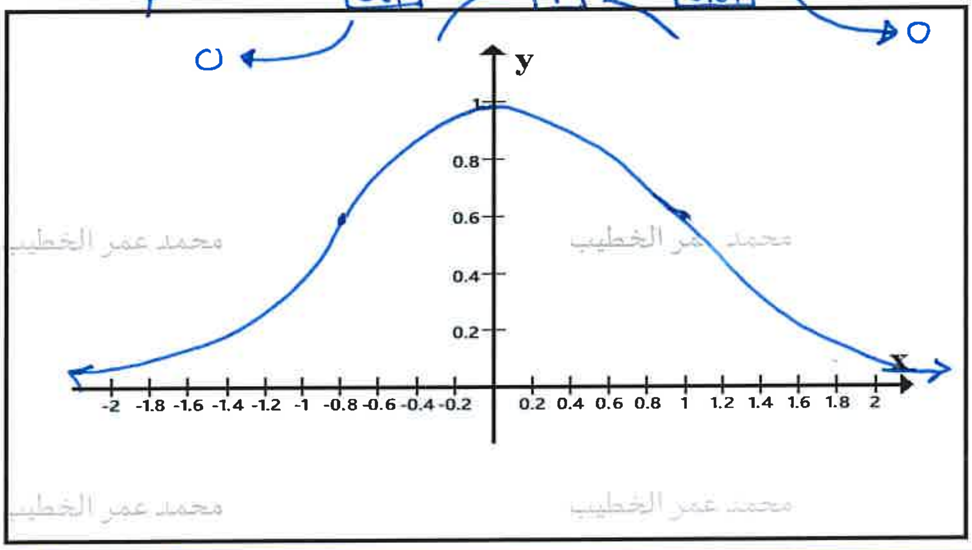
للاسفل $(-1,1)$

نقاط الانعطاف عند $x=-1,1$

f' : + + + + + | − − − − − − −

f'' : + + -1 − − − 0 − − 1 + +

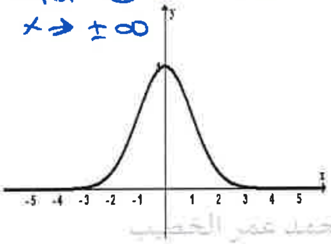
f : $\boxed{0.61}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0.61}$



خط تقارب افقي

$\boxed{y=0}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2/2} = 0$$



$f(x)=e^{-x^2/2}$

لتكن $f(x)=\left|x^{3}-1\right|$

ملاحظة : لان الرسم سهل... يفضل الرسم ثم ايجاد المطلوب

(1) اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة (2) اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

(3) اوجد فترات التقعر للاعلى وللاسفل (4) اوجد نقاط الانعطاف للدالة (5) ارسم الدالة

ملاحظة : في هذا السؤال لان الرسم سهل ...

سنقوم اولاً برسم الدالة ثم ايجاد المطلوب من الرسم

مع العلم انه عليك حل السؤال جبرياً ثم الرسم .

فترات التناقص $(-\infty , ١)$

فترات التزايد $(١ , \infty)$

صغرى محلية ٠ عند $x = ١$

وهي مطلقة

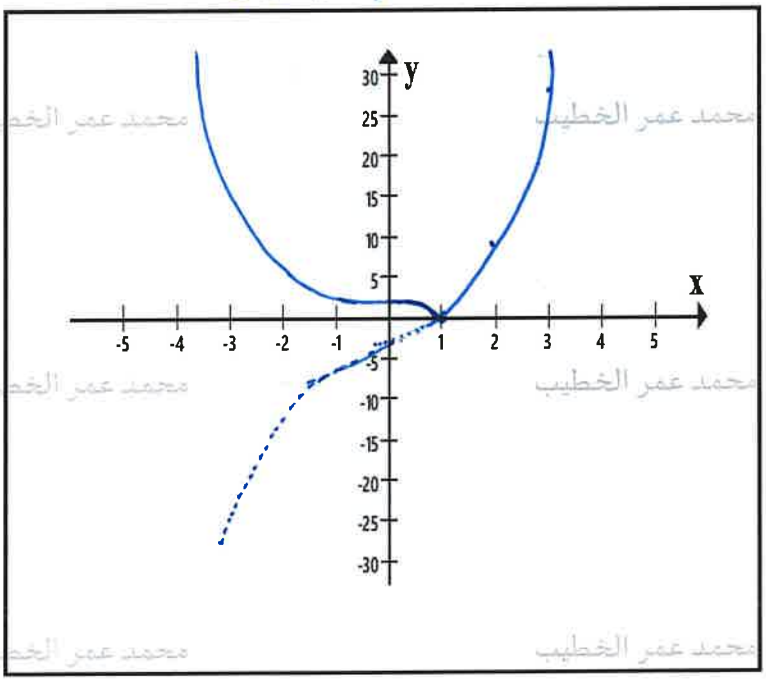
فترات التقعر للاعلى

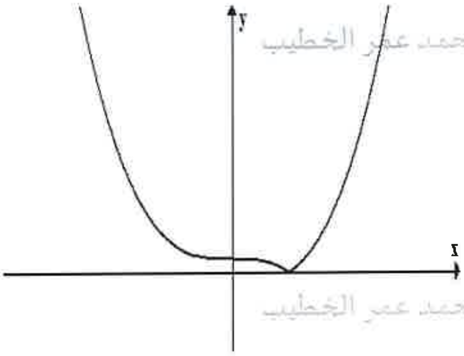
$(-\infty , ٠) \cup (١ , \infty)$

للاسفل $(٠ , ١)$

نقاط الانعطاف

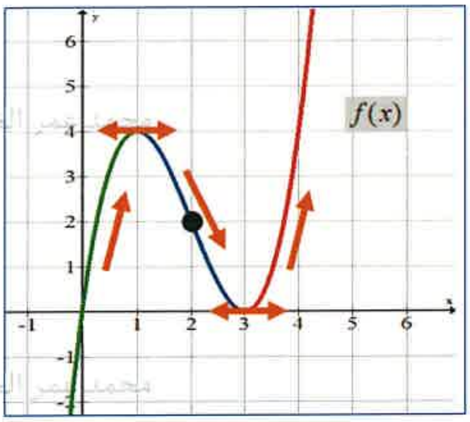
$(٠ , ١) , (١ , ٠)$





الربط بين منحنى الدالة ومنحنى المشتقة الأولى ومنحنى المشتقة الثانية

سلوك الدالة $f(x)$ ....من بيان الدالة $f(x)$



مباشر من الرسم

فترات التزايد للدالة f $(3,\infty)$, $(-\infty,1)$

فترات التناقص للدالة f $(1,3)$

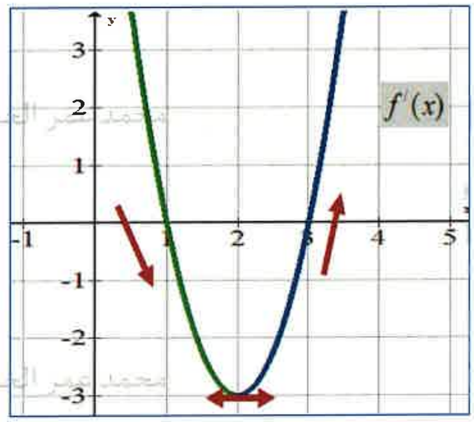
فترات التقعر لأعلى للدالة f $(2,\infty)$

فترات التقعر لأسفل للدالة f $(-\infty,2)$

نقطة الانقلاب $(2,2)=(2,f(2))$

$f'(1)=0 \quad , \quad f'(3)=0$

سلوك الدالة $f(x)$ ....من بيان الدالة $f'(x)$



(1) اذا كان $f'(x)$ فوق محور السينات فأن اشارة $f'(x)$ موجبة

(2) اذا كان $f'(x)$ تحت محور السينات فأن اشارة $f'(x)$ سالبة

تطابق الخط مع الرسم

x	$-\infty$	1		3	∞
f'	+++	0	−−−	0	+++
f	↗		↘		↗

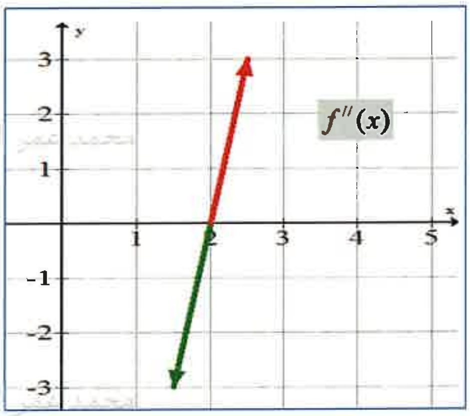
(1) اذا كان $f'(x)$ متزايدة فأن اشارة $f''(x)$ موجبة

(2) اذا كان $f'(x)$ متناقصة فأن اشارة $f''(x)$ سالبة

ليس تطابق

x	$-\infty$	2	∞
f''	−−−	0	+++
f	∩		∪

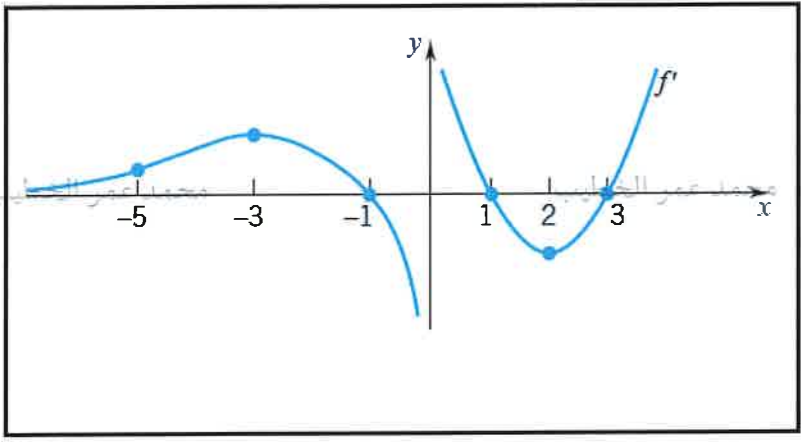
سلوك الدالة $f(x)$ ....من بيان الدالة $f''(x)$



تطابق الخط مع الرسم

x	$-\infty$	2	∞
f''	−−−	0	+++
f	∩		∪

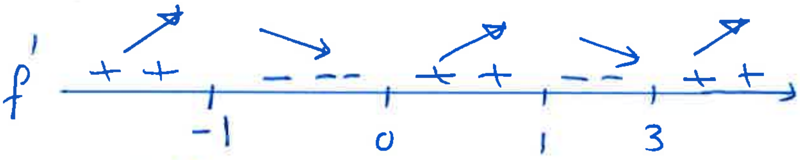
اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f'(x)$ للدالة **المتصلة** $f(x)$ في ايجاد



(1) النقاط الحرجة.

$-1 ، 0 ، 1 ، 3$.

(2) اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة.



تزايد $(-\infty,-1)\cup(0,1)\cup(3,\infty)$

تناقص $(-1,0)\cup(1,3)$

تطابق الرسم مع الخط .

فوق ← موجب

تحت ← سالب

(3) اوجد قيم x التي عندهاالقيم القصوى المحلية وبين نوعها.

عظمى محلية عند $x=-1, 1$

صغرى محلية عند $x=0,3$

(4) اوجد فترات التقعر للاعلى وللاسفل.

للاعلى $(-\infty,-3)\cup(2,\infty)$

للاسفل $(-3,2)$

* f' متزايدة فان $f''>0$

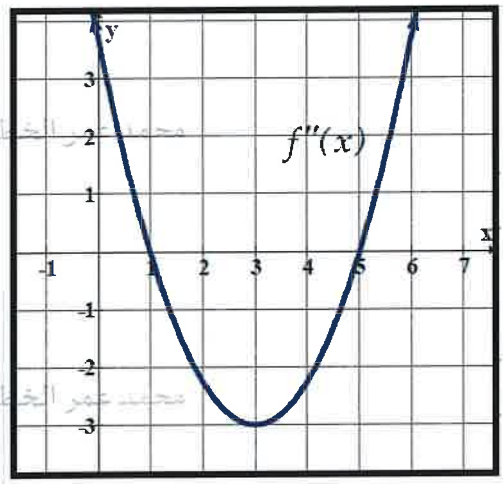
ليس تطابق .

* f' متناقصة فان $f''<0$

(5) اوجد قيم x التي عندها نقاط انعطاف للدالة. $x=-3 , x=2$

(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f''(x)$ في ايجاد

(أ) فترات التقعر للاعلى وللاسفل



للاعلى $(-\infty ,1) \cup (5,\infty)$

للاسفل $(1,5)$

(ب) قيم x التي عندها نقاط الانقلاب.

$x=1$ ، $x=5$

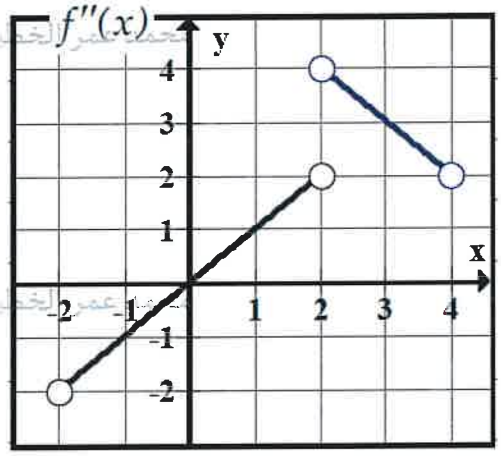
فوق ← موجب
تحت ← سالب

تطابق الخط مع الرسم

---

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f''(x)$ للدالة المتصلة $f(x)$ في ايجاد

(أ) فترات التقعر للاعلى وللاسفل

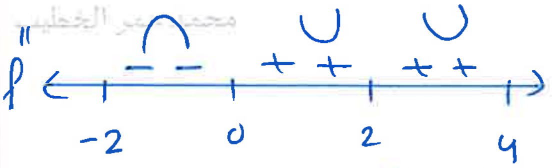


للاسفل $(-2,0)$

للاعلى $(0,4)$

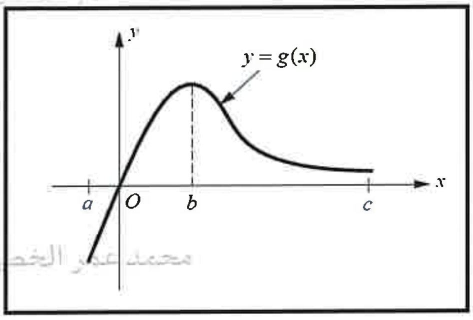
(ب) قيم x التي عندها نقاط الانقلاب.

$x=0$



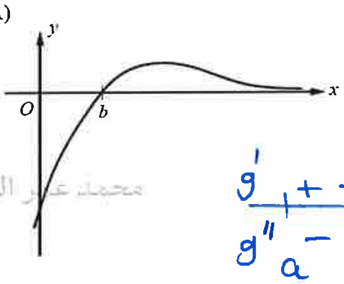
تطابق الخط مع الرسم.

1) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $g(x)$

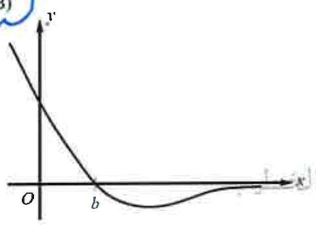


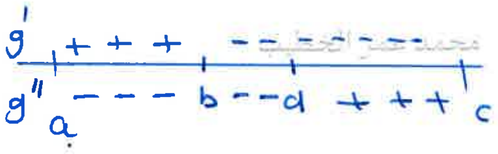
اي من الاشكال التالية يمكن ان يمثل بيان الدالة $g'(x)$

(A)

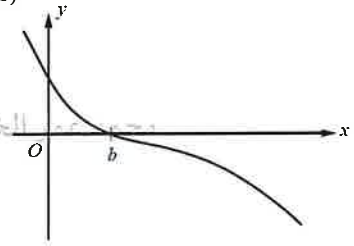


(B)

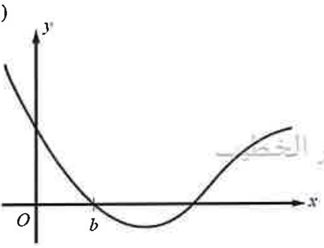




(C)

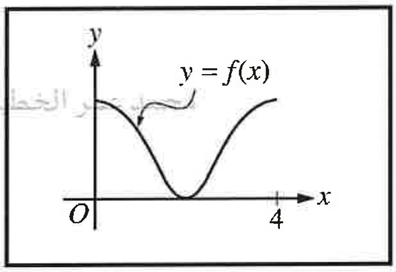


(D)



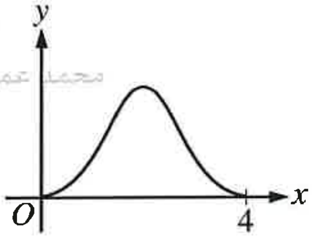
---

2) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$

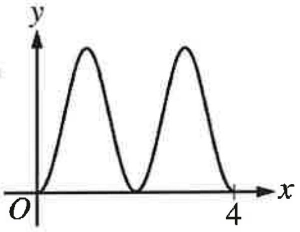


اي من الاشكال التالية ممكن ان يكون لبيان الدالة $f'(x)$

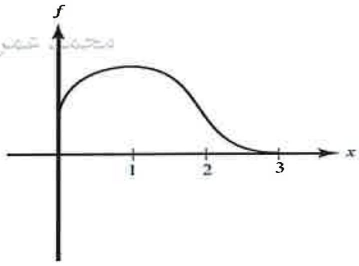
(A)



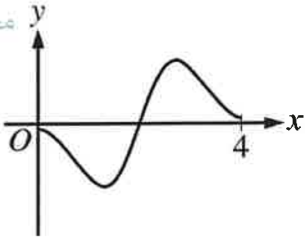
(B)



(C)

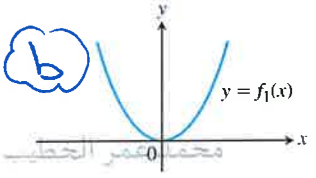


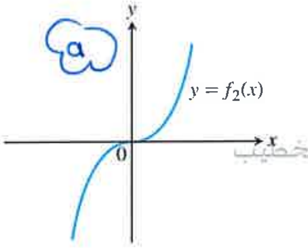
(D)

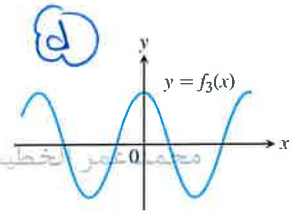


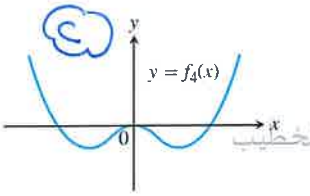
(1) صل بين كل رسم بياني يمثل الدالة f من المجموعة A بالرسم البياني الذي يمثل مشتقتها من المجموعة B.

A f

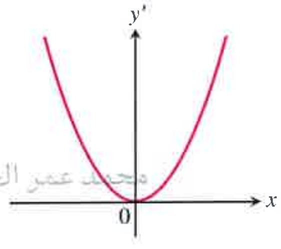




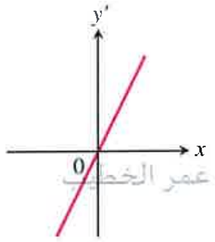




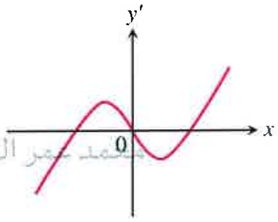
B f'



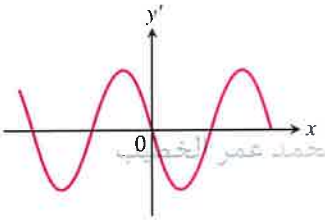
(a)



(b)



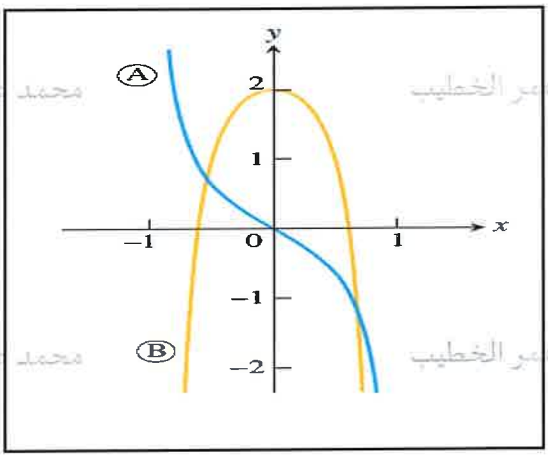
(c)

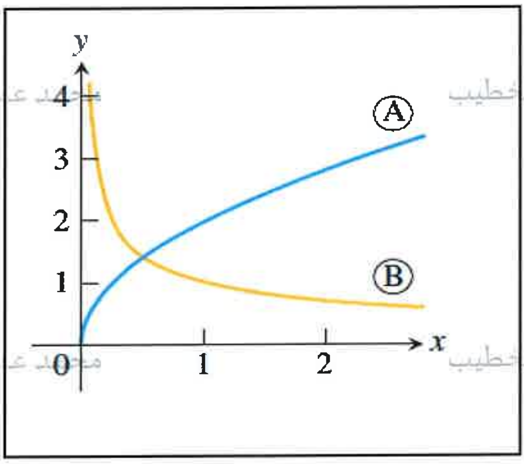


(d)

---

(2) حدد على الشكل المجاور بيان كل من الدوال $f(x)$ و $f'(x)$





B → f

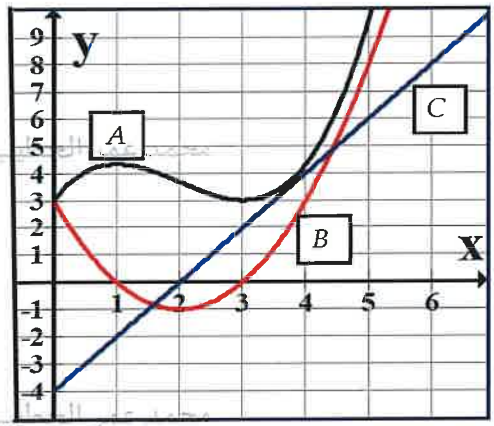
A → f'

A → f

B → f'

الخط المميز

(1) حدد على الشكل المجاور بيان كل من الدوال $f(x)$ و $f'(x)$ و $f''(x)$



A → f
B → f'
C → f''

ملاحظة (الخط المميز)

الخط المميز هو خط يمر بنقطة انقلاب وقيمة قصوى محلية ومقطع مع محور السينات فيكون

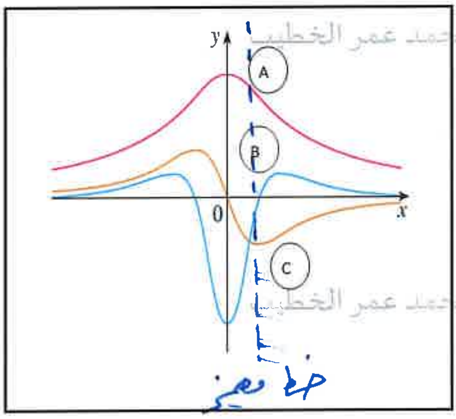
(1) نقطة الانقلاب على $f(x)$

(2) القيمة القصوى المحلية على $f'(x)$

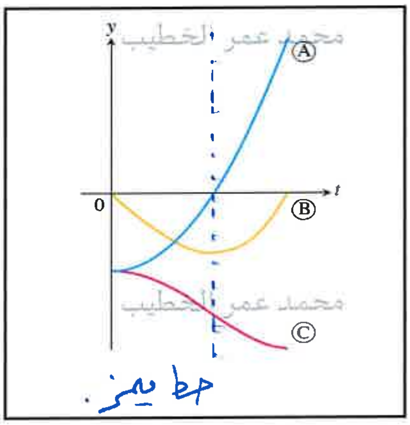
(3) المقطع مع محور السينات على $f''(x)$

---

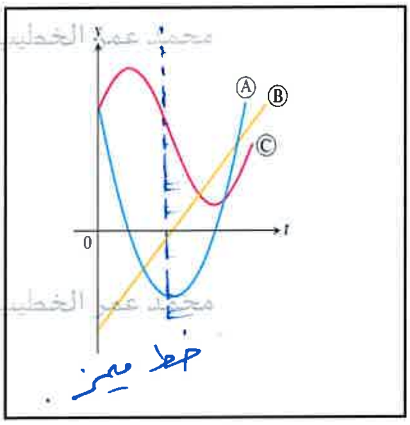
(2) حدد على الشكل المجاور بيان كل من الدوال $f(x)$ و $f'(x)$ و $f''(x)$



A → f
C → f'
B → f''



C → f
B → f'
A → f''

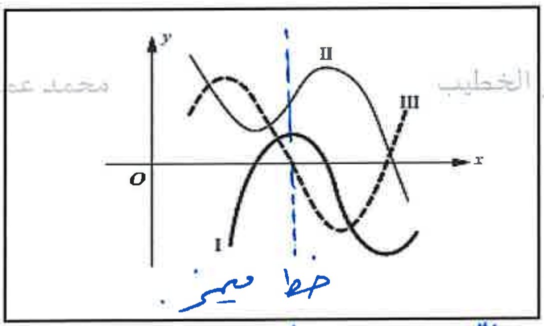


C → f
A → f'
B → f''

---

(3) بالاعتماد على الشكل المجاور اي من الخيارات التالية هي الصحيحة

	f	f'	f''
(a)	I	II	III
[✓ (b)]	II	I	III
(c)	III	II	I
(d)	II	III	I

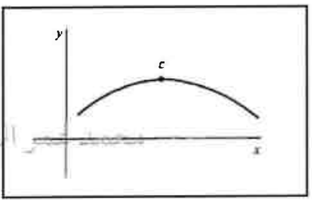


f → II , f' → I , f'' → III

اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية

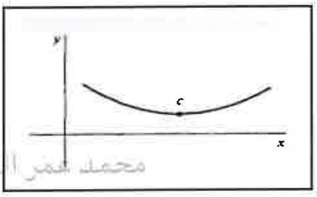
1) اذا كانت $f'(c)=0 \quad , \quad f''(c)<0$

فان f تكون لها قيمة عظمى محلية عند $x=c$



2) اذا كانت $f'(c)=0 \quad , \quad f''(c)>0$

فان f تكون لها قيمة صغرى محلية عند $x=c$



ملاحظة: (أ) لايجوز استخدام اختبار المشتقة الثانية اذا كانت $f'(c)$ غير موجودة

(ب) يفشل اختبار المشتقة الثانية اذا كانت $f''(c)=0$ ويجب الرجوع لاختبار المشتقة الأولى

(1) استخدم اختبار المشتقة الثانية لايجاد القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)=x^3-12x-5$

$f'(x) = 3x^2-12$

$f'(x) = 0$

$x=-2 , \quad x=2$

$-2 , 2$ الاعداد الحرجة

$f''(x) = 6x$

$f''(-2) = 6(-2) = -12 < 0$

للدالة قيمة عظمى محلية عند $x=-2$

ومقدارها 11

$f''(2) = 6(2) = 12 > 0$

للدالة قيمة صغرى محلية عند $x=2$

ومقدارها -21

---

(2) استخدم اختبار المشتقة الثانية لايجاد القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)=x^3-5x^2+3x$

$f'(x) = 3x^2-10x+3$

$f'(x) = 0$

$x = 1/3 \quad , \quad x = 3$

$f''(x) = 6x-10$

$f''(3) = 6(3)-10 = 8 > 0$

قيمة صغرى محلية -9 عند $x=3$

$f''(1/3) = 6(1/3)-10 = -8 < 0$

قيمة عظمى محلية $\frac{13}{27}$ عند $x=1/3$

(1) استخدم اختبار المشتقة الثانية لايجاد القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)=xe^{-x}$ حيث

$$f''(x)=e^{-x}(x-2)\ \ ,\ f'(x)=e^{-x}(1-x)$$

$D=(-\infty,\infty)$

$f'(x)=e^{-x}(1-x)$

$=\dfrac{1-x}{e^{x}}$

$f'(x)=0$ $\quad$ $f'(x)$ غ.م

$1-x=0$ $\quad$ لا يوجد حل

$x=1$

$f''(1)=e^{-1}(1-2)=-e^{-1}<0$

للدالة قيمة عظمى محلية عند $x=1$

وهي $\frac{1}{e}$.

---

(2) اوجد القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)=x^{4}+4x^{3}-1$

$f'(x)=4x^{3}+12x^{2}$

$f'(x)=0$

$x=-3\ ,\ x=0$

الاعداد الحرجة هي $-3, 0$

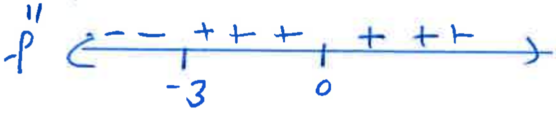
$f''(x)=12x^{2}+24x$.

$f''(-3)=36>0$

للدالة قيمة صغرى محلية عند $x=-3$

$f''(0)=0$

يفشل اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة القصوى المحلية عند $x=0$ ويجب الرجوع الى اختبار المشتقة الاولى.



لا يوجد قيم قصوى محلية عند $x=0$

---

(3) اوجد القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)=\dfrac{x^{2}-1}{x}$

$D=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

$f'(x)=\dfrac{2x(x)-(x^{2}-1)(1)}{x^{2}}$

$=\dfrac{x^{2}+1}{x^{2}}$

$f'(x)=0$ $\quad$ $f'(x)$ غ.م

لا يوجد حل $\quad$ $x=0$ خارج المجال

لا يوجد اعداد حرجة

∴ لا يوجد للدالة قيم قصوى.

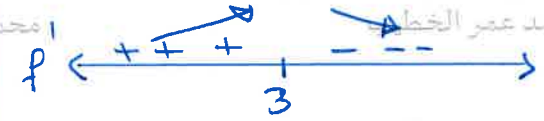
القيمة القصوى المحلية الوحيدة

نظرية القيمة القصوى المحلية الوحيدة

اذا كانت الدالة f متصلة على فترة مفتوحة وللدالة قيمة قصوى محلية وحيدة فانها تكون مطلقة

تستخدم هذه النظرية في مسائل القيم المثلى (الدرس السابع)

(1) اوجد القيمة القصوى المطلقة للدالة $f(x)=6x-x^2$ وحدد نوعها



الدالة متصلة ولها قيمة عظمى محلية وحيدة فهي مطلقة عند $x=3$

$$f'(x) = 6 - 2x$$

$$f'(x) = 0$$

$$x = 3 .$$

---

(2) اوجد القيمة القصوى المطلقة للدالة $f(x)=xe^{-x}$ وحدد نوعها

الاعداد الحرجة هي $x=1$

الدالة متصلة ولها قيمة عظمى محلية وحيدة فهي مطلقة عند $x=1$

$$f'(x) = e^{-x} + x\,e^{-x}(-1)$$

$$= e^{-x}(1-x)$$

$$= \frac{1-x}{e^{x}}$$

$$f'(x) = 0$$

$$x = 1$$

$f'(x)$ غ.م

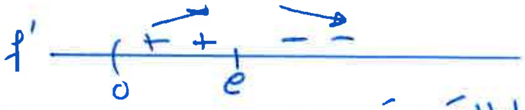
لا يوجد حل

---

(3) اوجد القيمة القصوى المطلقة للدالة $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ وحدد نوعها

$f'(x)$ غ.م $\rightarrow x = 0$ خارج المجال

الاعداد الحرجة هي $x=e$



الدالة متصلة على مجالها، ولها قيمة عظمى محلية وحيدة فهي مطلقة عند $x=e$

$$D = (0, \infty)$$

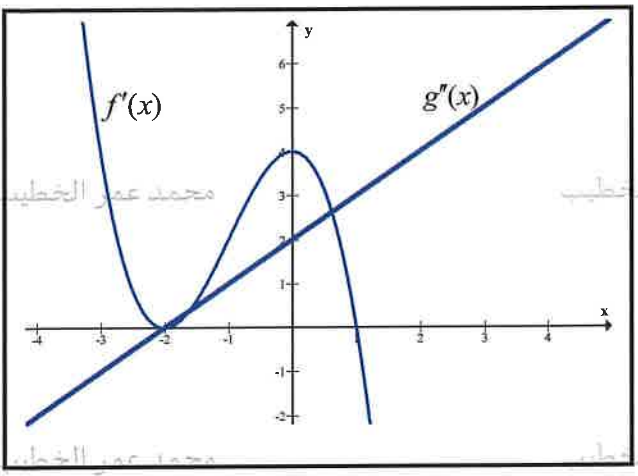
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ | $\ln x = 1$

$1 - \ln x = 0$ | $x = e$

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالتين $g''(x), f'(x)$ لإكمال الفراغات التالية:

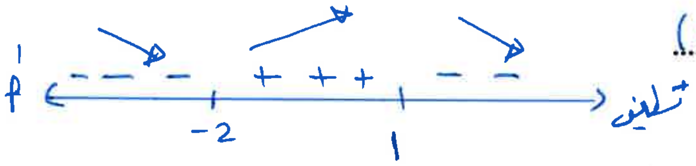


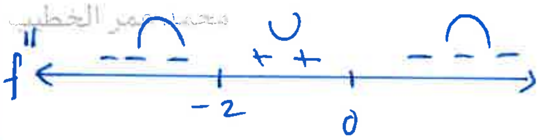
(أ) النقاط الحرجة للداله $f(x)$ هي ...-2 , 1...

(ب) فترة التزايد للدالة $f(x)$ هي ...$(-\infty, 1)$...

(ج) للدالة $f(x)$ قيم عظمى المحليه عند...$x = 1$

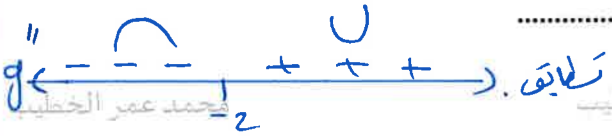
(د) فتره التقعر للاعلى للدالة $f(x)$ هي...$(-2, 0)$





(هـ) فترات التقعر للاسفل للدالة $g(x)$ هي...$(-\infty, -2)$

(و) عدد نقاط الانقلاب للدالة $f(x)$ تساوي: ...2...



(ي) قيمة x التي عندها للدالتين $f(x), g(x)$ نقطة انقلاب هي...-2

(م) ايهما أكبر $f(3)$ ام $f(2)$ مع ذكر السبب...$f(2)$

لان الدالة f متناقصة على $(1, \infty)$

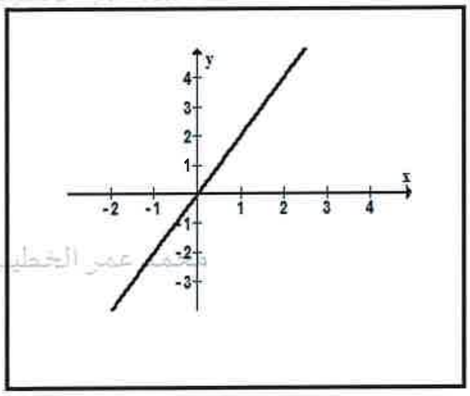
(ن) إذا كان للدالة $g(x)$ نقاط حرجة عند -3 , -1

فبين نوع القيم القصوى المحلية عند هذه القيم الحرجة.

$g''(-1) > 0 \Rightarrow$ للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = -1$

$g''(-3) < 0 \Rightarrow$ للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -3$

من اختبار المشتقة الثانية



(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $\underline{g''(x)}$

علماً بان $g(x)$ كثيرة حدود و $\underline{g'(-2)=g'(2)=0}$

لإكمال الفراغات التالية

(أ) فتره التقعر للاعلى للدالة $g(x)$ هي $(0,\infty)$

(ب) نقاط الانقلاب للدالة $g(x)$ عند $x=0$

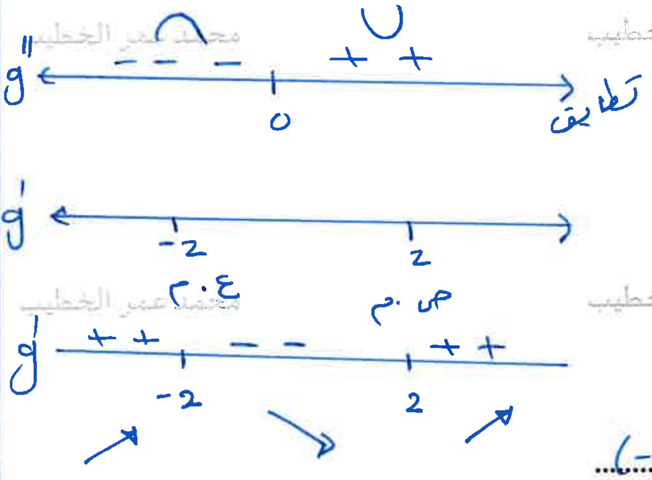
(ج) النقاط الحرجة للداله $g(x)$ هي -2 و 2

(د) للدالة $g(x)$ قيم عظمى المحليه عند $x=-2$

(هـ) للدالة $g(x)$ قيم صغرى المحليه عند $x=2$

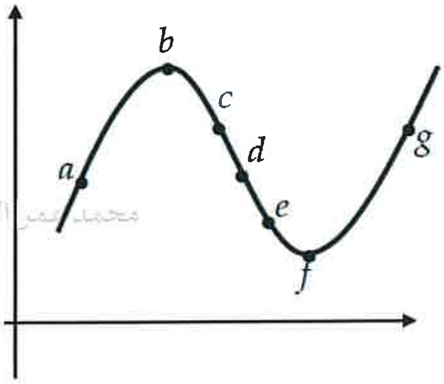
(و) فترة التزايد للدالة $g(x)$ هي $(-\infty,-2)$ و $(2,\infty)$

(ي) فترة التناقص للدالة $g(x)$ هي $(-2,2)$



---

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ لأكمال الجدول التالي



الشرط	الرمز
$f'=0, f''>0$	f
$f'=0, f''<0$	b
$f''=0$	d
$f'\times f''=0$	b, d, f
$f'\times f''>0$	g, c

$f'>0,\ f''>0$ (g) او $f'<0,\ f''<0$ (c) ←

(1) إذا كانت الدالة $f(x)=ax^3-12x^2$ لها نقطة انعطاف عند $x=1$ فما قيمة الثابت a.

$f''(1)=0$

$6a(1)-24=0$

$6a=24$

$\boxed{a=4}$

الشرط

$f''(1)=0$

$f'(x)=3ax^2-24x$

$f''(x)=6ax-24$

---

(2) إذا كان للدالة $f(x)=x^3+ax^2+bx$ قيمة صغرى محلية عند $x=4$ ونقطة انقلاب عند $x=1$ فاوجد قيمة الثوابت a,b.

$f''(1)=0$

$6+2a=0 \Rightarrow \boxed{a=-3}$

$f'(4)=0$

$3(4)^2+2a(4)+b=0$

$48+2(-3)(4)+b=0$

$\boxed{b=-24}$

الشروط

$f'(4)=0$

$f''(4)=0$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f''(x)=6x+2a$

---

(3) إذا كان للدالة $f(x)=ax^4+bx^2+1$ نقطة انعطاف عند النقطة $(1,6)$ فاوجد قيمة الثوابت a,b؟

$f''(1)=0$

$12a+2b=0$

$6a+b=0$ ... ②

$6a+b=0$

$a+b=5$ بالطرح

$5a=-5$

$\boxed{a=-1}$

$\boxed{b=6}$

الشروط

$f(1)=6$

$f''(1)=0$

$f'(x)=4ax^3+2bx$

$f''(x)=12ax^2+2b$

$f(1)=6$

$a+b+1=6$

$a+b=5$ ... ①

الوحدة الرابعة : تطبيقات الاشتقاق /// الدرس السادس : رسم المنحنيات

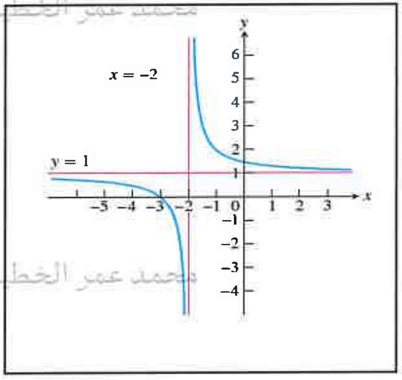
خطوط التقارب للدوال النسبية

$$\boxed{f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}}$$

(1) يجب كتابة الدالة النسبية في ابسط صورة قبل ايجاد خطوط التقارب واذا تم اختصار احد العوامل وليكن $x-a$ واختفى من المقام فان للدالة فجوة عند $x=a$ وليس خط تقارب رأسي

$x-a$ عامل غير مكرر

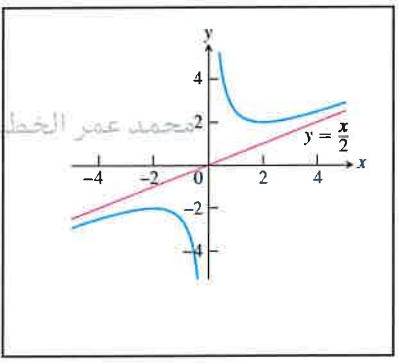
(2) يكون للدالة النسبية خطوط تقارب رأسية عند اصفار المقام وتكون معادلة $x=a$



(3) يكون للدالة النسبية خطوط تقارب افقية اذا كانت درجة البسط اصغر من او تساوي درجة المقام وتكون معادلة $y=a$

(4) يكون للدالة النسبية خط تقارب مائل اذا كانت درجة البسط اكبر من درجة المقام بواحد. وتكون معادلة $y=a\,x+b$

ونستخدم القسمة المطولة او القسمة التركيبية لايجاده



خطوط التقارب للدوال غير النسبية

(1) يكون للدالة خطوط تقارب رأسية عند $x=k$

اذا كانت احدى الشروط التالية صحيحة

$$\lim_{x\to k} f(x)=\pm\infty,\quad \lim_{x\to k^+} f(x)=\pm\infty,\quad \lim_{x\to k^-} f(x)=\pm\infty$$

(2) يكون للدالة خطوط تقارب افقية عند $y=l$

اذا كانت احد الشروط التالية صحيحة

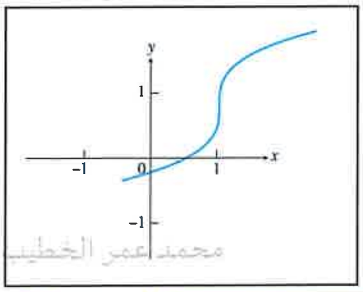
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=l\ ,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=l$$

لا يجوز ان يكون للدالة خط تقارب افقي ومائل في نفس الوقت

المماس الرأسي

(1) يجب ان تكون الدالة متصلة عند هذه النقطة

(2) ان تكون النهاية من اليسار واليمين للمشتقة (الميل) اما كلاهما ملانهاي او سالب مالانهاية عند هذه النقطة



اوجد خطوط التقارب الرأسية والافقية او المائلة لكل من الدوال التالية

$$(1)\ f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$$

خط التقارب الرأسي (اصفار المقام)

$x=-1$

* $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-1}{x+1}=3$.

خط التقارب الافقي $y=3.$

$$(2)\ f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$$

خطوط التقارب الرأسية .

$x=\pm1$

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2-1}=0$

خط التقارب الافقي $y=0$

$$(3)\ f(x)=4-\frac{1}{x+2}$$

خط التقارب الرأسي $x=-2$

خط التقارب الافقي $y=4$

$\lim_{x\to\pm\infty} 4-\frac{1}{x+2}=4$.

$$(4)\ f(x)=x+\frac{1}{x-2}$$

خط التقارب الرأسي $x=2$

خط التقارب المائل $y=x$

* عكس توحيد المقامات او حل مباشر .

$$(5)\ f(x)=\frac{x^2-2}{x+1}$$

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ \hline x+1 & x^2-2 \\ \ominus & x^2 \overset{\ominus}{+} x \\ \hline & -x-2 \\ \oplus & -x \overset{\oplus}{-} 1 \\ \hline & -1 \end{array}$$

خط التقارب الرأسي $x=-1$.

خط التقارب المائل $y=x-1$

$$(6)\ f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{\overset{\text{فجوة}}{\cancel{(x-1)}}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$$

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x+1 & x^2+x+1 \\ \ominus & x^2 \overset{\ominus}{+} x \\ \hline & 1 \end{array}$$

الفجوة $x=1$ ، الرأسي $x=-1$ فقط . المائل $y=x$

اوجد خطوط التقارب الرأسية والافقية لكل من الدوال التالية

$(1)\, f(x)=e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}}$

لا يوجد خطوط تقارب رأسية .

خط تقارب افقي $y=0$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=0$$

$(2)\, f(x)=e^{1/x}$

خط تقارب رأسي $x=0$

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = e^{0} = 1$$

خط تقارب افقي $y=1$

$(3)\, f(x)=xe^{-x} = \frac{x}{e^{x}}$.

لا يوجد خطوط تقارب رأسية .

خط تقارب افقي $y=0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x}} = 0$$

لوبتال .

$(4)\, f(x)=\ln(x-2)+3$

خط تقارب رأسي $x=2$

لا يوجد خط تقارب افقي .

$(5)\, f(x)=\frac{\ln x}{x}$

خط تقارب رأسي $x=0$

خط تقارب افقي $y=0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

لوبتال .

$(6)\, f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

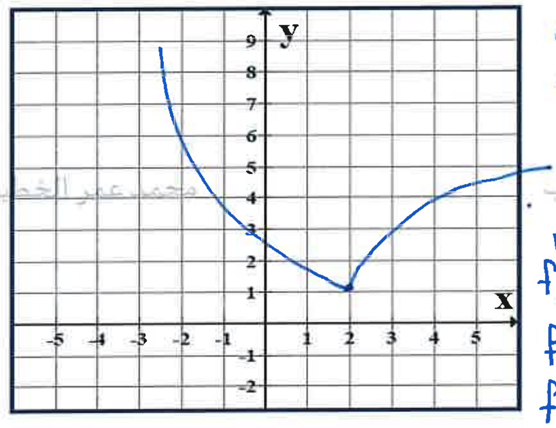
لا يوجد خطوط تقارب رأسية .

خطوط التقارب الافقية $y=\pm1$

$$*\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x} = 1$$

$$*\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x} = -1$$

(1) ارسم منحنى تقريبي للدالة $f(x)$ المتصلة على R والتي تحقق الشروط التالية:

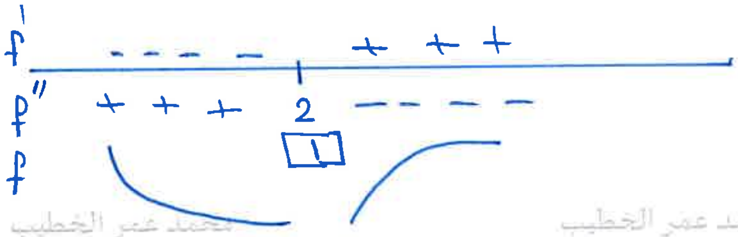


* تحويل المعلومات الى مخطط المزدوج

$$f(2)=1$$

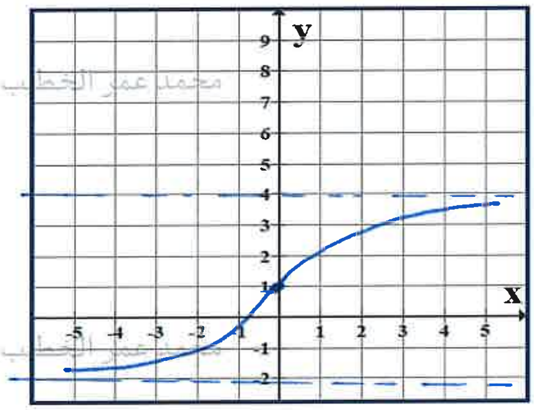
$$f'(x)<0, f''(x)>0 \quad , \quad x<2$$

$$f'(x)>0, f''(x)<0 \quad , \quad x>2$$



---

(2) ارسم منحنى تقريبي للدالة $f(x)$ المتصلة على R والتي تحقق الشروط التالية:



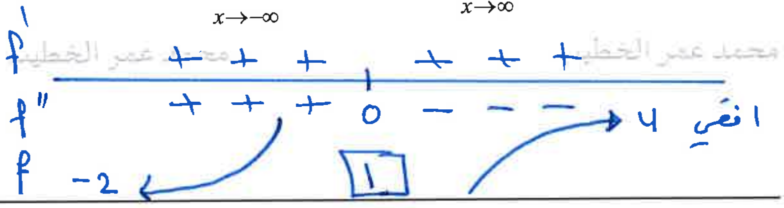
$$f(0)=1$$

$$f'(x)>0, \quad x\neq 0$$

$$f''(x)>0 \quad , \quad x<0$$

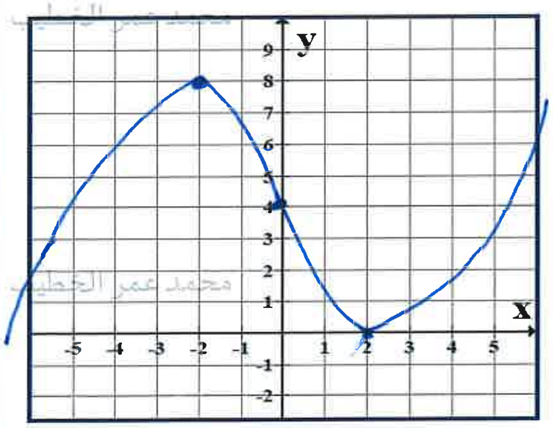
$$f''(x)<0 \quad , \quad x>0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2, \lim_{x\to\infty} f(x)=4 ,$$



---

(3) ارسم منحنى تقريبي للدالة $f(x)$ المتصلة على R والتي تحقق الشروط التالية:



$$f(-2)=8 , f(0)=4 , f(2)=0$$

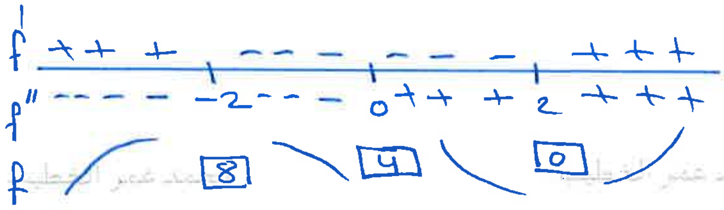
$$f'(-2)=f'(2)=0$$

$$f'(x)<0, \quad -2<x<2$$

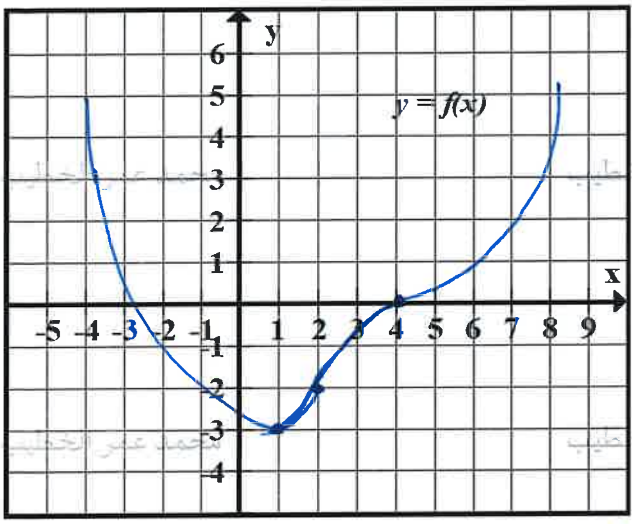
$$f'(x)>0, \quad x<-2 , x>2$$

$$f''(x)<0 \quad , \quad x<0$$

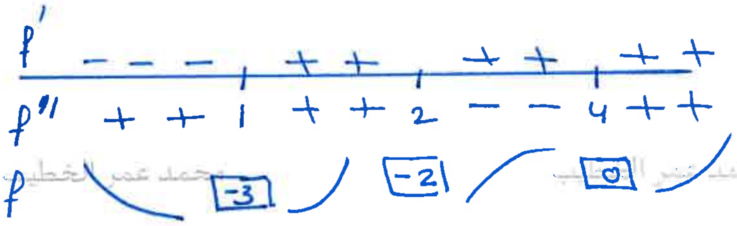
$$f''(x)>0 \quad , \quad x>0$$



(1) ارسم منحنى تقريبي للدالة $f(x)$ المتصلة على R والتي تحقق الشروط التالية:



$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	
+	−		$-\infty < x < 1$
+	0	−3	$x = 1$
+	+		$1 < x < 2$
0	+	−2	$x = 2$
−	+		$2 < x < 4$
0	0	0	$x = 4$
+	+		$4 < x < \infty$

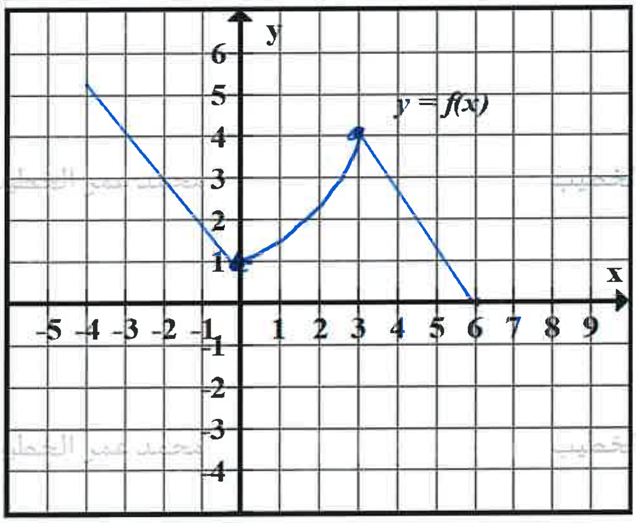


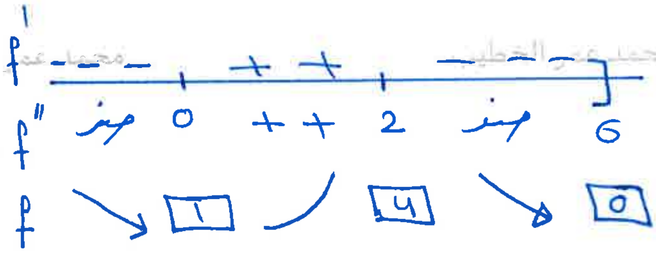
---

(2) اعتمد على الجداول التالية لرسم بيان تقريبي للدالة المتصلة $f(x)$

$2<x<6$	$0<x<2$	$x<0$	الفترات
−	+	−	$f'(x)$
0	+	0	$f''(x)$

6	2	0	x
0	4	1	$f(x)$
−1	غير موجودة	غير موجودة	$f'(x)$





* الخطوط المستقيمة [illegible]

وليس منحنيات .

لان المشتقة الثانية صفر

ارسم منحنى الدالة $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

مع تحديد جميع الميزات المهمة

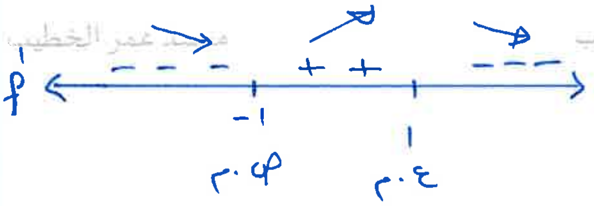
الميزات المهمة......تحليل الدالة
مجال الدالة
نقاط التقاطع مع المحاور
خطوط التقارب والفجوات
اشارة الدالة (في وجود خطوط تقارب راسية)
القيم القصوى المحلية والمطلقة
فترات التزايد والتناقص
فترات التقعر ونقاط الانعطاف

حسب السؤال

$f'(x) = -3x^2 + 3$

$f'(x) = 0$

$x = \pm 1$



متناقص $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

تزايد $(-1, 1)$

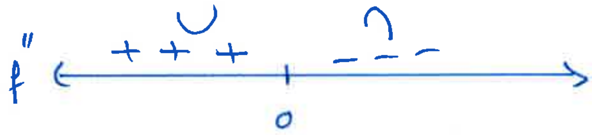
قيمة صغرى محلية عند $x = -1$

قيمة عظمى محلية عند $x = 1$

$f''(x) = -6x$

$f''(x) = 0$

$x = 0$

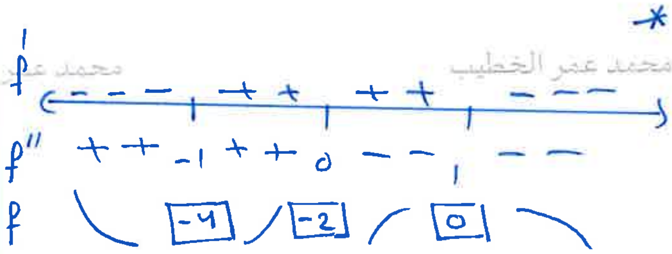


للاعلى $(-\infty, 0)$

للاسفل $(0, \infty)$

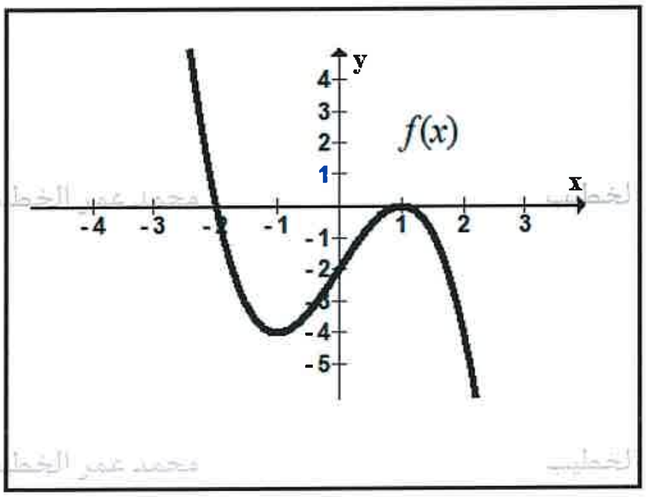
نقطة انعطاف عند $x = 0$

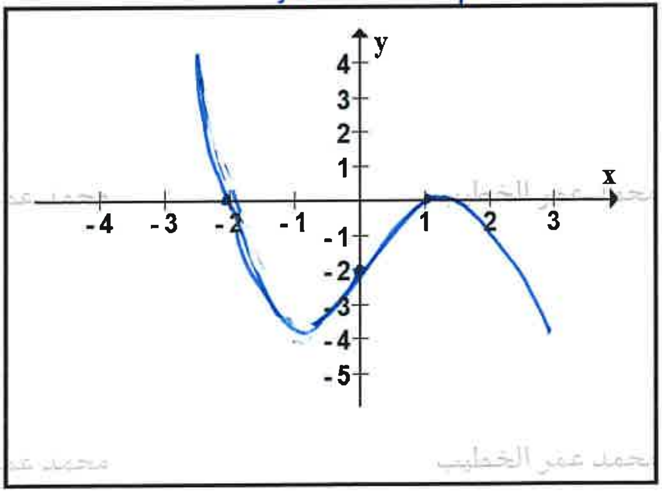
*



نقاط التقاطع مع محور y هي -2

اصفار الدالة $1 , -2$





ارسم منحنى الدالة $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$

مع تحديد جميع الميزات المهمة

الميزات المهمة......تحليل الدالة

مجال الدالة

نقاط التقاطع مع المحاور

خطوط التقارب والفجوات

اشارة الدالة (في وجود خطوط تقارب راسية)

القيم القصوى المحلية والمطلقة

فترات التزايد والتناقص

فترات التقعر ونقاط الانعطاف

حسب السؤال

ملاحظة : المعلومات السابقة تكفي لرسم الدالة .

$$f'(x)=\frac{2(x-1)-(2x-1)(1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

f' : − − − − | − − − −

1

$$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$$

f'' : − − − ∩ | + + + ∪

1

f' : − − − − | − − − −

f : − − − − 1 + + + +

$D = R \mid \{1\}$

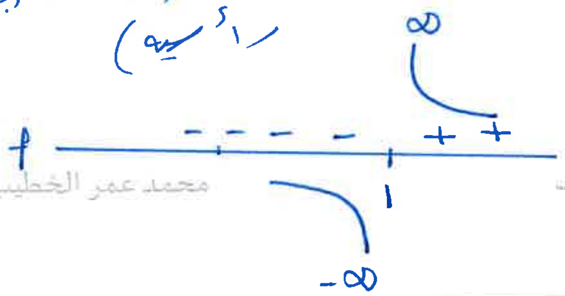
نقاط التقاطع مع محور y هي 1

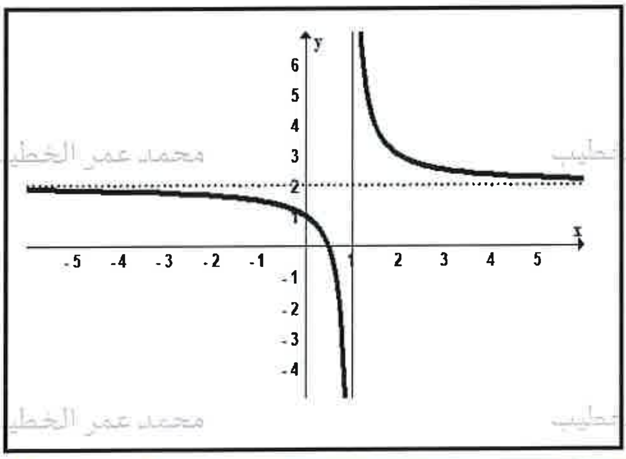
نقاط التقاطع مع محور x هي $\frac{1}{2}$

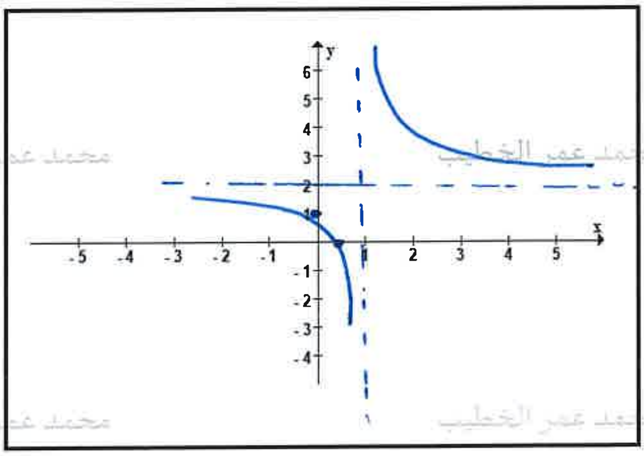
خط التقارب الرأسي $x=1$

خط التقارب الأفقي $y=2$

اشارة f (عند وجود خطوط تقارب راسية)

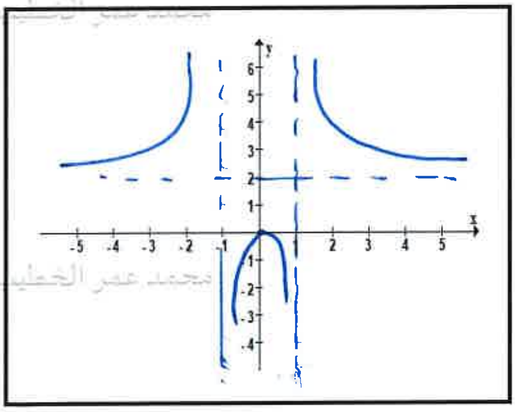


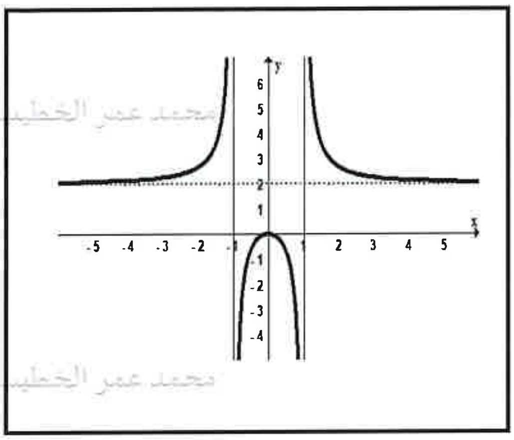




(1) ارسم منحنى الدالة $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة

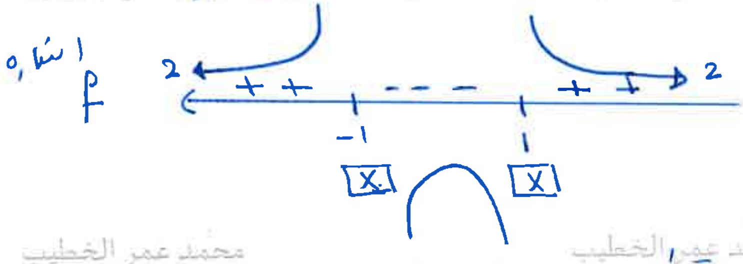




* يكفي الرسم من خطوط التقارب واشارة الدالة

خطوط التقارب الرأسية $x=\pm1$

خط التقارب الافقي $y=2$



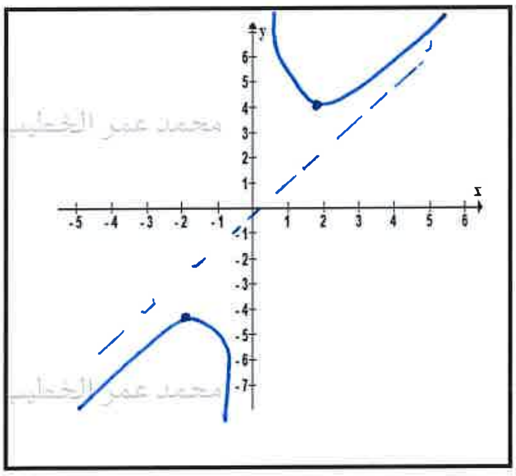
مقطع y هو 0 .

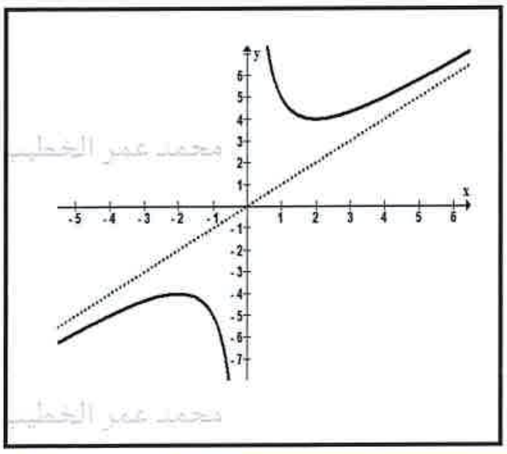
مقطع x هو 0 .

---

(2) ارسم منحنى الدالة $f(x)=x+\frac{4}{x}$ $\frac{x^2+4}{x}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة

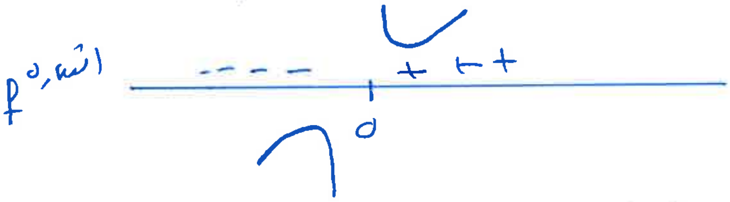




$D=R/\{0\}$

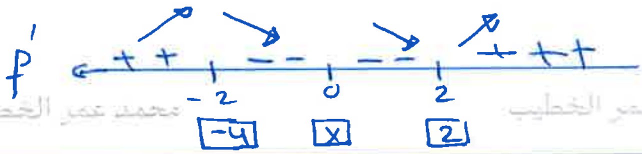
خط التقارب الرأسي $x=0$

خط التقارب المائل $y=x$.



$f'(x)=1-\frac{4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}$.

$f'(x)=0\rightarrow x=\pm2$, $f'(x)$ غ.م $\Rightarrow x=0$

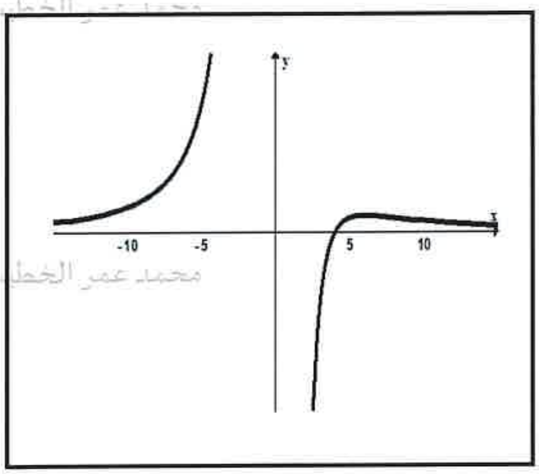


ارسم منحنى الدالة $f(x)=\dfrac{x-4}{x^{3}}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة

حيث

$$f'(x)=\frac{-2x+12}{x^{4}}\ ,\ f''(x)=\frac{6x-48}{x^{5}}$$



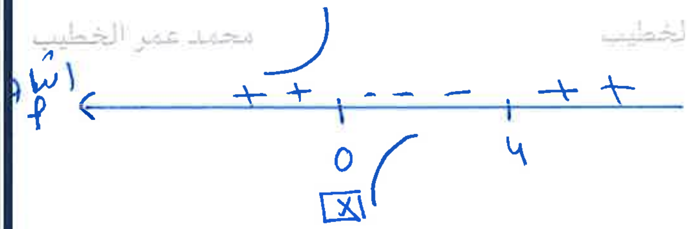
$D = R \setminus \{0\}$

خط التقارب الرأسي $x=0$

خط التقارب الأفقي $y=0$

مقطع x هو 4 .

مقطع y لا يوجد



$f'(x)=0$

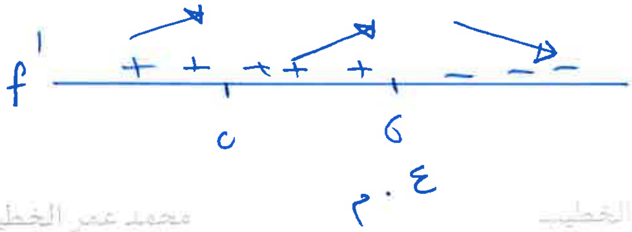
$-2x+12=0$

$x=6$

$f'(x)$ غ.م

$x=0$

خارج المجال



$f''(x)=0$

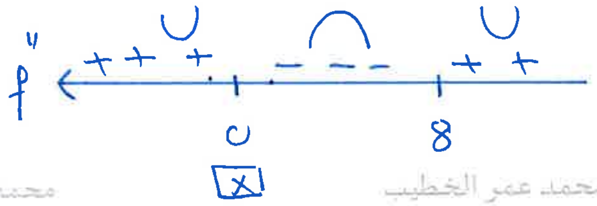
$6x-48=0$

$x=8$

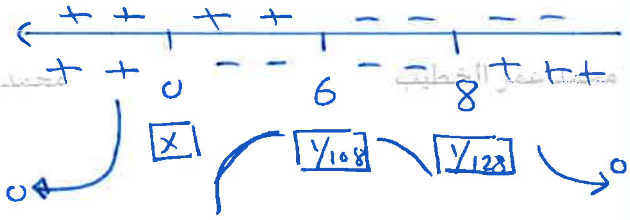
، $f''(x)$ غ.م

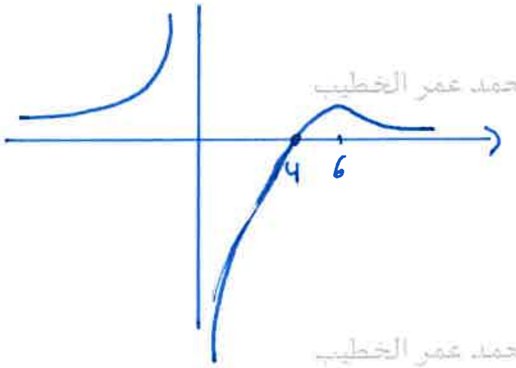
$x=0$

خارج المجال



الخط المزدوج:



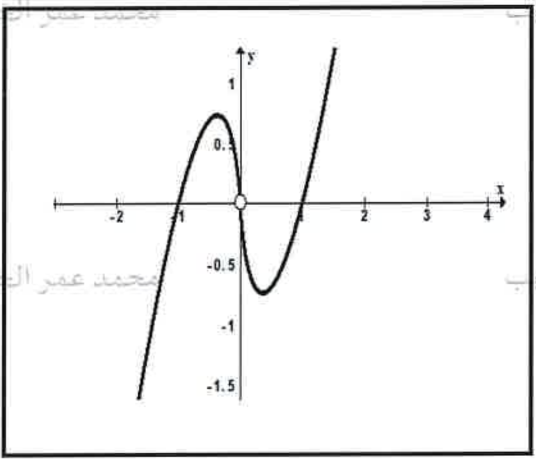


ارسم منحنى الدالة $f(x)=x\ln x^2$

مع تحديد جميع المميزات المهمة

حيث

$$f'(x)=2+\ln x^2\ ,\ f''(x)=\frac{2}{x^2}$$



$D = R \,|\, \{0\}$

مقاطع x

$x \,Ln\, x^2 = 0$

$x=0$ خارج المجال

$Ln\, x^2 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

$f'(x) = 2 + Ln\, x^2 = 0$

$Ln\, x^2 = -2$

$2\, Ln|x| = -2$

$Ln|x| = -1$

$|x| = e^{-1} = 1/e$

$x = \pm \frac{1}{e}$

$+ + \nearrow \quad | \quad - - \searrow \quad | \quad - - \searrow \quad | \quad + + \nearrow$

$-1/e \qquad 0\ \boxed{x} \qquad 1/e$

ع.م $\qquad$ ص.م

$-036 \qquad 036$

$f''(x)$ غ.م

$x = 0$

خارج المجال

$f''(x) = 0$

لا يوجد حل

$f'' \quad - - - - \ \cap \quad | \quad + + + + \ \cup$

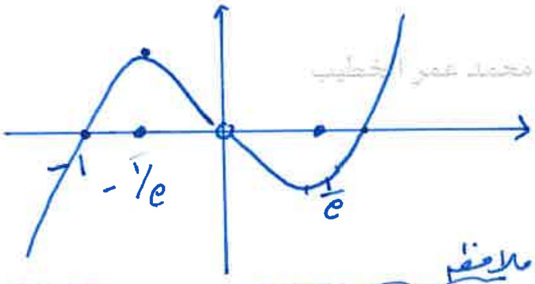
$0\ \boxed{x}$

الخط المزدوج

$f' \quad + + \quad | \quad - - \quad | \quad - - \quad | \quad + +$

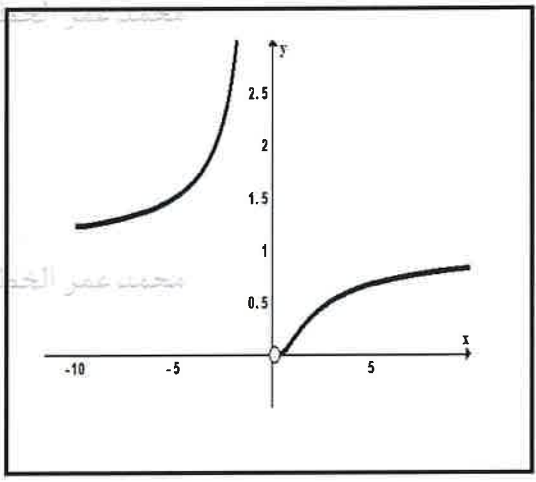
$f'' \quad - - - \quad | \quad - - - \ 0 \ + + \quad | \quad + +$

$f \qquad -1/e \qquad \boxed{x} \qquad 1/e$



ملاحظة

$$\lim_{x\to 0^+} x\,Ln\,x^2 = \lim_{x\to 0} \frac{2\,Ln\,x}{1/x} = \lim \frac{2/x}{-1/x^2} = 0$$



ارسم منحنى الدالة $f(x)=e^{-2/x}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة

حيث

$$f'(x)=\frac{2}{x^2\,e^{2/x}} \quad , \quad f''(x)=\frac{4-4x}{x^2\,e^{2/x}}$$

$D = R \setminus \{0\}$

خطوط التقارب الرأسية .

$x = 0$

خطوط التقارب الأفقية

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-2/x} = 1$

$y = 1$

$f'(x) = \frac{2}{x^2 e^{2/x}}.$

$f'(x) = 0$

لا يوجد حل

$f'(x)$ غ.م

$x = 0$

خارج المجال

$f''(x) = \frac{4-4x}{x^2 e^{2/x}}.$

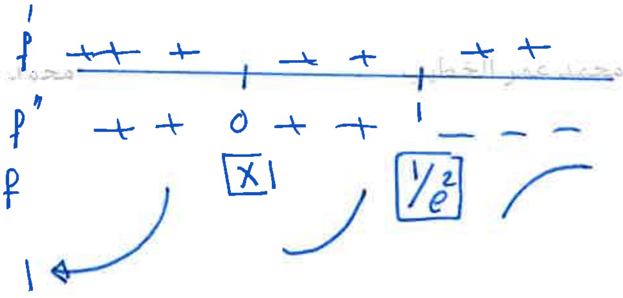
$f''(x) = 0$

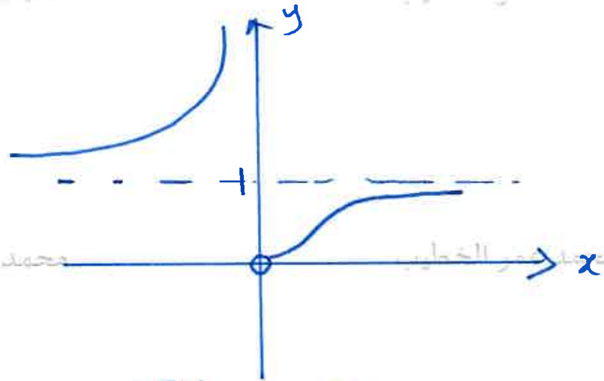
$4-4x=0$

$x = 1$

$f''(x)$ غ.م

$x = 0$





$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-2/x} = e^{-\infty} = 0$

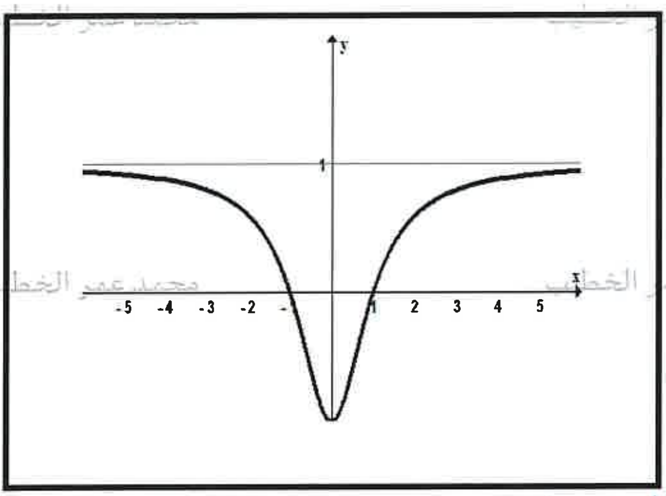
$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-2/x} = e^{\infty} = 0$

(1) ارسم منحنى الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة

حيث

$$f'(x)=\frac{4x}{(x^2+1)^2}\ ,\ f''(x)=\frac{4-16x^2}{(x^2+1)^3}$$



الرأسية : لا يوجد

الافقية $y = 1$

$f'(x) = 0$

$4x = 0 \rightarrow x = 0$

$f''(x) = 0$

$4-16x^2=0$

$x^2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm \frac{1}{2}.$

f' - - - - - - - | + + + +

f'' - - $-\frac{1}{2}$ + + 0 + + $\frac{1}{2}$ - - -

f $\boxed{-3/5}$ $\boxed{-1}$ $\boxed{-3/5}$

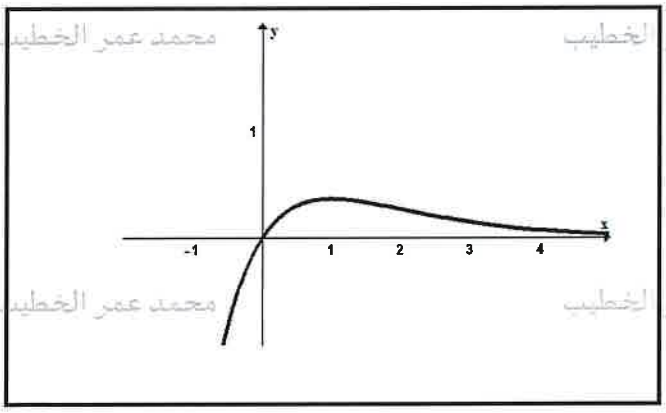
---

(2) ارسم منحنى الدالة $f(x)=xe^{-x}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة

حيث

$$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}\ ,\ f''(x)=\frac{x-2}{e^x}$$



$f(x) = \frac{x}{e^x}$.

الرأسية : لا يوجد

الافقية . $y = 0$ (لوبتال)

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

f' + + + | - - - - -

f'' - - - 1 - - 2 + + +

f $\boxed{1/e}$ $\boxed{2/e^2}$

$f(0) = 0$

ارسم منحنى الدالة $f(x)=x^{5/3}-5x^{2/3}$ مع تحديد جميع المميزات المهمة

$D = \mathbb{R}.$

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3} - \frac{10}{3}x^{-1/3}$$

$$= \frac{5}{3}x^{-1/3}(x-2)$$

$$= \frac{5}{3}\cdot\frac{x-2}{x^{1/3}}.$$

$f'(x) = 0$

$x = 2$

$f'(x)$ غ.م

$x = 0$

$$f''(x) = \frac{10}{9}x^{-1/3} + \frac{10}{9}x^{-4/3}.$$

$$= \frac{10}{9}x^{-4/3}(x+1)$$

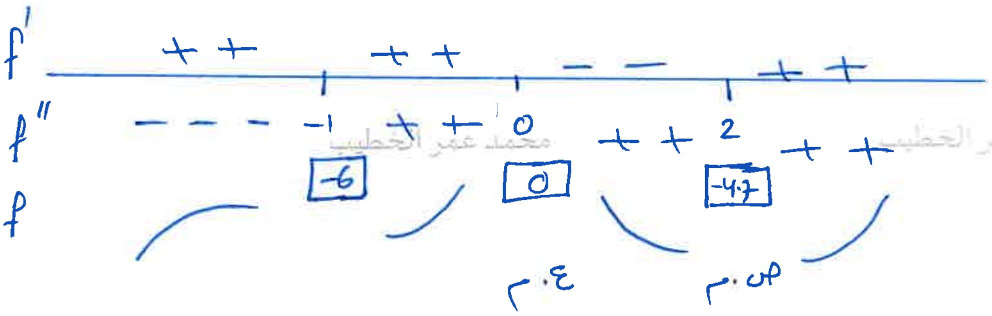
$$= \frac{10}{9}\;\frac{x+1}{x^{4/3}}.$$

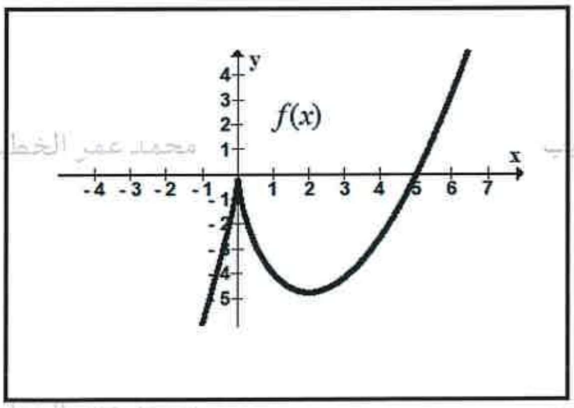
$f''(x)=0$

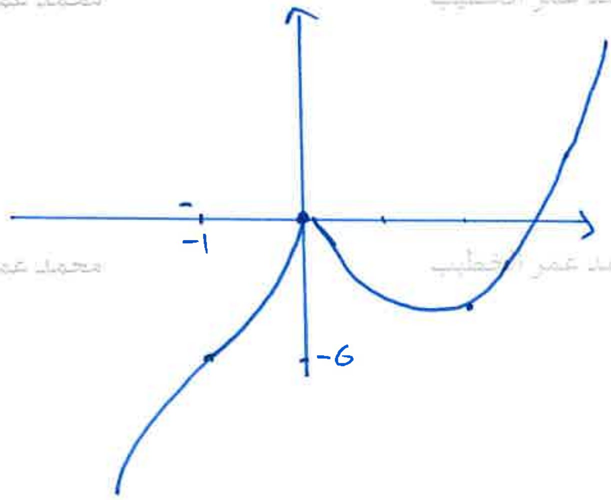
$x=-1$

$f''(x)$ غ.م

$x=0$







ارسم منحنى الدالة $f(x) = x + \sin x$ مع تحديد جميع الميزات المهمة

$f'(x) = 1 + \cos x$

$f'(x) = 0$

$1 + \cos x = 0$

$\cos x = -1$

$x \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \times \\ \frac{3\pi}{2} & ✓ \end{cases}$

الاعداد الحرجة ص

$x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ $\boxed{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$

$x = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, ---$

$f''(x) = -\sin x$

$f''(x) = 0$

$-\sin x = 0$

$\sin x = 0$

$x \begin{cases} 0 & ✓ \\ \pi & ✓ \end{cases}$

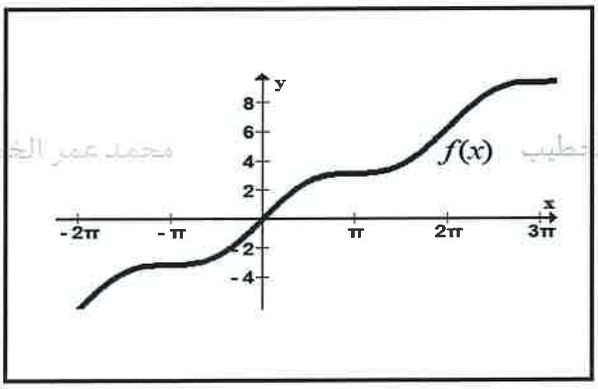
$\left.\begin{aligned} x &= 0 + 2n\pi \\ x &= \pi + 2n\pi \end{aligned}\right\}$ الفرق بينهم π

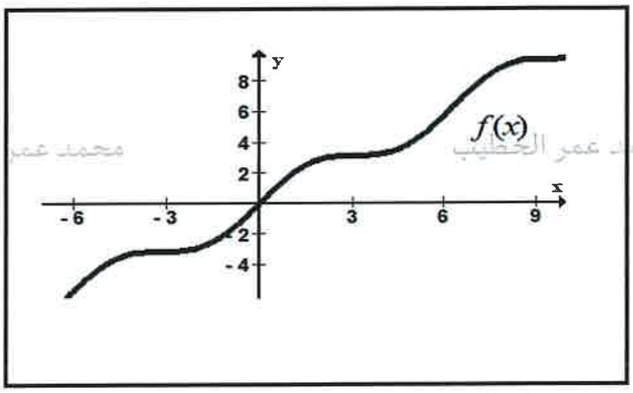
$x = n\pi$

$x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi ----$

f' + + + + + + + + +

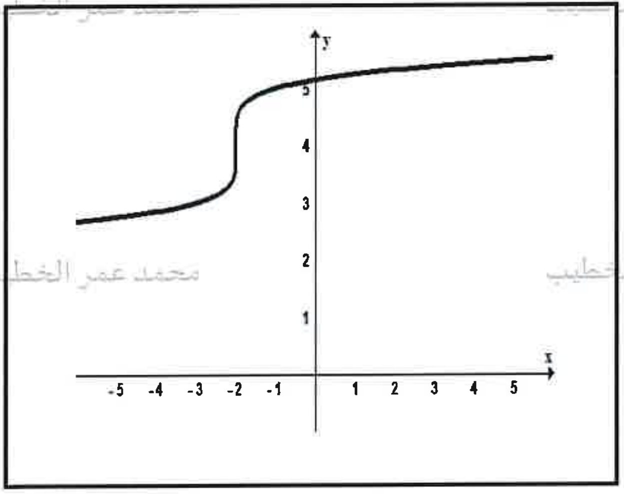
f'' - - - - $-\pi$ + + $-\frac{\pi}{2}$ + + 0 - - - - π + + $\frac{3\pi}{2}$ + + 2π - - - - 3π + +





(1) ارسم منحنى الدالة $f(x)=(x+2)^{1/5}+4$

مع تحديد جميع المميزات المهمة



لا يوجد خطوط تقارب

$f'(x)=\frac{1}{5}(x+2)^{-4/5}=\frac{1}{5(x+2)^{4/5}}$

$f'(x)=0$ لايوجد حل , $f'(x)$ غ.م $x=-2$

$f''(x)=\frac{-4}{25}(x+2)^{-9/5}=\frac{-4}{25(x+2)^{9/5}}$

$f''(x)=0$ لايوجد حل $f''(x)$ غ.م $x=-2$

f' : + + + | + + +

f'' : + + + + | − − −

-2

f

$\boxed{4}$

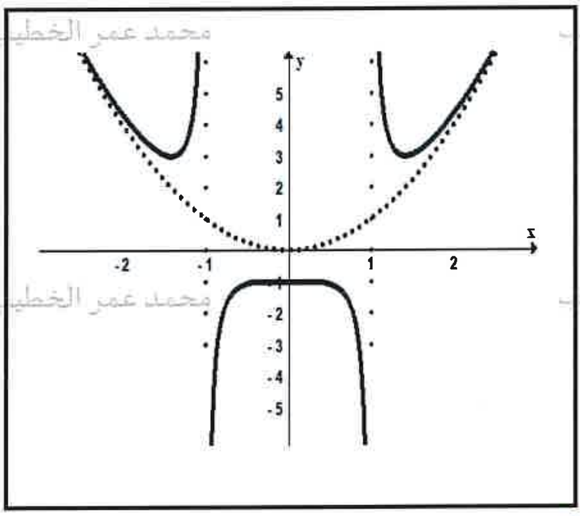
للدالة مماس رأسي عند $x=-2$

$f(0)=\sqrt[5]{2}+4=5.14$

---

(2) اوجد منحنى التقارب للدالة $f(x)=\frac{x^4-x^2+1}{x^2-1}$

ثم ارسم الدالة



خطوط التقارب الرأسية $x=\pm1$

منحنى التقارب $y=x^2$

وليس خط تقارب

$$\begin{array}{r|l} & x^2 \\ \hline x^2-1 & x^4-x^2+1 \\ & \ominus x^4 \oplus x^2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

اشارة f: + + + | − − − | + +

-1 $\boxed{X}$ 1 $\boxed{X}$

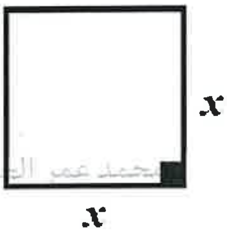
$f(0)=-1$

الوحدة الرابعة : تطبيقات الاشتقاق /// الدرس السابع : القيم المثلى

قوانين المساحات والحجوم

ملاحظة : تم نقل المسائل الاقتصادية المطروحة في الدرس السابع الى الدرس التاسع

(1) المربع

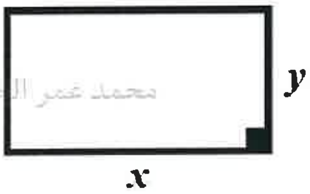


المساحة : $A = x^2$

المحيط : $P = 4x$

طول القطر : $d = \sqrt{2}\,x$

(2) المستطيل

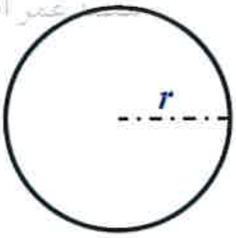


المساحة : $A = x \times y$

المحيط : $P = 2x + 2y$

طول القطر: $d = \sqrt{x^2 + y^2}$

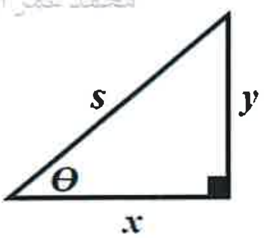
(3) الدائرة



المساحة : $A = \pi r^2$

المحيط : $C = 2\pi r$

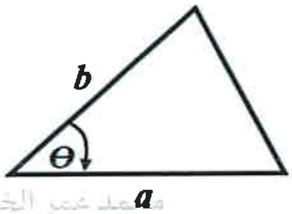
(4) المثلث



المساحة : $A = \dfrac{1}{2} x \times y$

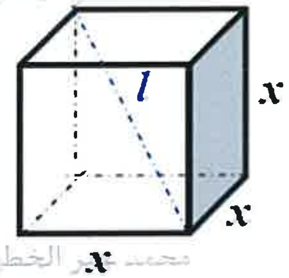
المحيط : $P = x + y + s$

طول الوتر: $s = \sqrt{x^2 + y^2}$



مساحة المثلث غير القائم : $A = \dfrac{1}{2} ab \sin\theta$

(5) المكعب



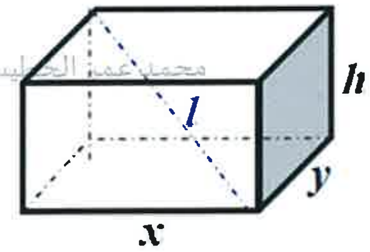
الحجم : $V = x^3$

مساحة السطح الجانبية : $A = 4x^2$

مساحة السطح الكلية : $S = 6x^2$

طول القطر: $L = \sqrt{3}\, x$

(6) شبة المكعب



الحجم : $V = xyh$

مساحة السطح الجانبية : $A = 2xh + 2yh$

مساحة السطح الكلية : $S = 2xy + 2xh + 2yh$

طول القطر: $L = \sqrt{x^2 + y^2 + h^2}$

(7) الاسطوانة

الحجم : $V = \pi r^2 h$

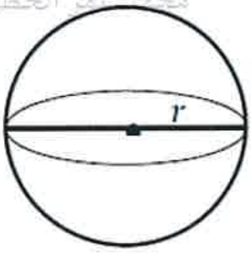
مساحة السطح الجانبية : $A = 2\pi rh$

مساحة السطح الكلية : $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

(8) المخروط

الحجم : $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

(9) الكرة



الحجم : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

مساحة السطح الكلية : $S = 4\pi r^2$

خطوات حل مسائل القيم المثلى

اقراء المسالة

(1) ارسم شكلا توضيحياً

(2) حدد المتغيرات ورمّزها

(3) اكتب العلاقة الاساسية ويستدل عليها من كلمة اكبر ما يمكن او اصغر ما يمكن

اذا كانت بمتغيرين

(4) كتابة العلاقة المساعدة واجعل العلاقة الاساسية بمتغير واحد

اذا كانت بمتغير واحد

(5) اشتق الدالة الاساسية ثم اوجد الاعداد الحرجة

ملاحظة : لا يجوز اشتقاق الدالة الاساسية في حالة وجود متغيرين

(6) اختبر القيمة القصوى المطلقة

مجال مغلق...اختبار القيم

مجال مفتوح...
اختبار المشتقة الأولى
او اختبار المشتقة الثانية

(7) اخذ القرار (ايجاد المطلوب)

كلامات تدل على ان السؤال ...على القيم المثلى مثل .... اكبر ما يمكن ، اصغر ما يمكن ، اقصر ، اطول.....

عددين غير سالبين مجموعهما 30 ، اوجد العددين اذا كان حاصل ضرب مربع العدد الاول في العدد الثاني اكبر ما يمكن.

① —

② نفرض العدد الأول x
العدد الثاني y .

④ $x+y=30$

$y=30-x$

$0 \leq x \leq 30$

③ $P = x^2 y$ حاصل الضرب

$= x^2(30-x)$

$= 30x^2 - x^3$

⑤ $P' = 60x - 3x^2$

$P' = 0 \Rightarrow x=0 \,,\, x=20$ الاعداد الحرجة

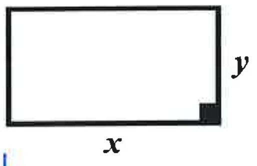
⑥ $P(0) = 0$

$P(30) = 0$

$P(20) = 4000$. عظمى مطلقة ⇒

⑦ العددين هما 20 و10

(1) اوجد ابعاد مستطيل محيطة 24 متر لتكون مساحته اكبر ما يمكن.



$2x+2y=24$

$x+y=12$

$y=12-x$

$0\le x\le 12$

$A(0) =$

$A(12) =$

$A(6) = 36$ عظمى مطلقة

الابعاد $6\,,\,6.$

$\overset{\downarrow}{x}$, $\overset{\downarrow}{y} = 12-x$

$A = xy$

$= x(12-x)$

$= 12x - x^2$

$A' = 12-2x$

$A' = 0 \Rightarrow x = 6.$

---

(2) مزرعة مستطيلة الشكل تقع على حافة نهر مستقيم، يراد وضع سياج طوله 800 متر على الجوانب الثلاث الاخرى ما أكبر مساحة يمكن احاطتها.

$2x+y=800$

$y=800-2x$

$0\le x\le 400$

$A(0) = 0$

$A(400) = 0$

$A(200) = 80\,000$ عظمى مطلقة.

المساحة

$A = 800(200) - 2(200)^2$

$= 80000$

$A = xy$

$= x(800-2x)$

$= 800x - 2x^2$

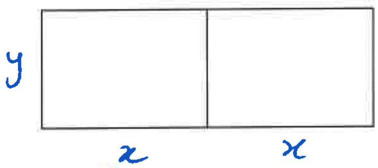
$A' = 800 - 4x$

$A' = 0 \Rightarrow 800-4x=0$

$x = 200$

---

(3) يراد عمل سياج حول اسطبل للخيول مستطيل الشكل ومقسوم الى حضرتين متلاصقين ومتطابقين في المساحة إذا كان طول السياج $120\ ft$ اوجد ابعاد الاسطبل لتكون مساحة اكبر ما يمكن



$4x+3y=120$

$3y = 120-4x$

$y = \frac{120-4x}{3}$

$0\le x\le 30$

$A(0) = 0$

$A(30) = 0$

$A(15) = 600$ عظمى مطلقة

الابعاد هي

$2x = 30$

$y = 20$

$A = 2xy$

$= 2x\left(\frac{120-4x}{3}\right)$

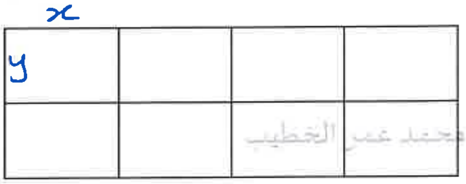
$= \frac{2}{3}x(120-4x)$

$= \frac{2}{3}(120x-4x^2)$

$A' = \frac{2}{3}(120-8x)$

$A' = 0 \Rightarrow x = 15.$

(1) مزرعة ابقار مستطيلة الشكل، يراد تقسيمها بسياج طوله 720 متر الى 8 حظائر مستطيلة الشكل ومتساوية المساحة اوجد ابعاد الحظيرة الواحدة لتكون مجموع مساحات جميع الحظائر اكبر ما يمكن



$12x + 10y = 720$

$10y = 720 - 12x$

$y = 72 - 1.2x$

$0 \leq x \leq 60$

$A = 8xy$

$= 8x(72 - 1.2x)$

$= 576x - 9.6x^2$

$A' = 576 - 19.2x$

$A' = 0 \Rightarrow 576 - 19.2x = 0$

$x = 30$

$A(0) = 0$

$A(60) = 0$

$A(30) = 8640$ عظمى مطلقة .

ابعاد الحظيرة الواحدة

30 , 36

---

(2) قطعة ارض مستطيلة الشكل مساحتها 400 متر مربع، اوجد طول أصغر سياج ممكن احاطة الارض به من الجوانب الاربعة.

$xy = 400$

$y = \frac{400}{x}$

$x > 0$

$P = 2x + 2y$

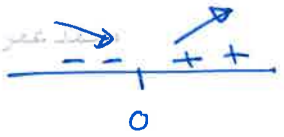
$= 2x + 2 \cdot \frac{400}{x}$

$P' = 2 - \frac{800}{x^2} = \frac{2x^2 - 800}{x^2}$

$P' = 0 \Rightarrow 2x^2 - 800 = 0$

$x = -20$ مرفوض , $x = 20$

P' غ.م $\Rightarrow x = 0$ خارج المجال



للدالة قيمة صغرى محلية

وحيدة فهي مطلقة .

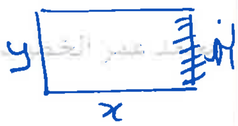
عند $x = 20$

$P = 2(20) + \frac{800}{20}$

$= 80\ m.$

---

(3) مزرعة مستطيلة الشكل تقع على حافة نهر مستقيم مساحتها 1800 قدم مربع ،يراد وضع سياج على الجوانب الثلاث الاخرى ما اصغر طول سياج يمكن احاطة الأرض به (القيمة الصغرى للمحيط)



$xy = 1800$

$y = \frac{1800}{x}$

$P = 2x + y$

$= 2x + \frac{1800}{x}$

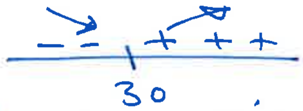
$P' = 2 - \frac{1800}{x^2}$

$P' = \frac{2x^2 - 1800}{x^2}$

$P' = 0 \Rightarrow 2x^2 - 1800 = 0$

$x = -30 , x = 30$

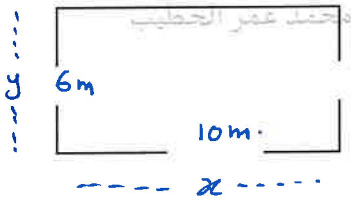
P' غ.م $\Rightarrow x = 0$ مرفوض



قيمة صغرى محلية و وحيدة فهي مطلقة.

$P = 2(30) + \frac{1800}{30} = 120.$

(1) صالة عرض مستطيلة الشكل مساحتها $800\ ft^2$ ، بها ثلاث ابواب من ثلاث جوانب عرض الباب الأول $10\ ft$ ، ومن الجهتين الباقية بابين بعرض $6\ ft$ لكل منهم، اوجد طول اصغر جدار ممكن احاطة المعرض به من الجوانب الثلاث (التي تحتوي الابواب)



$xy = 800$

$y = \frac{800}{x}$

$0 < x$

الابواب

$P = x + 2y - (6 + 6 + 10)$

$= x + 2 \cdot \frac{800}{x} - 22$

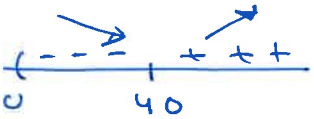
$= x + \frac{1600}{x} - 22$

$P' = 1 - \frac{1600}{x^2} = \frac{x^2 - 1600}{x^2}$

$P' = 0 \Rightarrow x^2 - 1600 = 0$

$x = -40 \ ,\ x = 40.$

P' غ.م $\Rightarrow x = 0.$



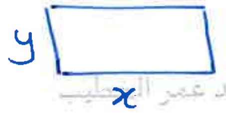
قيمة صغرى محلية ، وحيدة فهي مطلقة

$P = 40 + \frac{1600}{40} - 22$

$= 58\ ft.$

---

(2) بين ان المستطيل ذي المساحة العظمى الذي محيطة قيمة ثابتة p يكون مربع طول ضلعة $\frac{p}{4}$ ومساحتة $A = \frac{p^2}{16}$.



$2x + 2y = P.$

$x + y = \frac{P}{2}$

$y = \frac{P}{2} - x$

$0 \leq x \leq P/2.$

$A = xy.$

$= x\left(\frac{P}{2} - x\right)$

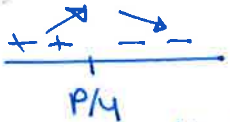
$= \frac{P}{2}x - x^2$

$A' = \frac{P}{2} - 2x.$

$A' = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - 2x = 0$

$2x = P/2$

$x = P/4.$



قيمة عظمى محلية ، وحيدة فهي مطلقة عند $x = \frac{P}{4}$

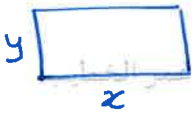
$y = \frac{P}{2} - 2x$

$= \frac{P}{2} - 2\left(\frac{P}{4}\right) = \frac{P}{4}$

بما ان $x = y$ فان الشكل مربع طول ضلعه $P/4$

---

(3) بين ان المستطيل ذي المحيط الاصغر ومساحتة قيمة ثاًبتة A يكون مربع طول ضلعة $\sqrt{A}$ ومحيطة $4\sqrt{A}$.



$xy = A$

$y = \frac{A}{x}$

$0 < x$

$P = 2x + 2y$

$= 2x + 2 \cdot \frac{A}{x}$

$= 2x + \frac{2A}{x}.$

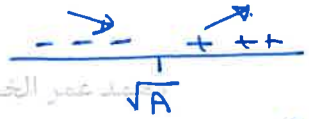
$P' = 2 - \frac{2A}{x^2} = \frac{2x^2 - 2A}{x^2}$

$P' = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2A = 0$

$x^2 = A$

$x = \sqrt{A} \ ,\ x = -\sqrt{A}.$ مرفوض

P' غ.م $\Rightarrow x =$ مرفوض 0



قيمة صغرى محلية وحيدة فهي مطلقة.

$y = \frac{A}{x} = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$

∴ الشكل مربع طول ضلعه $\sqrt{A}$

(1) صفحة مستطيلة مطبوع عليها اعلان على شكل منطقة مستطيلة مساحته $98\ in^2$ ويوجد بالصفحة هوامش من الجانبين $1\ in$ و من الاعلى والاسفل $2\ in$ ليس مطبوع عليهم اوجد ابعاد الاعلان التي تحقق القيمة الصغرى لمساحة الصفحة كاملة ثم اوجد ابعاد الصفحة.

x, y ابعاد الاعلان

$(x+2), (y+4)$ ابعاد الصفحة

$xy = 98$

$y = \frac{98}{x}$

$0 < x$.

$A = (x+2)(y+4)$

$= (x+2)\left(\frac{98}{x} + 4\right)$

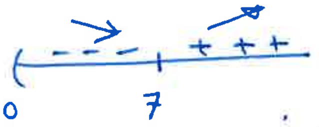
$= 98 + 4x + \frac{196}{x} + 8$.

$A' = 4 - \frac{196}{x^2} = \frac{4x^2 - 196}{x^2}$.

$A' = 0 \Rightarrow 4x^2 - 196 = 0$

$x = 7$, $x = -7$ مرفوض

A' غ.م $\Rightarrow x = 0$



فيه صغرى محلية وحيدة.

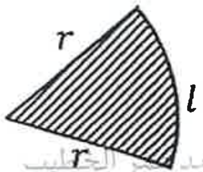
فهي مطلقة عند $x=7$

$7, 14$ ابعاد الإعلان

$9, 18$. ابعاد الصفحة

---

(2) قطاع دائري محيطة 12cm ، اوجد طول نصف قطر دائرتة التي تجعل مساحتة اكبر ما يمكن



مساحة القطاع الدائري $A = \frac{1}{2} rl$

$2r + L = 12$

$L = 12 - 2r$

$0 \le r \le 6$

$A = \frac{1}{2} r L$

$= \frac{1}{2} r (12 - 2r)$

$= 6r - r^2$

$A' = 6 - 2r$

$A' = 0 \Rightarrow r = 3$.

$A(0) = 0$

$A(6) = 0$

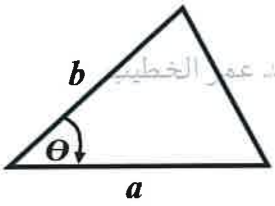
$A(3) = 9$.

عظمى مطلقة عند

$r = 3$.

---

(3) ضلعان في مثلث طولاهما a, b (ثوابت) والزاوية بينهما θ. اوجد قيمة الزاوية θ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.



مساحة المثلث = $\frac{1}{2}\, a\, b \sin\theta$

$0 \le \theta \le \pi\ (180^\circ)$

$A = \frac{1}{2} ab \sin\theta$.

$A' = \frac{1}{2} ab \cos\theta$.

$A' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} ab \cos\theta = 0$

$\cos\theta = 0$

$\theta = \pi/2 = 90^\circ$.

$A(0) = 0$

$A(\pi) = 0$

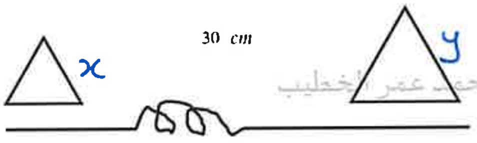
$A\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} ab$.

عظمى مطلقة عند

$\theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

قائم.

(1) سلك طوله 30 cm نريد ان نصنع منه مثلثين كل منهما متطابق الاضلاع ، حدد طول كل ضلع من اضلاع المثلث ليكون مجموع مساحتيهما اصغر ما يمكن.



مساحة المثلث المتطابق الذي طول ضلعة l هو

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

$3x + 3y = 30$

$x + y = 10$

$y = 10 - x$

$0 \leq x \leq 10$

$A = A_1 + A_2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} y^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} (10 - x)^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[x^2 + (10 - x)^2 \right].$

$A' = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[2x + 2(10 - x)(-1) \right].$

$A' = 0 \Rightarrow 2x - 20 + 2x = 0$

$x = 5$

$A(0) = 25\sqrt{3}$

$A(5) = \frac{25\sqrt{3}}{4} \rightarrow$

$A(10) = 25\sqrt{3}.$

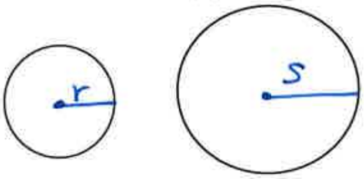
صغرى محلية عندما

$x = 5$

$y = 5$.

---

(2) قرصان دائريان مجموع قطريهما 28 cm أوجد طول نصف قطر كل منهما ليكون مجموع مساحتيهما أقل ما يمكن .



$2r + 2s = 28$

$r + s = 14$

$s = 14 - r$.

$0 \leq r \leq 14.$

$A = A_1 + A_2$

$= \pi r^2 + \pi s^2$

$= \pi r^2 + \pi (14 - r)^2$

$A = \pi \left[r^2 + (14 - r)^2 \right]$

$A' = \pi \left[2r + 2(14 - r) \cdot (-1) \right]$

$A' = 0 \Rightarrow 2r + 2(14 - r)(-1) = 0$

$2r - 28 + 2r = 0$

$4r = 28 \rightarrow \boxed{r = 7}$

$A(0) = 196\pi.$

$A(14) = 196\pi.$

$A(7) = 98\pi.$

صغرى محلية عندما

$r = 7$

$s = 7$.

(1) سلك طوله 68 cm قسم إلى جزأين غير متساويين وثني الجزء الأول على شكل مربع والثاني على شكل مستطيل طوله ضعف عرضه . أوجد طول كل جزء ليكون مجموع مساحتي الشكلين أقل ما يمكن .

$4x+6y=68$

$2x+3y=34$

$3y=34-2x.$

$y=\frac{34-2x}{3}.$

$0\leq x\leq 17$

$A=A_1+A_2$

$=x^2+2y^2$

$=x^2+2\cdot\left(\frac{34-2x}{3}\right)^2$

$=x^2+\frac{2}{9}(34-2x)^2.$

$A'=2x+\frac{2}{9}\cdot 2(34-2x)(-2)$

$=2x-\frac{8}{9}(34-2x)$

$=2x-\frac{272}{9}+\frac{16}{9}x$

$=\frac{34x}{9}x-\frac{272}{9}$

$A'=0$

$\frac{34}{9}x-\frac{272}{9}=0$

$x=8$

$A(0)=257$

$A(17)=289$

$A(8)=136.$

صغرى مطلقة عند $x=8$

طول كل جزء 32 و 36

(2) نافذه على شكل مستطيل يعلوها نصف دائرة، يراد احاطة الشكل بزخارف خشبية طولها $8+\pi$ قدم . اوجد نصف قطر الدائرة بحيث تمر اكبر كمية للضوء من النافذة. (مساحة النافذة اكبر ما يمكن) (يجب وضع زخارف بين المستطيل ونصف الدائرة).

$4r+\frac{1}{2}(2\pi r)+2y=8+\pi$

$4r+\pi r+2y=8+\pi$

$2y=8+\pi-4r-\pi r$

$A=A_1+A_2$

$=\frac{1}{2}\pi r^2+2ry.$

$=\frac{1}{2}\pi r^2+r(8+\pi-4r-\pi r)$

$=\frac{1}{2}\pi r^2+8r+\pi r-4r^2-\pi r^2$

$A'=\pi r+8+\pi-8r-2\pi r$

$A'=0$

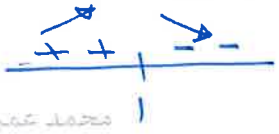
$\pi r+8+\pi-8r-2\pi r=0.$

$8+\pi-8r-\pi r=0$

$8+\pi-r(8+\pi)=0$

$8+\pi=r(8+\pi)$

$\Rightarrow r=1.$

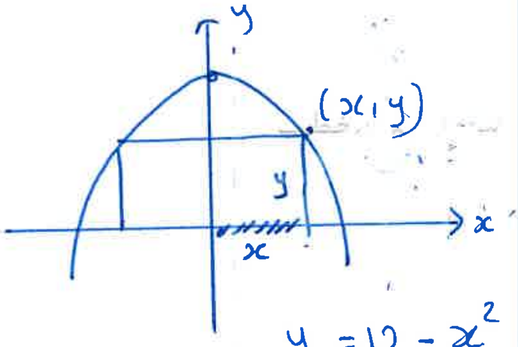


قيمة عظمى محلية وحيدة

عند $r=1$ فهي مطلقة .

(1) ما أكبر مساحة مستطيل قاعدتة على محور السينات وراساه العلويان على القطع المكافئ

$$y = 12 - x^2$$



$y = 12 - x^2$

$0 \leqslant x \leq \sqrt{12}$

$A = 2xy$

$= 2x(12 - x^2)$

$= 24x - 2x^3$

$A' = 24 - 6x^2$

$A' = 0 \Rightarrow x = +2 , -2$

$A(0) = 0$

$A(\sqrt{12}) = 0$

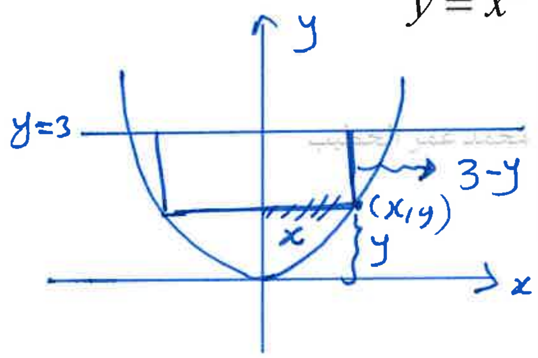
$A(2) = 32$

أكبر مساحة هي 32

---

(2) ما أكبر مساحة مستطيل قاعدتة على المستقيم $y = 3$ وراساه السفليان على القطع المكافئ

$$y = x^2$$



$y = x^2$

$0 \leqslant x \leq \sqrt{3}$

$A = 2x(3 - y)$

$= 2x(3 - x^2)$

$= 6x - 2x^3$

$A' = 6 - 6x^2$

$A' = 0 \Rightarrow x = 1 , x = -1$ مرفوض

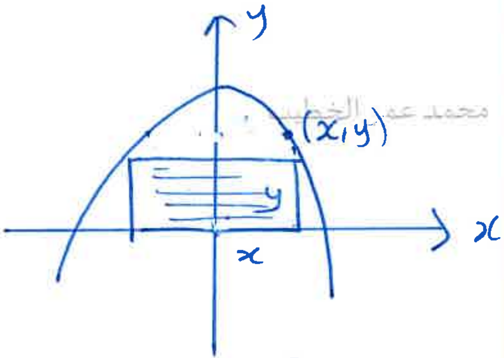
$A(0) = 0$

$A(\sqrt{3}) = 0$

$A(1) = 4$

أكبر مساحة هي 4

(1) ما أكبر محيط مستطيل قاعدتة على محور السينات وراساه العلويان على القطع المكافئ $y = 4 - x^2$



$y = 4 - x^2$

$0 \le x \le 2$

$P = 4x + 2y$

$= 4x + 2(4 - x^2)$

$= 4x + 8 - 2x^2$

$P' = 4 - 4x$

$P' = 0 \Rightarrow x = 4 - 4x = 0$

$x = 1$

$P(0) = 8$

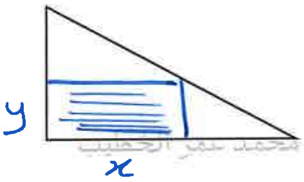
$P(2) = 8$

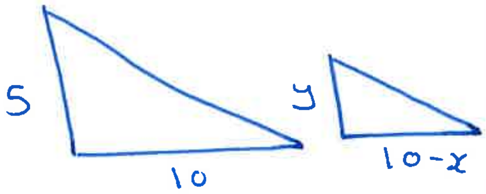
$P(1) = 10$

أكبر محيط هو 10 .

---

(2) ما أكبر مساحة مستطيل يمكن رسمة داخل مثلث قائم الزاوية طول قاعدتة 10 وارتفاعة 5





من تشابه المثلثات

$\frac{10-x}{10} = \frac{y}{5}$

$y = \frac{5}{10}(10 - x)$

$y = 5 - \frac{1}{2}x$

$0 \le x \le 10$

$A = xy$

$= x(5 - \frac{1}{2}x)$

$= 5x - \frac{1}{2}x^2$

$A' = 5 - x$

$A' = 0 \Rightarrow 5 - x = 0$

$x = 5$

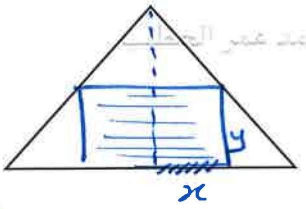
$A(0) = 0$

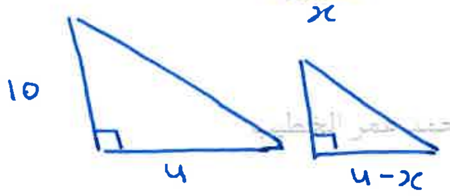
$A(10) = 0$

$A(5) = 12.5$

أكبر مساحة هي 12.5

(1) مثلث متساوي الساقين طول قاعدتة $8\ cm$ وطول ارتفاعة $10\ cm$ ، يراد رسم مستطيل داخل المثلث بحيث يقع احد بعدية على قاعدة المثلث ويقع كل من رأسيه الاخرين على على ساقي المثلث، اوجد بعدي المستطيل لتكون مساحتة اكبر ما يمكن





$$\frac{y}{10} = \frac{4-x}{4}$$

$$y = \frac{10}{4}(4-x)$$

$$= 10 - \frac{5}{2}x$$

$$0 \leq x \leq 4$$

$$A = 2xy$$

$$= 2x\left(10 - \frac{5}{2}x\right)$$

$$= 20x - 5x^2$$

$$A' = 20 - 10x$$

$$A' = 0 \Rightarrow x = 2.$$

$$A(0) = 0$$

$$A(4) = 0$$

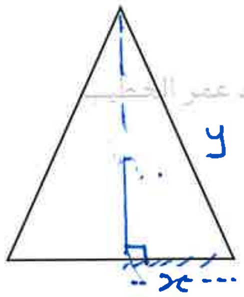
$$A(2) = 20$$

ابعاد المستطيل ذو المساحة الاكبر

هي 4,5 وليس 2,5 .

---

(2) ما اكبر مساحة مثلث متساوي الضلعين محيطة يساوي $30\ cm$



الارتفاع: $\sqrt{y^2-x^2}$

$$2x + 2y = 30$$

$$x + y = 15$$

$$y = 15 - x.$$

$$0 \leq x \leq 7.5$$

وليس 15 .

لان $x<y$

$$A = \frac{1}{2}(2x)\sqrt{y^2-x^2}$$

$$= x\sqrt{(15-x)^2 - x^2}$$

$$= x\sqrt{225 - 30x + x^2 - x^2}$$

$$= x\sqrt{225 - 30x}$$

$$= \sqrt{225x^2 - 30x^3}$$

ادخال x تحت الجذر

$$A' = \frac{450x - 90x^2}{2\sqrt{225x^2 - 30x^3}}$$

$$A' = 450x - 90x^2 = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 5$$

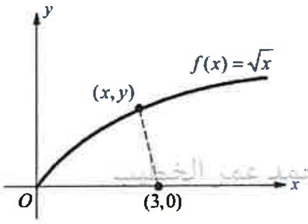
A' غ.م $\Rightarrow 225x^2 - 30x^3 \Rightarrow x = 0,\ x = 7.5$

$$A(0) = 0$$

$$A(7.5) = 0$$

$A(5) = 5\sqrt{75}$ ← اكبر مساحة مثلث هي

(1) ما اقصر بعد للنقطة $(3,0)$ عن المنحنى $y=\sqrt{x}$



$y = \sqrt{x}$

$0 \leq x \leq 3.$

$s' = 0 \Rightarrow x = 5/2$

s' غ.م $\Rightarrow$ لا يوجد حل

$S(0) = 3.$

$S(3) = \sqrt{3} = 1.73$

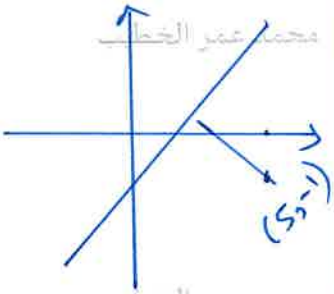
$S(\frac{5}{2}) = \frac{\sqrt{11}}{2} = 1.65$

أقصر مسافة 1.65

$$S = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2}$$
$$= \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{(x-3)^2 + x}$$
$$= \sqrt{x^2 - 6x + 9 + x}$$
$$= \sqrt{x^2 - 5x + 9}$$
$$S' = \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x + 9}}$$

---

(2) ما أقصر بعد للنقطة $(5,-1)$ عن المستقيم $y=2x-1$



$y = 2x - 1$

$y + 1 = 2x.$

$0 \leq x \leq 5$

$s' = 0 \Rightarrow 10x - 10 = 0$

$x = 1$

s' غ.م $\Rightarrow$ لا يوجد حل

$S(0) = 5$

$S(5) = 10$

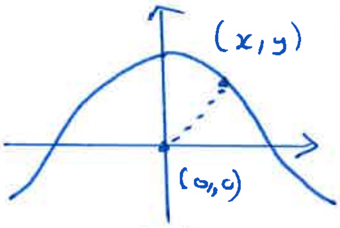
$S(1) = \sqrt{20}$

أقصر بعد هو $\sqrt{20}$.

$$S = \sqrt{(x-5)^2 + (y+1)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 - 10x + 25 + (2x)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + 10x + 25 + 4x^2}$$
$$= \sqrt{5x^2 + 10x + 25}$$
$$S' = \frac{10x - 10}{2\sqrt{5x^2 - 10x + 25}}$$

---

(3) ما أقصر بعد للنقطة $(0,0)$ عن الدالة $y=\cos x$



$y = \cos x$

$$s' \quad - \; - \quad \underset{0}{|} \quad + \; +$$

قيمة صغرى محلية وحيدة. عند $x=0$ فهي مطلقة

أقرب نقطة هي $(0,1)$

$$S = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + \cos^2 x}$$
$$S' = \frac{2x + 2\cos x(-\sin x)}{2\sqrt{x^2 + \cos^2 x}}$$

$s' = 0 \Rightarrow$

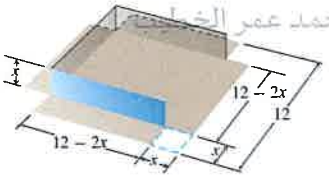
$2x - 2\sin x \cos x = 0$

$x = 0$

بالتجريب

(1) يراد عمل صندوق على شكل شبه مكعب بدون غطاء من ورقة مربعة الشكل طول ضلها $12in$

وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة عند الرؤوس. اوجد أكبر حجم للصندوق؟



$\text{ح} = (12-2x)(12-2x)x$

$= x(12-2x)^2$

$= x(144-48x+4x^2)$

$= 144x - 48x^2 + 4x^3 .$

$\text{ح}' = 144 - 96x + 12x^2 .$

$\text{ح}' = 0 \Rightarrow x = 2 , x = 6.$

$0 \leq x \leq 6.$

$\text{ح}(0) = 0$

$\text{ح}(6) = 0$

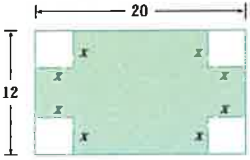
$\text{ح}(2) = 128$

أكبر حجم هو 128

---

(2) يراد عمل صندوق على شكل شبه مكعب بدون غطاء من ورقة مستطيلة الشكل طول ضلها $20in$

وعرضها $12in$ وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة عند الرؤوس. اوجد دالة حجم الصندوق (بدون حل)

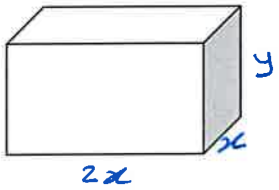


$\text{ح} = (20-2x)(12-2x)x$

---

(3) صندوق على شكل متوازي مستطيلات طول ضلع قاعدته يساوي ضعف عرضها ومجموع أبعاده

الثلاثة $180cm$.أوجد أبعاده ليكون حجمه أكبر ما يمكن .



$2x + x + y = 180$

$3x + y = 180$

$y = 180 - 3x$

$0 \leq x \leq 60$

$\text{ح} = 2x \cdot x \cdot y$

$= 2x^2(180-3x)$

$= 360x^2 - 6x^3 .$

$\text{ح}' = 720 - 18x^2$

$\text{ح}' = 0 \Rightarrow x = 0 , x = 40$

$\text{ح}(0) = 0$

$\text{ح}(60) = 0$

$\text{ح}(40) = 192\,000$ أكبر حجم

الأبعاد هي $80 , 40 , 60$

(1) متوازي مستطيلات (صندوق شبة مكعب) من الصاج بدون غطاء ، قاعدته مربعة الشكل سعته 32 متر مكعب أوجد أبعاده لتكون مساحته السطحية أقل ما يمكن .

$x^2y = 32$

$y = \frac{32}{x^2}$

$x > 0$

$\overset{\searrow}{- \; -} \;\; \underset{4}{|} \;\; \overset{\nearrow}{+ \; +}$

قيمة صغرى محلية

وهي وحيدة فهي

مطلقة

الابعاد هي

$4 , 4 , 2$

$S = x^2 + 4xy$.

$= x^2 + 4x \cdot \frac{32}{x^2}$

$= x^2 + \frac{128}{x}$.

$S' = 2x - \frac{128}{x^2}$

$= \frac{2x^3 - 128}{x^2}$

$S' = 0 \Rightarrow 2x^3 - 128 = 0$

$x = 4$

S' غ.م $\Rightarrow x = 0$

خا رج المجال

---

(2) يراد عمل خزان للمياه بغطاء على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل و سعته 16 متر مكعب وتكاليف صنع المتر المربع من قاعدته ضعف تكاليف صنع المتر المربع من جوانبه ثابت

أوجد ابعاد الخزان لتكون تكلفة صناعة الخزان اقل ما يمكن (اعتبر تكاليف المتر المربع من الجوانب هو (s)

$x^2y = 16$

$y = \frac{16}{x^2}$

$x > 0$

يمكن اعتبار

$s = 1$

$c' = 0 \Rightarrow x^3 - 8 = 0$

$x = 2$

c' غ.م $\Rightarrow x = 0$

خا رج المجال .

$\overset{\searrow}{- \; -} \;\; \underset{2}{|} \;\; \overset{\nearrow}{+ \; +}$

صغرى محلية

وحيدة فهي مطلقة

الابعاد

$2 , 2 , 4$

التكلفة = تكلفة القاعدتين + تكلفة الجوانب

$C =$ المساحة × السعر + المساحة × السعر

$= 2x^2(2S) + 4xy(S)$

$= 4Sx^2 + 4Sx \cdot \frac{16}{x^2}$

$= 4Sx^2 + S \cdot \frac{64}{x}$

$c' = 8Sx - S \cdot \frac{64}{x^2}$

$= 8S\left(x - \frac{8}{x^2}\right)$

$= 8S\left(\frac{x^3 - 8}{x^2}\right)$

(1) يراد صنع علبة من المعدن على شكل اسطوانه دائرية قائمة مغلقة سعتها $128\pi\ cm^3$. اوجد ابعاد العلبة لتكون كمية المعدن المستخدم في صناعتها اقل ما يمكن.

$r^2 h \pi = 128\pi$

$h = \frac{128}{r^2}$

$r > 0$

التكلفة اقل ما يمكن تكافئ المساحة السطحية الكلية اقل ما يمكن.

$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$= 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{128}{r^2}$

$= 2\pi r^2 + \frac{256\pi}{r}.$

$S' = 4\pi r - \frac{256\pi}{r^2}.$

$= 4\pi \left(\frac{r^3 - 64}{r^2}\right)$

$S' = 0 \Rightarrow r^3 - 64 = 0$

$r = 4.$

S' غ.م $\Rightarrow r = 0$. لا ∈ المجال

$$\begin{array}{ccc} - \ - \ \searrow & | & + \ + \ \nearrow \\ & 4 & \end{array}$$

قيمة صغرى محلية وحيدة فهي مطلقة

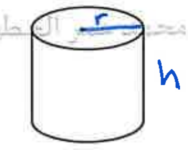
الابعاد هي

$r = 4$

$h = 8$

---

(2) يراد صنع علبة من المعدن على شكل اسطوانه دائرية قائمة مغلقة سعتها $32\pi\ fl\ oz$. بحيث ان سمك القاعدة والقمة ضعف سمك الجوانب اوجد ابعاد العلبة لتكون كمية المعدن المستخدم في صناعتها اقل ما يمكن.



$r^2 h \pi = 32\pi$

$h = \frac{32}{r^2}$

$C = 2(2\pi r^2) + 2\pi r h.$

$= 4\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{32}{r^2}$

$= 4\pi r^2 + \pi \cdot \frac{64}{r}$

$C' = 8\pi r^2 - \frac{64\pi}{r^2}$

$= 8\pi \left(\frac{r^3 - 8}{r^2}\right)$

$C' = 0 \Rightarrow r^3 - 8 = 0 \Rightarrow r = 2$

C' غ.م $\Rightarrow r = 0$ لا ∈ المجال

$$\begin{array}{ccc} - \ - \ \searrow & | & + \ + \ \nearrow \\ & 2 & \end{array}$$

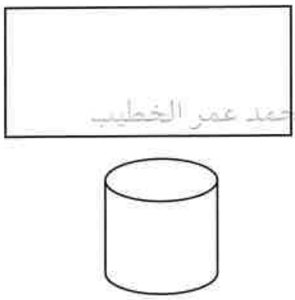
قيمة صغرى محلية وحيدة فهي مطلقة

الابعاد

$r = 2$

$h = 8$

(1) يراد عمل اسطوانة بدون قاعدة وبدون غطاء من صفيحة مستطيلة الشكل محيطها $36\ cm$ اوجد ابعاد المستطيل لتكون حجم الاسطوانة اكبر ما يمكن.



$4\pi r + 2h = 36$

$2\pi r + h = 18$

$h = 18 - 2\pi r$

$0 \leqslant r \leqslant \frac{9}{\pi}.$

$V = \pi r^2 h$

$= \pi r^2 (18 - 2\pi r)$

$= 18\pi r^2 - 2\pi^2 r^3.$

$V' = 36\pi r - 6\pi^2 r$

$= 6\pi r\ (6 - \pi r)$

$V' = 0 \Rightarrow r = 0\ ,\ r = \frac{6}{\pi}.$

$V(0) = 0$

$V(\frac{9}{\pi}) = 0$

$V(\frac{6}{\pi}) = 203.$ عظمى مطلقة

الابعاد

طول المستطيل.

$2\pi r = 2\pi \cdot \frac{6}{\pi}$

$= 12.$

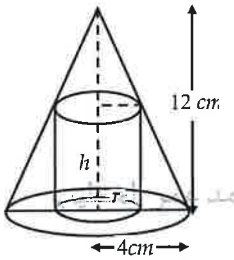
عرض المستطيل

$h = 18 - 2\pi \cdot \frac{6}{\pi}$

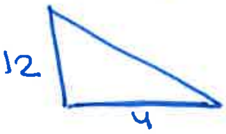
$= 6.$

---

(2) الشكل المجاور يمثل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته $4\ cm$ وارتفاعه $12\ cm$ رسم داخله اسطوانه دائرية قائمة بحيث يكون محور الاسطوانة ومحور المخروط متقابلين وكذلك القاعدتين .اوجد أكبر حجم لهذه الاسطوانة



$0 \leqslant r \leqslant 4.$



$\frac{h}{12} = \frac{4-r}{4}$

$h = 3(4-r)$

$h = 12 - 3r.$

$V = \pi r^2 h$

$= \pi r^2 (12 - 3r)$

$= 12\pi r^2 - 3\pi r^2$

$V' = 24\pi r - 9\pi r^2$

$V' = 0 \Rightarrow 24\pi r - 9\pi r^2 = 0$

$\pi r\ (24 - 9r) = 0$

$r = 0\ ,\ r = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}.$

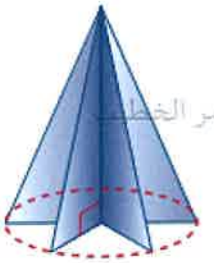
$V(0) = 0$

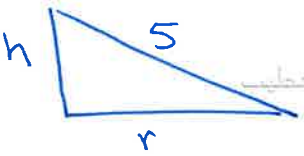
$V(4) = 0$

$V(\frac{8}{3}) = \frac{256}{9}\pi.$

أكبر حجم هو $\frac{256}{9}\pi.$

(1) اوجد حجم أكبر مخروط دائري قائم ناتج عن دوران مثلث قائم الزاوية وتره $5\ cm$ حول احد ضلعي القائمة.





$r^2 + h^2 = 25$

$r^2 = 25 - h^2.$

$0 \leq r \leq 5$

$0 \leq h \leq 5.$

$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$

$= \frac{1}{3}\pi (25 - h^2) h.$

$= \frac{1}{3}\pi (25h - h^3).$

$v' = \frac{1}{3}\pi (25 - 3h^2).$

$v' = 0 \Rightarrow 25 - 3h^2 = 0$

$h = +\sqrt{\frac{25}{3}}, \quad h = -\sqrt{\frac{25}{3}}.$

$= \frac{5}{\sqrt{3}}. \qquad h = \frac{-5}{\sqrt{3}}$ مرفوض

$v(0) = 0$

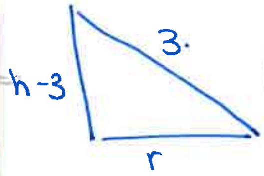
$v(5) = 0$

$v(\frac{5}{\sqrt{3}}) = 50.4$

اكبر حجم هو 50.4.

---

(2) اوجد حجم أكبر مخروط دائري قائم داخل كره نصف قطرها 3 وحدات.



$r^2 + (h-3)^2 = 9.$

$r^2 + h^2 - 6h + \cancel{9} = \cancel{9}$

$r^2 = 6h - h^2.$

$0 \leq h \leq 6$

$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi (6h - h^2) h$

$= \frac{1}{3}\pi (6h^2 - h^3)$

$v' = \frac{1}{3}\pi (12h - 3h^2)$

$v' = 0 \Rightarrow 12h - 3h^2 = 0$

$h = 0, \quad h = 4.$

$v(0) = 0$

$v(6) = 0$

$v(4) = \frac{32}{3}\pi.$

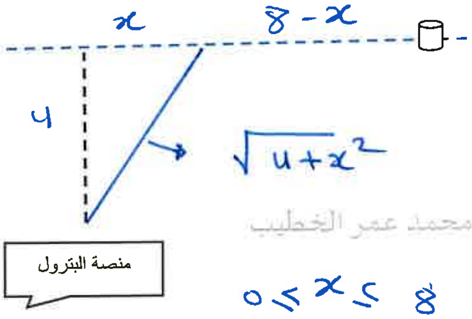
اكبر حجم هو $\frac{32}{3}\pi.$

يراد توصيل خط انابيب من منصة للبترول في البحر وتبعد 4 كيلو متر عن الشاطئ الى خزان للنفط يقع على الشاطئ ويبعد الى الشرق عن اقرب نقطة للمنصة من الشاطئ مسافة 8 كيلو متر . اذا علمت ان تكلفة مد كيلومتر في البحر هو 5 مليون درهم وعلى الشاطئ هو 3 مليون درهم .اوجد اقل تكلفة لمد خط الانابيب بين المنصة والخزان.

تكلفة البحر + تكلفة البر

$C = C_S + C_L.$

$= \underbrace{5}_{\text{السعر}}\underbrace{\sqrt{16+x^2}}_{\text{الطول}} + \underbrace{3}_{\text{السعر}}\underbrace{(8-x)}_{\text{الطول}}$



$0 \leq x \leq 8$

$C' = \frac{5(2x)}{2\sqrt{16+x^2}} + 3(-1).$

$= \frac{5x}{\sqrt{16+x^2}} - 3.$

$C' = 0 \Rightarrow \frac{5x^2}{\sqrt{16+x^2}} = 3.$

تربيع الطرفين $\frac{25x^2}{16+x^2} = 9$

$25x^2 = 144 + 9x^2$

$16x^2 = 144$

$x^2 = 9.$

$\underset{\text{مرفوض}}{x = -3}$, $x = 3$

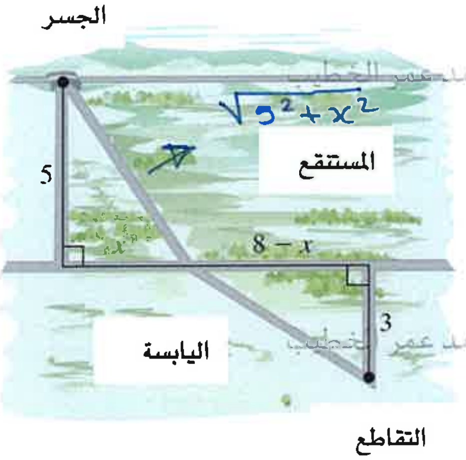
$C(0) = 44$

$C(8) = 44.7$

$C(3) = 40$

أقل تكلفة 40 مليون .

(1) يراد عمل طريق بين الجسر والتقاطع حيث يكون جزء من الطريق فوق المستنقع بتكلفة 10 مليون درهم للميل الواحد و 7 مليون درهم فوق الارض اليابسة للميل الواحد ، اكتب دالة التكلفة لعمل الطريق



$C = C_S + C_L$

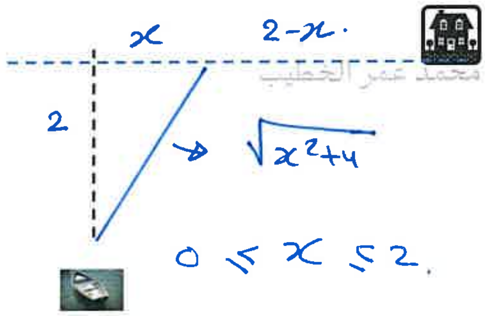
$= 10\sqrt{25+x^2} + 7\sqrt{(8-x)^2+9}$

---

(2) ابحر شخص في قاربه على بعد $2km$ من الشاطئ ، يريد الوصول الى بيته الذي يقع على الشاطئ والذي يبعد $2km$ عن اقرب نقطة للقارب من الشاطئ ، اذا علمت انه يمكنه التجديف بمعدل $2km/h$ والسير بمعدل $5km/h$. اوجد اقل زمن ممكن للوصول الى بيته

الزمن = المسافة / السرعة .

$\frac{2}{5}-\frac{1}{5}x$



$0 \leq x \leq 2.$

$T = T_S + T_L$

$= \frac{\sqrt{x^2+4}}{2} + \frac{2-x}{5}$

$T' = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{5} .$

$T' = 0 \Rightarrow$

$\frac{x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{5}$

$5x = 2\sqrt{x^2+4}$

$25x^2 = 4(x^2+4)$

$21x^2 = 16$

$x^2 = \frac{16}{21}$

$x = -\sqrt{\frac{16}{21}}$ مرفوض , $x = \sqrt{\frac{16}{21}} = \frac{4}{\sqrt{21}}$

$T(0) = 2.4$

$T(2) = 2$

$T\left(\frac{4}{\sqrt{21}}\right) = 1.3$

اقل زمن 1.3 ساعة .

(1) الغرض من السعال البشري هو زيادة تدفق الهواء الى الرئتين ،بازاحة جميع الجسيمات التي تسد القصبة الهوائية وتغير نصف قطر القصبة الهوائية. اذا علمت ان السرعة المتجهه لتدفق الهواء خلال القصبة الهوائي تعطى بالعلاقة $V(r)=cr^2(r_0-r)$ عند نصف قطر القصبة r ، حيث c عدد ثابت و r_0 نصف قطر القصبة بدون اي ضغط (سعال) اوجد نصف قطر القصبة الهوائية التي تجعل السرعة المتجهه للهواء اكبر ما يمكن

$$v(r) = cr^2(r_0 - r) \quad , r > 0$$

$$= c(r^2 r_0 - r^3).$$

$$v'(r) = c(2r r_0 - 3r^2).$$

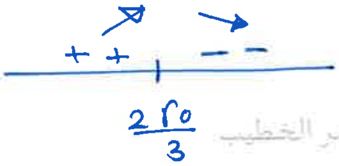
$$v'(r) = 0 \Rightarrow c(2r r_0 - 3r^2) = 0$$

$$c r(2r_0 - 3r) = 0$$

$$r = 0 \quad , \quad r = \frac{2r_0}{3}.$$

مرفوض

للدالة قيمة عظمى محلية وحيدة عند $r = \frac{2r_0}{3}$. فهي مطلقة .



(2) تمثل الدالة $f(v) = v\,e^{-v/2}$ قوة احدى عظلات الجسم بعد انقباضها بسرعة مقدارها $v > 0$ ، اوجد السرعة التي تحقق القيمة العظمى للقوة

$$f(v) = v\,e^{-v/2} \qquad v > 0.$$

$$f'(v) = 1 \cdot e^{-v/2} + v\,e^{-v/2} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$= e^{-v/2}\left[1 - \frac{v}{2}\right]$$

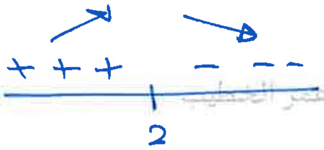
$$= \frac{1 - \frac{v}{2}}{e^{v/2}}.$$

$$f'(v) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{v}{2} = 0$$

$$v = 2.$$

$f'(v)$ غ.م $\Rightarrow e^{-v/2} = 0$

لا يوجد حل .



فيه عظمى محلية وحيدة عند $v = 2$ فهي مطلقة .

(1) تمثل الدالة $f(t)=e^{-0.02t}-e^{-0.42t}$ تركيز الدواء في العضلات بعد t ساعة من اخذ الدواء

اوجد الزمن الذي يكون فية التركيز الدواء داخل العضلات اكبر ما يمكن

$$f'(t) = e^{-0.02t}(-0.02) - e^{-0.42t}(-0.42).$$

$$= -0.02e^{-0.02t} + 0.42e^{-0.42t}$$

$$f'(t)=0 \Rightarrow 0.02e^{-0.02t} = 0.42e^{-0.42t}$$

$$\frac{e^{-0.02t}}{e^{-0.42t}} = \frac{0.42}{0.02}$$

$$e^{0.4t} = 21$$

$$\text{Ln } e^{0.4t} = \text{Ln } 21.$$

$$0.4t = \text{Ln } 21$$

$$t = \frac{\text{Ln } 21}{0.4} = 7.6.$$

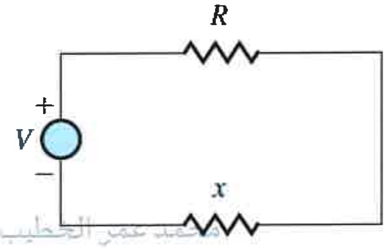
$$\overset{+\ +}{\longrightarrow}\ \underset{7.6}{|}\ \overset{-\ -\ -}{\longrightarrow}$$

قيمة عظمى محلية وحيدة فهي مطلقة.

الزمن 7.6 ساعة.

---

(2) تمثل العلاقة $p(x)=\dfrac{V^2x}{(R+x)^2}$ مقدار الطاقة الممتصة في جهاز كهربائي كما في الشكل حيث V مقدارالجهد(ثابت) و R كمية المقاومة (ثابت) ، اوجد قيمة المقاومة x التي تحقق القيمة العظمى للطاقة الممتصة.



$$p'(x) = \frac{v^2(R+x)^2 - v^2x\cdot 2(R+x)}{(R+x)^4.} \quad , v>0 , R>0$$

$$x>0.$$

$$= \frac{v^2(R+x)[R+x-2x]}{(R+x)^4}$$

$$= \frac{v^2(R+x)(R-x)}{(R+x)^4}$$

$$p'=0 \Rightarrow \underset{\text{مرفوض}}{v=0} \quad , \underset{\text{مرفوض}}{R=-x} \quad , R=x.$$

$$\overset{+\ +\ +}{\longrightarrow}\ \underset{R}{|}\ \overset{-\ -\ -}{\longrightarrow}$$

قيمة عظمى محلية وحيدة فهي مطلقة. عند $x=R$.

(1) تمثل الدالة $Q(t) = -3t^3 + 18t^2 + 60t$ **عدد السلع التي ينتجها عامل خلال الزمن** t **حيث تمثل** $Q'(t)$ **كفاءة العامل في اي لحظة . اوجد الزمن التي يكون فيها كفاءة العامل اكبر ما يمكن.**

نجد اولاً دالة الكفاءة وهي مشتقة دالة السلع.

$E(t) = Q'(t)$

$= -9t^2 + 36t + 60$

نجد القيمة العظمى للدالة $E(t)$.

$E'(t) = -18t + 36$

$E'(t) = 0$

$t = 2$

$E''(t) = -18$

$E''(2) = -18 < 0$

للدالة $E(t)$ قيمة عظمى محلية وحيدة أي مطلقة.

عند $t = 2$

---

(2) تمثل الدالة $T(x) = 102 - \frac{1}{54}(9x^2 - x^3)$ **درجة حرارة الجسم بعد تلقي الدواء بساعة واحدة حيث** x **كمية الجرعة المعطى بالمليغرام للمريض** $0 \le x \le 6$ **وتمثل الدالة** $T'(x)$ **حساسية الجسم من الجرعة . اوجد الجرعة التي تحقق القيمة الصغرى للحساسية.**

نجد اولاً دالة حساسية الجسم

$E(x) = T'(x)$

$= -\frac{1}{54}(18x - 3x^2)$

نجد القيمة الصغرى للدالة $E(x)$

$E'(\ ) = -\frac{1}{54}(18 - 6x)$

$E'(x) = 0 \Rightarrow$

$18 - 6x = 0$

$x = 3.$

$E(0) = 0$

$E(6) = 0$

$E(3) = -\frac{1}{2}$

القيمة الصغرى المطلقة.

تكون عند $x = 3$

الوحدة الرابعة : تطبيقات الاشتقاق /// الدرس الثامن : المعدلات المرتبطة

خطوات حل مسائل المعدلات المرتبطة بالزمن

اقراء المسالة

(1) ارسم شكلا توضيحياً

(2) حدد المتغيرات ورمّزها

(3) اكتب المعطيات والمطلوب

(4) اكتب العلاقة الاساسية التي تربط المعطيات بالمطلوب

(5) اشتق الدالة الاساسية ضمنياً بالنسبة للزمن

اشتق كل المتغيرات بالنسبة للزمن

(6) عوض المعطيات لأيجاد المطلوب

ملاحظة :

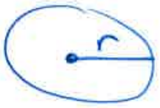
(1) يجوز اشتقاق الدالة الاساسية في حالة وجود متغيرين بشرط توفر معلومات عن المتغيرات او ابحث عن علاقة مساعدة للتخلص من احدهما

(2) اذا كانت قيمة المتغير تزيد فان معدل تغيره موجب

(3) اذا كانت قيمة المتغير تقل فان معدل تغيره سالب

ينتشر حريق في احدى الغابات بشكل دائري ، ويتزايد طول نصف قطر الحريق بمعدل $5m / \min$ اوجد معدل التغير في مساحة الحريق عندما يكون نصف قطره $200m$.

②+①



$r'(t) = \frac{dr}{dt} = +5$ ③

$A'(t) = \frac{dA}{dt}\Big|_{r=200} = ??$

④ $A = \pi r^2$

اشتق الطرفين ضمنياً بالنسبه للزمن

⑤ $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$.

⑥ $\frac{dA}{dt}\Big|_{r=200} = 2\pi(200)\cdot(5)$

$= 2000\pi \ m^2/min$

$= 6233 \ m^2/min.$

(1) مثلث متساوي الأضلاع يزداد طول ضلعه بمقدار $0.1\, cm/s$ أوجد معدل التغير في مساحة المثلث عندما يكون طول ضلعه يساوي $\sqrt{3}\, cm$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2x \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2(\sqrt{3}) \cdot (0.1)$$

$$= 0.15 \quad cm^2/s.$$

$$\frac{dx}{dt} = +0.1$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=\sqrt{3}} = ??$$

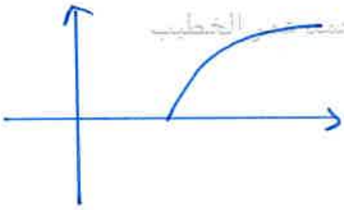
---

(2) تتحرك نقطة على منحنى معادلته $y = \sqrt{x^2 - 3}$ ، فإذا كان الاحداثي x للنقطة يزداد بمعدل $3\, unit/s$ أوجد معدل التغير في الإحداثي y عندما تكون $x = 2$

$$y = \sqrt{x^2 - 3}.$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\cancel{2}x \cdot \frac{dx}{dt}}{\cancel{2}\sqrt{x^2-3}}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=2} = \frac{(2)(3)}{\sqrt{2^2-3}} = 6 \quad u/s.$$



$$\frac{dx}{dt} = +3.$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=2} = ??$$

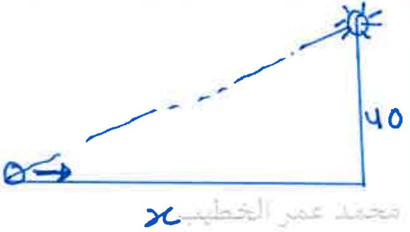
---

(3) تتحرك كرة بمعدل $1\, m/s$ على خط أفقي متجه نحو عمود ارتفاعه $40\, m$ ، أوجد معدل تغير المسافة بين الكرة وقمة العمود عندما تكون الكرة على بعد $30\, m$ من قاعدة العمود. (اهمل ارتفاع الكره)

$$S = \sqrt{x^2 + 40^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\cancel{2}x \cdot \frac{dx}{dt}}{\cancel{2}\sqrt{x^2+40^2}},$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{(30)(-1)}{\sqrt{30^2+40^2}} = -0.6 \quad m/s.$$



$$\frac{dx}{dt} = -1$$ لان المسافة تتناقص.

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{x=30} = ??$$

(1) حوض (منصة) ارتفاعه $6\,ft$ عن منسوب الماء ، سحب رجل مركب بواسطة حبل بمعدل $2\,ft/s$

ويبقى القارب على مستوى سطح الماء

اوجد سرعة اقتراب المركب عندما يكون على بعد $20\,ft$ من اسفل الحوض

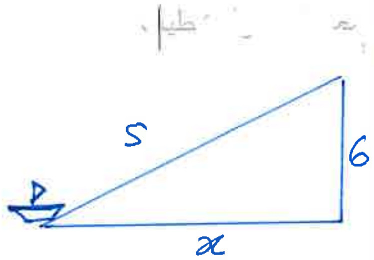
$$S^2 = x^2 + 6^2$$

$$\cancel{2}S \cdot \frac{dS}{dt} = \cancel{2}x \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\sqrt{436} \cdot (-2) = (20)\,\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-2\sqrt{436}}{20}$$

$$= 2.1 \quad ft/s$$



$$\frac{dS}{dt} = -2$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=20} = ??$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{20^2+6^2}$$

---

(2) تسير سيارة بسرعة $50\,km/h$ اتجاه الجنوب من نقطة تبعد $\frac{1}{2}\,km$ شمال التقاطع ، وتسير سيارة شرطة بسرعة $40\,km/h$ من نقطة تبعد $\frac{1}{4}\,km$ شرق التقاطع نفسه ، في هذه اللحظة يقيس رادار سيارة الشرطة المعدل الذي تتغير بها المسافة بين السيارتين ، اوجد ما هذه السرعة التي سيسجلها الرادار.

هل ستكون قياس الرادار لسرعة السيارة صحيح ؟ فسر ذلك

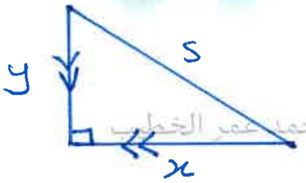
$$S = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2x\,\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{4}\right)\cdot(-40) + 2\left(\frac{1}{2}\right)(-50)}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}}$$

$$= -62.6 \quad Km/h$$

هذه القراءة خاطئة لان الرادار متحرك



$$\frac{dx}{dt} = -40$$

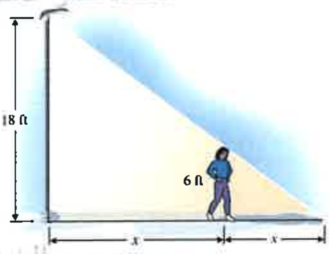
$$\frac{dy}{dt} = -50$$

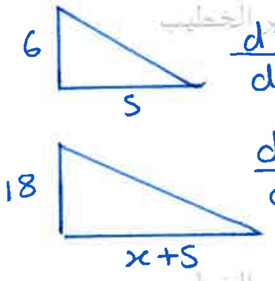
$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{x=1/4,\ y=1/2} ??$$

(1) رجل طوله $6\,ft$ ويبعد $12\,ft$ عن عمود انارة ارتفاعه $18\,ft$

ويمشي مبتعداً عن العمود بمعدل $2\,ft/s$

أوجد معدل تغير طول ظل الرجل





$\frac{dx}{dt} = 12$

$\frac{ds}{dt} = ??$

$\frac{x+s}{s} = \frac{18}{6} = 3$

$x + s = 3s$

$x = 2s$

$s = \frac{1}{2}x$

$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt}$

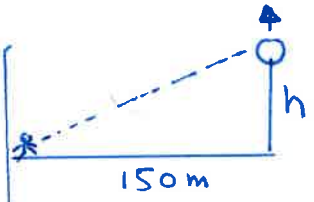
$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}(12)$

$= 6$

---

(2) يرتفع بالون راسياً للأعلى بمعدل $75m/\min$ ، اذا تم رصد البالون من مشاهد على الارض ويبعد $150m$ عن موقع البالون على الارض، اوجد معدل تغير زاوية المشاهد للبالون عندما يكون البالون على ارتفاع $150m$ من سطح الارض (اهمل ارتفاع الرجل)

* ممكن حل السؤال بأكثر من طريقة.



$\frac{dh}{dt} = 75$

$\frac{d\theta}{dt} = ??$

$\tan\theta = \frac{h}{150} = \frac{1}{150}h.$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{h}{150}\right)$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1+\left(\frac{h}{150}\right)^2} \cdot \frac{1}{150} \cdot \frac{dh}{dt}$

$\frac{d\theta}{dt}\Big|_{h=150} = \frac{1}{1+\left(\frac{150}{150}\right)^2} \cdot \frac{1}{150}(70) = 0.25 \text{ rad/min.}$

---

(3) يقف لاعب كرة البيسبول على بعد قدمين من اللوح الرئيس للكرة ويشاهد الكرة قادمة بتجاهه بشكل افقي وبسرعة متجهة $130\,ft/s$ ، ما معدل التغير في زاوية النظر للاعب لمتابعة الكرة عندما تعبر الكرة اللوح $(x=0)$

$\tan\theta = \frac{x}{2}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{dt}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$

$= \frac{\frac{1}{2}(-130)}{1+\left(\frac{0}{2}\right)^2} = -65 \text{ rad/s}$

$\frac{dx}{dt} = -130$

$\frac{d\theta}{dt}\Big|_{x=10} = ??$

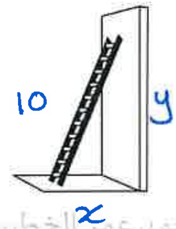
سلم طوله $10\ m$ ، موضوع احد طرفية على جدار منزل والطرف الأخر موضوع على الارض، ويتحرك بعيداَ عن الحائط بمعدل $3\ m/s$

(أ) ما سرعة انزلاق الطرف العلوي للسلم عند اللحظة التي يكون فيها الطرف السفلي على بعد $8\ m$ من الحائط.

$$y = \sqrt{100 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-2x \ \frac{dx}{dt}}{2\sqrt{100 - x^2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=8} = \frac{-8(3)}{\sqrt{100-8^2}} = -4\ m/s .$$



$$\frac{dx}{dt} = 3$$

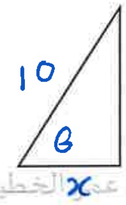
$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=8} = ??$$

(ب) ما معدل التغير في الزاوية التي تقع بين السلم والارض عند اللحظة التي يكون فيها الطرف السفلي على بعد $8\ m$ من الحائط.

$$\cos\theta = \frac{x}{10} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{x}{10}\right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{10}\right)^2}} \cdot \left(\frac{-1}{10}\right) \cdot \frac{dx}{dt} .$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{8}{10}\right)^2}} \left(\frac{-1}{10}\right) \cdot (3) = \frac{-1}{2}\ rad/s .$$



$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=8} = ?$$

(ج) ما معدل التغير في مساحة المثلث الذي يتكون من السلم والحائط والارض عند اللحظة التي يكون فيها الطرف السفلي على بعد $8\ m$ من الحائط.

$$A = \frac{1}{2} xy$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{dx}{dt} y + x \cdot \frac{dy}{dt}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(3)(6) + (8)(-4)\right]$$

$$= -7\ m^2/s$$

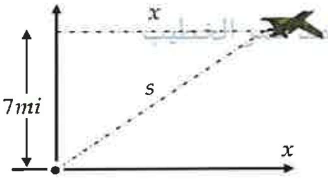
عندما

$x = 8$

تكون

$$y = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

(1) تطير طائرة على ارتفاع ثابت قدرة $7\ mi$ عن سطح الارض وتمر مباشرة فوق رادار كما هو مبين بالشكل ، اذا كانت المسافة بين الطائرة والرادار تتغير بسرعة $300\ mi / h$ اوجد سرعة الطائرة عندما تكون المسافة بين الطائرة والرادار $10\ mi$.



$$\frac{ds}{dt} = 300$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{s=10} = ??$$

$$x = \sqrt{s^2-7^2}$$

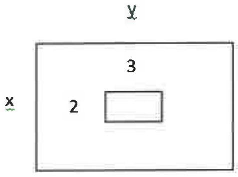
$$\frac{dx}{dt} = \frac{2s\,\frac{ds}{dt}}{2\sqrt{s^2-7^2}}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{s=10} = \frac{10(300)}{\sqrt{10^2-7^2}}$$

$$= 420 \quad m/h$$

---

(2) مستطيل عرضة $2\ cm$ ، وطولة $3\ cm$ يتغير بعدي المستطيل بحيث يزداد عرضة بمعدل $4\ cm / s$ فاذا كانت النسبة بين ابعاد المستطيل لا تتغير ، اوجد معدل تزايد مساحة المستطيل عندما يكون عرضة $8\ cm$



$$\frac{dx}{dt} = 4$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=8} = ??$$

من التشابه

$$\frac{y}{3} = \frac{x}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x$$

$$A = xy$$

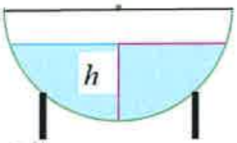
نلاحظ عدم وجود معلومات عن y ومشتقتها لذلك نحتاج الى معادلة مساعدة.

$$A = x \cdot \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}x^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 3x \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=8} = 3(8)(4) = 96 \ cm^2/s$$

(1) يتدفق النفط الى خزان على شكل نصف كرة بمعدل $8m^3/s$ ، فاذا كان حجم النفط V في الخزان يعطي بالعلاقة



$$V=\frac{\pi}{3}h^2(36-h)$$

اوجد معدل تغير ارتفاع النفط بالخزان عندما يكون النفط على ارتفاع $4m$.

$\frac{dv}{dt}=8$

$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4}=??$

$v=\frac{\pi}{3}(36h^2-h^3)$

$\frac{dv}{dt}=\frac{\pi}{3}\left(72h\cdot\frac{dh}{dt}-3h^2\cdot\frac{dh}{dt}\right)$

$8=\frac{\pi}{3}\left(72(4)-3(4)^2\right)\frac{dh}{dt}$.

$8=\pi(80)\frac{dh}{dt}$. $\Rightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{1}{10\pi}$ m/s.

---

(2) بالون كروي نفخ في غاز الهيليوم بمعدل $100\pi\ ft^3/\min$.

(أ) اوجد سرعة تزايد نصف قطر البالون عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $5\ ft$.

$\frac{dv}{dt}=100\pi$.

$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=5}=??$

$v=\frac{4}{3}\pi r^3$.

$\frac{dv}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$.

$100\pi=4\pi(5)^2\cdot\frac{dr}{dt}$

$100\pi=100\pi\cdot\frac{dr}{dt}\Rightarrow\frac{dr}{dt}=1$ ft/min.

(ب) اوجد سرعة تزايد مساحة البالون السطحية عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $5\ ft$.

$S=4\pi r^2$

$\frac{ds}{dt}=8\pi r^2\cdot\frac{dr}{dt}$.

$=8\pi(5)(1)=40\pi\ ft^3/min$.

قطرة ماء كروية تتبخر بمعدل $1\,cm^3/\min$ وتبقى تحافظ على شكلها

(أ) اوجد معدل تناقص نصف قطر قطرة الماء عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $0.2\,cm$.

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt} .$$

$$-1 = 4\pi(0.2)^2 \cdot \frac{dr}{dt} .$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-1}{4\pi(0.2)^2} \simeq -2 \ cm^3/min.$$

$$\frac{dv}{dt} = -1$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=0.2} = ??$$

(ب) اوجد سرعة تناقص المساحة السطحية لقطرة الماء عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $0.2\,cm$.

$$S = 4\pi r^2$$

$$\frac{dS}{dt} = 8\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$= 8\pi(0.2)(-2)$$

$$= -10 \quad cm^2/min$$

(ج) اذا كان معدل تبخر حجم قطرة الماء يتناسب مع المساحة السطحية لها ، فبين ان معدل تغير نصف القطر ثابت عند اي لحظة

$$\frac{dv}{dt} \propto S$$

K ثابت

$$\frac{dv}{dt} = K \cdot 4\pi r^2$$

$$4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = K \cdot 4\pi r^2$$

$$\frac{dr}{dt} = K \quad \text{ثابت}$$

معدل تغير نصف القطر ثابت

(1) خزان مكعب الشكل مملوء بالماء طول ضلعه $5\ m$ يتسرب منه الماء بمعدل $2\ m^3/h$ ، أوجد معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان.

* يجب التمييز بين حجم الماء وحجم الخزان

* نلاحظ ان المتغير هوا ارتفاع الماء فقط . وليس عرض وطول قاعدة الماء في الخزان

$v = 5\cdot5\cdot h = 25h.$ حجم الماء . وليس الخزان

$\frac{dv}{dt} = -2$

$\frac{dv}{dt} = 25\cdot\frac{dh}{dt}$

$-2 = 25\cdot\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{-2}{25} = -0.08\ m/h.$

---

(2) خزان اسطواني الشكل نصف قطره $3\,ft$ وارتفاعه $5\,ft$ و يتدفق الماء له بمعدل $15\,ft^3/s$ ويتسرب منه بمعدل $6\,ft^3/s$.

* نلاحظ ان نصف قطر الماء في الخزان ثابت .

(أ) اوجد معدل تغير ارتفاع الماء داخل الخزان

$v = \pi(3)^2\cdot h = 9\pi h$ حجم الماء

$\frac{dv}{dt} = 15-6 = 9$

$\frac{dh}{dt} = ??$

$\frac{dv}{dt} = 9\pi\cdot\frac{dh}{dt}.$

$9 = 9\pi\cdot\frac{dh}{dt}.$

$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi} = 0.31\ ft/s$

(ب) اوجد معدل تغير مساحة سطح الماء داخل الخزان من الجهه العلوية (عند النظر من الاعلى)

سطح الماء ، ثابت

$S = 4\pi r^2 = 4\pi(3)^2 = 36\pi.$

$\frac{ds}{dt} = 0 .$

(1) يتسرب الماء من خزان على شكل مخروط قائم رأسه للاسفل بمعدل $10m^3 / \min$ اذا كان ارتفاع الماء في المخروط يساوي طول قطر قاعدة الماء عند نفس اللحظة،

(أ) اوجد سرعة تغير نصف قطر الماء في المخروط عندما يكون نصف القطر $5m$.

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

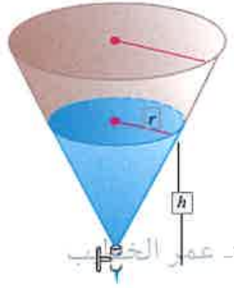
$$= \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2r$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 .$$

$$\frac{dv}{dt} = 2\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt} .$$

$$-10 = 2\pi (5)^2 \cdot \frac{dr}{dt} .$$

$$-10 = 50\pi \cdot \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{-1}{5\pi} \ m/min$$



$h = 2r$

$\frac{dv}{dt} = -10$

$\frac{dr}{dt} = ??$

(ب) اوجد سرعة هبوط سطح الماء عند نفس اللحظة.

$$h = 2r.$$

$$\frac{dh}{dr} = 2 \cdot \frac{dr}{dt} .$$

$$\frac{dh}{dt} = 2\left(\frac{-1}{5\pi}\right) = \frac{-2}{5\pi} . \ m/min$$

(ج) اوجد معدل تغير مساحة سطح الماء العلوية داخل الخزان (عند النظر من الاعلى) عند نفس اللحظة.

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt} .$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi (5) \cdot \left(\frac{-1}{5\pi}\right)$$

$$= -2 \ m^2/min$$

(1) ينسكب الرمل بمعدل $20\,ft^3/s$ ويشكل كومة مخروطية على الأرض بحيث يبقى الارتفاع ضعف نصف القطر، اوجد معدل تزايد نصف قطر الكومه عندما يصل ارتفاع الكومة $6\,ft$ الكومة

$$\frac{dv}{dt} = +20$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{h=6} = ??$$

$$h = 2r$$

عندما $h=6$ فان $r=3$.

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 (2r)$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 2\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$20 = 2\pi (3)^2 \cdot \frac{dr}{dt} .$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{10}{9\pi} \cdot ft/s.$$

---

(2) ينسكب الرمل بمعدل $20\,ft^3/s$ ويشكل كومة مخروطية على الأرض بحيث تبقى زاوية المخروط مع المستوى الافقي 45° ، اوجد معدل تزايد نصف قطر الكومه عندما يصل ارتفاع الكومة $6\,ft$

$$\frac{dv}{dt} = 20$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{h=6.} = ??$$

$$\tan 45^\circ = \frac{h}{r}$$

$$1 = \frac{h}{r}$$

$$h = r$$

عندما $h=6$ فان $r=6$

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^3.$$

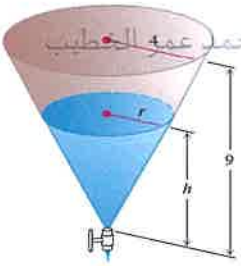
$$\frac{dv}{dt} = \pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$20 = \pi (6)^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{20}{36\pi}$$

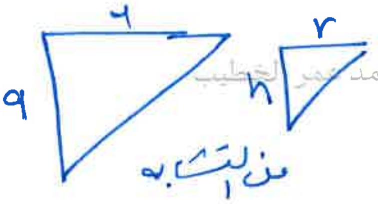
$$= \frac{5}{9\pi} \quad ft/s$$

(1) خزان ماء مخروطي قائم رأسه للاسفل طول نصف قطر قاعدته $4m$ وارتفاعه $9m$ ، يصب فيه الماء بمعدل $17m^3/h$ ويتسرب الماء منه بمعدل $8m^3/h$ ، اوجد سرعة تغير نصف قطر الماء في المخروط عندما يكون نصف القطر $2m$



$\frac{dv}{dt} = 17-8=9$

$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=2} = ?$



$\frac{h}{9}=\frac{r}{4} \Rightarrow h=\frac{9}{4}r.$

حجم الماء في الخزان

$v=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$

$=\frac{1}{3}\pi r^2\left(\frac{9}{4}r\right)$

$=\frac{3}{4}\pi r^3.$

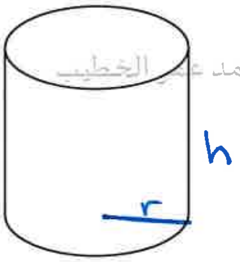
$\frac{dv}{dt}=\frac{9}{4}\pi r^2\cdot\frac{dr}{dt}.$

$9=\frac{9}{4}\pi(2)^2\cdot\frac{dr}{dt}.$

$\frac{dr}{dt}=\frac{1}{\pi}=0.31\ m/h.$

---

(2) اسطوانة دائرية قائمة تتمدد بالحرارة ،فإذا كان ارتفاعها $\frac{2}{3}$ قطر قاعدتها ،ويتغير نصف قطرها بمعدل $0.01ft/h$ أوجد معدل تغير حجمها وذلك عندما يكون طول نصف قطر قاعدتها $5ft$.



$\frac{dr}{dt}=0.01$

$h=\frac{2}{3}(2r)=\frac{4r}{3}$

$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{r=4} = ??$

$v=\pi r^2 h$

$=\pi r^2\left(\frac{4}{3}r\right)$

$=\frac{4}{3}\pi r^3.$

$\frac{dv}{dt}=4\pi r^2\cdot\frac{dr}{dt}$

$=4\pi(5)^2\cdot(0.01)$

$=\pi\ ft^3/h$

مكعب ثلجي يتناقص طول ضلعة بمعدل $1cm/h$

(أ) اوجد معدل تغير حجمه عندما يكون طول ضلعه $10cm$

$$\frac{dx}{dt} = -1$$

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{x=10} = ?$$

$$v = x^3 \cdot$$

$$\frac{dv}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{x=10} = 3(10)^2(-1) = -300$$

(ب) اوجد معدل تغير مساحة السطحية عندما يكون طول ضلعه $10cm$

$$S = 6x^2$$

$$\frac{ds}{dt} = 12x \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{x=10} = 12(10)(-1) = -120$$

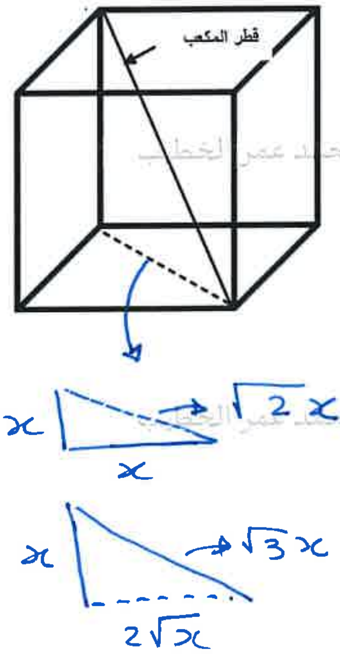
(ج) اوجد معدل تغير طول قطره عندما يكون طول ضلعه $10cm$

$$L = \sqrt{3}\,x$$

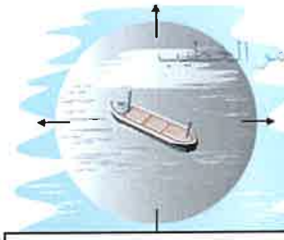
$$\frac{dL}{dt} = \sqrt{3} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{dL}{dt}\right|_{x=10} = \sqrt{3}(-1)$$

$$= -\sqrt{3}$$



(1) يتسرب النفط من ناقلة بحرية بمعدل 120 جالون في الدقيقة وينتشر بشكل دائري بسمك $\frac{1}{4}''$ ، اوجد معدل تزايد نصف قطر بقعة النفط عندما يكون نصف القطر $300\,ft$.



$$7.5\,gal = 1\,ft^3$$
$$120\,gal = 16\,ft^3$$

$$\frac{1}{4}'' = \frac{1}{4}in = \frac{1}{4}\times\frac{1}{12}ft = \frac{1}{48}'$$

حجم الاسطوانة مع الارتفاع الثابت :

$$v = \pi r^2 h$$
$$= \pi r^2 \left(\frac{1}{48}\right)$$
$$= \frac{1}{48}\pi r^2$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{48}\pi r \cdot \frac{dr}{dt}.$$
$$16 = \frac{1}{24}\pi(300)\frac{dr}{dt}.$$
$$\frac{dr}{dt} = \frac{16(24)}{300\pi} = 0.4\ ft/min.$$

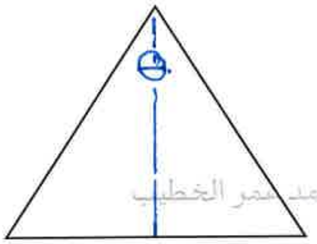
$\frac{dv}{dt} = 120$ جالون

$= \frac{120}{7.5} = -16\ ft^3/m$

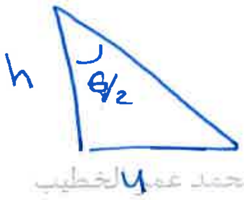
$\frac{dr}{dt} = ?$

---

(2) مثلث متساوي الساقين قاعدتة ثابتة طولها $8\,cm$ ، يزيد ارتفاع المثلث بمعدل $2\,cm$ لكل دقيقة اوجد معدل التغير في زاوية رأس المثلث عندما يكون ارتفاعه $6\,cm$.



$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{4}{h}.$$
$$\frac{\theta}{2} = \tan^{-1}\frac{4}{h}.$$
$$\theta = 2\tan^{-1}\frac{4}{h}.$$
$$\frac{d\theta}{dt} = 2\,\frac{1}{1+\left(\frac{4}{h}\right)^2}\cdot\frac{-4}{h^2}\cdot\frac{dh}{dt}.$$



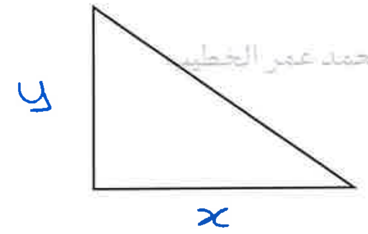
$$\frac{d\theta}{dt} = 2\,\frac{1}{1+\left(\frac{4}{6}\right)^2}\cdot\frac{-4}{6^2}(2)$$
$$= -0.3\ rad/min$$

$\frac{dh}{dt} = 2$

$\frac{d\theta}{dt} = ??$

(1) في لحظة ما كان طولا القاعدة والارتفاع في مثلث قائم الزاوية هما $6\ cm$ و $8\ cm$ على الترتيب فإذا كان طول الضلع الأول ينقص بمعدل $1\ cm/\min$ وكان طول الضلع الثاني يزداد بمعدل $2\ cm/\min$. أوجد معدل التغير في مساحة المثلث بعد دقيقتين

$$A = \frac{1}{2} x y$$



$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{dx}{dt} \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dt}\right]$$

$$\frac{dx}{dt} = -1$$

$$\frac{dy}{dt} = 2$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left[(-1)(12) + (4)(2)\right]$$

$$= -2\ cm^2/min.$$

$$\frac{dA}{dt} = ??$$

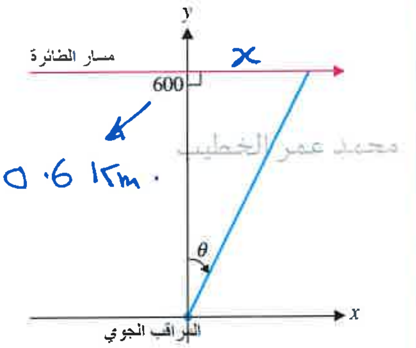
$$\to x = 6 - 2(1) = 4$$

$$\to y = 8 + 2(2) = 12$$

---

(2) تطير طائرة بسرعة $540\ km/h$ على ارتفاع ثابت قدرة $600m$ عن سطح الارض وتمر فوق مراقب جوي ، اوجد اكبر معدل للتغير في الزاوية بين خط نظر المراقب والخط العمودي على مسار الطيران

* هذا السؤال معدلات مرتبطة ثم قيم مثلى .



$$\tan\theta = \frac{x}{0.6}.$$

$$\sec^2\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{0.6} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{0.6}(540)$$

$$\frac{dx}{dt} = 540$$

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = 900$$

$$\frac{d\theta}{dt} = ??$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{900}{\sec^2\theta} = 900\cos^2\theta.$$

$$f(\theta) = 900\cos^2\theta.$$

نريد ايجاد القيمة العظمى لمعدل التغير.

بما ان القيمة العظمى $\cos^2\theta$ هو 1 فان القيمة $f(\theta)$ هو 900 rad/h.

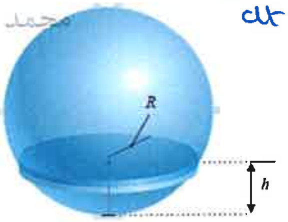
ضخت مياه الى خزان كروي نصف قطره $60\,ft$ بمعدل ثابت $10\,f^3/s$

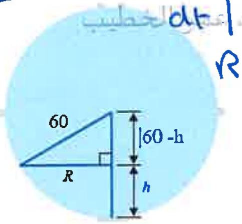
اوجد معدل تغير نصف قطر اعلى مستوى للمياه في الخزان عندما يمتلئ الخزان الى النصف

يعطى حجم الماء في الخزان الكروي الذي نصف قطره $60\,ft$ ونصف قطر مستوى سطح الماء R بالعلاقة

$$V(R)=\pi\left[60^2(60^2-R^2)^{\frac{1}{2}}\;-\frac{1}{3}(60^2-R^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\times 60^3\right]$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dR}\times\frac{dR}{dt}\rightarrow\frac{dR}{dt}=\frac{dV/dt}{dV/dR}$$





$$\frac{dv}{dt}=10\quad,\ \left.\frac{dR}{dt}\right|_{R=60}=?$$

$$\frac{dv}{dR}=\pi\left[60^2\cdot\frac{1}{2}(60^2-R^2)^{-1/2}\cdot -2R\;-\frac{1}{2}(60^2-R^2)^{1/2}\cdot -2R\right]$$

$$=\pi\left[\frac{-60^2R}{\sqrt{60^2-R^2}}+R\sqrt{60^2-R^2}\right]$$

$$=\pi\left[\frac{-60^2R+R(60^2-R^2)}{\sqrt{60^2-R^2}}\right]$$

$$=\pi\left[\frac{-R^3}{\sqrt{60^2-R^2}}\right]=\frac{-\pi R^3}{\sqrt{60^2-R^2}}$$

$$\frac{dR}{dt}=\frac{dv/dt}{dv/dt}=\frac{-10}{\frac{-\pi R^3}{\sqrt{60^2-R^2}}}=\frac{-10\sqrt{60^2-R^2}}{\pi R^3}.$$

$$\left.\frac{dR}{dt}\right|_{R=60}=\frac{-10\sqrt{60^2-60^2}}{\pi(60)^3}=0$$

ضخت مياه الى خزان كروي نصف قطره $60\,ft$ بمعدل ثابت $10\,f^3/s$

اوجد الارتفاع الذي عنده معدل التغير في الارتفاع يساوي معدل التغير في نصف القطر

تعطى العلاقة بين ارتفاع الماء h ونصف قطر سطح الماء R عند اي زمن بالعلاقات التالية

$$h(t)=60\pm\sqrt{60^2-R^2} \quad , \quad R(t)=\pm\sqrt{120h-h^2}$$

$$h(t) = 60 \pm \sqrt{60^2-R^2}$$

$$\frac{dh}{dt} = \pm \frac{-2R\cdot\frac{dR}{dt}}{2\sqrt{60^2-R^2}}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dR}{dt} \Rightarrow$$

$$1 = \pm\frac{R}{\sqrt{60^2-R^2}}$$

$$\sqrt{60^2-R^2} = \pm R.$$

$$60^2 - R^2 = R^2$$

$$2R^2 = 60^2$$

$$\sqrt{2}\,R = 60$$

$$R = \frac{60}{\sqrt{2}} = 30\sqrt{2}$$

$$h(t) = 60 \pm \sqrt{60^2-(30\sqrt{2})^2} = 102.42$$

17.58 او

الوحدة الرابعة: تطبيقات الاشتقاق /// الدرس التاسع : معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم

الاقتصاد

القيمة العظمى للربح

نظريات مهمة في الاقتصاد

(1) القيمة العظمى للربح

(2) القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة

(3) الطلب والسعر

(1) الدخل من بيع x قطعة بسعر القطعة الواحدة p هو $r(x) = x \times p$

(2) تكلفة انتاج x قطعة هو $c(x)$

(3) الربح (الخسارة) من بيع x قطعة هو $p(x) = r(x) - c(x)$

الدخل الحدي $\dfrac{dr}{dx}$

التكلفة الحدية $\dfrac{dc}{dx}$

الربح الحدي $\dfrac{dp}{dx}$

ملاحظة مهمة: دالة الدخل والتكلفة والربح هي دالة تراكمية اما الدخل الحدي والتكلفة الحدية والربح الحدي دالة حدية اي تحسب قيمة كل دالة عند قطعة واحدة فقط وليست تراكمية

ملاحظات مهمة

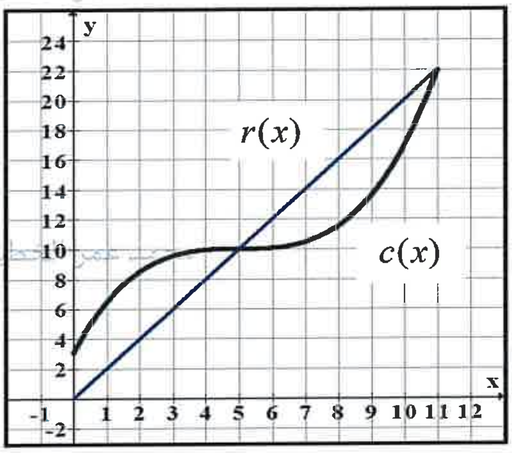
(1) التكلفة الفعلية لانتاج القطعة رقم x_n هو $C(x_n) - C(x_{n-1})$

(2) التكلفة الحدية لانتاج القطعة رقم x_n هو $C'(x_n)$

(3) عندما يكون الانتاج كبير فان التكلفة الفعلية لانتاج القطعة رقم x_n تقريبا يساوي التكلفة الحدية

(4) متوسط التكلفة للقطعة الواحدة يساوي $\bar{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x}$

(5) عندما يكون $C''(x) < 0$ فانه يعني ان تكلفة انتاج القطعة الواحدة يقل مع زيادة الانتاج ويدل ذلك على ان التصنيع على درجة كفاءة عالية



يمثل الشكل المجاور دالة الدخل $r(x)$ ودالة التكلفة $c(x)$ بملاين الدراهم عند انتاج x جهاز كمبيوتر بالالاف الوحدات لاحدى الشركات

(1) اوجد $C(0)$ وماذا تمثل

$c(0) = 3$

وهي تمثل التكلفة الابتدائية لمشروع وقيمتها 3 مليون

(2) هل تحقق الشركة ربح ام خسارة عند انتاج 2000 قطعة

خسارة لان التكلفة اكبر من الدخل (التكلفة فوق الدخل)

(3) حدد قيمة الربح او الخسارة عند انتاج 2000 قطعة

الخسارة $= 8.2 - 4 = 4.2$ مليون

(4) حدد الفترة التي تحقق فيها الشركة خسارة

سنة $(0 , 5)$

(5) حدد الفترة التي تحقق فيها الشركة ربح

سنة $(5 , 11)$

(6) حدد القيمة التقريبية للانتاج التي تحقق فيها الشركة ربحية عظمى عند $x = 8$

الربح $= 16 - 12 = 4$ مليون

(7) اوجد $C(5)$ و $r(5)$ وماذا تلاحظ.

$c(5) = 10$

$r(5) = 10$

$c(5) = r(5)$

الدخل يساوي التكلفة (نقطة التعادل)

اذا كانت دالة التكلفة لأنتاج x لعبة تعطى بالعلاقة $C(x)=0.02x^2+8x+5000$

(1) اوجد تكلفة انتاج اول 100 قطعة.

$$C(100) = 0.02(100)^2 + 8(100) + 5000 = 6000.$$

---

(2) اوجد التكلفة الفعلية لانتاج اللعبة رقم 100.

$$C(100) - C(99)$$

$$= 6000 - 5988.02$$

$$= 11.98.$$

---

(3) اوجد التكلفة الحدية لانتاج اللعبة رقم 100.

$$C'(x) = 0.04x + 8$$

$$C'(100) = 0.04(100) + 8 = 12$$

---

(4) قارن بين التكلفة الفعلية لانتاج اللعبة رقم 100 والتكلفة الحدية لانتاج اللعبة رقم 100. وايهما اسهل بالحساب.

تقريباً متساوية

ولكن التكلفة الحدية اسهل بالحساب

---

(5) اوجد متوسط تكلفة انتاج القطعة الواحدة عند انتاج 100 قطعة

متوسط التكلفة

$$\bar{C}(100) = \frac{C(100)}{100} = \frac{6000}{100} = 60$$

---

(6) اوجد متوسط تكلفة انتاج القطعة الواحدة عند انتاج 1000 قطعة

$$\bar{C}(1000) = \frac{C(1000)}{1000} = \frac{33000}{1000} = 33 .$$

---

(7) قارن بين متوسط تكلفة القطعة الواحدة عند انتاج 100 قطعة وعند انتاج 1000 ماذا تلاحظ.

نلاحظ انه كلما زاد الانتاج فان متوسط تكلفة القطعة الواحدة تقل

(1) اذا كانت دالة التكلفة لأنتاج x وحدة تعطى بالعلاقة $C(x)=2x+5000$ ودالة الايردات تعطى بالعلاقة $R(x)=10x-0.001x^2$ اوجد القيمة العظمى للربح.

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$= 10x - 0.001x^2 - (2x+5000)$$

$$= -0.001x^2 + 8x - 5000$$

$$P'(x) = -0.002x + 8$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow -0.002x+8=0 \Rightarrow x = 4000$$

$$P''(x) = -0.002 < 0$$

للدالة قيمة عظمى مطلقة عند انتاج 4000 قطعه والربح يكون 11000

---

(2) مصنع لانتاج دمى الاطفال، يبيع المصنع x دمية اسبوعيا بسعر الواحدة 20 درهم ، فاذا كانت دالة التكلفة لانتاج x لعبة تعطى بالعلاقة $C(x)=0.002x^2+8x+5000$ اوجد عدد القطع التي ينتجها المصنع ليحقق اكبر ربح.

$$R(x) = \overset{\text{السعر}}{20} \; \overset{\text{عدد القطع}}{x}$$

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$= 20x - (0.002x^2 + 8x + 5000)$$

$$P'(x) = 20 - (0.004x + 8)$$

$$= 12 - 0.004x.$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 12 - 0.004x = 0 \Rightarrow x = 3000$$

$$P''(x) = -0.004 < 0$$

قيمة عظمى مطلقة عند انتاج 3000 قطعة .

والربح

$$P(3000) = 1300$$

* ممكن حل السؤال بجعل $R' = C'$

القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة

متوسط التكلفة للقطعة الواحدة يساوي التكلفة الكلية على عدد القطع أي ان $\bar{C}(x)=\dfrac{C(x)}{x}$

(1) لتكن $C(x)=x^3-6x^2+15x$ تمثل دالة تكلفة انتاج x من الاجهزة بالالاف .

اوجد مستوى الانتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

$$\bar{c}(x)=\frac{c(x)}{x}=\frac{x^3-6x^2+15x}{x}=x^2-6x+15$$

$$\bar{c}'(x)=2x-6$$

$$c'(x)=0 \Rightarrow x=3 .$$

$$c''(x)=2>0$$

للدالة قيمة صغرى مطلقة عند انتاج 3000 قطعة .

---

(2) لتكن $C(x)=0.02x^2+20x+1800$ تمثل دالة تكلفة انتاج x من الاجهزة. اوجد مستوى الانتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

$$\bar{c}(x)=\frac{c(x)}{x}$$

$$=\frac{0.02x^2+20x+1800}{x}=0.02x+20+\frac{1800}{x}$$

$$\bar{c}'(x)=0.02-\frac{1800}{x^2}=\frac{0.02x^2-1800}{x^2}$$

$$\bar{c}'(x)=0 \Rightarrow 0.02x^2-1800=0$$

$$x=-300 , \quad x=300$$

$\bar{c}'(x)$ $\overset{\searrow}{- \, -}$ | $\overset{\nearrow}{+ \, + \, +}$
300

للدالة قيمة صغرى مطلقة عند انتاج 300 قطعة .

(1) لتكن $C(x)=10\,e^{0.02x}$ تمثل دالة تكلفة انتاج x من الاجهزة بالالاف. اوجد مستوى الانتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

$$\bar{c}(x)=\frac{c(x)}{x}=\frac{10\,e^{0.02x}}{x}$$

$$\bar{c}'(x)=10\,\frac{e^{0.02x}(0.02)x-e^{0.02x}\cdot 1}{x^2}$$

$$=10\,e^{0.02x}\left[\frac{0.02x-1}{x^2}\right].$$

$$\bar{c}'(x)=0 \Rightarrow 0.02x-1=0 \Rightarrow x=50$$

$- - \searrow \quad | \quad \nearrow + +$

50

اقل تكلفة عند انتاج 50 الف قطعة.

---

(2) لتكن $C(x)=16000+200x+4x^{\frac{3}{2}}$ تمثل دالة تكلفة انتاج x من الاجهزة. اوجد مستوى الانتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

$$\bar{c}(x)=\frac{16000+200x+4x^{3/2}}{x}$$

$$=\frac{1600}{x}+200+4x^{1/2}.$$

$$\bar{c}'(x)=\frac{-16000}{x^2}+2x^{-1/2}.$$

$$\bar{c}'(x)=0 \Rightarrow \frac{16000}{x^2}=2x^{-1/2}.$$

$$8000=x^{3/2}.$$

$$x^{3/2}=8000$$

$$x=(8000)^{2/3}=400$$

$- - \searrow \quad | \quad \nearrow + +$

400

اقل تكلفة عند انتاج 400 قطعة.

---

(3) تمثل الدالة $\bar{C}(x)=10+\dfrac{100}{x}$ متوسط التكلفة لانتاج x من الاجهزة. إذا كان الانتاج الحالي 10 قطع ويزداد بمعدل جهزين سنويا، اوجد معدل التغير السنوي في متوسط التكلفة.

$$\frac{dx}{dt}=2$$

$$\left.\frac{d\,\bar{c}(x)}{dt}\right|_{x=10}=??$$

$$\bar{c}(x)=10+\frac{100}{x}$$

$$\frac{d}{dt}\bar{c}(x)=\frac{-100}{x^2}\cdot\frac{dx}{dt}.$$

$$\left.\frac{d}{dt}\bar{c}(x)\right|_{x=10}=\frac{-100}{10^2}\cdot(2)=-2$$

تنخفض تكلفة القطعة الواحدة بمعدل 2 درهم سنويا.

(1) تمثل الدالة $p(x)=1.3-\dfrac{x}{2500}$ سعر علبة العصير الواحدة بالدرهم عند بيع x علبة . اوجد عدد القطع التي تحقق القيمة العظمى للدخل

الايراد = السعر × عدد القطع .

$R(x) = x\ P .$

$= x\left(1.3-\dfrac{x}{2500}\right)$

$= 1.3x - \dfrac{1}{2500}x^2 .$

$R'(x) = 1.3 - \dfrac{2}{2500}x .$

$R'(x) = 0$

$1.3 - \dfrac{2}{2500}x = 0$

$x = 1625 .$

$R''(x) = \dfrac{-2}{2500} < 0$

اكبر دخل عند بيع 1625 علبة .

---

(2) تبيع مكتبة 20000 او اقل كتاب سنوياً من نوع واحد بربح 3 درهم لكل كتاب فاذا زاد عدد الكتب المباعة عن هذا العدد فان الربح يقل بـ 0.0001 درهم عن كل كتاب زيادة عن 20000 كتاب (مثلاً ربح الكتاب الواحد 2.9 درهم عند بيع 21000 كتاب).

ما عدد النسخ التي تبيعها المكتبة حتى تحقق اعلى ربح

العدد × الربح

$P(x) = [3-0.0001(x-20000)]\,x$

$= 3x - 0.0001(x-20000)x$

$= 3x - 0.0001(x^2-20000x)$

$= 3x - 0.0001x^2 + 2\ x$

$= 5x - 0.0001x^2$

$P'(x) = 5 - 0.0002x$

$P'(x) = 0 \Rightarrow x = 25000 .$

$+\ +\ \nearrow \quad -\ -\ \searrow$

25000

اكبر ربح يكون عند بيع 25000 نسخة .

---

(3) اذا كانت سعر التذكرة الواحدة لحضور حفل هي 40 درهم ، ويتم خصم واحد درهم عن كل تذكرة بعد طلب 20 تذكرة بحد اقصى 50 تذكرة (مثلاً سعر التذكر 38 درهم عند شراء 22 تذكرة) اوجد عدد التذاكر التي تحقق القيمة العظمى لتكلفة التذاكر.

عدد التذاكر × السعر .

$C(x) = [40 - 1(x-20)]\cdot x$

$= 40x - (x^2 - 20x)$

$= 40x - x^2 + 20x$

$= 60x - x^2$

$21 \leqslant x \leqslant 50$

$C'(x) = 60 - 2x$

$C'(x) = 0 \Rightarrow x = 30$

$C(21) = 840$

$C(50) = 500$

$C(30) = 900$

عدد التذاكر هو 30 .

دالة الطلب والسعر

(1) دالة الطلب : هي دالة تمثل عدد السلع او القطع وهي دالة تعتمد على سعر القطعة وتكون على الشكل $x = f(p)$

(2) دالة الايراد او الدخل هي $R = p \times x = p \times f(p)$

(3) مرونة الطلب E هي دالة تعتمد على سعر السلعة وعدد السلع وتساوي $E = \dfrac{P}{f(P)} f'(P)$

(4) اذا كانت $E < -1$ يكون الطلب مرن اي ان السعر يزداد و دالة الايرادات تتناقص

أذا كانت دالة الطلب لسلعة معينة تعطى بالعلاقة $f(p) = 200(30 - p)$ حيث p سعر القطعة

$\boxed{0 < P < 30}$

(1) اوجد عدد القطع المطلوبة عند السعر 10 درهم.

$$f(10) = 200\,(30-10)$$
$$= 4000$$

---

(2) اوجد عدد القطع المطلوبة عند السعر 25 درهم.

$$f(25) = 200\,(30-25)$$
$$= 1000$$

---

(3) اوجد الايرادات (الدخل) عند السعر 10 درهم وعند السعر 25 درهم وقارن بينهم

$$R(10) = p \cdot x$$
$$= p\,f(p)$$
$$= 10\,f(10)$$
$$= 10(4000)$$
$$= 40000$$

$$R(25) = p \cdot x$$
$$= p \cdot f(p)$$
$$= 25\,f(25)$$
$$= 25\,(1000)$$
$$= 25000$$

الايرادات تقل مع ارتفاع الاسعار.

اذا كانت دالة الطلب لسلعة معينة تعطى بالعلاقة $f(p)=200(30-p)$ حيث p سعر القطعة

$0<P<30$

مرونة الطلب

$$E=\frac{P}{f(P)}f'(P)$$

(1) اوجد مرونة الطلب E

$$E=\frac{p\cdot f'(p)}{f(p)}$$

$$=\frac{p(-200)}{200(30-p)}=\frac{-p}{30-p}=\frac{p}{p-30}$$

---

(2) اوجد مدى الاسعار الذي يجعل الطلب مرن $E<-1$. (اوجد الفترة التي يكون فيها الطلب مرن)

$E<-1$

$\frac{p}{p-30}<-1$

تقلب الإشارة لأن $\boxed{P<30}$

$p>-1(p-30)$

$p>-p+30$

$2p>30$

$p>15$.

مدى الأسعار هو .

$15<P<30$.

الدخل او الايرادات

$R=P\times f(P)$

(3) اوجد دالة الايرادات ثم حدد الفترة التي يتزايد فيها الايراد.

(اوجد مدى الاسعار الذي يجعل الطلب غير مرن $E>-1$ (

$$R=\overset{\text{السعر}}{p}\times\overset{\text{الطلب}}{f(p)}$$

$=p\cdot200(30-p)$

$=200(30p-p^2)$

$R'=200(30-2p)$

$R'=0\Rightarrow$

$200(30-2p)=0$

$30-2p=0$

$p=15$.

$$R'\quad +\ +\ +\ \underset{15}{|}\ -\ -$$

الفترة التي تتزايد فيها الإيرادات

$(0,15)$.

تقوم احدى الشركات بتقدير مبيعاتها السنوية بالعلاقة $s(t)=60-40e^{-0.05x(t)}$ بالالاف حيث $x(t)$ تمثل كمية الانفاق بالاف الدراهم على الاعلانات مع مرور الزمن t بالسنوات ، والجدول التالي يمثل حجم الانفاق لمدة اربع سنوات.

4	3	2	1	السنة t
20000	18000	16000	14500	تكلفة الاعلانات

(أ) قدر مقدار المبيعات عند السنة الثانية.

$t=2 \Rightarrow x(2)=16$. ألف

$S(2)=60-40e^{-0.05(16)}$

لا نكتب 16000 في المعادلة .

$=42$. ألف

(ب) قدر معدل التغير في الانفاق على الاعلانات في السنة الرابعة.

$x'(t)=\frac{dx}{dt} \backsim m$

$x'(\ )=\frac{20-18}{4-3}=2$ ألف

2000.

(ج) قدر معدل التغير في كمية المبيعات في السنة الرابعة.

$S'(t)=\frac{ds}{dt}=-40e^{-0.05x(t)}\cdot(-0.05x'(t))$

$=2x'(t)e^{-0.05x(t)}$.

$S'(4)=2x'(4)e^{-0.05x(4)}$

$=2(2)e^{-0.05(20)}$

$=1.47$ ألف

$=1470$. درهم

العلوم

(1) تحدد العلاقة $f(x)=\sqrt{2x}$ حيث $0 \le x \le 8$ كتلة أول x متر من سلك معدني رقيق

اوجد الكثافة الخطية للمعدن عندما $x=8$

الكثافة الخطية

هي مشتقة الكتلة

$\rho(x)=m'(x)$

$$\rho(x) = f'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2$$

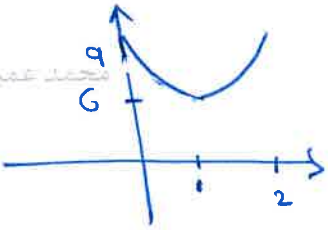
$$= \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

$$\rho(8) = \frac{1}{\sqrt{16}} = 0.25$$

---

(2) تحدد العلاقة $m(x)=(x-1)^3+6x$ حيث $0 \le x \le 2$ كتلة أول x متر من سلك معدني رقيق اوجد الكثافة الخطية ثم صف كيف تتوزع الكثافة على السلك

$$\rho(x) = m'(x) = 3(x-1)^2+6$$



نرسم دالة الكثافة

نلاحظ من الرسم ان كثافة السلك على الاطراف تكون اكثر من الوسط . والقيمة العظمى عند الاطراف . والقيمة الصغرى في الوسط .

* الكثافة لا تتوازع بانتظام .

(1) أذا كان سرعة التفاعل $x'(t)$ لمادة معينة تعطى بالعلاقة $x'(t)=2x(t)\left[1-4x(t)\right]$ حيث $x(t)$ تقيس مقدار التركيز من درجة التشبع اوجد التركيز الذي تصل فيه سرعة التفاعل $x'(t)$ الى القيمة العظمى .

ملاحظة

$x(t)$ تمثل التركيز و $x'(t)$ تعني معدل التغير في التركيز وهو سرعة التفاعل ويمكن اعتبارة دالة في التركيز اي ان

$x'(t)=f(x)$

$$f(x)=x'(t)=2x[1-4x]$$
$$=2x-8x^2$$

نجد القيم العظمى للدالة $f(x)$

$$f'(x)=2-16x$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow 2-16x=0 \Rightarrow x=1/8.$$
$$f''(x)=-16<0$$

قيمة عظمى محلية وحيدة فهي مطلقة .

تصل سرعة التفاعل الى القيمة العظمى عندما يكون تركيز الماده 1/8 من درجة الاشباع .

---

(2) تحدد العلاقة $Q(t)=e^t(3\cos 2t+4\sin 2t)$، كمية الشحنة بالكولوم في دائرة كهربائية عند زمن معين، اوجد التيار بعد نصف ثانية .

التيار $I(t)=Q'(t)$

$$I(t)=Q'(t)=e^t(3\cos 2t+4\sin 2t)$$
$$+e^t(-6\sin 2t+8\cos 2t)$$

$$I(1/2)=e^{1/2}(3\cos 1+4\sin 1)+e^{1/2}(-6\sin 1+8\cos 1)$$

$$=e^{1/2}[11\cos 1-2\sin 1]$$

$$=7.$$

قانون بويل للغازات في درجة حرارة ثابتة هو $PV=c$ حيث ان P هو ضغط الغاز و V حجم الغاز

والعدد c ثابت الغازات على اعتبار ان P و V دوال مترتبطة بالزمن

(أ) بين ان $\frac{P'(t)}{V'(t)}=\frac{-c}{V^2}$

$PV = c$

نفهم

$Pv = c$

$P = c/v$

$p'(t)\cdot v(t) + p(t)\cdot v'(t) = 0$

$p'(t)\, v(t) = -p(t)\cdot v'(t)$

$\frac{p'(v)}{v'(t)} = \frac{-p(t)}{v(t)}. = \frac{-c/v(t)}{v(t)} = \frac{-c}{v(t)}.$

(ب) اكتب P كدالة في V ثم اوجد $P'(V)$

$p = \frac{c}{v}.$

$p(v) = \frac{c}{v}.$

$p'(v) = \frac{-c}{v^2}.$

(ج) قارن بين $P'(V)$ و $\frac{P'(t)}{V'(t)}$ من الفقرتين أ و ب

$p'(v) = \frac{p'(t)}{v'(t)}$

متساوية اي ان

$\frac{dp}{dv} = \frac{dp/dt}{dv/dt}.$

(1) يرتبط f تردد اهتزاز اوتار الجيتار بالتوتر T (ثابت) الذي يشد به الوتر بالعلاقة $f=\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$

حيث ρ تمثل الكثافة (ثابت) و L طول الوتر

السؤال كتابي

(أ) اوجد $f'(t)$ عندما يكون $L=\frac{1}{2}$ و $\sqrt{\frac{T}{\rho}}=220$ و $L'(t)=-4$

$$f(t)=\frac{1}{2L}\cdot\sqrt{\frac{T}{\rho}}=\frac{1}{2L}\cdot 220=\frac{110}{L}.$$

$$f'(t)=\frac{-110}{L^2}\,\frac{dL}{dt}.$$

$$f'(t)=\frac{-110}{(1/2)^2}\cdot(-4)=1760.$$

(ب) اوجدالزمن المستغرق لرفع طبقة الصوت اوكتاف واحد (ضعف f)

في كل ثانية يرتفع من 220 الى 1760 اي 8 اضعاف

اي يتضاعف كل $\frac{1}{8}$ ثانية ويصبح 440.

---

(2) يعرف الرقم الهيدروجيني $P(x)$ بالعلاقة $P(x)=c+ln\frac{x}{1-x}$ حيث تمثل x كمية القاعدة المضافة الى الخليط لكسر الحامض و c عدد ثابت حيث $0<x<1$ ، اوجد قيمة x التي تجعل معدل تغيير الرقم الهيدروجيني صغير جدا.(قيمة صغرى مطلقة)

ملاحظة (معدل تغير الرقم الهيدروجني هو $P'(x)$ وممكن اعتبارها $g(x)$)

$$P(x)=c+\ln x-\ln(1-x).$$

$$P'(x)=\frac{1}{x}-\frac{-1}{1-x}=\frac{1-x+x}{x(1-x)}=\frac{1}{x-x^2}.$$

معدل تغير الرقم الهيدروجني ، نسمي $g(x)=P'(x)$

$$g'(x)=\frac{-1(1-2x)}{(x-x^2)^2}=\frac{2x-1}{(x-x^2)^2}.$$

$g'(x)=0 \Rightarrow x=1/2$ ،

$g'(x)$ غ.م $\Rightarrow x=0,\ x=1$ خارج المجال

g' : − − − | + + + ، $\frac{1}{2}$

قيمة صغرى مطلقة عند $x=1/2$

السكان

(1) اذا كانت المعادلة اللوجستية للنمو السكاني تعطى بالعلاقة $p'(t)=4p(t)[5-p(t)]$ حيث $p(t)$ تمثل عدد السكان بالمليون مع مرور الزمن ، اوجد التعداد السكاني الذي يصل فيه معدل النمو الى القيمة العظمى.

ملاحظة

$p(t)$ تمثل عدد السكان

و $p'(t)$ تعني معدل النمو السكاني ويمكن اعتبارها دالة في عدد السكان

اي ان $f(p)=p'(t)$

$f(p)=4p[5-p]=20p-4p^2$

$f'(p)=20-8p.$

$f'(p)=0 \Rightarrow p=2.5.$

$f''(p)=-8<0$ فيه عظمى محلية وحيده

فهي مطلقة .

يكون معدل النمو السكاني في ذروته عندما يكون عدد السكان 2.5 مليون.

---

(1) تمثل الدالة $f(t)=\dfrac{70}{1+3e^{-0.2t}}$ نسبة عدد السكان التي تصلهم اشاعة معينة بعد الزمن t بالساعة

(أ) اوجد $f(2)$ وماذا تمثل

$f(2)=\dfrac{70}{1+3e^{-0.2(2)}}=23.$

نسبة السكان الذين تصلهم الاشاعة بعد ساعتين هم 23%

(ب) اوجد $f'(t)$, وبين ان $f'(t)>0$

$f'(t)=\dfrac{-70(3e^{-0.2t}(-0.2))}{(1+3e^{-0.2t})^2}=\dfrac{42}{(1+3e^{-0.2t})^2}>0$

(ج) اوجد $f'(2)$ وماذا تمثل .

$f'(2)=3.1$

معدل انتشار الاشاعة عند الساعة الثانية هو 3.1% من السكان

(د) الحد الأقصى لنسبة عدد السكان الذين ستصلهم الاشاعة .

$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t)}$

بما ان المشتقة موجبة فان الحد الاقصى يكون

$\lim_{t\to\infty}\dfrac{70}{1+3e^{-0.2t}}=\lim_{t\to\infty}\dfrac{70}{1+\frac{3}{e^{0.2t}}}=70$

الحد الاقصى من السكان هو 70%

الوحدة الرابعة   اجابات الدرس الثالث.

① الاعداد الحرجة هي 2 و 1 و 0 ، -2 ، -3

Ⓑ ملاحظة : العدد 3 ، 4 ليست اعداد حرجة لانها خارج المجال

---

② الاعداد الحرجة هي 2 و 1 و 0

Ⓒ

---

③ الاعداد الحرجة هي -3 وكل الفترة $[-1, 1]$

Ⓒ

---

④ الاعداد الحرجة هي 2 و -1 نقاط التقاطع مع محور x .

Ⓑ

---

⑤ Ⓑ

$D = (-\infty, \infty)$

$f(x) = 3x^{1/3} + \frac{3}{4}x^{4/3}$.

$f'(x) = x^{-2/3} + x^{1/3}$.

$= \frac{1}{x^{2/3}} + x^{1/3}$

$= \frac{1+x}{x^{2/3}}$.

$f'(x) = 0 \rightarrow 1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$

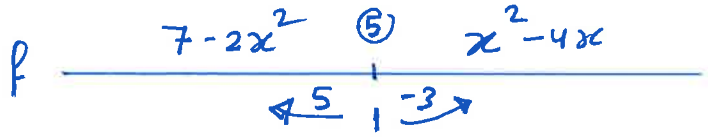
$f'(x)$ غ.م $\rightarrow x = 0$

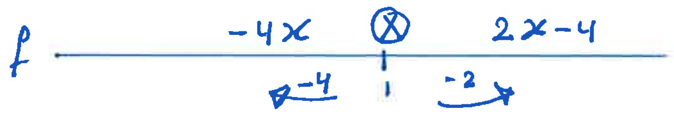
الاعداد الحرجة هي 0 و -1

---

⑥ Ⓐ

$D = (-\infty, \infty)$





$f' = 0$ $-4x = 0$ $2x - 4 = 0$

$x = 0$ ✓ $x = 2$ ✓

f' غ.م $\rightarrow x = 1$

الاعداد الحرجة هي 2 و 1 و 0

تابع اجابات لدرس الثالث // الوحدة الرابعة

⑦ Ⓒ

$D = (-\infty , \infty)$

$f(x) = (x^2 + x + 0.45)e^{-2x}$

$f'(x) = (2x+1)\, e^{-2x} + (x^2 + x + 0.45)\, e^{-2x} \cdot -2$

$= e^{-2x}\left[\, 2x+1 - 2x^2 - 2x - 0.9\right]$

$= e^{-2x}\left[-2x^2 + 0.1\right]$

$= \dfrac{-2x^2+0.1}{e^{2x}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 0.1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{0.1}{2} = \frac{1}{20}$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{20}} = \pm\frac{1}{\sqrt{20}}$.

$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow e^{2x} = 0$ لايوجد حل.

الاعداد الحرجة هـ $\pm\frac{1}{\sqrt{20}}$

---

⑧ Ⓑ

$f(x) = x - \sin 2x \qquad D = [0, \pi]$.

$f'(x) = 1 - 2\cos 2x$

$f'(x) = 0$

$1 - 2\cos 2x = 0$

$2\cos 2x = 1$

$\cos 2x = \frac{1}{2}$

$2x$ $\frac{\pi}{3}$

$Q_1 \rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \pi/6$

$Q_4 \rightarrow 2x = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$

الاعداد الحرجة هـ $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

تابع اجابات الدرس الثالث   الوحدة الرابعة.

⑨ Ⓓ

$f(x) = \sqrt[3]{x^3-4x} = (x^3-4x)^{1/3}.$ $D=(-\infty,\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3-4x)^{-2/3}.(3x^2-4)$

$= \frac{3x^2-4}{3(x^3-4x)^{2/3}}.$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4/3 \Rightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$

$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow x^3-4x=0 \Rightarrow x(x^2-4)=0 \Rightarrow x=0,\pm 2.$

عدد الاعداد الحرجة هي 5

---

⑩ Ⓓ

$f(x) = \frac{2x^2}{x+2}$ $D = R/\{-2\}.$

$f'(x) = \frac{4x(x+2)-2x^2}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+8x}{(x+2)^2}.$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2x^2+8x=0 \rightarrow x=0,\ x=-4.$

$f'(x)$ غ.م $\rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$ خارج المجال

الاعداد الحرجة هي 0, -4

---

⑪ Ⓐ

$f(x) = \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ $D=(-\infty,\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

$= \frac{1}{2}\left(e^x-\frac{1}{e^x}\right)$

$= \frac{1}{2}\,\frac{e^{2x}-1}{e^x}.$

$f'(x)=0 \Rightarrow e^{2x}-1=0$

$e^{2x}=1 \Rightarrow x=0$

$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow e^x=0$ لا يوجد حل

الاعداد الحرجة $x=0$

الوحدة الرابعة

تابع اجابات الدرس الثالث

⑫ Ⓐ

$f(x) = x^2 e^{kx}$

$f'(x) = 2x\, e^{kx} + x^2 e^{kx} \cdot k = e^{kx}(2x + kx^2).$

$f'(\frac{2}{3}) = 0$

$e^{\frac{2}{3}k}\left(2 \cdot \frac{2}{3} + k \cdot (\frac{2}{3})^2\right) = 0$

$\frac{4}{3} + \frac{4}{9}k = 0 \Rightarrow \frac{4}{9}k = -\frac{4}{3} \rightarrow \boxed{K = -3}$

---

⑬ Ⓑ

$f(x) = x^3 - cx$

$f'(x) = 3x^2 - c.$

$f'(-1) = 0$

$3(-1)^2 - c = 0 \Rightarrow 3 - c = 0 \Rightarrow c = 3$

---

⑭ Ⓓ

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 12 \qquad D = [-2, 4]$

$f'(x) = 3x^2 - 6x.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0$

$x = 0,\ x = 2$

الاعداد الحرجة هي $0, 2$

اختبار القيم

$f(-2) = -8$

$f(4) = \boxed{28}$

$f(0) = 12$

$f(2) = 8$

القيمة العظمى المطلقة هي 28 عند $x = 4$

---

⑮ Ⓓ

$f(x) = \sin^{-1}x \ , \quad D = [-1, 1]$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$

$f'(x) = 0$ لا يوجد حل

$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow 1 - x^2 = 0$

$x = \pm 1.$

$f(-1) = \sin^{-1} -1 = \frac{-\pi}{2}$

$f(1) = \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}.$

القيمة العظمى المطلقة هي $\frac{\pi}{2}$ عند $x = 1.$

الوحدة الرابعة. تابع اجابات الدرس الثالث

⑯
ⓒ

$f(x) = x^2 e^{-x}$ $D = [0, 4]$.

$f'(x) = 2x e^{-x} + x^2 e^{-x}(-1) = e^{-x}[2x - x^2] = \frac{2x - x^2}{e^x}.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - x^2 = 0$

$x = 0, x = 2.$

$f'(x)$ غ.م $\rightarrow e^x = 0$. لا يوجد حل

الاعداد الحرجة هي $0, 2$.

$f(0) = 0$
$f(4) = 4^2 e^{-4} = \frac{16}{e^4} = 0.29$
$f(2) = 2^2 e^{-2} = \frac{4}{e^2} = 0.54.$

العظمى المطلقة هي $\frac{4}{e^2}$ عند $x = 2$

---

⑰
ⓒ

$f(x) = \cos 2x$ $D = [0, \pi]$

$f'(x) = -\sin 2x \cdot 2$
$= -2\sin 2x.$

$f'(x) = 0$

$-2\sin 2x = 0$

$\sin 2x = 0$

$$2x \begin{cases} 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0. \quad , 2x = 2\pi \Rightarrow x = \pi \\ \pi. \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

الاعداد الحرجة هي $0, \frac{\pi}{2}, \pi.$

$f(0) = 1$
$f(\frac{\pi}{2}) = 0$ صغرى مطلقة عند $x = \pi/2$
$f(\pi) = 1$

تابع اجابات الدرس الثالث   الوحدة الرابعة.

⑱ للدالة قيمة صغرى محلية عند $x=2$. من الرسم .

Ⓒ

---

⑲ القيمة العظمى المطلقة للدالة على الفترة $(-1,1)$ تكون

Ⓐ عند $x=0$.

---

⑳ لاحظ لا نستطيع تحديد قيم x من الرسم . لذلك نجد

Ⓐ الاعداد الحرجة .

$$f'(x) = 5x^{\frac{1}{4}} - 2x^{-3/4} \qquad D=[0,\infty)$$

$$= x^{-3/4}(5x^{1} - 2)$$

$$= \frac{5x-2}{x^{3/4}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 5x-2=0 \Rightarrow x = 2/5$$

$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow x=0$

القيمة الصغرى المطلقة من الاعداد الحرجة و الرسم معاً .

تكون عند $x=\frac{2}{5}$.

㉑ للدالة قيمة عظمى محلية عند $x=1$ لان

Ⓐ $f(1) > f(x)$ لكل x في جوار العدد 1 .

㉒ Ⓒ

$D=[0,1]$

$$g(x) = e^{x} - 2x$$

$$g'(x) = e^{x} - 2.$$

$$g'(x) = 0$$

$$e^{x} - 2 = 0$$

$$e^{x} = 2$$

$$x = \ln 2.$$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = e-2 = 0.71$$

$$f(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 = 0.61$$

صغرى مطلقة عند $x=\ln 2$

الدرس الرابع

الوحدة الرابعة .

① بما أن $f(c) > f(x)$ لكل قيم x في جوار العدد c .

Ⓒ فإن للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = c$

---

② $D = (-\infty, \infty)$

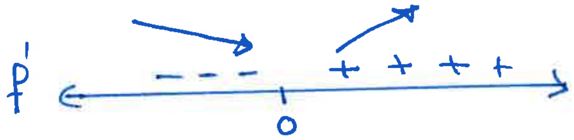
Ⓓ

$$f(x) = x^{2/3} - 1$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$ لا يوجد حل

$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow x = 0$



الاعداد الحرجة هي 0 .

فترة التزايد $(0, \infty)$

---

③ $D = (-\infty, \infty)$

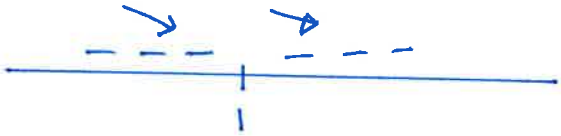
Ⓑ

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x - 3.$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 6x - 3$

$x = 1$



الدالة متناقصة على $(-\infty, \infty)$

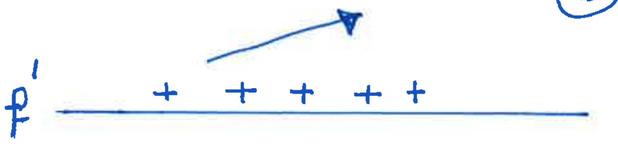
---

④ $D = (-\infty, \infty)$

Ⓓ

$$f(x) = \tan^{-1} x$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$



فترة التزايد $(-\infty, \infty)$

لا يوجد اعداد حرجة

الوحدة الرابعة

تابع اجابات الدرس الرابع

⑤

Ⓑ

$f(x) = x - \sqrt{x-1}$ $D = [1, \infty)$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$= \frac{2\sqrt{x-1} - 1}{2\sqrt{x-1}}$

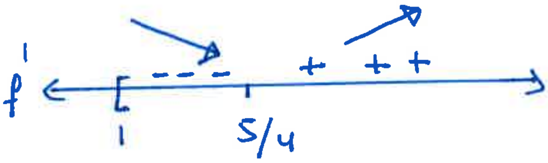
$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x-1} - 1 = 0$

$2\sqrt{x-1} = 1$

$\sqrt{x-1} = \frac{1}{2}$

$x - 1 = \frac{1}{4}$

$x = \frac{5}{4}$



فترة التناقص

$(1, \frac{5}{4})$

---

⑥

Ⓓ

$f(x) = \sin x - \cos x$ $[0, \pi]$

$f'(x) = \cos x + \sin x$

$f'(x) = 0$

$\cos x + \sin x = 0$

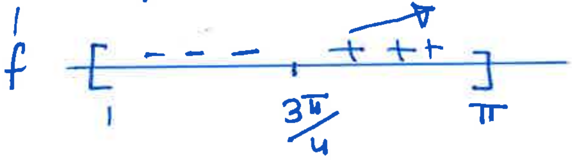
$\sin x = -\cos x$

$\tan x = -1$

$x \left\langle \begin{array}{l} Q_2 \rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \\ \pi/4 \\ Q_4 \rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \end{array} \right.$

خارج المجال

الاعداد الحرجة هي $3\frac{\pi}{4}$



فترة التزايد هي $(\frac{3\pi}{4}, \pi)$

---

⑦

Ⓐ

$f(x) = x + \frac{1}{x}$ $D = R/\{0\}$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

$= \frac{x^2-1}{x^2}.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

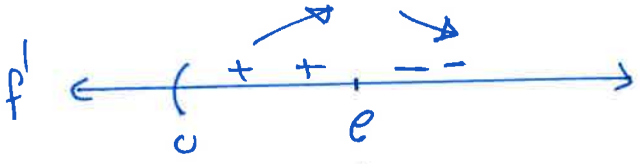
$f'(x)$ غ.م $\rightarrow x = 0$ خارج المجال

⑧ Ⓑ

$f(x) = \frac{Lnx}{x}$ $D = (0, \infty)$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - Lnx}{x^2}$

$= \frac{1 - Lnx}{x^2}$



$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - Lnx = 0$

$Lnx = 1$

$x = e.$

فترة التزايد $(0, e)$

$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow x = 0$

الاعداد الحرجة هي e

---

⑨ Ⓑ

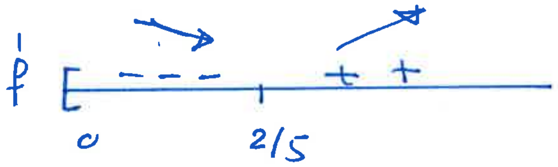
$f(x) = 4x^{5/4} - 8x^{1/4}$ $D = [0, \infty)$

$f'(x) = 5x^{1/4} - 2x^{-3/4} = x^{3/4}(5x-2)$

$= \frac{5x-2}{x^{3/4}}$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = 2/5$

$f'(x)$ غ.م $\rightarrow x = 0$



قيمة صغرى محلية عند $x = \frac{2}{5}$

---

⑩ Ⓓ

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - Lnx$ $D = (0, \infty)$

$f'(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow x = 0$

$x = 1$ الاعداد الحرجة

فترة التناقص $(0, 1)$

تابع اجابات الدرس الرابع

الوحدة الرابعة.

(11)

(B)

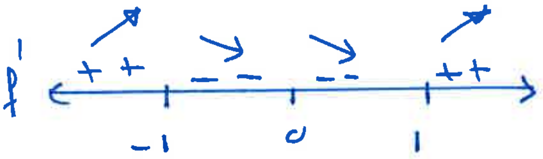
$$f(x) = x - 3\sqrt[3]{x} = x - 3x^{1/3}$$

$$D = (-\infty, \infty)$$

$$f'(x) = 1 - x^{-2/3}$$

$$= 1 - \frac{1}{x^{2/3}}$$

$$= \frac{x^{2/3} - 1}{x^{2/3}}$$



$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^{2/3} - 1 = 0$$

$$x^{2/3} = 1$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1.$$

$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow x = 0$

$0, \pm 1$ الاعداد الحرجة

فترة التناقص.

الافضل $(-1, 1)$.

و ممكن ان يكون الجواب

$(-1, 0)$, $(0, 1)$

---

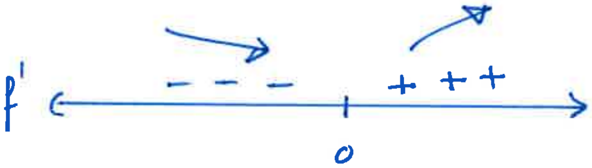
(12)

(C)

$$f(x) = \text{Ln}|x|.$$

$$D = R / \{0\}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$



$f'(x)$ غ.م $\rightarrow x = 0$

لايوجد اعداد حرجة.

فترة التناقص $(-\infty, 0)$

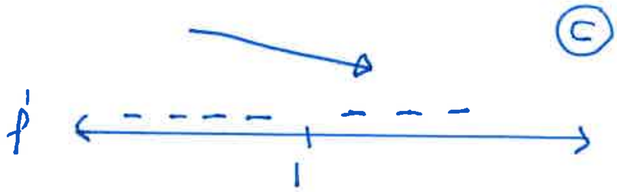
---

(13)

(C)

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x - 3$$



$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$x = 1$ الاعداد الحرجة

لايوجد قيم قصوى محلية عند $x = 1$

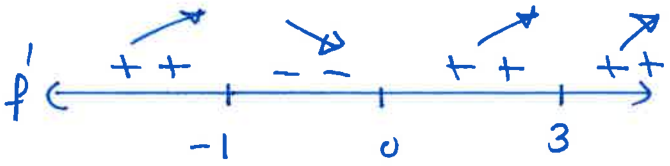
⑭

Ⓐ

$$f'(x) = x(x-3)^2(x+1)$$

الاعداد الحرجة هي

$0 , 3 , -1.$



عظمى محلية عند $x=-1$

---

⑮

Ⓐ

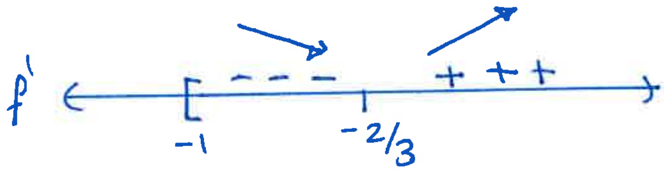
$$f(x) = 2x\sqrt{x+1} \qquad D=[-1,\infty)$$

$$f'(x) = 2\cdot\sqrt{x+1} + 2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$= 2\sqrt{x+1} + \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{2(x+1)+x}{2\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$



$f'(x)=0 \Rightarrow x=-2/3.$

$f'(x)$ غ.م $\Rightarrow x=-1$

الاعداد الحرجة هي $-1, \frac{-2}{3}$

صغرى محلية عند $x=\frac{-2}{3}$

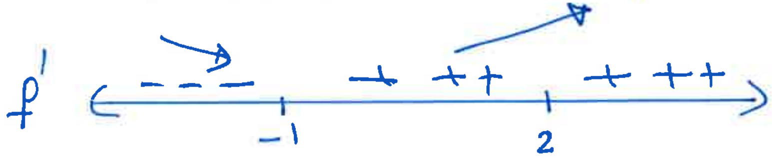
عظمى محلية عند $x=-1$

---

⑯

Ⓓ

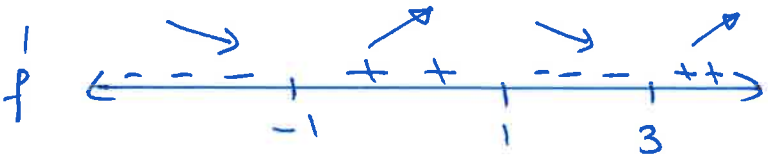
ارسم خط f' من الرسم (تطابق الرسم مع الخط)



فترة التناقص $(-\infty,-1)$

الوحدة الرابعة .   تابع اجابات الدرس الرابع

⑰ Ⓒ



عظمى محلية عند $X = 1$

---

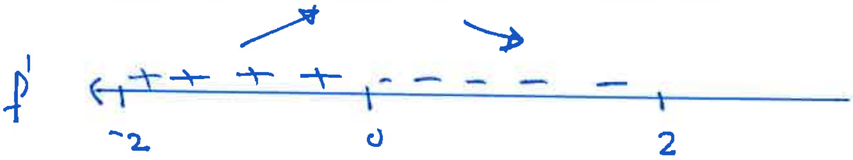
⑱ Ⓑ

صغرى محلية عند $X = -1$ و 3

نفس المخطط سؤال ال 17

---

⑲ Ⓒ



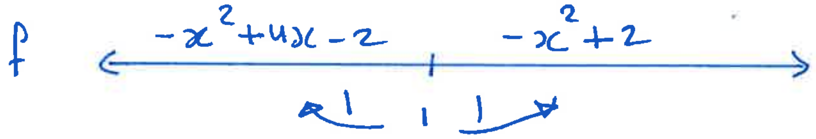
الدالة متزايدة على $(-2, 0)$

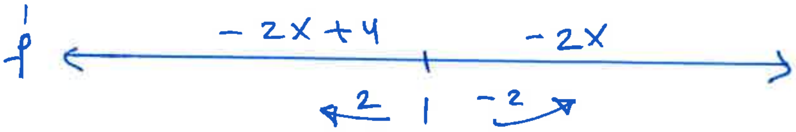
---

⑳ Ⓓ

الجملة الخاطئة هي $f(1) < g(2)$.

㉑ Ⓑ





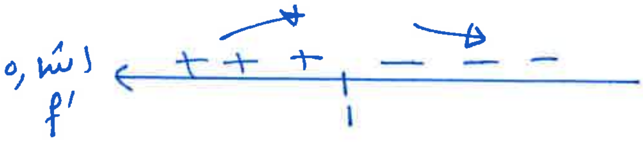
$f' = 0$ $\quad -2x + 4 = 0$ $\quad\quad -2x = 0$

$x = 2$ $\quad\quad x = 0$

خارج المجال الفرعي $\quad\quad$ خارج المجال الفرعي

f' غ.م $\Rightarrow x = 1$

الاعداد الحرجة $x = 1$ فقط .



عظمى محلية عند $x = 1$

الدرس الخامس.

اجابات الدرس الخامس

①

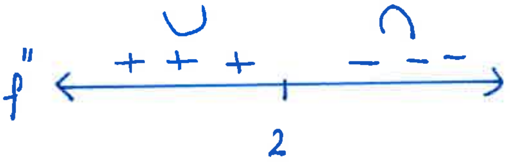
Ⓑ

$f(x) = \frac{-5}{(x-2)}$ $D = R | \{2\}$

$f'(x) = \frac{5}{(x-2)^2} = 5(x-2)^2$

$f''(x) = -10(x-2)^{-3}$

$= \frac{-10}{(x-2)^3}$



مقعرة للاسفل على

$(2, \infty)$

$f''(x)$ غ.م $\to x = 2$.

---

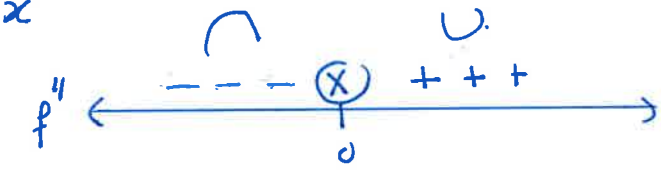
②

Ⓓ

$f(x) = x + \frac{1}{x}$ $D = R / \{0\}$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - x^{-2}$

$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$



$f''(x)$ غ.م $\to x = 0$

ليس للدالة نقطة انعطاف عند $x=0$ لان

الدالة غير متصلة عند $x=0$

---

③

Ⓐ

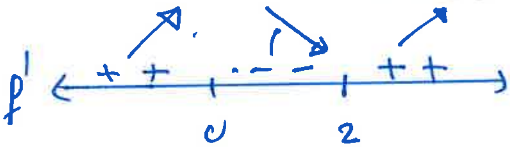
$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$

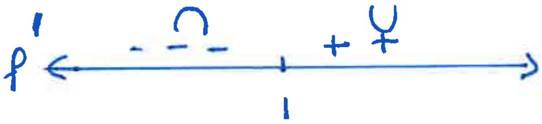
$f'(x) = 6x^2 - 12x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$

$f''(x) = 12x - 12$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$





متناقصة ومقعرة للاسفل (0,1)

تابع اجابات الدرس الرابع الوحدة الرابعة .

④ Ⓑ

$f(x) = x^2|x|$

$\lvert x \rvert$	$-x$	0	x
$f(x)$	$-x^3$	0	x^3
f'	$-3x^2$	0	$3x^2$
f''	$-6x$	0	$6x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

إشارة f''	$++++$	0	$+++$

الدالة مقعرة للاعلى على الفترة $(-\infty, \infty)$

---

⑤ Ⓐ

$f(x) = 2xe^x \qquad D = (-\infty, \infty)$

$f'(x) = 2e^x + 2xe^x$

$f''(x) = 2e^x + 2e^x + 2xe^x = 2e^x(x+2)$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -2$

f''	$---$ $\cap$	-2	$++$ $\cup$

للاسفل $(-\infty, -2)$

---

⑥ Ⓑ

f' ، f'' موجبتين .

f متزايدة ومقعرة للاعلى .

$(3, \infty)$

تابع اجابات الدرس الخامس الوحدة الرابعة .

⑦ Ⓒ

$h''=0$ عند $x=d$ نقطة الانقلاب

---

⑧ Ⓑ

$h'=0$ مماس افقي .

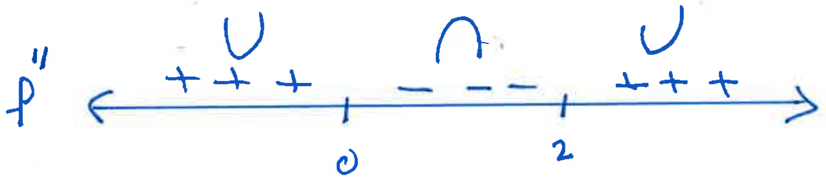
$h''>0$ مقعر للاعلى .

النقطة f

---

⑨ Ⓐ

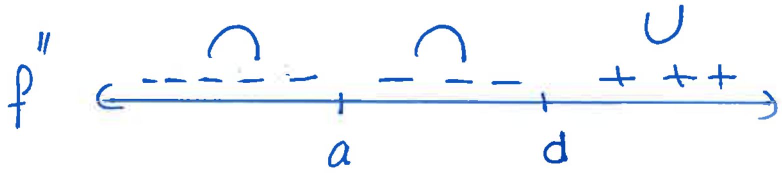
نرسم خط f''



مقعر للاعلى $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$

---

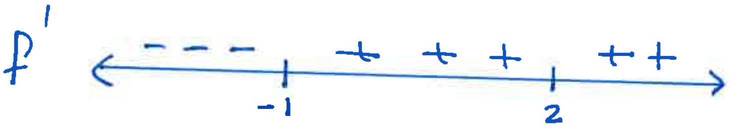
⑩ Ⓑ

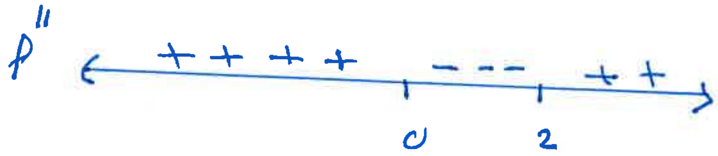


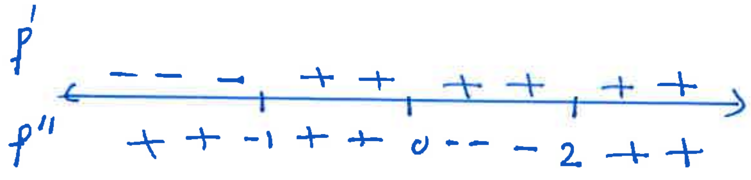
نقطة الانعطاف عند $x=d$

---

⑪ Ⓓ







متزايدة ومقعرة للاسفل على الفترة $(0,2)$

تابع اجابات الدرس الخامس الوحدة الخامسة .

⑫ (A)

$f \rightarrow C$ من الدرجة الثالثة

$f' \rightarrow A$ من الدرجة الثانية

$f'' \rightarrow B.$ من الدرجة الاولى

$f' \rightarrow A .$

---

⑬ (D)

الاجابة: d دالة تكعيبية مشتقتها دالة تربيعية .

---

⑭ (D)

نلاحظ من الرسم ان

① الدالة $f(x)$ تقطع محور x عند $x=1$ صفر

② الدالة متزايدة $\Leftarrow f'(1)>0$ موجب

③ الدالة مقعرة للاسفل $\Leftarrow f''(1)<0$ سالب

لذلك $f''(1) < f(1) < f(1)$

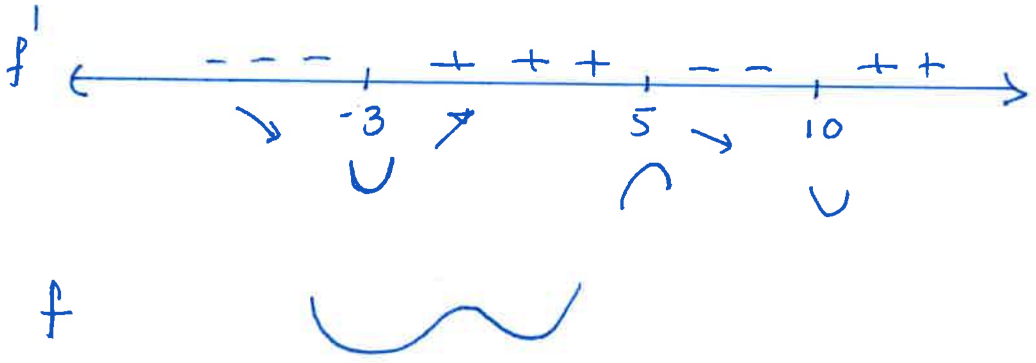
---

⑮ (D)

يمكن حل السؤال بأكثر من طريقة .

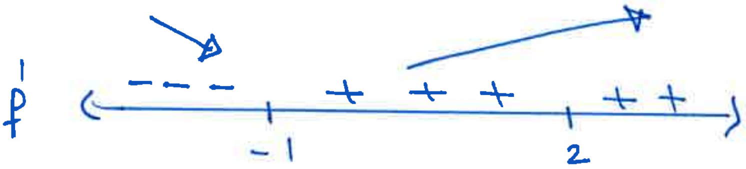
المشتقة من الدرجة الثالثة

∴ الدالة الاصلية من الدرجة الرابعة .



الوحدة الثالثة.　　　　　　　　　　تابع اجابات الدرس الخامس

⑯ Ⓒ



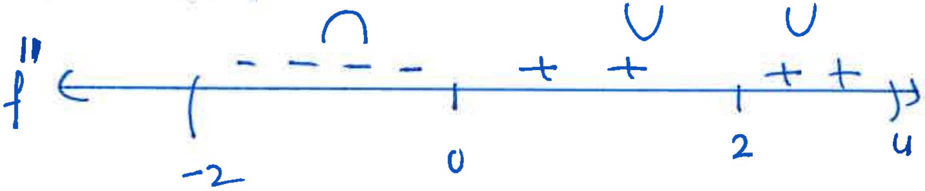
بما ان الدالة f متزايدة على $(-1, \infty)$

فان $f(0) < f(1)$

---

⑰ Ⓑ

نرسم خط f'' (تطابق الرسم مع الخط)



مقعرة للاسفل $(-2, 0)$

---

⑱ Ⓑ

صغرى $f'(1) = 0, \quad f''(1) > 0$

عظمى $f'(-1) = 0, \quad f''(-1) < 0$

للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 1$ وقيمة عظمى محلية عند $x = -1$

---

⑲ Ⓒ

$$f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$$

$$f'(x) = 2x - \frac{a}{x^2} = 2x - ax^{-2}$$

$$f''(x) = 2 + 2ax^{-3}$$

$$= 2 + \frac{2a}{x^3}.$$

$$f''(1) = 0$$

$$2 + \frac{2a}{1^3} = 0$$

$$2 = -2a$$

$$\boxed{a = -1}$$

تابع اجابات الدرس الخامس   الوحدة الرابعة.

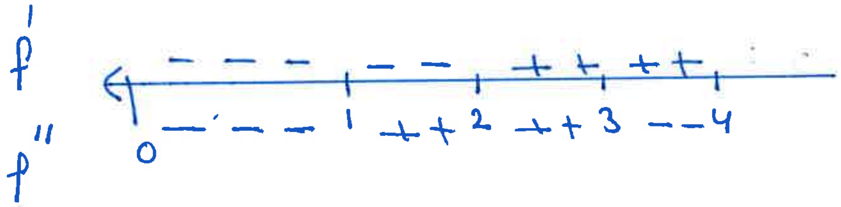
(20) (C)

$f'(c) = 0$

$f''(c) < 0.$ عظمى محلية.

---

(21) (D)



---

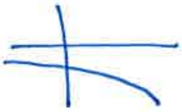
(22) (C)

للدالة قيمة عظمى مطلقة على $(-1,1)$

عند $x=0$

---

(23) (B)



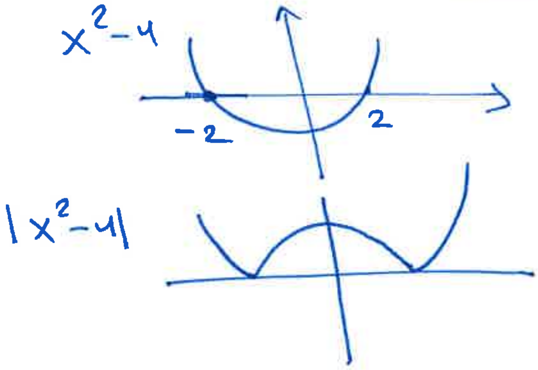
$f < 0$, $f' < 0$, $f'' < 0$

الدالة تحت محور x ومتناقصة ومقعرة للاسفل.

---

(24) (D)

يفضل الحل من الرسم



مقعرة للاسفل على

الفترة $(-2,2)$.

الوحدة الرابعة تابع اجابات الدرس الخامس

㉕ Ⓐ

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b.$$

$$f''(x) = 6x + 2a.$$

$\boxed{\begin{array}{l} f(-1) = 5 \\ f''(-1) = 0 \end{array}}$ الشروط

$$f''(-1) = 0.$$

$$6(-1) + 2a = 0$$

$$a = 3.$$

$$f(-1) = 0$$

$$-1 + a - b - 2 = 5$$

$$b = -5.$$

$$\Rightarrow \quad a + b = 3 + (-5) = -2$$

---

26 Ⓓ

$$f(x) = x^4 + bx^3 + 6x^2 + 12x + 1$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3bx^2 + 12x + 12$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6bx + 12.$$

بما ان للدالة نقطتين انقلاب فتكون للمشتقة الثانية جذرين اي ان المميز اكبر من صفر

$$\Delta = b^2 - 4ac. > 0$$

$$\Delta = (6b)^2 - 4(12)(12) > 0$$

$$36b^2 - 576 > 0$$

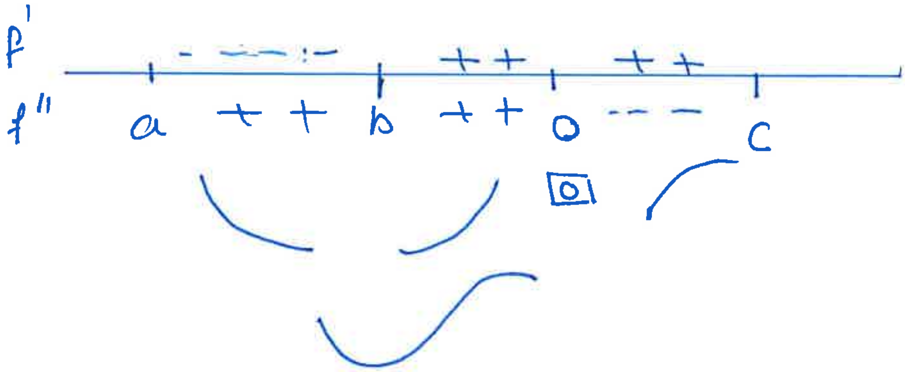
$$36(b^2 - 16) > 0$$

$$b^2 - 16 > 0$$

$$b^2 > 16$$

الوحدة الرابعة .   اسئلة الدرس السادس .

①
Ⓐ



---

②
1) للدالة خط تقارب افقي معادلته $y = 2$

2) خط تقارب رأسي معادلته $x = 2$

$\boxed{C}$

---

③ درجة البسط اكبر من درجة المقام بواحد .

Ⓒ

---

④

$\boxed{C}$

1) الدالة $f(x)$ دائماً موجبة لذلك الرسم فوق محور x .

2) للدالة خط تقارب افقي معادلته $y = 0$. لان

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = \infty$$

---

⑤

Ⓑ

1) الدالة لها خط تقارب افقي معادلته $y = 2$

2) للدالة خطوط تقارب رأسيه معادلتها $x = \pm 2$

3) $f(0) = 0$

الوحدة الرابعة

تابع اجابات اسئلة الدرس السادس.

⑥ للدالة خطين تقارب افقية $y = \pm 2$ لان

Ⓒ

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x} = 2$$

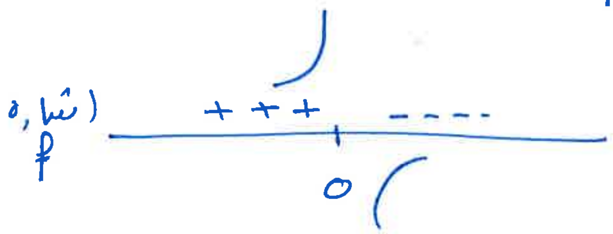
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-x} = -2 .$$

---

⑦ ١) للدالة خط تقارب رأسي معادلته $x=0$

Ⓐ ٢) للدالة خط تقارب افقي معادلته $y=0$.

٣) مقطع الدالة مع محور x هو 4 .



---

⑧ من الرسم ١) للدالة خط تقارب رأسي معادلته $x=0$

Ⓒ ٢) للدالة خط تقارب افقي معادلته $y=x$.

٣) $f(2) = 4$

---

⑨ الدالة متصلة ومقعرة للاسفل لان $f''(x)<0$

Ⓓ

---

⑩ استخدم الخط المميز .

Ⓒ

$f \quad \mathrm{I}$

$f' \longrightarrow \mathrm{III}$

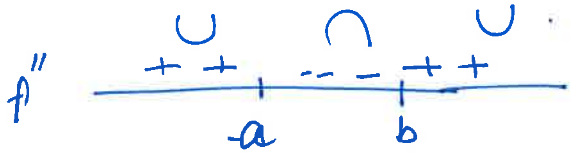
$f'' \longrightarrow \mathrm{II}$

تابع اجابات الدرس السادس

الوحدة الرابعة.

⑪

Ⓓ



---

⑫ من الخط المميز

Ⓑ

$f \rightarrow II$

$f' \rightarrow I$

$f'' \rightarrow III$

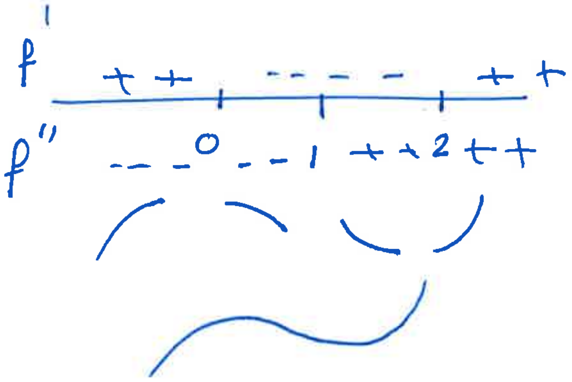
---

⑬

Ⓐ

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f''(x) = 6x - 6$



---

⑭

Ⓐ

① الدالة $f(x) = e^{-2/x}$ دائماً موجبة أي انها فوق محور x.

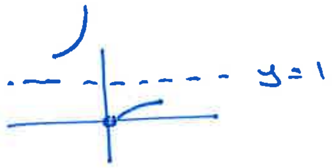
② الدالة لها خط تقارب افقي $y = 1$

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{-2/x} = 1$$

③ الدالة لها خط تقارب رأسي $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} e^{-2/x} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0.$$

$$\lim_{x \to 0^-} e^{-2/x} = e^{\infty} = \infty$$



الوحدة الرابعة .   تابع اجابات الدرس السادس

⑮

Ⓐ

$f(x) = x + \sin x.$

$f'(x) = 1 - \cos x. \geq 0$

الدالة متزايدة وتمر بالنقطة $(0, 0)$

---

⑯ $f(x) = x \ln x.$

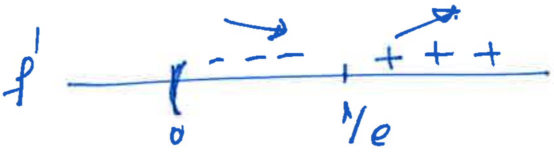
Ⓑ 1) مجال الدالة $(0, \infty)$.

$f'(x) = 1. \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0$

$\ln x = -1$

$x = e^{-1} = 1/e.$



$f(x) = e^{1/x}.$

⑰

Ⓑ

اصفار المقام $x = 0$ خطوط تقارب رأسية

$\lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = e^{0} = 1.$

$y = 1$ خطوط تقارب افقية

اجابات الدرس السابع

الوحدة الرابعة.

①

Ⓐ

$2x + y = 600.$

$y = 600 - 2x$

$0 \leq x \leq 300$

$A = xy$

$= x(600 - 2x) = 600x - 2x^2$

$A' = 600 - 4x.$

$A' = 0 \Rightarrow x = 150$

$A(0) = 0$

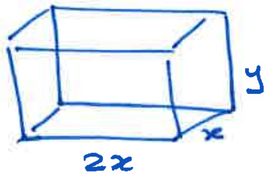
$A(300) = 0$

$A(150) = 45000$ اكبر مساحة.

---

②

Ⓐ



$2x + x + y = 45$

$y = 45 - 3x$

$0 \leq x \leq 15$

ح $= 2x \cdot x \cdot y$

$= 2x^2(45 - 3x)$

$= 90x^2 - 6x^3$

ح$' = 180x - 18x^2$

ح$' = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 10.$

ح$(0) = 0$

ح$(15) = 0$

ح$(10) = 3000\ Cm^2$ اكبر حجم.

---

③

ح$(x) = (24 - 2x)(24 - 2x)x$ $\quad 0 \leq X \leq 12$

$= (576 - 96x + 4x^2)x = 576x - 96x^2 + 4x^3.$ Ⓐ

ح$'(x) = 576 - 192x + 12x^2$

ح$'(x) = 0 \Rightarrow x = 4, \quad x = 12$

ح$(0) = 0$

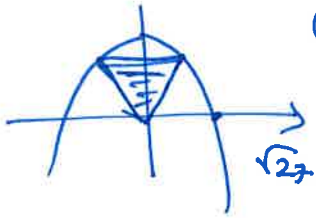
ح$(12) = 0$

ح$(4) = 1024$ اكبر حجم

الوحدة الرابعة

تابع اجابات الدرس السابع .

④ Ⓒ



$0 \leq X \leq \sqrt{27}.$

$A = \frac{1}{2}(2x)\cdot y$

$= xy$

$= x(27 - x^2)$

$= 27x - x^3.$

$A' = 27 - 3x^2.$

$A' = 0 \Rightarrow \underset{\text{مرفوض}}{x = -3} \quad , \quad x = 3$

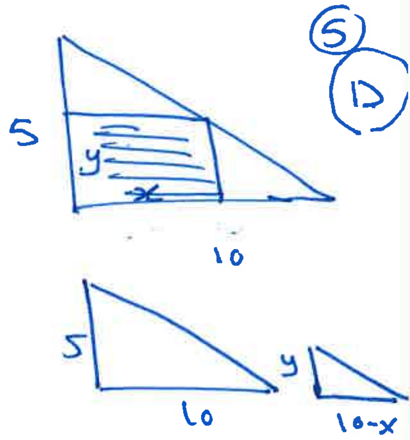
$A(0) = 0$

$A(\sqrt{27}) = 0$

$A(3) = 54$

---

⑤ Ⓓ



$\frac{10-x}{10} = \frac{y}{5}$

$y = \frac{1}{2}(10-x)$

$y = 5 - \frac{1}{2}x$

$0 \leq x \leq 10$

$A = xy$

$= x(5 - \frac{1}{2}x)$

$= 5x - \frac{1}{2}x^2$

$A' = 5 - x$

$A' = 0 \rightarrow x = 5.$

$A(0) = 0$

$A(10) = 0$

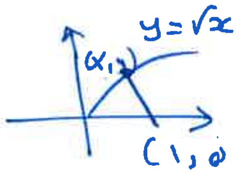
$A(5) = 12.5.$ أكبر مساحة .

الوحدة الرابعة

تابع اجابات الدرس السابع

⑥

ⓒ



$y = \sqrt{x} \quad , \quad 0 \le x \le 1$

$L = \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2}$

$= \sqrt{x^2-2x+1 + x}$

$= \sqrt{x^2-x+1}$

$L' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$

$L' = 0 \Rightarrow 2x-1 = 0 \longrightarrow x = 1/2$

$L(0) = 1$

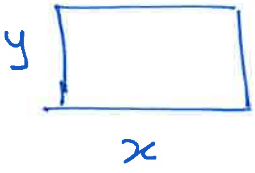
$L(1) = 1$

$L(1/2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ اقصر بعد

---

⑦

ⓒ



$xy = A$

$y = \frac{A}{x}$

$0 < x$

$P = 2x + 2y$

$= 2x + \frac{2A}{x}$

$P' = 2 - \frac{2A}{x^2}$

$= \frac{2x^2 - 2A}{x^2}$

$P' = 0 \Rightarrow 2X^2 - 2A = 0$

$x = -\sqrt{A}$, $x = \sqrt{A}$.

مرفوض

$y = \frac{A}{x} = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$

اي ان $x = y$ يعني الشكل مربع .

الوحدة الرابعة .

تابع اجابات الدرس السابع

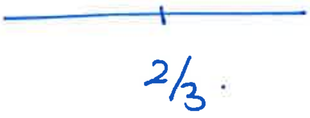
⑧

Ⓓ $0 \le r \le 1$,

$V(r) = 2r^2(1-r) = 2r^2 - 2r^3$

$V'(r) = 4r - 6r^2.$

$V'(r) = 0 \Rightarrow r = 0 \ , \ r = \frac{2}{3}.$



$V(0) = 0$

$V(1) = 0$

$V(2/3) = 8/27.$ اكبر قيمة عظمى .

---

⑨

Ⓐ

$$R(x) = \frac{35x - x^2}{x^2 + 35}$$

$$R'(x) = \frac{(35 - 2x)(x^2+35) - (35x - x^2)(2x)}{(x^2+35)^2}$$

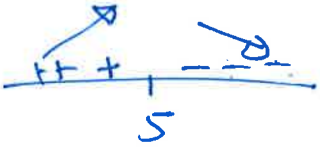
$R'(x) = 0 \Rightarrow (35 - 2x)(x^2+35) - (35x - x^2)2x = 0$

$35x^2 + 35^2 - 2x^2 - 70x - 70x^2 + 2x^3 = 0$

$-35x^2 - 70x + 35^2 = 0$

$x = -7 \ , \ x = 5$

مرفوض



قيمة $x = 5$ وتكون عدد السلع 5000

الوحدة الرابعة .   تابع اجابات الدرس السابع

⑩ (د)

$p(س) = \frac{1}{س} + c\,س^{3}$.   ، $س > 0$

$p'(س) = -\frac{1}{س^{2}} + 3c\,س^{2}$

$= \frac{-1 + 3c\,س^{4}}{س^{2}}$

$p'(س) = 0 \Rightarrow -1 + 3c\,س^{4} = 0$

$3c\,س^{4} = 1$

$س^{4} = \frac{1}{3c}$

$س = -\sqrt[4]{\frac{1}{3c}}$ ، $س = \sqrt[4]{\frac{1}{3c}}$

مرفوض .

$p'(س)$ غ.م $\rightarrow س = 0$ خارج المجال

---

⑪ (د)

$f(t) = e^{-0.02t} - e^{-0.42t}$.

$f'(t) = e^{-0.02t}(-0.02) - e^{-0.42t}(-0.42)$

$f'(t) = 0$

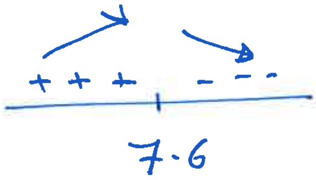
$0.42\,e^{-0.42t} = 0.02\,e^{-0.02t}$.

$\frac{0.42}{0.02} = \frac{e^{-0.02t}}{e^{-0.42t}}$.

$21 = e^{0.4t}$.

$Ln\,21 = 0.4t$.

$\Rightarrow t = \frac{Ln\,21}{0.4} = 7.6$



قيمة عظمى

التركيز اكبر ما عليه

الوحدة الرابعة .　　　　　تابع اجابات الدرس السابع

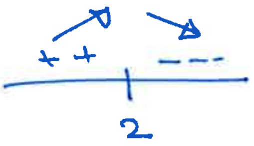
(12)

(A)

$$f(v) = v\,e^{-v/2}.$$

$$f'(v) = 1 \cdot e^{-v/2} + v\,e^{-v/2}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= e^{-v/2}\left(1 - \frac{1}{2}v\right)$$



$$f'(v) = 0 \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{2}v = 0 \Rightarrow v = 2$$

قيمة عظمى للقوة .

---

(13)

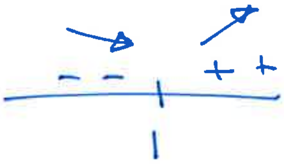
(C)

$$v(t) = t^3 - 3t^2 + 12t + 4.$$

$$a(t) = v'(t) = 3t^2 - 6t + 12.$$

$$a'(t) = 6t - 6.$$

$$a'(t) = 0 \Rightarrow t = 1$$



$$a(1) = 3(1)^2 - 6(1) + 12 = 9.$$

أقل تسارع .

---

(14)

(B)

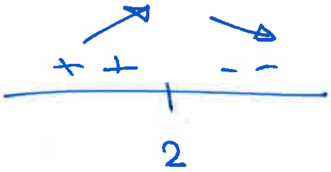
$$Q(t) = -3t^3 + 18t^2 + 60t.$$

$$E(t) = Q'(t) = -9t^2 + 36t + 60$$

الكفاءة

$$E'(t) = -18t + 36$$

$$E'(t) = 0 \Rightarrow t = 2.$$



الكفاءة أكبر ما يمكن

الوحدة الرابعة . تابع اجابات الدرس السابع

⑮ Ⓒ

$A = A_1 + A_2$

$= 2xy + \frac{1}{2}(2x)\cdot x = 2xy + x^2$

$= 2x(6-2x) + x^2$

$= 12x - 4x^2 + x^2$

$= 12x - 3x^2$

$4x + 2y = 12$

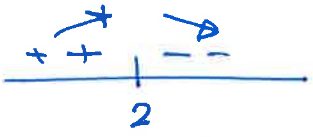
$2x + y = 6$

$y = 6 - 2x$

$A' = 12 - 6x$

$A' = 0 \Rightarrow x = 2$

$A(2) = 12(2) - 3(2)^2 = 12$



قيمة عظمى مطلقة .

---

⑯ Ⓐ

$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$

$= 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{128}{r^2}$

$= 2\pi r^2 + 2\pi \cdot \frac{128}{r}.$

$= 2\pi\left(r^2 + \frac{128}{r}\right)$

$S' = 2\pi\left(2r - \frac{128}{r^2}\right)$

$= 2\pi\left(\frac{2r^3 - 128}{r^2}\right)$

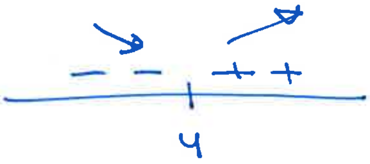
$\pi r^2 h = 128\pi$

$h = \frac{128}{r^2}.$

$r > 0$

$S' = 0 \Rightarrow 2r^3 - 128 = 0$

$r = 4$



أقل ما يمكن

S' غ.م $\Rightarrow r = 0$ خارج المجال

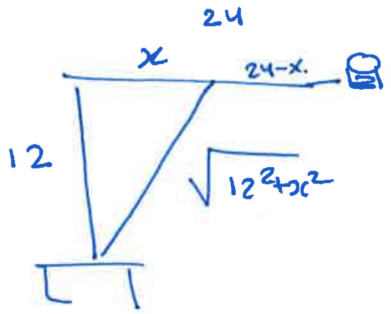
$h = \frac{128}{4^2} = 8$

اللوحة الرابعة

تابع اجابات الدرس السابع

⑰

Ⓐ



$$C = 5\sqrt{12^2+x^2} + 3(24-x)$$

$$C' = 5 \cdot \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{12^2+x^2}} \cdot - 3 \cdot$$

$$C' = 0 \Rightarrow \frac{5x}{\sqrt{12^2+x^2}} = 3$$

$$\frac{25x^2}{12^2+x^2} = 9$$

$$25x^2 = 9(12^2+x^2)$$

$$25x^2 = 9 \cdot 12^2 + 9x^2$$

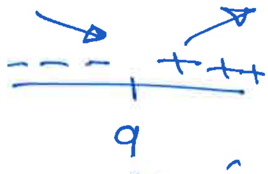
$$16x^2 = 9 \cdot 12^2$$

$$x^2 = \frac{9 \cdot 12^2}{16}$$

$$x = -\sqrt{\frac{9 \cdot 12^2}{16}} \quad / \quad x = +\sqrt{\frac{9 \cdot 12^2}{16}}$$

$$= -\frac{3 \cdot 12}{4} \qquad = \frac{3 \cdot 12}{4}$$

مرفوض $= -9$ $\qquad$ $= 9$



قيمة صغرى.

$$C = 5\sqrt{12^2+9^2} + 3(24-9)$$

$= 120$ مليون

الوحدة الرابعة.

اجابات الدرس الثامن

①

Ⓑ

$$v = \frac{4}{3} h^2 (36-h) = \frac{4}{3}(36h^2 - h^3)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3} (72h - 3h^2) \cdot \frac{dh}{dt}.$$

$$126 = \frac{4}{3}(72(3) - 3(3)^2) \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$126 = 252 \cdot \frac{dv}{dt}.$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 1/2$$

$\frac{dv}{dt} = 126$

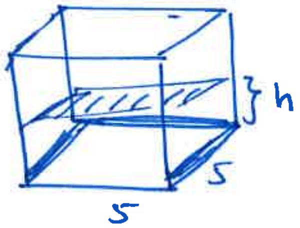
$\frac{dh}{dt} = ??$

---

②

Ⓐ

حجم الماء وليس حجم الخزان .



$$v = 5 \cdot 5 \cdot h$$

$$= 25h.$$

$$\frac{dv}{dt} = 25 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$-2 = 25 \cdot \frac{dh}{dt}.$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{2}{25}$$

$\frac{dv}{dt} = -2$

$\frac{dh}{dt} = ?$

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}.$$

$$-1 = 4\pi (0.2)^2 \frac{dr}{dt}.$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-1}{4\pi(0.2)^2} = -2 \text{ cm}^2/\text{min}.$$

③

Ⓒ

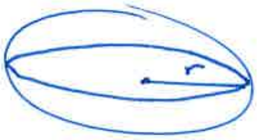
$\frac{dv}{dt} = -1$

$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r = 0.2}$

تابع اجابات الدرس الثامن

الوحدة الرابعة

④ Ⓒ



$$\frac{dr}{dt} = -2$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{r=3} = ?$$

$$S = 4\pi r^2$$

$$\frac{ds}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}.$$

$$= 8\pi(3)(-2)$$

$$= -48\pi.$$

---

⑤ Ⓒ

$$\frac{dx}{dt} = 3$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=2} = ??$$

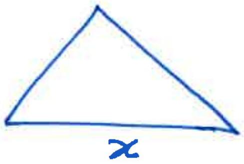
$$y = \sqrt{x^2 - 3}.$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\cancel{2}x \cdot \frac{dx}{dt}.}{\cancel{2}\sqrt{x^2-3}}.$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=2} = \frac{(2)(3)}{\sqrt{2^2-3}} = 6$$

---

⑥ Ⓐ



$$\frac{dx}{dt} = 0.1$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=\sqrt{3}} = ??$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2x \cdot \frac{dx}{dt}.$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{3} \cdot (0.1)$$

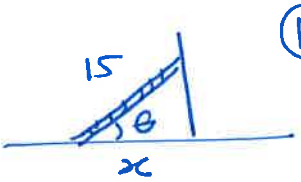
$$= 0.15$$

الوحدة الرابعة

تابع اجابات الدرس الثامن

⑦

Ⓓ



$\frac{dx}{dt} = 6$

$\frac{d\theta}{dt}\Big|_{x=9} = ??$

$\cos\theta = \frac{x}{15}$.

$\theta = \cos^{-1}\frac{x}{15}$.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{15}\right)^2}} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

$$\frac{d\theta}{dt}\Big|_{x=9} = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{9}{15}\right)^2}} \cdot \frac{1}{15} \cdot (6) = -1/2$$

تكملة حل السؤال بالاشتقاق الضمني لـ θ .

---

⑧

Ⓓ

حجم بقعة الزيت (حجم اسطوانة)

2 cm ارتفاع الاسطوانة ثابت

2 cm = 0.02 m .

$\frac{dv}{dt} = 20\ m^3/h.$

$v = \pi r^2 \cdot 0.02$

$\frac{dv}{dt} = 0.02\pi 2r\ \frac{dr}{dt}$.

$20 = 0.02\pi(200) \cdot \frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt}\Big|_{r=100} = ?$

$\frac{dr}{dt} = \frac{5}{\pi}$.

⑨ Ⓒ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

$x = ??$

$$y = x^2$$

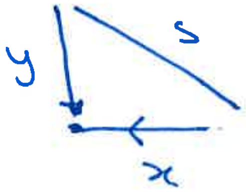
$$\frac{dy}{dt} = 2x \cdot \frac{dx}{dt}.$$

$$1 = 2x.$$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ النقطة

---

⑩ Ⓓ



$$\frac{dy}{dt} = -30$$

$$\frac{dx}{dt} = -40$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4},\, y=\frac{1}{3}} = ??$$

$$S = \sqrt{x^2+y^2}$$

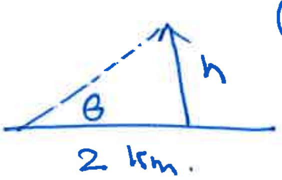
$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x\,\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4},\, y=\frac{1}{3}} = \frac{2\left(\frac{1}{4}\right)(-40) + 2\left(\frac{1}{3}\right)(-30)}{2\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}}$$

$$= -48$$

---

⑪ Ⓑ



$$\frac{dh}{dt} = 0.2$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{h=1} = ??$$

$$\tan\theta = \frac{h}{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{h}{2}\right)$$

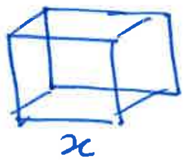
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1+\left(\frac{h}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{h=1} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2}(0.2) = 0.08 \text{ rad/s}$$

تابع اجابات الدرس الثامن الوحدة الرابعة.

طول قطر المكعب

⑫
Ⓑ



$\frac{dx}{dt} = -1$

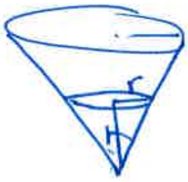
$L = \sqrt{3}\, x$

$\frac{dL}{dt} = \sqrt{3} \cdot \frac{dx}{dt}$

$\frac{dL}{dt} = \sqrt{3}(-1) = -\sqrt{3}$

---

⑬
Ⓑ



$\frac{dr}{dt} = \frac{dh}{dt} = -2$

$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{r=3,\, h=4} = ?$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$

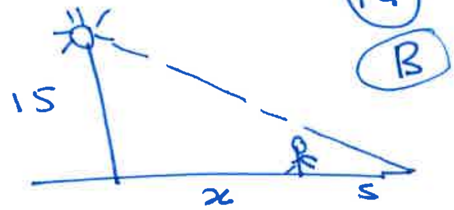
$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{3}\pi\left[2r\frac{dr}{dt} \cdot h + r^2 \cdot \frac{dh}{dt}\right]$

$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{r=3,\, h=4} = \frac{1}{3}\pi\left[2(3)(-2)(4) + (3)^2 \cdot (-2)\right]$

$= -22\pi.$

---

⑭
Ⓑ



$\frac{dx}{dt} = 4.5$

$\frac{ds}{dt} = ??$

$\frac{s}{6} = \frac{s+x}{15}$

$15s = 6s + 6x$

$9s = 6x$

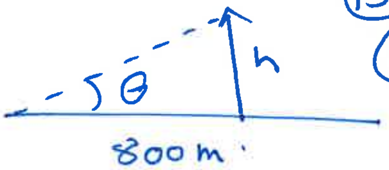
$s = \frac{6}{9}x$

$\frac{ds}{dt} = \frac{6}{9} \cdot \frac{dx}{dt}$

$\frac{ds}{dt} = \frac{6}{9}(4.5) = 3$

الوحدة الرابعة .　　　　　　　　　　　　تابع اجابات الدرس الثاني

⑮ Ⓑ



$$\frac{d\theta}{dt} = 0.6$$

$$\frac{dh}{dt} = ?$$

$$\tan\theta = \frac{h}{800}$$

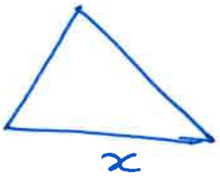
$$\sec^2\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{800} \cdot \frac{dh}{dt}.$$

$$\sec^2 45^\circ \cdot 0.6 = \frac{1}{800} \cdot \frac{dh}{dt}.$$

$$\frac{dh}{dt} = 960 \text{ m/s}.$$

---

⑯ Ⓑ



$$\frac{dx}{dt} = 2$$

$$\frac{dp}{dt} = ??$$

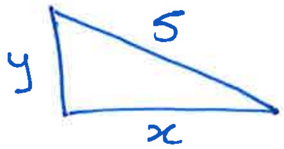
$$p = 3x$$

$$\frac{dp}{dt} = 3 \cdot \frac{dx}{dt}.$$

$$= 3(2) = 6 \quad \text{cm/s}.$$

---

⑰ Ⓐ



$$\frac{dx}{dt} = 1$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=3} = ??$$

$$A = \frac{1}{2}xy.$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{25-x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{25x^2-x^4}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \; \frac{(50x-4x^3)\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{25x^2-x^4}}$$

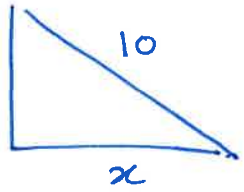
$$= 0.875.$$

تابع اجابات الدرس الثامن

الوحدة الرابعة.

⑱

Ⓑ



$$\frac{dx}{dt} = 2$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=6} = ?$$

$$y = \sqrt{100 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-2x\,\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{100-x^2}}$$

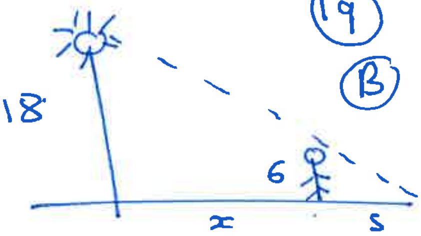
$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=6} = \frac{-6(2)}{\sqrt{100-6^2}}$$

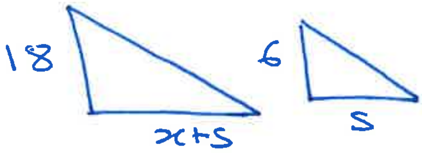
$$= -1.5$$

---

⑲

Ⓑ





$$\frac{dx}{dt} = -3$$

$$\frac{ds}{dt} = ?$$

$$\frac{x+s}{s} = \frac{18}{6}$$

$$\frac{x+s}{s} = 3$$

$$x + s = 3s$$

$$x = 2s$$

$$s = \frac{1}{2}x$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(-3) = \frac{-3}{2}$$

---

⑳

Ⓐ

$$\frac{dv}{dt} = 5$$

$$h = 2r$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=2} = ?$$

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 . h$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 . h$$

$$= \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{h^2}{4}\cdot h$$

$$= \frac{1}{12}\pi h^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$5 = \frac{1}{4}\pi(2)^2\cdot\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{5}{\pi}$$

الوحدة الرابعة.   تابع اجابات الدرس الثامن

(21)

(B)

$$\frac{dv}{dt} = 150 \text{ جالون}$$

$$= \frac{150}{7.5}$$

$$= 20 \ ft^3/m.$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=300} = ?$$

$$v = \pi r^2 \cdot \frac{1}{30}$$

$$= \frac{1}{30}\pi r^2$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{30}\pi \cdot 2r \cdot \frac{dr}{dt}.$$

$$20 = \frac{1}{15}\pi \cdot (300) \cdot \frac{dr}{dt}.$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi}.$$

---

(22)

(B)

$$\frac{dr}{dt} = -1/5$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=3} = ?$$

$$r = \frac{1}{20}\left(3+h^2\right)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{20}\left(2h \cdot \frac{dh}{dt}\right)$$

$$-\frac{1}{5} = \frac{1}{20} \cdot 2(3)\frac{dh}{dt}.$$

$$\frac{dh}{dt} = -2/3.$$

---

(23)

(B)

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}. = \frac{1}{2L} \cdot 220 = \frac{110}{L}.$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{-110}{L^2} \cdot \frac{dL}{dt}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{-110}{(1/2)^2} \cdot (-4) = 1760$$

الوحدة الرابعة.   تابع اجابات الدرس الثامن

(24)

(A)

$$P V = c$$

$$\frac{dp}{dt} \cdot v + p \cdot \frac{dv}{dt} = 0$$

$$pv = c$$

$$p = c/v$$

$$\frac{dp}{dt} v = -p \frac{dv}{dt}.$$

$$\frac{\frac{dp}{dt}}{\frac{dv}{dt}} = \frac{-p}{v}. = \frac{-c/v}{v}$$

$$= -c/v^2$$

$$\frac{p'(t)}{v'(t)} = -c/v^2.$$

الوحدة الرابعة. اجابات الدرس التاسع

① أكبر فرق بين الدخل والتكلفة 8000 قطعة تقريبًا.

Ⓑ

---

② Ⓑ

$$C(100) - C(99)$$
$$= 6000 - 5988.02$$
$$= 11.98$$

---

③ Ⓑ

$$C(x) = 0.02x^2 + 8x + 5000$$
$$C'(x) = 0.04x + 8$$
$$C'(100) = 0.04(100) + 8 = 12$$

---

④ Ⓑ

$$C(x) = 0.002x^2 + 8x + 5000$$
$$R(x) = 20x$$
$$P(x) = R(x) - C(x)$$
$$= 20x - (0.002x^2 + 8x + 5000)$$
$$P(x) = -0.002x^2 + 12x - 5000$$
$$P'(x) = -0.004x + 12$$
$$P'(x) = 0 \implies x = 3000$$
$$P''(x) = -0.004 < 0$$

فهي عظمى محلية وحيدة ضمن منطقة

---

⑤ Ⓒ

$$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{10e^{0.02x}}{x}$$
$$\bar{C}'(x) = \frac{10e^{0.02x}(0.02)x - 10e^{0.02x} \cdot 1}{x^2}$$
$$= \frac{e^{0.02x}(0.2x - 10)}{x^2}$$
$$\bar{C}'(x) = 0 \implies 0.2x - 10 = 0 \implies x = 50$$

تابع اجابات الدرس التاسع الوحدة الرابعة .

⑥
Ⓐ

$f(p) = 400(20-p) \qquad 0 \leq P \leq 20$

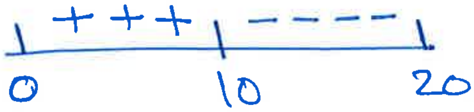
$R = p\,f(p)$

$= 400p(20-p)$

$= 400(20p - p^2)$

$R' = 400(20-2p)$

$R' = 0 \Rightarrow P = 10$



الايراد متزايدة في الفترة $(0,10)$

---

⑦
Ⓑ

يجب ان تكون $E < -1$

---

⑧
Ⓐ

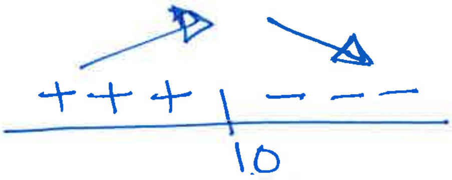
$R(p) = p\,f(p)$

$= 400p(20-p)$

$= 400(20p - p^2)$

$R' = 400(20-2p)$

$R' = 0 \Rightarrow P = 10$



السعر هو 10

---

⑨
Ⓑ

$f(p) = 400(20-p)$

$$E = \frac{P}{f(P)}\,f'(P) = \frac{P \cdot 400 \cdot (-1)}{400(20-P)} = \frac{-P}{20-P}$$

$$= \frac{P}{P-20}$$

$$\frac{P}{P-20} < -1 \Rightarrow P > -P + 20$$

$2P > 20$

$P > 10$

الفترة $(10, 20)$

الوحدة الرابعة .   تابع اجابات الدرس التاسع

⑩ Ⓑ

الطلب مرن يعني $E < -1$

وتكون عندها الأسعار تزداد مع تناقص الايرادات .

---

⑪ Ⓐ

$$R = xp = x\left(1.3 - \frac{x}{2500}\right)$$

$$R = 1.3x - \frac{x^2}{2500}$$

$$R' = 1.3 - \frac{2}{2500}x$$

$$R' = 0 \Longrightarrow 1.3 = \frac{2}{2500}x \Longrightarrow x = 1625$$

---

⑫ Ⓐ

$$S(t) = 60 - 40e^{-0.05x(t)}$$

$$S'(t) = -40e^{-0.05x(t)}[-0.05x'(t)]$$

$$S'(4) = -40e^{-0.05x(4)}[-0.05x'(4)]$$

$$x'(4) = \frac{25-22}{4-3} = 3$$

$$= -40e^{-0.05(25)}[-0.05(3)]$$

$= 1.719$ ألف

$= 1719$

---

⑬ Ⓓ

$$f(x) = \sqrt{2x}$$

$$\omega(x) = f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

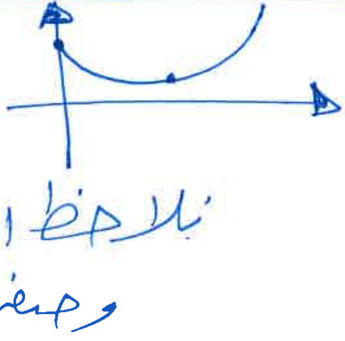
$$\omega(8) = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$$

---

⑭ Ⓑ

$$m(x) = (x-1)^3 + 6x$$

$$\omega(x) = m'(x) = 3(x-1)^2 + 6$$



نلاحظ ان الدالة قيمة عظمى عند الأطراف

وصغرى عند الوسط .

الوحدة الرابعة.　　　　　　　　　　تابع اجابات الدرس التاسع

⑮ Ⓓ

$$x'(t) = x(t)\,[1 - 2x(t)]$$

$$f(x) = x\,[1 - 2x]$$
$$= x - 2x^2$$

$$f'(x) = 1 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \implies x = \frac{1}{4}$$

سرعة التفاعل قيمة عظمى عندما التركيز يساوي $\frac{1}{4}$ درجة الإشباع.

---

⑯ Ⓒ

$$P'(t) = 2P\,[6 - P]$$

$$f(P) = 2P(6 - P)$$
$$= 12P - 2P^2$$

$$f'(P) = 12 - 4P$$

$$f'(P) = 0 \implies P = 3$$ مليون

---

⑰ Ⓒ

$$f(t) = \frac{70}{1 + 3e^{-0.2t}}$$

$$f'(t) = \frac{-70\,(3e^{-0.2t} \cdot (-0.2))}{(1 + 3e^{-0.2t})^2}$$

$$f'(2) = 3.1$$ 3.1% معدل انتشار الاشاعة

---

⑱ Ⓐ

$$f(t) = \frac{90}{1 + 4e^{-0.4t}}$$

$$f'(t) = \frac{-90\,(4e^{-0.4t} \cdot (-0.4))}{(1 + 4e^{-0.4t})^2}$$

$$f'(0) = \frac{144}{5^2}$$
$$= 5.76$$

الوحدة الخامسة

التكامل

5-1 الدوال الاصلية

5-2 المجموع والرمز سيجما

5-3 المساحة

5-4 التكامل المحدود

5-5 النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

5-6 التكامل بالتعويض

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

الدالة الاصلية

اذا كانت الدالة $f(x)=x^2+c$ حيث c عدد ثابت فان مشتقتها الدالة $f'(x)=2x$.

نقول ان الدالة $f(x)=x^2+c$ هي الدالة الاصلية للدالة $f'(x)=2x$

ونعبرعما سبق بالرموز

$$\int 2x\ dx = x^2+c$$

ويقرء.... تكامل $2x$ هو x^2+c

او التكامل غير المحدود للدالة $f'(x)=2x$ بالنسبة للمتغير x هو $f(x)=x^2+c$

---

(1) اوجد الدالة الاصلية للدالة $f(t)=3t^2$ وعبرها عن ذلك بالرموز

نعلم ان مشتقة الدالة $F(t)=t^3+c$ حيث c عدد ثابت هي الدالة $f(t)=3t^2$

لذلك فان الدالة الاصلية للدالة $f(t)=3t^2$ هي الدالة $F(t)=t^3+c$

ونكتب ذلك بالرموز

$$\int 3t^2\ dt = t^3+c$$

---

(2) اوجد الدالة الاصلية للدالة $f(x)=1$ وعبر عن ذلك بالرموز

$$\int f(x)\,dx = \int 1\,dx = x+c \Rightarrow F(x)=x+c$$

---

(3) اوجد الدالة الاصلية للدالة $f(t)=1$ وعبر عن ذلك بالرموز

$$\int f(t)\,dt = \int 1\,dt = t+c \Rightarrow F(t)=t+c$$

---

(4) اوجد الدالة الاصلية للدالة $g(\theta)=\cos\theta$ وعبر عن ذلك بالرموز

$$\int g(\theta)\,d\theta = \int \cos\theta\,d\theta = \sin\theta + c \Rightarrow G(\theta)=\sin\theta+c$$

1) اذا كانت $F(x)=\ln\left|\sec x+\tan x\right|$

(أ) اوجد $F'(x)$

$$F'(x) = \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x}$$

$$= \frac{\sec x(\tan x + \cancel{\sec x})}{\cancel{\sec x + \tan x}} = \sec x .$$

(ب) ما هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)=\sec x$

$$F(x) = \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

---

2) بين ان الدالة $F(x)=2x\ln(ex)-3x$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)=1+\ln x^2$ ، $x>0$

$$F'(x) = 2\ln(ex) + 2x\,\frac{e}{ex} - 3 .$$

$$= 2\ln(ex) + 2 - 3 .$$

$$= 2\ln(ex) - 1$$

$$= 2(\ln e + \ln x) - 1$$

$$= 2(1 + \ln x) - 1$$

$$= 2 + 2\ln x - 1$$

$$= 1 + 2\ln x . = 1 + \ln x^2 \quad \#$$

---

3) اذا كان $\int \frac{bx^2+10}{x^3+5x+1}dx = 2\ln\left|x^3+5x+1\right|+c$ فأوجد قيمة الثابت b

اشتق الطرفين

$$\frac{bx^2+10}{x^3+5x+1} = 2 \cdot \frac{3x^2+5}{x^3+5x+1} = \frac{6x^2+10}{x^3+5x+1}$$

بالمقارنة

$$b = 6$$

التكامل غير المحدود

تعريف : التكامل غير المحدود

مجموعة كل الدوال الاصلية للدالة $f(x)$ هو التكامل غير المحدود للدالة f بالنسبة إلى x

ويرمز لها بالرمز $\int f(x)\,dx$

أي أن $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

نظرية : اذا كانت الدالة $F(x)$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)$ ، و الدالة $\mathrm{G}(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x)$ على الفترة I فان

$\mathrm{G}(x) = F(x) + c$ او $\mathrm{G}(x) - F(x) = c$ حيث c عدد ثابت.

(1) بين ان الدالتان $F(x) = x^2(x^2+4)$ ، $\mathrm{G}(x) = \frac{1}{4}(2x^2+4)^2$ هما دالتان كل منهما الدالة الاصلية لنفس الدالة

$$G(x) - F(x)$$
$$= \frac{1}{4}(2x^2+4)^2 - x^2(x^2+4)$$
$$= \frac{1}{4}(4x^4+16x^2+16) - x^4 - 4x^2$$
$$= x^4 + 4x^2 + 4 - x^4 - 4x^2$$
$$= 4$$

الفرق بينهم ثابت لذلك كل منهم دالة اصلية.

ملاحظة : التكامل هو العملية العكسية للمشتقة اي ان المشتقة تلغي التكامل والتكامل يلغي المشتقة

$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$ و $\int\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]dx = f(x) + c$

(2) اذا كان $g(x) = x\sin x$ ، اوجد

$(a)\ \int g'(x)\,dx = g(x) + c = x\sin x + c$

$(b)\ \frac{d}{dx}\int g(x)\,dx = g(x) = x\sin x.$

بدون C.

قواعد التكامل

ملاحظة : راجع قواعد الاشتقاق

(1) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , n \neq -1$ $\qquad * \int a\, dx = ax + c$ $\qquad * \int (ax+b)^n dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$

(2) $\int x^{-1} dx = \int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

(3) $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$ $\qquad * \int \sin(ax+b)\, dx = \dfrac{-\cos(ax+b)}{a} + c$

(4) $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

(5) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

(6) $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c$

(7) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$

(8) $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + c$

(9) $\int e^x\, dx = e^x + c$ $\qquad * \int e^{ax+b}\, dx = \dfrac{1}{a} e^{ax+b} + c$ $\qquad * \int f'(x)\, e^{f(x)}\, dx = e^{f(x)} + c$

(10) $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ $\qquad * \int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

(11) $\int \dfrac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} x + c$ $\qquad * \int \dfrac{1}{x^2+a^2} dx = \dfrac{1}{a} \tan^{-1}(\dfrac{x}{a}) + c$

(12) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$ $\qquad * \int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1}(\dfrac{x}{a}) + c$

(13) $\int \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$ $\qquad * \int \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}} dx = \dfrac{1}{a} \sec^{-1}(\dfrac{x}{a}) + c$

خواص التكامل غير المحدود

يتوزع التكامل على الجمع والطرح

ولا يتوزع على الضرب او القسمة

(1) $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$

(2) $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

اوجد التكاملات التالية (اوجد الدالة الاصلية)

(1) $\int 2x^4 \quad dx = 2\frac{x^5}{5} + c = \frac{2}{5}x^5 + c$

(2) $\int 3 \quad dt = 3t + c$

(3) $\int x^{\frac{-4}{3}} \quad dx = \frac{x^{-1/3}}{-1/3} + c = -3x^{-1/3} + c$

(4) $\int \frac{1}{x^2} \quad dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{x} + c$

(5) $\int \sqrt[3]{x^2} \quad dx = \int x^{2/3} dx = \frac{x^{5/3}}{5/3} + c = \frac{3}{5}x^{5/3} + c$

(6) $\int \frac{2}{\sqrt[5]{x}} \quad dx = \int 2x^{-1/5} dx = 2\frac{x^{4/5}}{4/5} = \frac{10}{4}x^{4/5} + c$

(7) $\int t\sqrt{t} \quad dt = \int t \cdot t^{1/2} dt = \int t^{3/2} dt = \frac{2}{5}t^{5/2} + c$

(8) $\int \frac{1}{2y} \quad dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2}\ln|y| + c$

(9) $\int (2x-1)^4 \quad dx = \frac{(2x-1)^5}{5(2)} + c = \frac{1}{10}(2x-1)^5 + c$

(10) $\int \frac{6}{(3x+2)^2} \quad dx = \int 6(3x+2)^{-2} dx = \frac{6(3x+2)^{-1}}{-1(3)} + c$

$= -2(3x+2)^{-1} + c$

قبل البدأ بالتكامل ...اسئل نفسك

(1) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج جمع او طرح حدود وكل حد قابل للتكامل

(2)هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج ضرب او قسمة ويمكن تحويلها الى جمع او طرح حدود وكل حد قابل للتكامل

اوجد التكاملات التالية (اوجد الدالة الاصلية)

(1) $\int (4x^3-3x)\quad dx = 4\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + C = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + C$

---

(2) $\int (3x^2-\sqrt{x}+2)\quad dx = \int 3x^2 - x^{1/2} + 2\,dx$

$= 3\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x + C = x^3 - \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x + C$

---

(3) $\int (\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x})\quad dx = \int x^{-1/3} - 5x^{-4} + \frac{1}{x}\,dx$

$= \frac{3}{2}x^{2/3} - \frac{5x^{-3}}{-3} + \ln|x| + C$

$= \frac{3}{2}x^{2/3} + \frac{5}{3x^3} + \ln|x| + C$

---

(4) $\int t^2(t^3 - \frac{1}{t^2})\quad dt = \int (t^5 - 1)\,dt$

$= \frac{1}{6}t^6 - t + C.$

---

(5) $\int x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{-4}{3}} - 3)\quad dx = \int x^{-2/3} - 3x^{2/3}\,dx$

$= 3x^{1/3} - 3\cdot\frac{3}{5}x^{5/3} + C.$

$= 3x^{1/3} - \frac{9}{5}x^{5/3} + C.$

اوجد التكاملات التالية (اوجد الدالة الاصلية)

(1) $\int \frac{x^4-3x+1}{x^2}\,dx = \int x^2 - \frac{3}{x} + x^{-2}\,dx$

$= \frac{1}{3}x^3 - 3\ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} + c.$

---

(2) $\int \frac{x^{1/3}-3}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int \frac{x^{1/3}}{x^{2/3}} - \frac{3}{x^{2/3}}\,dx = \int x^{-1/3} - 3x^{-2/3}\,dx$

$= \frac{3}{2}x^{2/3} - 3\cdot\frac{x^{1/3}}{1/3} + c$

$= \frac{3}{2}x^{2/3} - 9x^{1/3} + c.$

---

(3) $\int \frac{x+2x^{3/4}}{x^{5/4}}\,dx = \int \frac{x}{x^{5/4}} + \frac{2x^{3/4}}{x^{5/4}}\,dx$

$= \int x^{-1/4} + 2x^{-1/2}\,dx.$

$= \frac{4}{3}x^{3/4} + 2\frac{x^{1/2}}{1/2} + c = \frac{4}{3}x^{3/4} + 4x^{1/2} + c.$

---

(4) $\int \frac{t^{2}-1}{1-t}\,dt = \int \frac{(t+1)(t-1)}{(1-t)}\,dt =$

$= \int -(t+1)\,dt$

$= -\left(\frac{t^2}{2}+t\right) + c = -\frac{1}{2}t^2 - t + c.$

---

(5) $\int \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\,dx = \int (\sqrt{x}+2)\,dx$

$= \int (x^{1/2} + 2)\,dx$

$= \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x + C$

$\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$

$= \frac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{x-4}}$

$= \sqrt{x}+2$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int (3\sin x - \cos 4x) \quad dx = -3\cos x - \frac{\sin 4x}{4} + c$

---

(2) $\int \sec x(\tan x - \sec x) \quad dx = \int \sec x \tan x - \sec^2 x \quad dx$

$= \sec x - \tan x + c$

---

(3) $\int (\sec 2x \tan 2x + \csc^2 5x) \quad dx = \frac{\sec 2x}{2} - \frac{\cot 5x}{5} + c$

---

(4) $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cot x} \quad dx = \int \frac{1}{\cos x \cot x} dx = \int \sec x \cdot \tan x \, dx$

$= \sec x + c$

---

(5) $\int \csc x(\sec x \tan x - \cot x) \quad dx = \int (\csc x \sec x \tan x - \csc x \cot x) \, dx$

$= \int \sec^2 - \csc x \cot x \, dx = \tan x + \csc x + c$

---

(6) $\int \frac{2\sin x}{\cos^2 x} \quad dx = \int 2\sec x \tan x \, dx$

$= 2\sec x + c$

$\frac{2\sin x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$

$= 2\sec x \cdot \tan x.$

---

(7) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \quad dx = \int \csc x \cdot \cot x \quad dx$

$= -\csc x + c$

$\frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$

$= \csc x \cdot \cot x$

اوجد التكاملات التالية:

(1) $\int (e^x + \frac{1}{x} - \cos 2x + 1)\quad dx = e^x + \ln|x| - \frac{\sin 2x}{2} + x + C$

(2) $\int (2x + x\sqrt{x} + e^{2x} - \sin 3x)\quad dx = \int 2x + x^{3/2} + e^{2x} - \sin 3x \ dx$

$= x^2 + \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + C$

(3) $\int (2x^{-1} + \frac{1}{\sqrt{e^{2x}}} - x)\quad dx = \int \frac{2}{x} + \frac{1}{(e^{2x})^{1/2}} - x \ dx$

$= \int \frac{2}{x} + e^{-x} - x \ dx = 2\ln|x| - e^{-x} - \frac{x^2}{2} + C$

(4) $\int e^x(2e^x - 3)\quad dx = \int 2e^{2x} - 3e^x \ dx$

$= e^{2x} - 3e^x + C$

(5) $\int (e^x - e^{-x})^2\quad dx = \int (e^x)^2 - 2e^x \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2 dx$

$= \int e^{2x} - 2 + e^{-2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} - 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$

(6) $\int \frac{e^x + 3}{e^x}\quad dx = \int \frac{e^x}{e^x} + \frac{3}{e^x} dx = \int 1 + 3e^{-x} dx = x - 3e^{-x} + C$

(7) $\int \frac{e^{2x} - 2e^{3x}}{e^{3x}}\quad dx = \int \frac{e^{2x}}{e^{3x}} - \frac{2e^{3x}}{e^{3x}} dx = \int e^{-x} - 2 \ dx = -e^{-x} - 2x + C$

اوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{e^x}{e^x+3}\,dx = \text{Ln}\left|e^x+3\right|+c$

(2) $\int \frac{3}{3x-2}\,dx = \text{Ln}\left|3x-2\right|+c$

(3) $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\,\text{Ln}\left|x^2+1\right|+c$

(4) $\int \frac{-7}{2x+1}\,dx = -7\int \frac{1}{2x+1}\,dx = \frac{-7}{2}\int \frac{2}{2x+1}\,dx = \frac{-7}{2}\,\text{Ln}\left|2x+1\right|+c$

(5) $\int \frac{2x+1}{x(x+1)}\,dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx = \text{Ln}\left|x^2+x\right|+c.$

(6) $\int \frac{5x^3}{x^4-5}\,dx = 5\int \frac{x^3}{x^4-5}\,dx = \frac{5}{4}\int \frac{4x^3}{x^4-5}\,dx = \frac{5}{4}\,\text{Ln}\left|x^4-5\right|+c$

(7) $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx = \text{Ln}\left|\tan x\right|+c.$

(8) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx = \text{Ln}\left|e^x+e^{-x}\right|+c$

(9) $\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \text{Ln}\left|\sin x\right|+c$

(10) $\int \tan 2x\,dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\,dx = \frac{-1}{2}\int \frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}\,dx = \frac{-1}{2}\,\text{Ln}\left|\cos 2x\right|+c$

(11) $\int (\cot x+\tan x)\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$= \int \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = \text{Ln}\left|\sin x\right| - \text{Ln}\left|\cos x\right|+c = \text{Ln}\left|\tan x\right|+c$

اوجد التكاملات التالية:

(1) $\int e^{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+1}+c$

---

(2) $\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx = e^{\sin x}+c$

---

(3) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\,dx = e^{\sqrt{x}}+c.$

---

(4) $\int x\, e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2}+c.$

---

(5) $\int \frac{e^{\tan x}}{1-\sin^2 x}\,dx = \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx = \int \sec^2 x\, e^{\tan x}\,dx$

$= e^{\tan x}+c$

---

(6) $\int e^{x^2+\ln x}\,dx = \int e^{x^2}\cdot e^{\ln x}\,dx = \int e^{x^2}\cdot x\,dx$

$= \int x e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2}+c.$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{3}{x^2+1}\, dx = 3\tan^{-1} x + c$

---

(2) $\int \frac{x}{x^3+x}\, dx = \int \frac{x}{x(x^2+1)}\, dx = \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \tan^{-1} x + c$

---

(3) $\int \frac{x+1}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x}{x^2+1}\, dx + \int \frac{1}{x^2+1}\, dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx + \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + \tan^{-1} x + c$

---

(4) $\int \frac{5}{\sqrt{4-4x^2}}\, dx = \int \frac{5}{2\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

$= \frac{5}{2} \sin^{-1} x + c$

---

(5) $\int \frac{-2}{\sqrt{x^4-x^2}}\, dx = \int \frac{-2}{\sqrt{x^2(x^2-1)}}\, dx = \int \frac{-2}{\sqrt{x^2}\,\sqrt{x^2-1}}\, dx$

$= \int \frac{-2}{|x|\sqrt{x^2-1}}\, dx = -2\sec^{-1} x + c$

---

(6) $\int \sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+4}\, dx \quad , x>0$

$= \int \sqrt{(x+\frac{1}{x})^2}\, dx$

$= \int \left| x + \frac{1}{x} \right| dx$

$= \int x + \frac{1}{x}\, dx$

$\frac{1}{2} x^2 + \ln|x| + c$

توضيح

$(x-\frac{1}{x})^2+4$

$= x^2 - 2x\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 4$

$= x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} + 4$

$= x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

$(x+\frac{1}{x})^2$

اوجد التكاملات التالية

ملاحظة : راجع المتطابقات واحفظها

(1) $\int \sin^2 5x + \cos^2 5x \quad dx = \int 1 \cdot dx = x + c.$

(2) $\int \tan^2 x \quad dx = \int \sec^2 x - 1 \ dx = \tan x - x + c$

(3) $\int \cos^2 x - \sin^2 x \quad dx = \int \cos 2x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + c$

(4) $\int 2\sin x \cos x \quad dx = \int \sin 2x \, dx = -\frac{\cos 2x}{2} + c$

(5) $\int \sin^2 x \quad dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + c = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$

(6) $\int \cos^2 3x \quad dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 6x)\, dx$

$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 6x}{x}\right) + c$

(7) $\int \frac{1}{1+\cos 2x} \quad dx$

ممكن حل السؤال بأكثر من طريقة.

$= \int \frac{1}{2\cos^2 x} \, dx$

$= \frac{1}{2}\int \sec^2 x \, dx$

$= \frac{1}{2}\tan x + c.$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} \, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x} dx = \int \frac{(1-\cancel{\cos x})(1+\cos x)}{1-\cancel{\cos x}} dx$

$= \int 1+\cos x \, dx$

$= x + \sin x + C.$

---

(2) $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x} \, dx$

$= \int (\sin x + \cos x) dx$

$= -\cos x + \sin x + C$

تذكر ان

$\frac{1+\sin 2x}{\sin x + \cos x}$

$= \frac{1+2\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}$

$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}$

$= \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x} = \sin x + \cos x$

---

(3) $\int \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} \, dx, \quad x \in [0,\pi]$

$= \int \sqrt{\sin^2 x} \, dx$

$= \int |\sin x| \, dx$

$= \int \sin x \, dx = -\cos x + C$

تذكر

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$= \frac{1-\cos 2x}{2}$

---

(4) $\int \frac{\tan x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \, dx, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$= \int \frac{4}{\sqrt{\cos^2 x}} dx$

$= \int \frac{\tan x}{|\cos x|} dx. = \int \frac{\tan x}{-\cos x} dx = \int -\sec x \tan x \, dx = -\sec x + C$

تكاملات خاصة

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{1}{1+\sin x} \quad dx$

توضيح

$\frac{1}{1+\sin x} \cdot \frac{1-\sin x}{1-\sin x}$

$= \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}$

$= \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$

$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

$= \sec^2 x - \sec x \tan x$

$= \int \sec^2 x - \sec x \tan x \ dx$

$= \tan x - \sec x + C$

---

(2) $\int \sec x \quad dx = \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx$ ، احفظ الطريقة

$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} = \ln|\sec x + \tan x| + C$

البسط مشتقة المقام.

---

(3) $\int \csc x \quad dx = \int \csc x \cdot \frac{\csc x - \cot x}{\csc x - \cot x} dx$

$= \int \frac{\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x - \cot x} dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

---

(4) $\int \frac{1}{e^{-x}+1} \quad dx \times \frac{e^x}{e^x} = \int \frac{e^x}{e^{-x+x} + e^x} dx$

$= \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln|1+e^x| + c$

---

(5) $\int \frac{1}{e^x+1} \quad dx \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}}$

$= \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = -\int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = = \ln|1+e^{-x}| + C$

مساعدة:

اضرب و اقسم على e^{-x}

او اضف واطرح للبسط e^x

(1 اوجد التكاملات التالية

يمكن كتابة الدالة النسبية $f(x)$ التي فيها درجة البسط اكبر من او تساوي درجة المقام على الشكل التالي

$f(x) =$ الناتج $+ \dfrac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

(a) $\int \frac{2x+3}{x+7} \quad dx$

$$= \int 2 - \frac{11}{x+7} \; dx$$

$$= 2x - 11 \ln|x+7| + c.$$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline x+7 & 2x+3 \\ & \ominus 2x \ominus 14 \\ \hline & -11 \end{array}$$

(b) $\int \frac{x^2+2}{x^2+1} \quad dx$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^2+1 & x^2+2 \\ & \ominus x^2 \ominus 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$= \int 1 + \frac{1}{x^2+1} \; dx$$

$$= x + \tan^{-1} x + c.$$

او الحل بالطريقة

$$\int \frac{x^2+2}{x^2+1} \; dx$$

$$= \int \frac{x^2+1+1}{x^2+1} \; dx$$

$$= \int 1 + \frac{1}{x^2+1} \; dx$$

$$= x + \tan^{-1} x + C.$$

(2 اوجد الدالة الاصلية $F(x)$ للدالة $f(x)$

الحل بالتخمين

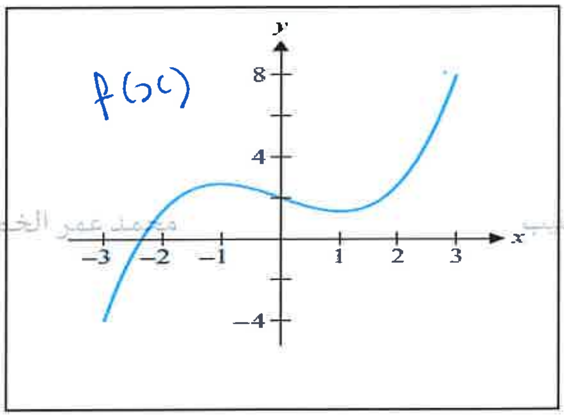
(a) $f(x) = 2x\cos x^2 = \frac{d}{dx}\left(\sin x^2\right)$

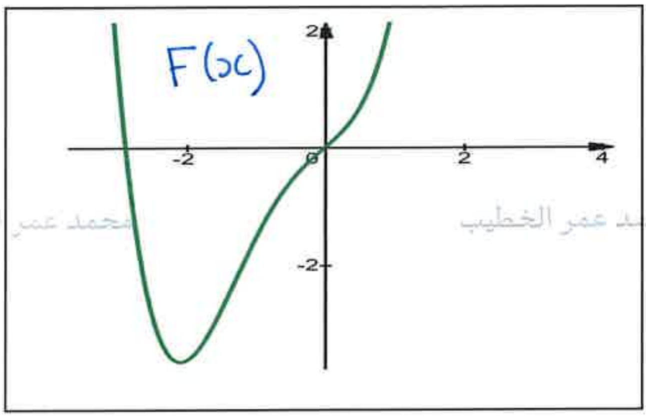
$$F(x) = \int f(x)\, dx = \int \frac{d}{dx}\left(\sin x^2\right) dx = \sin^2 x$$

(b) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x = \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\,\sin x\right]$

$$F(x) = \sqrt{x}\,\sin x + C$$

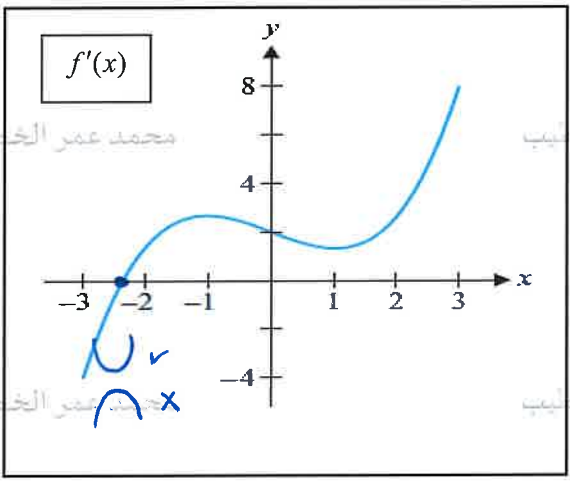
(1) عين الدالة $f(x)$ وعين الدالة الاصلية لها

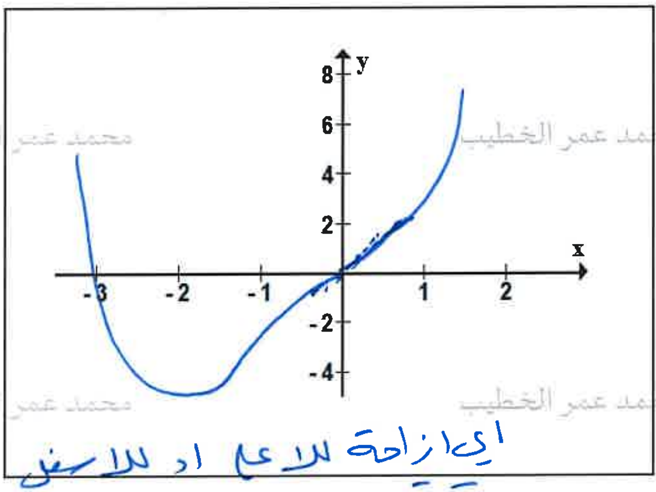




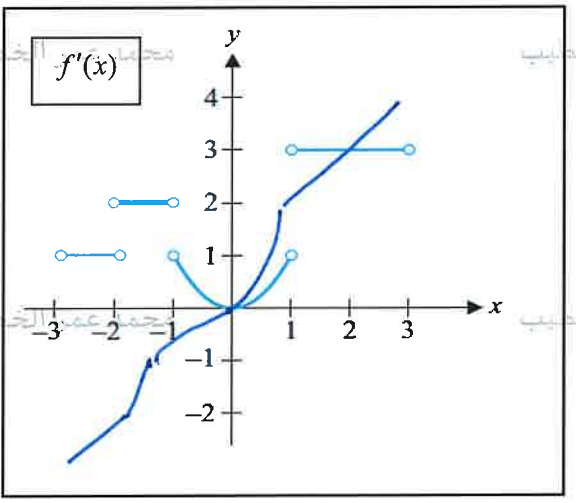
يوجد اجابات صحيحة اخرى

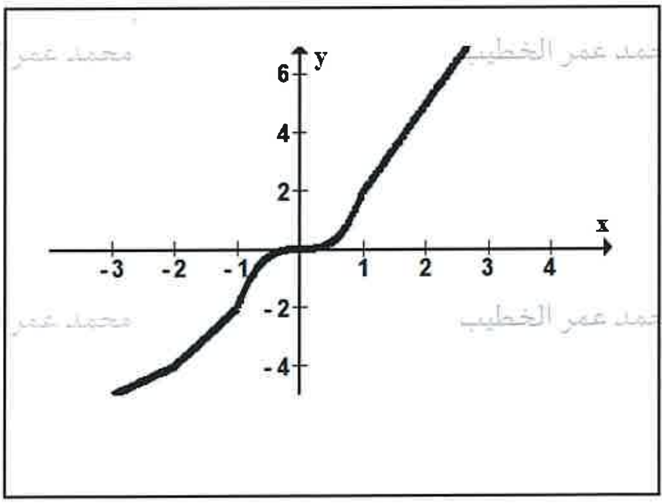
(2) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f'(x)$ ارسم بيان الدالة الاصلية $f(x)$





إزاحة للاعلى او للاسفل تعتبر رسم صحيح .





إيجاد التكامل المحدود

* تمكن ايجاد النتائج من الآلة الحاسبة مباشرة .

سيتم مناقشة التكامل المحدود بشكل موسع في الدرس الرابع

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_{1}^{3}(2x-1)\,dx = x^2 - x\Big]_1^3 = (3^2-3)-(1^2-1)$

$= 6$

---

(2) $\int_{0}^{2}3x(x+2)\,dx = \int 3x^2+6x\,dx$

$= x^3+3x^2\Big]_0^2 = \left[2^3+3(2)^2\right]-\left[0^3+3(0)^2\right] = 20$

---

(3) $\int_{0}^{\ln 2}e^x\,dx = e^x\Big]_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^0$

$= 2-1 \quad = 1$

---

(4) $\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}x\Big]_0^1 = \tan^{-1}1 - \tan^{-1}0$

$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$.

---

(5) $\int_{0}^{1}\frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big]_0^1$

$= \frac{1}{2}\left[\ln 2 - \ln 1\right] = \frac{\ln 2}{2}$

---

(6) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sec^2 x\,dx = \tan x\Big]_{\pi/6}^{\pi/3} = \tan\frac{\pi}{3} - \tan\pi/6 = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}$

---

(7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x - \cos 3x\,dx = -\frac{\cos 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3}\Big]_0^{\pi/2}$

$= \left(-\frac{\cos\pi}{2} - \frac{\sin 3\pi/2}{3}\right) - \left(-\frac{\cos 0}{2} - \frac{\sin 0}{3}\right) = \frac{4}{3}$

اوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق

(1) $f'(x)=3x^2-e^x$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 3x^2-e^x\,dx$$

$$=x^3-e^x+c.$$

(2) $f'(x)=\sqrt{x}+\sin 2x$

$$f(x)=\int\sqrt{x}+\sin 2x\,dx=\int x^{1/2}+\sin 2x\,dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{\cos 2x}{2}+c$$

(3) $f'(x)=\sec^2 x-\csc^2 x$

$$f(x)=\int \sec^2 x-\csc^2 x\,dx$$

$$=\tan x+\cot x+c.$$

(4) $f''(x)=12x+\cos 3x$

$$f'(x)=\int 12x+\cos 3x\,dx=6x^2+\frac{\sin 3x}{3}+c_1$$

$$f(x)=\int 6x^2+\frac{1}{3}\sin 3x+c_1\,dx$$

$$=\cdot 2x^3-\frac{1}{9}\cos 3x+c_1x+c_2.$$

اوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط التالية

(1) $f'(x)=3e^{x}+2x \qquad f(0)=4$

$$f(x) = \int 3e^{x} + 2x \, dx$$

$$= 3e^{x} + x^{2} + c.$$

لإيجاد الثابت c نستخدم الشرط .

$$f(0) = 4$$

$$3e^{0} + 0^{2} + c = 4$$

$$3 + c = 4 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

$$\therefore f(x) = 3e^{x} + x^{2} + 1$$

---

(2) $f'(x)=\dfrac{1}{x^{2}}+2x \qquad f(1)=4$

$$f(x) = \int \frac{1}{x^{2}} + 2x \, dx$$

$$= \int x^{-2} + 2x \, dx$$

$$= -x^{-1} + x^{2} + c.$$

$$= \frac{-1}{x} + x^{2} + c$$

$f(1) = 4$ الشرط

$$-\frac{1}{1} + 1 + c = 4$$

$$0 + c = 4 \Rightarrow c = 4$$

$$\therefore f(x) = \frac{-1}{x} + x^{2} + 4.$$

---

(3) $f'(x)=\sec^{2}x \qquad f(\dfrac{\pi}{4})=-1$

$$f(x) = \int \sec^{2}x \, dx$$

$$= \tan x + c$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\tan\frac{\pi}{4} + c = -1$$

$$1 + c = -1 \Rightarrow c = -2$$

$$\therefore f(x) = \tan x - 2$$

---

(4) $f'(x)=\cos x+\sin x \qquad f(\pi)=1$

$$f(x) = \int \cos x + \sin x \, dx$$

$$= \sin x - \cos x + c$$

$$f(\pi) = 1$$

$$\sin \pi - \cos \pi + c = 1$$

$$+1 + c = 1$$

$$c = 0$$

$$\therefore f(x) = \sin x - \cos x.$$

اوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط التالية

(1) $f''(x)=12x^2+4e^{2x}$ $f(0)=3$, $f'(0)=2$

$$f'(x) = \int 12x^2+4e^{2x}\,dx$$

$$= 4x^3 + \frac{4e^{2x}}{2} + c_1$$

$f'(0) = 0$ الشرط ١

$2 + c_1 = 2 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$

$f'(x) = 4x^3 + 2e^{2x}$

$$f(x) = \int 4x^3 + 2e^{2x}\,dx$$

$$= x^4 + e^{2x} + c_2$$

الشرط ١

$f(0) = 3.$

$1 + c_2 = 3 \Rightarrow c_2 = 2$

$\therefore f(x) = x^4 + e^{2x} + 2$

---

(2) $f''(t)=2t+2$ $f(0)=2$, $f(3)=2$

$$f'(t) = \int 2t+2\,dt$$

$$= t^2 + 2t + c_1$$

لا نستطيع استخدام الشروط الان

$$f(t) = \int t^2 + 2t + c_1\,dt$$

$$= \frac{1}{3}t^3 + t^2 + c_1 t + c_2.$$

الشرط ١

$f(0) = 2$

$c_2 = 2$

$f(3) = 2$

$\frac{1}{3}(3)^3 + 3^2 + 3c_1 + 2 = 2$

$3c_1 = -18$

$c_1 = -6$

$f(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - 6t + 2$

التطبيقات

الدالة المكانية ⇦ دالة السرعة المتجهة ⇦ دالة التسارع

بالاشتقاق

الدالة المكانية ⇨ دالة السرعة المتجهة ⇨ دالة التسارع

بالتكامل

(1 حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t)=10t+5$ حيث $s(0)=10$

$S(t) = \int v(t)\, dt$

$= \int 10t+5 \; dt$

$= 5t^2+5t+c.$

$S(0) = 10$

$c = 10$

$S(t) = 5t^2+5t+10$

(2 حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t)=3e^{-t}-2$ حيث $s(0)=0$

$s(t) = \int v(t)\, dt$

$= \int 3e^{-t}-2 \; dt$

$= -3e^{-t}-2t+c$

$s(0) = 0$

$-3+c=0 \Rightarrow c=3.$

$S(t) = 3e^{-t}-2t+3.$

(3 حدد الدالة المكانية اذا كانت دالة التسارع $a(t)=t^2+1$ والسرعة المتجهة الابتدائية $v(0)=4$ والموقع الابتدائي $s(0)=0$

$v(t) = \int a(t)\, dt.$

$= \int t^2+1 \; dt$

$= \frac{1}{3}t^3+t+c_1.$

$v(0)=4.$

$c_1 = 4.$

$v(t) = \frac{1}{3}t^3+t+4.$

$s(t) = \int \frac{1}{3}t^3+t+4 \; dt$

$s(t) = \frac{1}{12}t^4+\frac{1}{2}t^2+4t+c_2$

$s(0) = 0 \Rightarrow$

$c_2 = 0$

$s(t) = \frac{1}{12}t^4+\frac{1}{2}t^2+4t.$

(1) حدد الدالة المكانية لدالة التسارع $a(t)=3\sin t$ حيث $s(0)=0, v(0)=4$

$v(t) = \int a(t)\,dt$

$= \int 3\sin t\,dt$

$= -3\cos t + c_1$

$v(0) = 4$

$-3 + c_1 = 4 \Rightarrow c_1 = 7.$

$v(t) = -3\cos t + 7.$

$s(t) = \int -3\cos t + 7\,dt$

$= -3\sin t + 7t + c_2$

$s(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$s(t) = -3\sin t + 7t.$

(2) سقط جسم من ارتفاع برج الشيخ خليفة عن ارتفاع $828m$ اذا كان تسارع الجسم بعد t ثانية يعطى بالعلاقة $a(t)=-9.8\,m/s^2$ و السرعة الابتدائية للجسم هي $-30m/s$ ، اوجد الدالة المكانية للجسم ثم اوجد ارتفاع الجسم عن الارض بعد 10 ثواني من بدء الحركة.

$a(t) = -9.8\ ,\ v(0) = -30,\ s(0) = 828$

$v(t) = \int -9.8\,dt$

$= -9.8t + c_1$

$v(0) = -30$

$c_1 = -30.$

$v(t) = -9.8t - 30$

$s(t) = \int -9.8t - 30\,dt$

$= -4.9t^2 - 30t + c_2$

$s(0) = 828$

$c_2 = 828$

$s(t) = -4.9t^2 - 30t + 828.$

$s(10) = 38\ m.$

(3) قذف جسم افقياً للأعلى من ارتفاع $80\,ft$ اذا كان تسارع الجسم ثابت هو $a(t)=-32\,ft/s^2$ و السرعة الابتدائية للجسم هي $64\,ft/s$ ، اوجد اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم.

$a(t) = -32,\ v(0) = 64,\ s(0) = 80$

$v(t) = \int -32\,dt = -32t + c_1$

$v(0) = 64 \rightarrow c_1 = 64.$

$v(t) = -32t + 64.$

$s(t) = \int -32t + 64\,dt$

$= -16t^2 + 64t + c_2$

$s(0) = 80 \Rightarrow c_2 = 80$

$s(t) = -16t^2 + 64t + 80$

لإيجاد اقصى ارتفاع نجعل السرعة صفر

$v(t) = 0$

$-32t + 64 = 0 \Rightarrow t = 2$

$s(2) = 144\ ft$

(1) اذا كانت سيارة تتسارع من $20m/s$ الى $60m/s$ في 4 ثواني ، اوجد المسافة التي تقطعها السيارة خلال اول 5 ثواني ، علماً بان التسارع ثابت وبداية الحركة عند الموضع صفر.

* يمكن حل السؤال بأكثر من طريقة .

معلومات

التسارع ثابت وليكن

$a(t) = g$.

$v(0) = 20$

$v(4) = 60$

$s(0) = 0$

$v(t) = \int a(t)\,dt$

$= \int g\,dt$.

$= gt + c_1$

الشروط

$v(0) = 20$

$c_1 = 20$.

$v(4) = 60$

$g(4) + c_1 = 60$

$4g + 20 = 60$

$g = 10$

$v(t) = 10t + 20$

$s(t) = \int 10t + 20\,dt$

$= 5t^2 + 20t + c_2$

$s(0) = 0$

$c_2 = 0$

$s(t) = 5t^2 + 20t$.

$s(5) = 225$ .m.

---

(2) اذا كانت دالة السرعة المتجهة لجسم يتحرك على خط مستقيم يعطى بالعلاقة $v(t) = -s(t)$ حيث $s(0) = e$ فأوجد دالة الوضع $s(t)$

السؤال من حل في الكتاب

$v(t) = -s(t)$.

$\downarrow$

$s'(t) = -s(t)$

بالقسمة على $s(t)$

$$\frac{s'(t)}{s(t)} = -1$$

$$\int \frac{s'(t)}{s(t)}\,dt = \int -1\,dt$$

$\text{Ln}|s(t)| = -t + c$.

$s(t) = e^{-t+c}$.

$s(0) = e$

$e^{c} = e$

$\boxed{c = 1}$

$s(t) = e^{-t+1}$.

1) اوجد الدالة $f(x)$ التي لها ميل المماس عند اي نقطة $m = 2x$ و تمر بالنقطة $(2,5)$

$f'(x) = m = 2x$, $f(2) = 5$

$f(x) = \int 2x \, dx$

$= x^2 + c$

الشرط

$f(2) = 5$

$2^2 + c = 5$

$c = 1$

$\therefore f(x) = x^2 + 1$

---

2) اوجد الدالة $f(x)$ التي تمر بالنقطة $(0,1)$ ولها مماس افقي عند نفس النقطة حيث $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 6x$, $f'(0) = 0$, $f(0) = 1$

مماس أفقي

$f'(x) = \int 6x \, dx = 3x^2 + c_1$

$f'(0) = 0$

$c_1 = 0$

$f'(x) = 3x^2$

$f(x) = \int 3x^2 \, dx$

$= x^3 + c_2$

$f(0) = 1$

$c_2 = 1$

$f(x) = x^3 + 1$

---

3) يكلف طباعة الكتاب الأول 1600 درهم وتعطى التكلفة الحدية لطباعة x نسخة من نفس النوع بالعلاقة $c'(x) = \dfrac{200}{\sqrt{x}}$ ، اوجد تكلفة طباعة 400 كتاب.

$c'(x) = \dfrac{200}{\sqrt{x}}$, $c(1) = 1600$

$c(x) = \int \dfrac{200}{\sqrt{x}} \, dx$

$= \int 200 x^{-1/2} \, dx$

$= \dfrac{200 x^{1/2}}{1/2}$

$= 400\sqrt{x} + c$

الشرط

$c(1) = 1600$

$400\sqrt{1} + c = 1600$

$c = 1200$

$c(x) = 400\sqrt{x} + 1200$

$c(400) = 9200$

خزان للماء يحتوي على 288 لتر وتتغير كمية الماء في الخزان بمعدل $f(t) = 4t - t^2$ لتر في الدقيقة

(أ) اكتب المعادلة التفاضلية التي تنمذج معدل كمية الماء $v(t)$ بالخزان عند الزمن t مع الشروط

$v'(t) = 4t - t^2$, $v(0) = 288$.

(ب) اوجد كمية الماء $v(t)$ بالخزان عند اي زمن .

$$v(t) = \int v'(t)\,dt$$

$$= \int 4t - t^2\,dt$$

$$= 2t^2 - \frac{1}{3}t^3 + c_1$$

$$v(0) = 288$$

$$c_1 = 288$$

$$v(t) = 2t^2 - \frac{1}{3}t^3 + 288$$

(ج) اوجد كمية الماء بالخزان بعد 9 دقائق.

$$v(9) = 2(9)^2 - \frac{1}{3}(9)^3 + 288$$

$= 207$ لتر.

(د) حدد الزمن الذي يصبح فيه الخزان فارغ.

$$v(t) = 0$$

$$2t^2 - \frac{1}{3}t^3 + 288 = 0$$

$$t^3 - 6t^2 - 864 = 0 \Rightarrow t = 12 \text{ min.}$$

(هـ) حدد الفترة التي يتزايد فيها مستوى الماء ومتى يتناقص

$v(t)$ حجم الماء

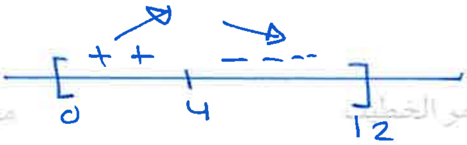
$$v'(t) = 4t - t^2$$

$$v'(t) = 0$$

$$4t - t^2 = 0$$

$t = 0$, $t = 4$.

الأعداد الحرجة.



حجم الماء يتزايد في الفترة الزمنية $(0, 4)$

حجم الماء يتناقص في الفترة الزمنية $(4, 12)$

القيمة العظمى لحجم الماء عند $t = 4$

رمز المجموع (سيجما) $\sum$

اكتب كل مما يلي بدون استخدام رمز المجموع (سيجما) $\sum$

(1) $\sum_{i=1}^{7} 2i+1 = 3+5+7+9+11+13$

$i=1$ $\quad i=2$ $\quad i=7.$

---

(2) $\sum_{i=1}^{10} i^2-3i = (-2)+(-2)+0+10+\cdots+70$

$i=1$ $\quad i=10$

---

(3) $\sum_{n=1}^{10} (n-2)(n+2) = \sum_{i=1}^{10} n^2-4 = -3+0+5+\cdots+96.$

---

(4) $\sum_{i=2}^{100} (-1)^i \frac{1}{i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{100}$

---

(5) $\sum_{i=1}^{20} \sin(\frac{\pi}{2} i) = 1+0-1+0+1+0+\cdots+0$

---

(6) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i!}{e^i} = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{6}{e^3} + \frac{24}{e^4} + \cdots$

---

(7) $\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{i}\, e^{1/i} = e + \sqrt{2}\, e^{1/2} + \sqrt{3}\, e^{1/3} + \sqrt{4}\, e^{1/4} + \cdots$

اكتب كل مما يلي باستخدام رمز المجموع (سيجما) $\sum$

اذا كان الفرق بين اي حددين متتالين **ثابت** تسمى مسلسلة حسابية الحد ويكون الحد لعام للمتسليلة الحسابية هو

$$a_i = a_1 + (i-1)d$$

حيث a_1 الحد الأول

$d = a_2 - a_1$ الاساس (الفرق)

اذا كان قسمة اي حددين متتالين **ثابت** تسمى متسلسلة هندسية ويكون الحد العام للمتسلسلة الهندسية هو

$$a_i = a_1 \times r^{i-1}$$

حيث a_1 الحد الأول

$r = \frac{a_2}{a_1}$ الاساس (النسبة)

---

(1) $3+6+9+12+15+\ldots+99$

حسابية

$d = 3$

$a_1 = 3$

$a_i = 3 + (i-1)3$

$= 3i$

$= \sum_{i=1}^{33} 3i$

---

(2) $2+9+16+23+30+\ldots+149$

حسابية

$d = 7$

$a_1 = 2$

$a_i = 2 + (i-1)7$

$= 7i - 5$

$7i - 5 = 149$

$7i = 154$

$i = 22$

$= \sum_{i=1}^{22} 7i-5$

---

(3) $0.4+0.8+1.2+1.6+2.0+\ldots+20$

حسابية

$d = 0.4$

$a_1 = 0.4$

$a_i = 0.4i$

$= \sum_{i=1}^{50} 0.4i$

---

(4) $2.05+2.15+2.25+2.35+\ldots+6.75$

حسابية

$d = 0.1$

$a_1 = 2.05$

$a_i = 1.95 + 0.1i$

$= \sum_{i=1}^{48} 1.95 + 0.1i$

---

(5) $1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+5\times6+\ldots+20\times21 = \sum_{i=1}^{20} i(i+1)$

---

(6) $\sqrt{2-1}+\sqrt{3-1}+\sqrt{4-1}+\ldots+\sqrt{100-1} = \sum_{i=2}^{106} \sqrt{i-1}$

---

(7) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\ldots-\frac{1}{400} = \sum_{i=1}^{20} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1}{i^2}$

---

(8) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{1024}$

هندسية

$r = \frac{1}{2}$

$a_1 = \frac{1}{2}$

$a_i = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^i$

$= \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^i$

خواص وقوانين المجموع (سيجما)

اذا كانت n عدد صحيح موجب و a,b,c اعداد حقيقية فان

(1) $\sum_{i=1}^{n} c = nc$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{20} 3 = 20\times 3 = 60$

(2) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{20} i = \frac{20(21)}{2} = 210$

(3) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{20} i^2 = \frac{20(21)(41)}{6} = 2870$

(4) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{20} i^3 = \left[\frac{20(21)}{2}\right]^2 = 44100$

المتسلسلات الهندسية المنتهية

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n$$

الحد الأول
مكان i=0

عدد الحدود
(n-0)+1

(5) $\sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \quad , r \neq 1$

عدد الحدود
(n-1)+1

او $\sum_{i=1}^{n} ar^i = \frac{ar(1-r^n)}{1-r} \quad , r \neq 1$

$\longrightarrow$ (الاساس $^{\text{عدد الحدود}}$ 1-) × الحد الاول
$\longrightarrow$ الاساس 1-

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية

الحد الأول
مكان i=m

$$\sum_{i=m}^{\infty} ar^i = \frac{ar^m}{1-r} \quad , \quad |r| < 1$$

خواص المجموع

(1) $\sum_{i=1}^{n} (ca_i \pm db_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i \pm d\sum_{i=1}^{n} b_i$

(2) $\sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \Leftrightarrow \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{m-1} a_i \quad or \quad \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-m} a_{i+m}$

(1) اكتب كل الحدود واحسب المجموع

(a) $\sum_{i=1}^{5}(4i+2) = 6+10+14+18+22=70$

(b) $\sum_{i=3}^{7}(i^2+i) = 12+20+30+42+56 = 160$

(2) استخدم قواعد المجموع لحساب

(a) $\sum_{i=1}^{25}3 = 3(25) = 75$

(b) $\sum_{i=1}^{15}(2i-3) = 2\sum_{i=1}^{15} i - \sum_{i=1} 3 = \frac{2(15)(16)}{2} - 3(15) = 195$

(c) $\sum_{i=1}^{20}(5-i) = \sum_{i=1}^{20} 5 - \sum_{i=1}^{20} i = 5(20) - \frac{20(21)}{2} = -110$

(d) $\sum_{i=1}^{125}(i^2+i+5) = \sum_{i=1}^{125} i^2 + \sum_{i=1}^{125} i + \sum_{i=1}^{125} 5$

$= \frac{125(126)(251)}{6} + \frac{125(126)}{2} + 5(125) = 667375$

(e) $\sum_{i=1}^{20} i(i-3) = \sum_{i=1}^{20} i^2 - 3i = \sum_{i=1}^{20} i^2 - 3\sum_{i=1}^{20} i$

$= \frac{20(21)(41)}{6} - 3\frac{(20)(21)}{2} = 2240$

(f) $\sum_{i=1}^{10} i^3 = \left[\frac{10(11)}{2}\right]^2 = 3025$

نأخذ $i=0$ ، نفصلها

استخدم قواعد المجموع لحساب

(1) $$\sum_{i=0}^{100}(5i+2) = 2 + \sum_{i=1}^{100}(5i+2) = 2+5\sum_{i=1}^{100} i + \sum_{i=1}^{100} 2$$

$$= 2 + 5\frac{(100)(101)}{2} + 2(100) = 25452$$

---

(2) $$\sum_{i=5}^{20}(5i+2) = \sum_{i=1}^{20} 5i+2 - \sum_{i=1}^{4} 5i+2$$

$$= \frac{5(20)(21)}{2} + 2(20) - \left[5 \cdot \frac{4(5)}{2} + 2(5)\right] = 1032$$

---

(3) $$\sum_{i=4}^{20}(i-3)(i+3) = \sum_{i=4}^{20} i^2 - 9 = \sum_{i=1}^{20} i^2 - 9 - \sum_{i=1}^{3} i^2 - 9$$

$$= \frac{20(21)(41)}{6} - 9(20) - \left[\frac{3(4)(7)}{6} - 9(3)\right]$$

$$= 2703 .$$

---

(4) $$\sum_{i=1}^{10} 3\times 2^i = \frac{6(1-2^{10})}{1-2}$$

$$= 613.8$$

هندسية منتهية

$a_1 = 6$

$r = 2$

عدد الحدود $= 10-1+1=10$

---

(5) $$\sum_{i=0}^{8} 4\times 2^{-i} = \sum_{i=}^{8} 4\left(\frac{1}{2}\right)^i$$

$$= \frac{4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^9\right)}{1-1/2} = \frac{511}{64}$$

هندسية منتهية

$a_1 = 4$

$r = 1/2$

عدد الحدود $= 8-0+1=9$

---

(6) $$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^i$$

$$= \frac{1/e}{1-1/e} = \frac{1/e}{e-1/e} = \frac{1}{e-1}$$

هندسية غير منتهية

$r = 1/e$

(1) اذا كان $f(x)=2x-3$ **فأوجد**

$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(50)$

$f(x)=2x-3.$

$f(i)=2i-3.$

$$= \sum_{i=1}^{50} f(i) = \sum_{i=1}^{50} 2i-3$$

$$= \frac{2(50)(51)}{2} -3(50) = 2451$$

---

(2) احسب مجموع قيم الدالة $f(x)=3x+5$ **عند**

$x = 0.4\ , 0.8\ , 1.2\ , 1.6\ , 2.0 , 2.4 , 2.8 , 3.2 , 3.6 , ..., 40$

المطلوب

$$f(0.4)+f(0.8)+\cdots+f(40)$$

$$= \sum_{i=1}^{100} f(0.4i)$$

$$= \sum_{i=1}^{100} 3(0.4i)+5 = \sum_{i=1}^{100} 1.2i+5$$

$$= 1.2\frac{(100)(101)}{2} + 5(100) = 6560.$$

قيم x متتالية حسابية

$a_1 = 0.4$

$d = 0.4$

$a_i = 0.4+(i-1)0.4$

$= 0.4i$

---

(3) احسب المجموع بالصيغة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ **لقيم** x_i **المعطاة**

$f(x)=x^2+4x \qquad x=2,4,6,8,10,...,100$

قيم x متتالية حسابية.

$x_i = 2i$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{50} f(2i)\cdot 2$$

$$= \sum_{i=1}^{50} \left((2i)^2+4(2i)\right)2$$

$$= 2\sum_{i=1}^{50}(4i^2+8i)$$

$$= 8\sum_{i=1}^{50} i^2 + 16\sum_{i=1}^{50} i$$

$$= \frac{8(50)(51)(101)}{6} + \frac{16(50)(51)}{2}$$

$$= 363800$$

اوجد ناتج كل مايلي واحسب نهاية المجموع عندما تقترب n من ∞

(1) $$\sum_{i=1}^{n}\frac{5i}{n^2} = \frac{5}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{5}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{5}{2}\,\frac{(n+1)}{n}.$$

$$\lim \frac{5}{2}\cdot\frac{(n+1)}{n}$$

$$= \frac{5}{2}$$

---

(2) $$\sum_{i=1}^{n}\frac{2i}{n^3} = \frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{2}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}.\frac{2n^2+3n+1}{3n^2}$$

$$= \frac{2}{3}.$$

---

(3) $$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2+2\left(\frac{i}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum\frac{i^2}{n^2}+2\sum\frac{i}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum i^2+\frac{2}{n^2}\sum i$$

$$= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}+\frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}+\frac{n+1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}+\frac{n+1}{n}$$

$$= \frac{2}{6}+1$$

$$= 4/3.$$

اوجد ناتج كل مايلي واحسب نهاية المجموع عندما تقترب n من ∞

(1) $\sum_{i=1}^{n} 2\times 3^{-i} = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3^i} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^i$. هندسية

$a_1 = 2/3$

$r = 1/3$

عدد الحدود

$n-1+1=n$

$$= \frac{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-1/3} = 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n .$$

$$\lim_{n\to\infty} 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1$$

---

(2) $\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{2i}{n}} \frac{2}{n}$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{2/n}\right)^i$$

هندسية

$\frac{2}{n}e^{2/n}$.

$r = e^{2/n}$

عدد الحدود

$n-1+1=n$

$$= \frac{\frac{2}{n}e^{2/n}\left(1-\left(e^{2/n}\right)^n\right)}{1-e^{2/n}} .$$

$$= \frac{2}{n}e^{2/n}\frac{\left(1-e^2\right)}{1-e^{2/n}} .$$

$$= \frac{\frac{2}{n}\left(1-e^2\right)}{\frac{1-e^{2n}}{e^{2n}}} .$$

$$= \frac{\frac{2}{n}\left(1-e^2\right)}{\frac{1}{e^{2/n}}-1} .$$

$$* \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}\left(1-e^2\right)}{\frac{1}{e^{2/n}}-1} \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام لوبيتال

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{2}{n^2}\left(1-e^2\right)}{e^{-2/n}\cdot\frac{2}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-\left(1-e^2\right)}{e^{-2/n}}$$

$$= -\left(1-e^2\right) = e^2-1$$

مجموع ريمان لحساب المساحة

التجزئة المنتظمة

تسمى المجموعة $\{x_0, x_1, x_2, x_3, ... x_n\}$ تجزئة منتظمة للفترة $[a,b]$ اذا تحققت الشروط التالية

(1) $x_0 = a$ و $x_n = b$

(2) $x_i < x_{i+1}$ لكل قيم i

(3) $\Delta x_i = \Delta x = x_{i+1} - x_i$ قيمة ثابتة لكل قيم i

مثال: المجموعة $\{2,4,6,8,10\}$ هي تجزئة منتظمة للفترة $[2,10]$

تسمى كل فترة $[x_{i-1}, x_i]$ فترة جزئية للتجزئة ويكون عدد الفترات الجزئية هو n وعدد عناصر التجزئة هو $n+1$

ملاحظات مهمة

(1) طول الفترة الكلية للتجزئة هي $b-a$

(2) طول الفترة الجزئية للتجزئة المنتظمة هي $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$

(3) العنصر x_i في التجزئة هو العنصر الذي ترتيبه $i+1$ (مثلا x_6 هو العنصر السابع)

(4) الفترة الجزئية التي ترتيبها i هي الفترة $[x_{i-1}, x_i]$ (مثلا $[x_5, x_6]$ هي الفترة الجزئية السادسة)

(5) نقاط القيم هي $c_1, c_2, c_3, ... c_n$ حيث c_i تقع في الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$

(6) يمكن ايجاد اي عنصر في التجزئة بالعلاقة $x_i = a + \Delta x(i) = a + \dfrac{b-a}{n} i$ لكل قيم i

يسمى المقدار $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ مجموع ريمان للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ حيث x_i هي عناصر التجزئة و c_i هي نقاط القيم

(1) اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها الجزئية 10 للفترة $[0,2]$

$P = \{0, 0.2, 0.4, \dots, 2\}$

$n = 10$

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$= \frac{2-0}{10} = 0.2$

---

(2) اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 25 للفترة $[1,13]$

25 وليس $n = 24$

$P = \{1, 1.5, 2, \dots, 13\}$

$\Delta x = \frac{13-1}{24} = 1/2$

---

(3) اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها الجزئية n للفترة $[0,3]$

$P = \{0, \frac{3}{n}, \frac{6}{n}, \frac{9}{n}, \dots, 3\}$

$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$

---

(4) اكتب العنصر السابع في التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 31 للفترة $[2,5]$

x_6

$x_i = a + \frac{b-a}{n} i$

$n = 30.$

$x_6 = 2 + \frac{5-2}{30}(6)$

$= 2.6$

---

(5) اكتب الفترة الجزئية العاشرة في التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها الجزئية 40 للفترة $[1,3]$

$x_9 = 1 + \frac{3-1}{40}(9) = 1.45$

$x_{10} = 1. + \frac{3-1}{40}(10) = 1.50$

$n = 40$

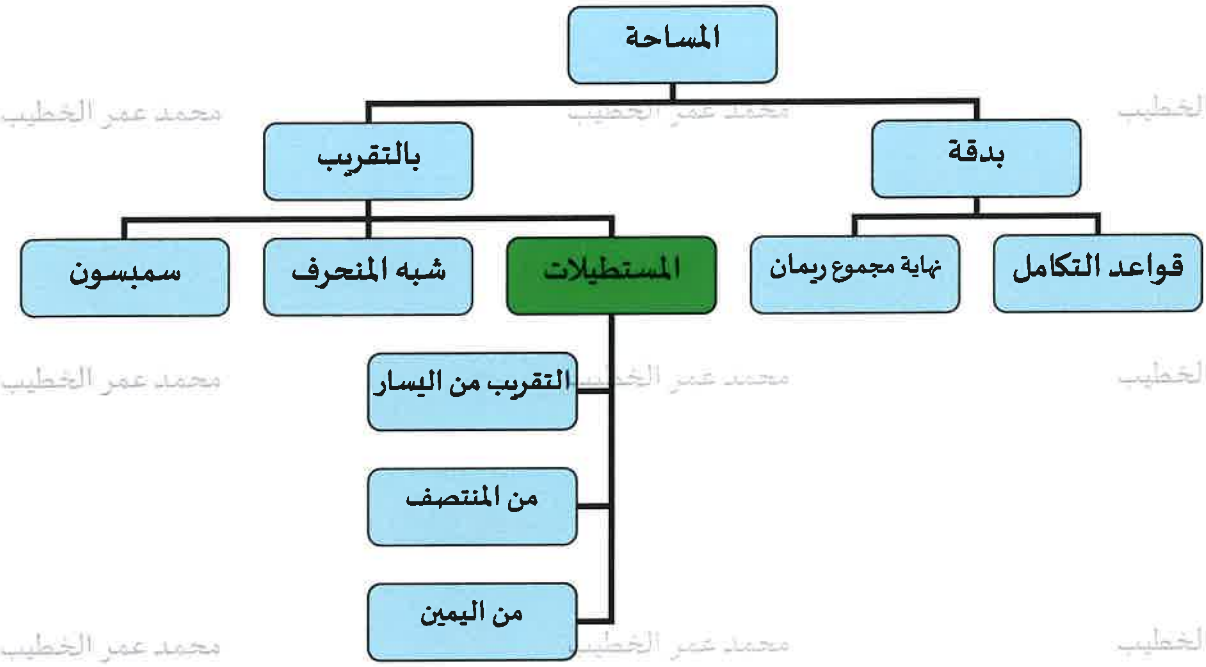
الفترة الجزئية العاشرة هي

$[x_9, x_{10}]$

الفترة الجزئية العاشرة هي

$[1.45, 1.50]$

تقريب المساحات



يسمى المقدار $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ مجموع ريمان للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ حيث x_i هي عناصر التجزئة و c_i هي نقاط القيم

لتقريب المساحة نستخدم قانون مجموع ريمان

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)$$

من اليمين
$c_i = x_i$

من المنتصف
$c_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = x_{i-\frac{1}{2}}$

من اليسار
$c_i = x_{i-1}$

طريقة التقريب باستخدام المستطيلات

هناك ثلاث طرق شائعة لتقريب المساحة تحت المنحنى باستخدام طريقة التقريب بالمستطيلات :

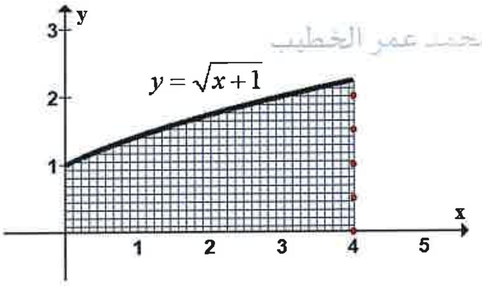
$$\boxed{c_i = x_{i-1}}$$

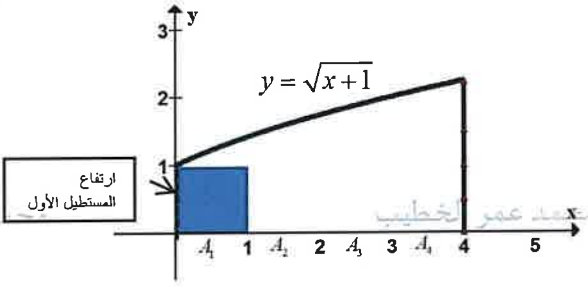
(1) التقريب اليساري L (قاعدة النقطة اليسرى)

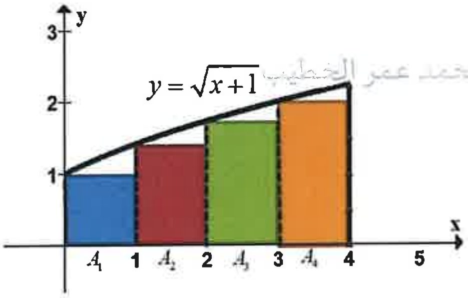
نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تمس أركانها اليسرى المنحنى

وتسمى هذه الطريقة طريقة تقريب المستطيلات من الجهة اليسرى

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=\sqrt{x+1}$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى







عدد الفترات الجزئية = عدد المستطيلات = 4

طول الفترة الجزئية = عرض المستطيل

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{4}=1$$

عناصر التجزئة $p:0\,,1\,,2\,,3\,,4$

نقاط القيم (من جهة اليسار) $c_i:\ 0,1,2,3$

$$A\approx A_1+A_2+A_3+A_4$$

$$=1\times \underset{\searrow c_1}{f(0)}+1\times \underset{\searrow c_2}{f(1)}+1\times \underset{\searrow c_3}{f(2)}+1\times \underset{\searrow c_4}{f(3)}$$

$$=1\cdot\sqrt{1}+1\cdot\sqrt{2}+1\cdot\sqrt{3}+1\cdot\sqrt{4}$$

$$=6\cdot 14$$

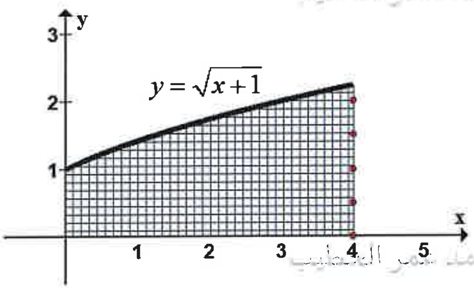
$$\boxed{c_i = x_i}$$

(2) التقريب اليميني R (قاعدة النقطة اليمنى)

نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تمس أركانها اليمنى المنحنى

وتسمى طريقة تقريب المستطيلات من الجهة اليمنى.

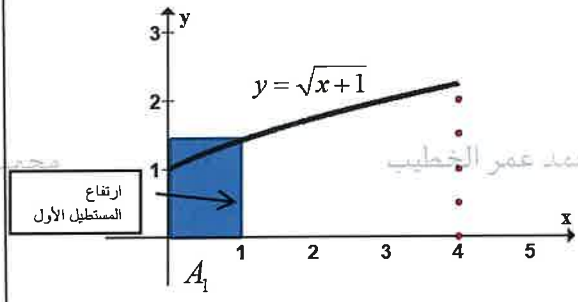
اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=\sqrt{x+1}$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى



عدد الفترات الجزئية = عدد المستطيلات = 4

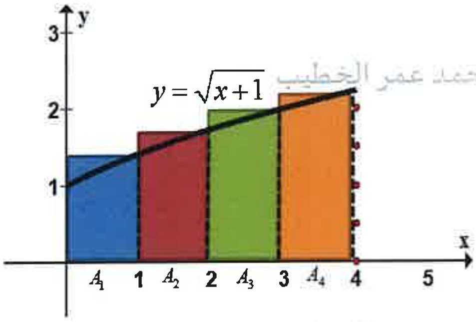
طول الفترة الجزئية = عرض المستطيل

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{4}=1$$



عناصر التجزئة $p:0,1,2,3,4$

نقاط القيم (من جهة اليمين) $c_i:\ 1,2,3,4$



$$A \approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$
$$= 1\times f(1) + 1\times f(2) + 1\times f(3) + 1\times f(4)$$

$\hookrightarrow c_1 \quad \hookrightarrow c_2 \quad \hookrightarrow c_3 \quad \hookrightarrow c_4$

$= 1\cdot\sqrt{2} + 1\cdot\sqrt{3} + 1\cdot\sqrt{4} + 1\cdot\sqrt{5}$

$= 7.38$

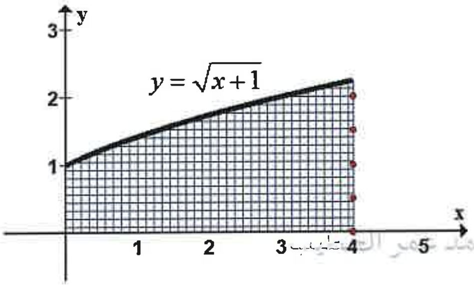
(3) التقريب المنتصفي M (قاعدة نقطة المنتصف)

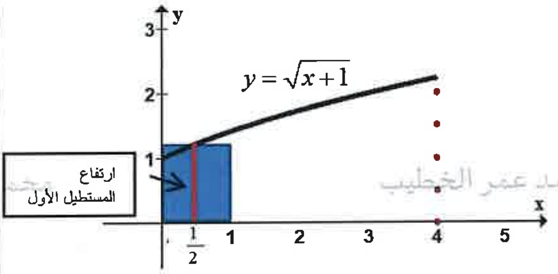
$$c_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = x_{i-\frac{1}{2}}$$

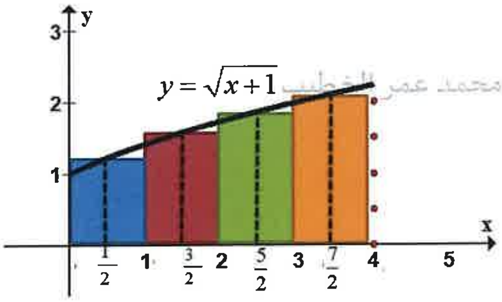
نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تقطع المنحنى في نقطة المنتصف

وتسمى هذه الطريقة طريقة تقريب المستطيلات باستخدام نقطة المنتصف

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=\sqrt{x+1}$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية المنتصف







عدد الفترات الجزئية = عدد المستطيلات = 4

طول الفترة الجزئية = عرض المستطيل

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1$$

عناصر التجزئة $p: 0, 1, 2, 3, 4$

نقاط القيم (من جهة اليمين) $c_i: \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$

$$A \approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$= 1\times f(\frac{1}{2}) + 1\times f(\frac{3}{2}) + 1\times f(\frac{5}{2}) + 1\times f(\frac{7}{2})$$

$\searrow c_1$ $\searrow c_2$ $\searrow c_3$ $\searrow c_4$

$$= 1.\sqrt{1.5} + 1.\sqrt{2.5} + 1.\sqrt{3.5} + 1.\sqrt{4.5}$$

$$= 6.8$$

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=2x-x^2$ ومحور السينات على الفترة $[0,2]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث

$n = 4$

$\Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$

(1) قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

ملاحظة: اولاً اكتب التجزئة

$P = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \overset{x}{2}\}$

$c_i = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$

من اليسار .

وعددها 4 .

$A_L = \frac{b-a}{n}\left[f(0) + f(1/2) + f(1) + f(3/2)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[0 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{4}\right] = 1.25.$

---

(2) قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

$c_i = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$

$A_R = \frac{b-a}{n}\left[f(1/2) + f(1) + f(3/2) + f(2)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4} + 1 + \frac{3}{4} + 0\right].$

$= 1.25$

---

(3) قواعد القيم هي نقطة المنتصف

$c_i = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}.$

$A_M = \frac{1}{2}\left[f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4}) + f(\frac{5}{4}) + f(\frac{7}{4})\right]$

$= \frac{1}{2}\left[0.4375 + 0.9375 + 0.9375 + 0.4375\right]$

$= 1.375$

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=\cos x$ ومحور السينات على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث

$n=4$

(1) قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

$$\Delta x=\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}}{4}=\frac{\pi}{4}$$

ملاحظة: اولاً اكتب التجزئة

$$P=\left\{-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4},0,\frac{\pi}{4},\overset{x}{\frac{\pi}{2}}\right\}$$

$$A_L=\Delta x\left[f\left(-\frac{\pi}{2}\right)+f\left(-\frac{\pi}{4}\right)+f(0)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[0+\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$=1.9$$

---

(2) قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

$n=4$

$\Delta x=\frac{\pi}{4}$

$$P=\left\{\overset{x}{-\frac{\pi}{2}},-\frac{\pi}{4},0,\frac{\pi}{4},\overset{\checkmark}{\frac{\pi}{2}}\right\}$$

$$A_R=\Delta x\left[f\left(-\frac{\pi}{4}\right)+f(0)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}+0\right]$$

$$=1.9$$

(1) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات على الفترة $[0,1]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

	X					✓
x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	2.0	2.2	1.6	1.4	1.6	2.0

$$AR = \Delta x\left[f(0.2)+f(0.4)+f(0.6)+f(0.8)+f(1)\right]$$

$$= 0.2\left[2.2+1.6+1.4+1.6+2\right]$$

$$= 1.76$$

---

(2) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات على الفترة $[0,0.5]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

	✓					X
x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6	2.4

$$AL = \Delta x\left[f(0)+f(0.1)+f(0.2)+f(0.3)+f(0.4)\right]$$

$$= 0.1\left[2+2.4+2.6+2.7+2.6\right]$$

$$= 1.23 . .$$

---

(3) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور x على الفترة $[1,2.6]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

	X								✓
x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	0.0	0.4	0.6	0.8	1.2	1.4	1.2	1.4	1.0

$$AR = \Delta x\left[f(1.2)+f(1.4)+f(1.6)+f(1.8)+f(2)\right.$$
$$\left.+f(2.2)+f(2.4)+f(2.6)\right]$$

$$= 0.2\left[0.4+0.6+0.8+1.2+1.4+1.2+1.4+1.0\right]$$

$$= 1.6$$

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=2x$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$

(1) باستخدام 16 مستطيل حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

$$\boxed{c_i = x_i}$$

ملاحظة: عندما يكون عدد المستطيلات
قليل نستخدم طريقة التجزئة
وغير ذلك نستخدم قانون مجموع ريمان

$$\Delta x = \frac{4-0}{16} = \frac{1}{4}$$

من اليمين

$$c_i = x_i = a + \Delta x\, i$$
$$= 0 + \frac{1}{4} i$$
$$= \frac{1}{4} i$$

$$f(c_i) = 2c_i$$
$$= 2\left(\frac{1}{4} i\right)$$
$$= \frac{1}{2} i$$

$$A_R = \sum_{i=1}^{16} f(c_i)\,\Delta x$$
$$= \sum_{i=1}^{16} \frac{1}{2} i \ \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{16} i$$
$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{16(17)}{2} = 17.$$

---

(2) باستخدام 24 مستطيل حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

$$\boxed{c_i = x_{i-1}}$$

$$\Delta x = \frac{4-0}{24} = \frac{1}{6}$$

$$c_i = x_{i-1}$$
$$= 0 + \frac{1}{6}(i-1)$$
$$= \frac{1}{6}(i-1)$$

$$f(c_i) = 2c_i$$
$$= 2\left(\frac{1}{6}(i-1)\right)$$
$$= \frac{1}{3}(i-1)$$

$$A_L = \sum_{i=1}^{24} f(c_i)\,\Delta x$$
$$= \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{3}(i-1)\cdot\frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{18}\sum_{i=1}^{24} i-1$$
$$= \frac{1}{18}\left[\frac{24(25)}{2} - (1)(24)\right] = 15.33.$$

---

(3) باستخدام 8 مستطيلات حيث قواعد القيم هي نقطة المنتصف

$$\boxed{c_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = x_{i-\frac{1}{2}}}$$

$$\Delta x = \frac{4-0}{8} = \frac{1}{2}$$

$$c_i = x_{i-\frac{1}{2}}$$
$$= 0 + \frac{1}{2}\left(i-\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(i-\frac{1}{2}\right)$$

$$f(c_i) = 2c_i$$
$$= 2\left(\frac{1}{2}\left(i-\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$= i-\frac{1}{2}$$

$$A_M = \sum_{i=1}^{8} f(c_i)\,\Delta x$$
$$= \sum_{i=1}^{8}\left(i-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} i-\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{8(9)}{2} - \frac{1}{2}(8)\right] = 16$$

تعريف المساحة

المساحة (بدقة) هي نهاية مجموع ريمان

اذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $[a,b]$ حيث $f(x)\geq 0$ فان المساحة A تحتى منحنى الدالة وفوق محور السينات تعطى بالصيغة

$$A=\lim_{n\to\infty}A_n$$

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$$

ملاحظة : عندما تكون n كبيرة فان $c_i = x_i$

واذا كانت $f(x)\leq 0$ فان المساحة A فوق منحنى الدالة وتحت محور السينات تعطى بالصيغة

$$A=\lim_{n\to\infty}A_n$$

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}-f(c_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}-f(x_i)\Delta x$$

اوجد المساحة تحت المستقيم $f(x)=2x$ وفوق محور السينات على الفترة $[1,4]$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان)

$$\Delta x=\frac{3}{n}$$

$$c_i=x_i$$

$$=a+\frac{b-a}{n}i$$

$$=1+\frac{3}{n}i$$

$$f(c_i)=2c_i$$

$$=2\left(1+\frac{3}{n}i\right)$$

$$=2+\frac{6}{n}i$$

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(2+\frac{6}{n}i\right)\frac{3}{n}$$

$$=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}2+\frac{6}{n}i$$

$$=\frac{3}{n}\left[2n+\frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$=6+\frac{9(n+1)}{n}$$

$$A=\lim_{n\to\infty}A_n=\lim\ 6+\frac{9(n+1)}{n}$$

$$=6+9$$

$$=15$$

(1) اوجد المساحة تحت المنحنى $f(x)=3x^2$ وفوق محور السينات على الفترة $[0,4]$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان)

$$\Delta x = \frac{4}{n}$$

$$c_i = x_i$$

$$= a + \Delta x\, i$$

$$= 0 + \frac{4}{n} i$$

$$= \frac{4}{n} i$$

$$f(c_i) = 3 c_i^2$$

$$= 3\left(\frac{4}{n} i\right)^2$$

$$= 3 \cdot \frac{16}{n^2} i^2$$

$$= \frac{48}{n^2} i^2$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{48}{n^2} i^2 \cdot \frac{4}{n}$$

$$= \frac{192}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{192}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$= \frac{32\,(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{32\,(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

$$= 32 \cdot 2$$

$$= 64$$

(1) اذا كان $f(x)=2x-2x^2$ دالة معرفة على الفترة $[0,1]$ حيث $A_n=\dfrac{(n+1)(n-1)}{3n^2}$

فأوجد المساحة المحصورة بين الدالة ومحور x

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n-1)}{3n^2}$$

$$=\frac{1}{3}.$$

---

(2) اذا كان $f(x)$ دالة متصلة و $f(x)\geq 0$ على الفترة $[0,1]$ حيث $A_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\dfrac{i}{n})^2$

فاوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)$ ومحور x على الفترة $[0,1]$

$$An=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}$$

$$=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$$

$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$An=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$

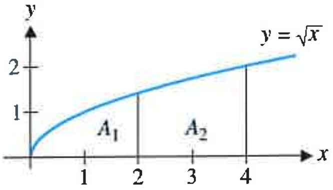
$$A=\lim_{n\to\infty}An$$

$$=\frac{2}{6}$$

$$=1/3.$$

---

(3) اعتمد على الشكل المجاور في تحديد قيمة $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}\dfrac{2}{n}$ بدلالة A_1 او A_2



$$\lim_{n\to\infty}\sum\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{2}{n}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2+\frac{2}{n}i}\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\lim\sum_{i=1}^{n}f(ci)\cdot\Delta x$$

$$=\lim\sum\sqrt{ci}\ \Delta x$$

$$=A_2$$

بـ لمقارنة

$$\Delta x=\frac{2}{n}=\frac{b-a}{n}.$$

$$\Rightarrow b-a=2$$

$$ci=2+\frac{2}{n}i$$

$$=a+\Delta x\, i$$

$$a=2$$

$$\Rightarrow b=4.$$

التكامل المحدود

ملاحظة: تم تقديم جزء من الدرس الخامس في هذا الدرس

اذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة $[a,b]$ فان التكامل المحدود للدالة f من a الى b هو

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n$$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{b-a}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

بشرط وجود النهاية، ونقول ان الدالة قابلة للتكامل

ملاحظة : اذا كانت الدالة متصلة على الفترة $[a,b]$ فان الدالة قابلة للتكامل على نفس الفترة

عبر عن التكامل في كل مما يلي بصورة نهاية مجموع ريمان

$$\int_a^b \to \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}$$

ملاحظة: $x \to x_i = c_i$

$dx \to \Delta x$

(1) $\int_0^2 (3x^2-1)\,dx$

$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

$c_i = 0 + \frac{2}{n}i$

$= \frac{2}{n}i$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(3c_i^2-1)\,\Delta x$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[3\left(\frac{2}{n}i\right)^2-1\right]\cdot\frac{2}{n}$

---

(2) $\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx$

$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$

$c_i = x_i$

$= 0 + \frac{1}{n}i$

$= \frac{1}{n}i$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin(\pi c_i)\,\Delta x$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\pi\frac{1}{n}i\right)\cdot\frac{1}{n}$

(1) اذا كان $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[0,3]$ حيث $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \frac{5}{2}+\frac{3-n}{2n}$

فأوجد $\int_0^3 f(x)\,dx$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2} + \frac{3-n}{2n}$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{-1}{2} = 2 .$$

---

(2) إذا كان $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{(n+1)(2n+1)}{4n^2}$ على الفترة $[0,2]$ فاوجد $\int_0^2 f(x)\,dx$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum f(x_i)\,\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{4n^2}$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} .$$

---

(3) إذا كان $R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2(1+\frac{i}{n})$ على الفترة $[1,2]$ فاوجد $\int_1^2 f(x)\,dx$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 2\left(1+\frac{i}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left[(1)(n) + \frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \lim \frac{2}{n}\left[n + \frac{n+1}{2}\right]$$

$$= \lim 2 + \frac{n+1}{n}$$

$$= 2+1 = 3 .$$

عبر عن النهاية في كل مما يلي بصورة تكامل محدود

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\sin^2 c_i + c_i)\Delta x$ ، والتجزئة على الفترة $[0,\pi]$

$$= \int_1^3 (\sin^2 x + x)\, dx$$

$\int\limits_a^b \to \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}$

ملاحظة: $x \to x_i = c_i$

$dx \to \Delta x$

---

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^2$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c_i^2\,\Delta x$$

$$= \int_0^1 x^2\, dx$$

$\Delta x = \frac{1}{n}$.

$a = 0$

$b - a = 1$

$\Rightarrow b = 1$

$c_i = 0 + \frac{1}{n} i$

$= \frac{1}{n} i$

1. نجرب $a=0$ ونجد b من خلال

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \to$

$b - a = 1 \to b = 1$

2. اوجد $c_i = a + \Delta x\, i$

$c_i = 0 + \frac{1}{n} i = \frac{i}{n}$

3. استبدل $\frac{1}{n}$ بـ Δx

و استبدل $\frac{1}{n} i$ بـ c_i

---

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \lim \sum f(c_i)\cdot\Delta x$$

$$= \int_0^1 f(x)\, dx$$

$\Delta x = \frac{1}{n}$.

$a = 0 \Rightarrow b = 1$

$c_i = \frac{1}{n} i$.

---

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}+\frac{n+2}{n^2}+\frac{n+3}{n^2}+\ldots+\frac{2n}{n^2}$

$$= \lim \sum \frac{n+i}{n2} \; . = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(1+c_i)\cdot\frac{1}{n} \; .$$

$$= \int_0^1 (1+x)\, dx \, .$$

$\Delta x = \frac{1}{n}$

$= \frac{b-a}{n}$

$a = 0 \Rightarrow b = 1$

$f(c_i) = a + \Delta x\, i$

$= 0 + \frac{1}{n} i$

$c_i = \frac{1}{n} i$

عبر عن النهاية في بصورة تكامل محدود ثم اوجد قيمة النهاية

(1) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{2i}{n}}\frac{2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{c_i}\cdot\Delta x$$

$$= \int_0^2 e^x\,dx$$

$$= e^x\Big]_0^2 = e^2-1.$$

$\Delta x = \frac{2}{n}$

$= \frac{b-a}{n}$

$b-a=2$

$a=0 \Rightarrow b=2.$

$c_i = a+\frac{b-a}{n}i$

$= 0+\frac{2}{n}i$

$= \frac{2}{n}i$

* راجع ص 211 من الملزمة .

---

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi}{n}i$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi}{n}i\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin(\pi\cdot\frac{1}{n}i)\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin(\pi c_i)\cdot\Delta x$$

$$= \int_0^1 \sin\pi x\,dx$$

$$= -\frac{\cos\pi x}{\pi}\Big]_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

$\Delta x = \frac{1}{n}.$

$= \frac{b-a}{n}$

$b-a=1$

$a=0 \Rightarrow b=1$

$c_i = a+\Delta x\, i$

$= 0+\frac{1}{n}i$

$= \frac{1}{n}i$

اوجد قيمة التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان (تعريف التكامل المحدود)

(1) $\int_0^1 2x\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} R_n$

$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$

$x_i = a + \frac{b-a}{n} i$

$= 0 + \frac{1}{n} i$

$= \frac{1}{n} i$

$f(x_i) = 2x_i$

$= 2\left(\frac{1}{n} i\right)$

$= \frac{2}{n} i$

$R_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum \frac{2}{n} i \cdot \frac{}{n}$

$= \frac{2}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} i$

$= \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{n+1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 1 \Rightarrow \int_0^1 2x\,dx = 1$

---

(2) $\int_0^3 (4x+1)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

$\Delta = \frac{3-0}{n}$

$= \frac{3}{n}$

$x_i = a + \Delta x\, i$

$= 0 + \frac{3}{n} i$

$= \frac{3}{n} i$

$f(x_i) = 4x_i + 1$

$= 4\left(\frac{3}{n} i\right) + 1$

$= \frac{12}{n} i + 1$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{12}{n} i + 1\right) \cdot \frac{3}{n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{12}{n} i + 1\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} \left[\frac{12}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (1)(n)\right]$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{18(n+1)}{n} + 3$

$= 18 + 3 = 21$

$\Rightarrow \int_0^3 (4x+1)\,dx = 21$

اوجد قيمة التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان (تعريف التكامل المحدود)

(1) $\int_0^2 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

$x_i = a + \frac{b-a}{n} i$

$= 0 + \frac{2}{n} i$

$= \frac{2}{n} i$

$f(x_i) = x_i^2$

$= \left(\frac{2}{n} i\right)^2$

$= \frac{4}{n^2} i^2$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{n^2} i^2 \cdot \frac{2}{n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$

$= \lim \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n}$

$= \lim \cdot \frac{8(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.$

$\Rightarrow \int_0^2 x^2\,dx = 8/3.$

---

(2) $\int_{-2}^{2} (x^2-1)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n$

$\Delta x = \frac{4}{n}$

$x_i = -2 + \frac{4}{n} i$

$f(x_i) = x_i^2 - 1$

$= \left(-2 + \frac{4}{n} i\right)^2 - 1$

$= 4 + \frac{\text{[illegible]}}{n} i + \frac{16}{n^2} i^2 - 1$

$= 3 - \frac{16i}{n} + \frac{16}{n^2} i^2$

$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

$= \sum_{i=1}^{n} \left(3 - \frac{16i}{n} + \frac{16}{n^2} i^2\right) \cdot \frac{4}{n}$

$= \sum_{i=1} \frac{12}{n} - \frac{64i}{n^2} + \frac{64}{n^3} i^2$

$= \frac{12}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{64}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{64}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$

$= \frac{12}{n} \cdot n - \frac{64}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{n} + \frac{64}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= 12 - 64\frac{(n+1)}{n} + \frac{32(n+1)(2n+1)}{3n^2}$

$\lim_{n\to\infty} R_n = 12 - 64 + \frac{64}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \int_{-2}^{2} x^2 - 1\,dx = 4/3.$

خواص التكاملات المحدودة

(1) **خاصية التوزيع** على الجمع والطرح

$$\int_a^b (m\,f(x) + k\,g(x))dx = m\int_a^b f(x)\,dx + k\int_a^b g(x)\,dx$$

(2) **خاصية التكامل على نقطة**

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(3) **خاصية الثابت**

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

(4) **خاصية الترتيب**

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

(5) **خاصية الاضافة** (تكامل الدوال المتفرعة)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(6) **خاصية السيادة** اذا كانت $f(x) \ge g(x)$ لكل x على الفترة $[a,b]$

فان $$\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$$

(7) **خاصية الاحاطة** اذا كانت

القيمة العظمى المطلقة للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ هي $M = Max(f)$

والقيمة الصغرى المطلقة للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ هي $m = Min(f)$

فان $$(b-a)m \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)M$$

ايجادالتكامل المحدود

* علماً التأكد من الحل باستخدام الآلة الحاسبة.

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_{1}^{3}(4x+1)\,dx = 2x^2+x\Big]_1^3 = [2(3)^2+3] - [2(1)^2+1]$

$= 18$

---

(2) $\int_{2}^{5}3x(x+2)\,dx = \int(3x^2+6x)\,dx = x^3+3x^2\Big]_2^5$

$= [5^3+3(5)^2] - [2^3+3(2)^2]$

$= 180$

---

(3) $\int_{0}^{\ln 2} e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2}\Big]_0^{\ln x} = \frac{1}{2}[e^{2\ln 2} - e^0]$

$= 3/2$.

---

(4) $\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}x\Big]_0^1 = \tan^{-1}1 - \tan^{-1}0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$.

---

(5) $\int_{0}^{1}\frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1|\Big]_0^1$

$= \frac{1}{2}[\ln 2 - \ln 1] = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$

---

(6) $\int_{0}^{1}(x^5+x^{\frac{1}{5}})\,dx = \frac{x^6}{6} + \frac{5}{6}x^{6/5}\Big]_0^1$

$= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x\,dx = \tan x \Big]_{\pi/6}^{\pi/3} = \tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$

$= 2\sqrt{3}/3.$

---

(2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \int_{0}^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x|\Big]_{0}^{\pi/4}$

$= -\ln\cos\frac{\pi}{4} - (-\ln\cos 0) = -\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \ln\sqrt{2}$

---

(3) $\int_{0}^{1} xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} 2x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{x^2}\Big]_{0}^{1} = \frac{1}{2}(e - e^{0}) = \frac{1}{2}(e-1)$

---

(4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x - \cos 3x\,dx = -\frac{\cos 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3}\Big]_{0}^{\pi/2}$

$= -\frac{\cos\pi}{2} - \frac{\sin 3\pi/2}{3} - \left[-\frac{\cos 0}{2} - \frac{\sin 0}{3}\right] = 4/3.$

---

(5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big]_{0}^{\pi/2}$

$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin\pi}{2}\right) - \left(0 - \frac{\sin 0}{2}\right)\right]$

$= \frac{\pi}{4}$

تكامل الدوال المتفرعة

(1) اذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x^2-2 & x\geq 0\\ 2x-2 & x<0\end{cases}$ فأوجد $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$

$2x-2$ | $3x^2-2$

0

$$\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{4} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (2x-2)\,dx + \int_{0}^{4} (3x^2-2)\,dx$$

$$= x^2-2x\Big]_{-2}^{0} + x^3-2x\Big]_{0}^{4} = -8+48 \quad =40$$

---

(2) اذا كانت $f(x)=3x|x-2|$ فاوجد $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$

$|x-2|$ $2-x$ | $x-2$

2

$3x(2-x)$ | $3x(x-2)$

2

$6x-3x^2$ | $3x^2-6x$

2

$$\int_{0}^{4} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{4} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{2} 6x-3x^2\,dx + \int_{2}^{4} 3x^2-6x\,dx$$

$$= 4+20 \quad = 24$$

---

(3) اذا كانت $f(x)=2[x+3]$ فاوجد $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$

$$[x] = \begin{cases} -1 & -1\leq x<0\\ 0 & 0\leq x<1\\ 1 & 1\leq x<2\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{2} 2[x+3]\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} 4\,dx + \int_{0}^{1} 6\,dx + \int_{1}^{2} 8\,dx$$

$$= 4+6+8$$

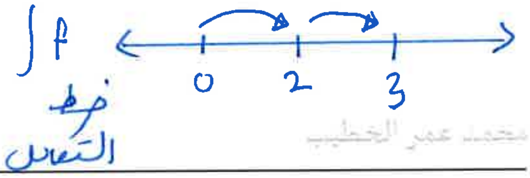
$$= 18$$

$$2[x+3] = \begin{cases} 4 & -1\leq x<0\\ 6 & 0\leq x<1\\ 8 & 1\leq x<2\end{cases}$$

(1) اكتب $\int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx$ بصورة تكامل منفرد

$\int_{0}^{2} f(x)\,dx \cdot \int_{2}^{3} f(x)\,dx$

$= \int_{0}^{3} f(x)\,dx \cdot$

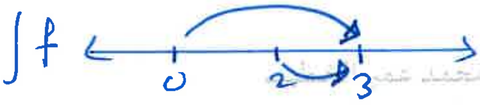


---

(2) اكتب $\int_{0}^{3} f(x)\,dx - \int_{2}^{3} f(x)\,dx$ بصورة تكامل منفرد

$\int_{0}^{3} f(x)\,dx - \int_{2}^{3} f(x)\,dx$

$= \int_{2}^{3} f(x)\,dx \cdot$



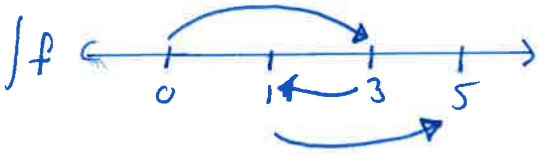
---

(3) اكتب $\int_{0}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{5} f(x)\,dx$ بصورة تكامل منفرد

$= \int_{0}^{3} f(x)\,dx - \int^{3} f(x)\,dx + \int_{1}^{5} f(x)\,dx$

$= \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{5} f(x)\,dx$

$= \int_{0}^{5} f(x)\,dx \cdot$



---

(4) اذا كان $\int_{1}^{3} f(x)\,dx = 3$ و $\int_{1}^{3} g(x)\,dx = -2$ فاوجد

$(a)\ \int_{1}^{3} [f(x) + g(x)]\,dx =$ $3 + (-2) = 1$

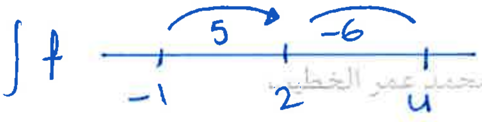
$(b)\ \int_{1}^{3} [f(x) - g(x)]\,dx =$ $3 - (-2) = 5$

$(c)\ \int_{1}^{3} [2f(x) - g(x)]\,dx =$ $2(3) - (-2) = 8$

$(d)\ \int_{1}^{3} [4g(x) - 3f(x)]\,dx =$ $4(-2) - 3(3) = -17 \cdot$

(1 اذا كان $\int_{2}^{4} f(x)\,dx=-6$ ، $\int_{-1}^{2} 3f(x)\,dx=15$ فاوجد $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx=\int_{-1}^{2} f(x)\,dx+\int_{2}^{4} f(x)\,dx$$

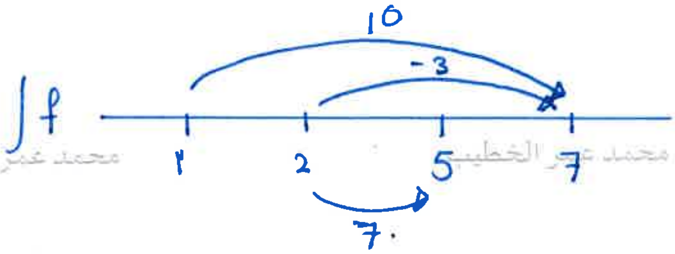


$$=5+(-6)$$

$$=-1$$

(2 اذا كانت $\int_{2}^{5} f(x)\,dx=7$ ، $\int_{2}^{7} f(x)\,dx=-3$ ، $\int_{1}^{7} f(x)\,dx=10$ فأوجد

(a) $\int_{2}^{2} f(x)\,dx = 0$



(b) $\int_{5}^{7} f(x)\,dx = \int_{2}^{7} f(x)dx - \int_{2}^{5} f(x)\,dx$

$= -3-7 = -10$

* الحل من خط التكامل أسهل .

(c) $\int_{1}^{2} f(x)\,dx = \int_{1}^{7} f(x)\,dx - \int_{2}^{7} f(x)\,dx$

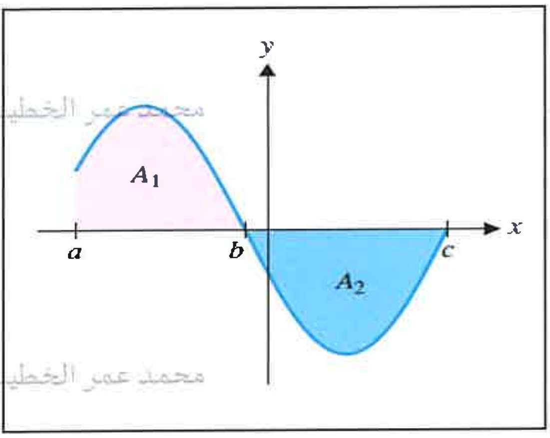
$= 10-(-3) = 13 .$

(3 اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة حيث $\int_{2}^{2x} f(t)\,dt=4x^2+bx-1$ فأوجد قيمة b

عوض قيمة لـ x بالتكامل مثل $\boxed{x=1}$

$$\int_{2}^{2} f(t)\,dt = 4(1)^2+b(1)-1 \Rightarrow 0 = 4+b-1 \Rightarrow \boxed{b=-3}$$

العلاقة بين المساحة والتكامل



(1) اذا كانت الدالة فوق محور السينات $f(x) \geq 0$

فان قيمة المساحة المحصور بالدالة ومحور السينات

تساوي قيمة التكامل المحدود على الفترة

$$A_1 = \int_a^b f(x)\,dx$$

(2) اذا كانت الدالة تحت محور السينات $f(x) \leq 0$

فان قيمة المساحة المحصور بالدالة ومحور السينات

تساوي سالب قيمة التكامل المحدود على الفترة

$$A_2 = -\int_b^c f(x)\,dx$$

A_2 , A_1 هذه اعداد تمثل المساحة

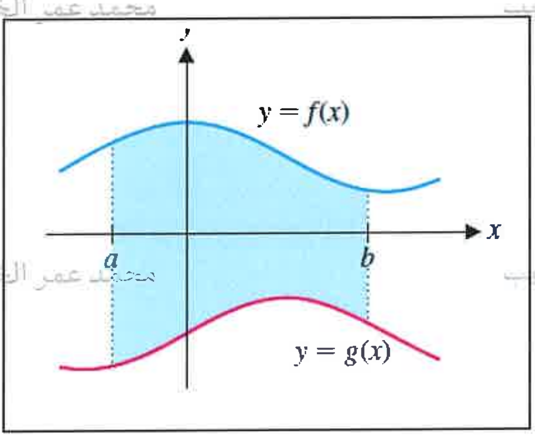
فتكون دائماً موجبة

(3) المساحة المحصورة بين الدالة ومحور x هي $A = A_1 + A_2$

بشكل عام

اذا كانت كل من $f(x)$ و $g(x)$ دوال متصلة على الفترة $[a,b]$ حيث $f(x) \geq g(x)$ فان

المساحة المحصورة بين المنحنين تعطى بالتكامل

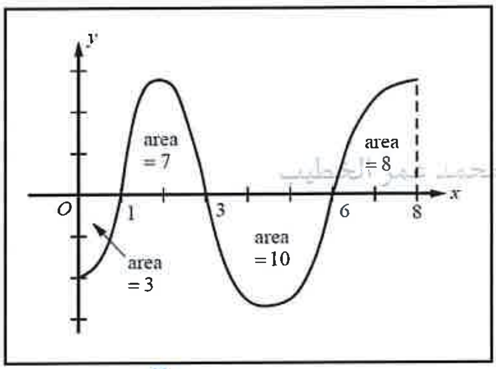


$$A = \int_a^b \left[\text{الدالة الأعلى} - \text{الدالة الأدنى} \right] dx$$

$$\int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$

ملاحظة : يعتبر محور x (السينات) دالة معادلتها $y = 0$

(1) استخدم التمثيل البياني المجاور للدالة $f(x)$ والمساحات المحددة في ايجاد قيمة التكاملات الثالية



(a) $\int_0^1 f(x)\,dx$ $= -3$

(b) $\int_0^3 f(x)\,dx$ $= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx$

$= -3 + 7 = 4$

(c) $\int_0^8 f(x)\,dx$ $= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x) + \int_3^6 f(x)\,dx + \int_6^8 f(x) = -3+7+-10+8$

$= 2$

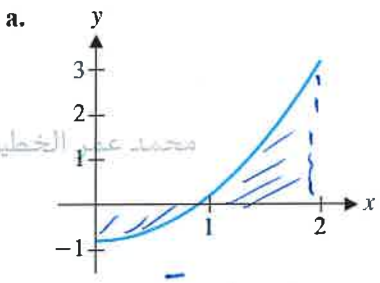
(d) المساحة المحصورة بالدالة ومحور x

$A = 3+7+10+8 = 28.$

---

(2) استخدم التمثيل البياني المجاور لتحديد اذا كان قيمة التكامل $\int_0^2 f(x)\,dx$ موجبة ام سالبة

a.

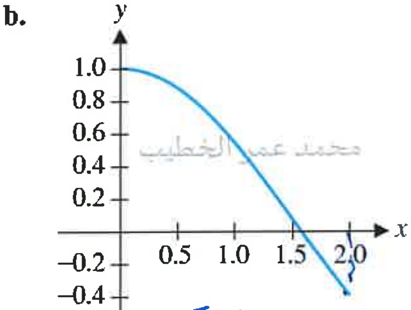


موجبة .

المساحة فوق x

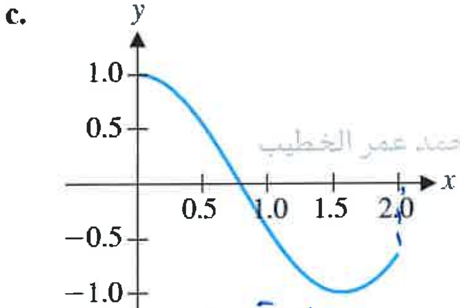
اكبر من المساحة تحت x

b.



موجبة

c.

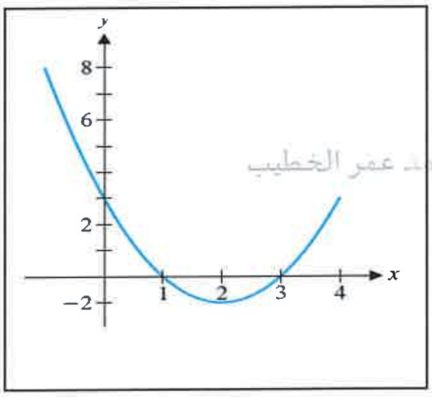


سالبة .

الترتيب تصاعدي $\overrightarrow{b \,, a \text{ و } c}$

---

(3) استخدم التمثيل البياني لترتيب القيم التالية تصاعدياً



$\int_0^1 f(x)\,dx, \quad \int_0^2 f(x)\,dx, \quad \int_0^3 f(x)\,dx$

$\int_0^3 f(x)\,dx < \int_0^2 f(x)\,dx < \int_0^1 f(x)\,dx.$

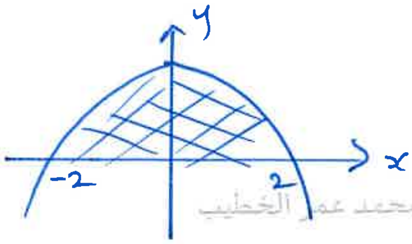
(1) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى $f(x) = 4 - x^2$

$$A = \int_{-2}^{2} 4 - x^2 - 0 \, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 4 - x^2 \, dx$$

$y_1 = 4 - x^2$

$y_2 = 0$



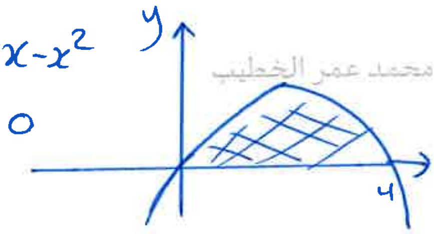
(2) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوف محور x وتحت المنحنى $f(x) = 4x - x^2$

$$A = \int_{0}^{4} 4x - x^2 - 0 \, dx$$

$$= \int_{0}^{4} 4x - x^2 \, dx.$$

$y_1 = 4x - x^2$

$y_2 = 0$



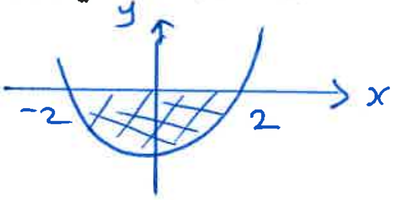
(3) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة تحت محور x وفوق المنحنى $f(x) = x^2 - 4$

$$A = \int_{-2}^{2} 0 - (x^2 - 4) \, dx$$

$$= -\int_{-2}^{2} x^2 - 4 \, dx.$$

$y_1 = 0$

$y_2 = x^2 - 4$

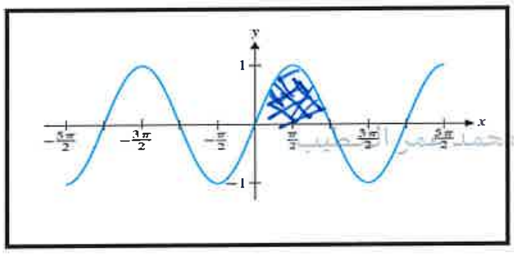


(4) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = \sin x$ ومحور x على الفترة $[0, \pi]$

$$A = \int_{0}^{\pi} \sin x \, dx$$

$y_1 = \sin x$

$y_2 = 0$

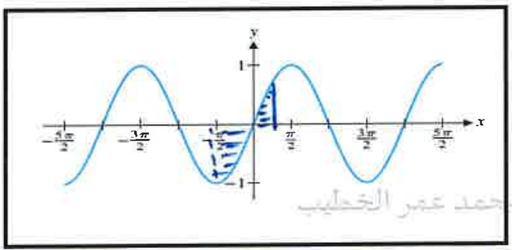


(5) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = \sin x$ محور x على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$

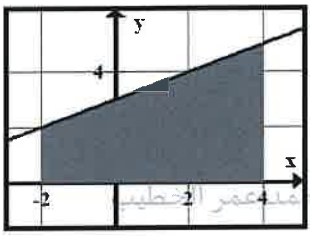
مهم تجزئة المساحة.

$$A = \int_{-\pi/2}^{0} 0 - \sin x \, dx + \int_{0}^{\pi/4} \sin x \, dx.$$

$$= -\int_{-\pi/2}^{0} \sin x \, dx + \int_{0}^{\pi/4} \sin x \, dx$$



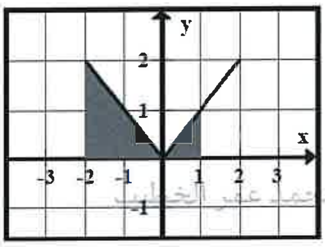
(1) استخدم قوانين (المساحات) في ايجاد مساحة شبه منحرف او مثلث ومستطيل.



(a) $\int_{-2}^{4}(\frac{1}{2}x+3)\,dx = \frac{1}{2}(2+5)\cdot(6) = 21$

او $= 6\times 2 + \frac{1}{2}(6)(3) = 21$

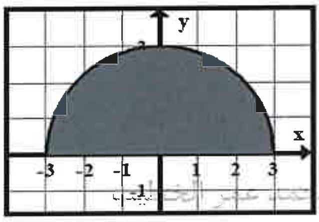
مساحة مثلث



(b) $\int_{-2}^{1}|x|\,dx = \frac{1}{2}(2)(2) + \frac{1}{2}(1)(1)$

$= 5/2$.

مساحة نصف دائرة التي نصف قطرها $r = 3$



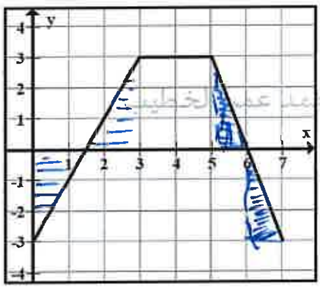
(c) $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\pi(3)^2 = \frac{9\pi}{2}$

---

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f ، في ايجاد

حاول حل السؤال بأكثر من طريقة.



تم حذف المثلثات المتشابها.

(a) $\int_{0}^{7} f(x)\,dx = 2(3) = 6$

(b) $\int_{0}^{7} |f(x)|\,dx = \frac{1}{2}(1.5)(3) + \frac{1}{2}(4.5+2)\times 3 + \frac{1}{2}(1)(3) = 13.5$

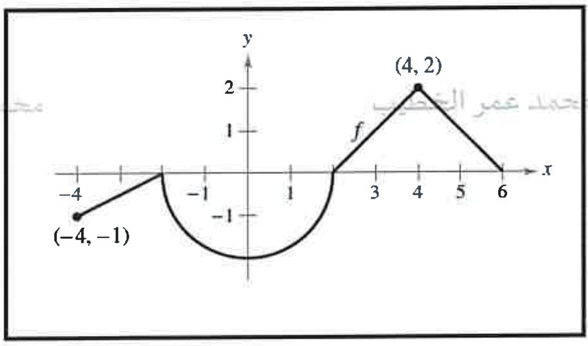
---

(3) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f ، في ايجاد

(a) $\int_{-4}^{6} f(x)\,dx = -$

$= -\frac{1}{2}(2)(1) - \frac{1}{2}\pi(2)^2 + \frac{1}{2}(4)(2)$

$= 3 - 2\pi$.



(b) $\int_{-4}^{0} f(x)\,dx = -\frac{1}{2}(2)(1) - \frac{1}{4}\pi(2)^2$

$= -1 - \pi$

نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

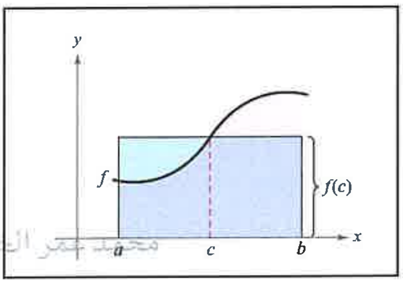
اذا كانت الدالة f قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$ فان القيمة المتوسطة للدالة f تساوي

$$f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

اذا كانت الدالة متصلة على الفترة $[a,b]$ فانة يوجد عدد مثل c ينتمي الى الفترة (a,b) بحيث

$$f(c) = f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$



اي ان المساحة تحت المنحنى $f(x)$ وفوق محور السينات على الفترة $[a,b]$ تساوي مساحة مستطيل احد ابعادة $b-a$ والبعد الثاني هو $f(c)$ حيث c تنتمي الى الفترة (a,b)

ويمكن استخدام هذه المتباينة لتقدير التكامل $(b-a)M \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)m$

حيث $m = Min(f)$ ، $M = Max(f)$

اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 2x - x^2$ على الفترة $[0,3]$

$$f_{ave} = \frac{1}{3-0}\int_0^3 2x - x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3$$

$$= 0$$

(1) اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=2x+1$ على الفترة $[0,4]$ ثم اوجد قيمة c التي تحقق النظرية

$$f_{ave} = \frac{1}{4}\int_0^4 (2x+1)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[x^2+x\right]_0^4$$

$$= \frac{1}{4}[20]$$

$$= 5$$

$$f(c) = f_{ave}$$

$$2c+1 = 5$$

$$2c = 4$$

$$c = 2 \quad \in (0,4) \checkmark$$

---

(2) اذا كانت $f(x)=3x^2$ فأوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[0,2]$

$$f_{ave} = \frac{1}{2}\int_0^2 3x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^3\right]_0^2$$

$$= 4$$

$$f(c) = f_{ave}$$

$$3c^2 = 4$$

$$c^2 = \frac{4}{3}$$

$$c = +\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \in (0,2) \checkmark$$

$$c = -\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{-2}{\sqrt{3}} \quad \notin (0,2) \quad \times$$

---

(3) اذا كانت $f(x)=\sin x$ فأوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[0,2\pi]$

$$f_{ave} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\cos x\right]_0^{2\pi}$$

$$= 0$$

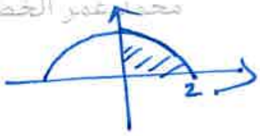
$$f(c) = f_{ave}$$

$$\sin c = 0$$

$$c = \underset{\text{مرفوض}}{0}, \quad \pi, \quad \underset{\text{مرفوض}}{2\pi}$$

$$c = \pi \quad \text{فقط} \quad \in (0, 2\pi)$$

(1) اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ على الفترة $[0,2]$



ثم اوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[0,2]$

$$f_{ave} = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

= مساحة ربع دائرة نصف قطرها 2

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\pi(2)\right.$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$f(c) = f_{ave}$$

$$\sqrt{4-c^2} = \frac{\pi}{2}.$$

$$4-c^2 = \frac{\pi^2}{4}.$$

$$c^2 = 4-\frac{\pi^2}{4} .$$

$$c = \sqrt{4-\frac{\pi^2}{4}} \in (0,2) \checkmark$$

$$c = -\sqrt{4-\frac{\pi^2}{4}} \in (0,2) \times .$$

---

(2) اذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} x+4 & -4\le x\le -1 \\ -x+2 & -1< x\le 2 \end{cases}$$

فاوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[-4,2]$

f $\quad x+4 \quad \underset{-1}{|} \quad -x+2$

$$f_{ave} = \frac{1}{2--4}\int_{-4}^{2} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[\int_{-4}^{-1} x+4\,dx + \int_{-1}^{2} -x+2\,dx\right.$$

$$= \frac{1}{6}\left[\left.\frac{x^2}{2}+4x\right)_{-4}^{-1} + \left.\frac{-x^2}{2}+2x\right)_{-1}^{2}\right]$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$f(c) = f_{ave}$$

يوجد حالتين

(i) $x<-1$

$$f(c) = f_{ave}$$

$$c+4 = 3/2$$

$$c = -5/2 \in (-4,-1) \checkmark$$

المجال الفرعي .

(ii) $x>-1$

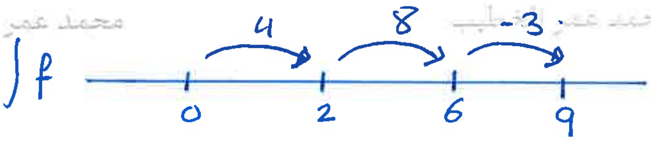
$$f(c) = f_{ave}$$

$$-c+2 = 3/2$$

$$c = \frac{1}{2} \in (-1,2) \checkmark$$

(1) اذا كان $\int_9^6 f(x)\,dx=3$ ، $\int_2^6 \underset{/2}{2f(x)}\,dx=\underset{/2}{16}$ ، $\int_0^2 f(x)\,dx=4$

فاوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,9]$



$$f_{ave} = \frac{1}{9-0}\int_0^9 f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{9}\left[4+8+{}^{-}3\right] = 1$$

---

(2) اذا كانت القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,2]$ هي 3 والقيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[2,5]$ هي 7 فاوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,5]$

1) $\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = 3$

$\Rightarrow \int_0^2 f(x)\,dx = 6$

2) $\frac{1}{3}\int_2^5 f(x)\,dx = 7$

$\int_2^5 f(x)\,dx = 21$

$$f_{ave} = \frac{1}{5}\int_0^5 f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left[\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[6+21\right] = \frac{27}{5} = 5.4$$

---

(3) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[1,4]$ وكانت القيمة المتوسطة للدالة f تساوي 1

فأوجد قيمة $\int_1^4 (2x-5f(x))\,dx$

معلوم

$f_{ave} = 1$

$\frac{1}{3}\int_1^4 f(x)\,dx = 1$

$\int_1^4 f(x)\,dx = 3$

$$\int_1^4 2x - 5f(x)\,dx$$

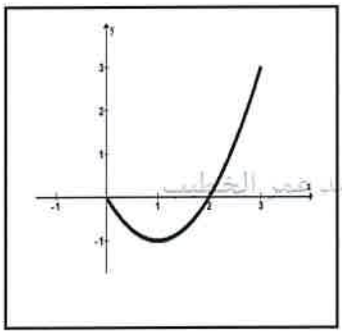
$$= \int_1^4 2x\,dx - 5\int_1^4 f(x)\,dx$$

$$= x^2\Big]_1^4 - 5(3)$$

$$= 15 - 15$$

$$= 0$$

(1) بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f ، بين ان $-3 \leq \int_0^3 f(x)\,dx \leq 9$



$\min(f) \leq f(x) \leq \mathrm{Max}(f)$

$-1 \leq f(x) \leq 3.$

$\int_0^3 -1\,dx \leq \int_0^3 f(x)\,dx \leq \int_0^3 3\,dx$

$-3 \leq \int_0^3 f(x)\,dx \leq 9.$ #

---

(2) بين ان $\sqrt{2}\pi \leq \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\,dx \leq \pi$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

ممكن حل السؤال بأكثر من طريقة.

$0 \leq x \leq \pi.$

$0 \leq \sin x \leq 1$

$1 \leq 1+\sin x \leq 2$

$1 \leq \sqrt{1+\sin x} \leq \sqrt{2}$

$\int_0^{\pi} 1\,dx \leq \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\,dx \leq \int_0^{\pi} \sqrt{2}\,dx$

$\pi \leq \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\,dx \leq \sqrt{2}\pi.$ #

---

(3) بين ان $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx$ يقع بين 2 و $2\sqrt{2}$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

* ممكن حل السؤال بأكثر من طريقة.

$-1 \leq x \leq 1$

$0 \leq x^2 \leq 1$

$1 \leq 1+x^2 \leq 2$

$1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$

$\int_{-1}^{1} 1\,dx \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{2}\,dx$

$2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx \leq 2\sqrt{2}$

(1) اوجد حدود مناسبة للتكامل $\int_{0}^{1} e^{-x^2}\, dx$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

* ملاحظة حل السؤال بالأمثلة الاخرى

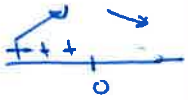
(استخدم نظرية القيمة المتوسطة في التكامل لتقدر قيمة التكامل)

او

$f(x) = e^{-x^2}.$

$f'(x) = -2x e^{-x^2}.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$



الدالة f متناقصة في الفترة (0,1)

$f(1) \le f(x) \le f(0)$

$e^{-1} \le f(x) \le 1$

$\frac{1}{e} \le \int_{-1}^{1} f(x)dx \le 1$

$0 \le x \le 1$

$0 \le x^2 \le 1$

$-1 \le -x^2 \le 0$

$e^{-1} \le e^{-x^2} \le e^{0}$

$\int_0^1 1/e\, dx \le \int_0^1 e^{-x^2} dx \le \int_0^1 1\, dx$

$\frac{1}{e} \le \int_0^1 e^{-x^2} dx \le 1$

الحدود هي 1 و 1/e

---

(2) اوجد حدود مناسبة للتكامل $\int_{-1}^{1} \frac{3}{x^3+2}\, dx$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

(استخدم نظرية القيمة المتوسطة في التكامل لتقدر قيمة التكامل)

$f(1) \le f(x) \le f(-1)$

$1 \le \frac{3}{x^3+2} \le 3$

$\int_{-1}^{1} 1\, dx \le \int_{-1}^{1} \frac{3}{x^3+2}\, dx \le \int_{-1}^{1} 3\, dx$

$2 \le \int_{-1}^{1} \frac{3}{x^3+2}\, dx \le 6$

الحدود المناسبة هي 2 , 6

$f(x) = \frac{3}{x^3+2}$

$f'(x) = \frac{-3(3x^2)}{(x^3+2)^2}$

$= \frac{-9x^2}{(x^3+2)^2} < 0$

الدالة f متناقصة دائماً.

---

(3) اوجد حدود مناسبة للتكامل $\int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\cos x^2\, dx$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

$f(\pi/2) \le f(x) \le f(\pi/3)$

$3\cos\frac{\pi^2}{4} \le 3\cos x^2 \le 3\cdot\cos\frac{\pi^2}{9}$

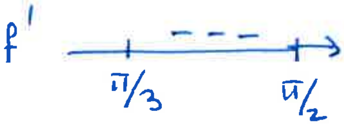
$\int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\cos\frac{\pi^2}{4} \le \int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\cos x^2\, dx \le$

$\frac{\pi}{6}\cdot 3\cos\frac{\pi^2}{4} \le \int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\cos x^2\, dx \le \frac{\pi}{6}\cdot 3\cos\frac{\pi^2}{9}$

الحدود $-1.23 , 0.72$

$f(x) = 3\cos x^2.$

$f'(x) = -6x \sin x$



الدالة f(x) متناقصة على الفترة.

(1) تمثل الدالة $T(t)=30-2\pi\cos(\frac{\pi}{8}t)$ **درجة حرارة احدى المدن خلال السنة بالسيلسيوس حيث**

تمثل t **الشهور على مدار العام، احسب متوسط درجة حرارة المدينة خلال العام**

$$T_{ave} = \frac{1}{12}\int_0^{12} 30 - 2\pi\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right) dt$$

$$= \frac{1}{12}\left[30t - 2\pi \cdot \frac{8}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right)\right]_0^{12}$$

$$= \frac{1}{12}[376] = 31.3 .$$

---

(2) تمثل الدالة $B(t)=400-0.3t$ **معدل مواليد احدى المدن بالالاف**

والدالة $D(t)=396+0.2t$ **معدل الوفيات لنفس المدينة بالالاف**

حيث تمثل t **الشهور**

عدد السكان $p(t)$

معدل التغير في عدد السكان $p'(t)$

$p'(t)=B(t)-D(t)$

صافي التغير في عدد السكان

$\Delta p=\int_0^{12} p'(t)\,dt$

(أ) حدد الفترات التي يتزايد ويتناقص فيها عدد السكان خلال السنة

$$p'(t) = B(t) - D(t)$$

$$= 400 - 0.3t - (396 + 0.2t)$$

$$= 4 - 0.5t .$$

$$p'(t) = 0 \Rightarrow t = 8$$

$$p' \quad \overset{\nearrow}{+\;+} \;\underset{8}{|}\; \overset{\searrow}{-\;-\;-}$$

فترة التزايد $(0,8)$

(ب) حدد الشهر الذي يصل فيه عدد السكان الى ذروته

. 8 شهر

(ج)اوجد صافي التغير في عدد السكان خلال سنة

$$\Delta p = \int_0^{12} p'(t)dt = \int_0^{12}(4 - 0.5t)dt$$

$$= 4t - \frac{1}{4}t\Big]_0^{12} = 12$$

(د) احسب متوسط صافي التغير في عدد السكان الشهري

$$P_{ave} = \frac{1}{12}\int_0^{12} p'(t)\,dt = \frac{1}{12}(12) = 1$$

الف نسمه في الشهر .

تمثل الدالة $v(t)=6-2t$ السرعة المتجهة لجسم يتحرك على خط مستقيم افقي من (نقطة الاصل)

(أ) حدد الدالة المكانية للجسم في اي لحظة

$$s(t) = \int 6-2t \, dt$$

$$= 6t - t^2 + c$$

$$s(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$s(t) = 6t - t^2$$

(ب) اوجد موقع الجسم بعد مرور 2 ثانية

$$s(2) = 6(2) - 2^2$$

$$= 8$$

(ج) اوجد الازاحة للجسم بعد مرور 5 ثواني

الازاحة تساوي التكامل

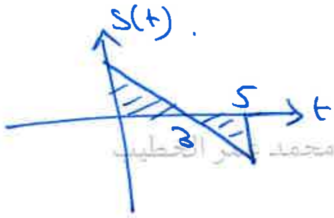
$$\Delta s = s(5) - s(0) = \int_0^5 6-2t \, dt$$

$$= 6t - t^2\Big]_0^5 = 5$$

(د) اوجد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور 5 ثواني

المسافة تساوي المساحة

المسافة = المساحة $= \int_0^3 (6-2t)\, dt + \int_3^5 (2t-6)\, dt$



$$= 9+4$$

$$= 13$$

الوحدة الخامسة: التكـامل /// الدرس الخامس: النظرية الاساسية في التفاضل والتكامل

النظرية الاساسية لحساب التفاضل والتكامل (الجزء الاول)

اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و $F(x)$ هي الدالة الاصلية لـ f فان

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

(1 إذا كانت $F(x) = x\ln x - x + c$ الدالة الاصلية للدالة $f(x)$ فأوجد

$$\int_1^e f(x)\,dx = F(e) - F(1)$$

$$= (e\,\text{Ln}\, e - e + c) - (1 \cdot \text{Ln}\, 1 - 1 + c)$$

$$= 1$$

او

$$\int_1^e f(x)\,dx = F(x)\Big]_1^e = x\,\text{Ln}\,x - x + c\Big]_1^e = 1$$

(2 إذا كانت $F(x)$ الدالة الاصلية للدالة $f(x) = 3x^2 + 5$ حيث $F(2) = 5$ فأوجد $F(1)$

$$\int_1^2 (3x^2 + 5)\,dx = F(x)\Big]_1^2$$

$$x^3 + 5\Big]_1^2 = F(2) - F(1)$$

$$12 = 5 - F(1)$$

$$F(1) = -7.$$

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_{1}^{3} (3x^2+1)\,dx =$ $x^3 + x \Big]_1^3 = (3^3+3) - (1^3+1) = 28$

---

(2) $\int_{1}^{4} (x\sqrt{x}+\frac{3}{x})\,dx =$ $\int_1^4 x^{3/2} + \frac{3}{x}\,dx$

$= \frac{2}{5}x^{5/2} + 3\ln|x| \Big]_1^4 = \frac{62}{5} + 3\ln 4.$

---

(3) $\int_{0}^{1} (6e^{-2x}+4)\,dx =$ $6\frac{e^{-2x}}{-2} + 4x \Big]_0^1 = 7 - \frac{3}{e^2}$

---

(4) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$ $3\sin^{-1}x \Big]_0^{1/2} = 3\left[\sin^{-1}1/2 - \sin^{-1}0\right] = 3\cdot\frac{\pi}{6}$

$= \pi/2$

---

(5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx =$ $\tan x \Big]_0^{\pi/4} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1$

---

(6) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx =$ $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$

---

(7) $\int_{0}^{t} (e^{x/2})^2\,dx =$ $\int_0^t e^x\,dx = e^x\Big]_0^t = e^t - e^0 = e^t - 1.$

---

(8) $\int_{0}^{t} (\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx =$ $\int_0^t 1\,dx = x\Big]_0^t = t.$

النظرية الاساسية لحساب التفاضل والتكامل (الجزء الثاني)

الحالة الأولى: الحد الأعلى x

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ فان

$$F'(x)=f(x)$$

(1) اوجد $F'(x)$ في كل مما يلي

$(a)\quad F(x)=\int_1^x (t^2+2t+1)\,dt \Rightarrow F'(x)=x^2+2x+1$

$(b)\quad F(x)=\int_2^x \sin^2 t\,dt \Rightarrow F'(x)=\sin^2 x$

$(c)\quad F(x)=\int_x^1 te^{2t}\,dt = -\int_1^x te^{2t}\,dt \Rightarrow F'(x)=-xe^{2x}$

$(d)\quad F(x)=\int_0^{\pi/4} \tan t\,dt \Rightarrow F'(x)=0$

هذا تكامل ثابت .

---

(2) اذا كان $\int_0^x f(t)\,dt = x\ln x - x$ ، فاوجد $f(e)$

اشتق الطرفين للحصول على $f(x)$

$f(x) = 1\cdot \ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1$

$= \ln x + 1 - 1$

$= \ln x$

$f(e) = \ln e$

$= 1$

---

(3) اذا كان $F(x)=\int_1^x \sqrt{4t^2-1}\,dt$ ، فاوجد $F(1)$ ، $F'(1)$

$F(1)=\int_1^1 \sqrt{4t^2-1}\,dt = 0$

$F'(x) = \sqrt{4x^2-1} \Rightarrow F'(1) = \sqrt{3}$.

الحالة الثانية: الحد الأعلى $g(x)$ (استخدام قاعدة السلسلة والنظرية الاساسية)

اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_{a}^{g(x)} f(t)\,dt$ فان

$$F'(x)=f(g(x))\times g'(x)$$

اوجد $F'(x)$ في كل مما يلي

(1) $F(x)=\int_{1}^{x^2}(t^3+2)\,dt \Rightarrow F'(x)=\left((x^2)^3+2\right)\cdot 2x$

$= 2x(x^6+2) = 2x^7+4x$

---

(2) $F(x)=\int_{0}^{\sin x}\tan t\,dt$

$F'(x) = \tan(\sin x)\cdot \cos x.$

---

(3) $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{1} e^{t^2}\,dt = -\int_{1}^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt.$

$F'(x) = -e^{(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{x}$

---

(4) $F(x)=\int_{1}^{xe^x}\sin t\,dt$

$F'(x) = \sin(xe^x)\left[1\cdot e^x + x\cdot e^x\right].$

$= (1+x)e^x\sin(xe^x)$

الحالة الثالثة : الحد الادنى و الحد الاعلى متغيرات (الحالة العامة)

اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$

فان $F'(x)=f(g(x))\times g'(x)-f(h(x))\times h'(x)$

او ممكن كتابة الدالة التكاملية

$$F(x)=\int_{h(x)}^{c} f(t)\,dt+\int_{c}^{g(x)} f(t)\,dt=\int_{c}^{g(x)} f(t)\,dt-\int_{c}^{h(x)} f(t)\,dt$$

وتطبيق الحالة الثانية

* ممكن حل السؤال بطريقتين

اوجد $F'(x)$ في كل مما يلي

(1) $F(x)=\int_{x}^{\sin x}(t^3+2)\,dt$ $=\int_{c}^{\sin x}(t^3+2)\,dt-\int_{c}^{x}(t^3+2)\,dt$

$F'(x)=((\sin x)^3+2)\cdot\cos x-(x^3+2)(1)$

$=\sin^3 x\cos x+2\cos x-x^3-2$

---

(2) $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{x^2}\cos t\,dt$ $=\int_{c}^{x^2}\cos t\,dt-\int_{c}^{\sqrt{x}}\cos t\,dt.$

$F'(x)=\cos x^2\cdot 2x-\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$=2x\cos x^2-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}.$

---

(3) $F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{1}{t^2+1}\,dt$ $=\int_{c}^{\cos x}\frac{1}{t^2+1}\,dt-\int_{c}^{\sin t}\frac{1}{t^2+1}\,dt.$

$F'(x)=\frac{1}{\cos^2 x+1}\cdot(-\sin x)-\frac{1}{\sin^2 x+1}(\cos x).$

$=\frac{-\sin x}{\cos^2 x+1}-\frac{\cos x}{\sin^2 x+1}$

اوجد $F'(x)$ في كل مما يلي

(1) $F(x)=\int_{2x}^{\sqrt{x}} \tan 3t\,dt$ $= \int_{c}^{\sqrt{x}} \tan 3t\,dt - \int_{c}^{2x} \tan 3t\,dt$

$$F'(x) = \tan 3\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \tan 3(2x) \cdot 2x.$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \tan 3\sqrt{x} - 2x \tan(6x)$$

---

(2) $F(x)=\int_{x}^{\sin^{-1}x} \sin t\,dt$ $= \int_{c}^{\sin^{-1}x} \sin t\,dt - \int_{c}^{x} \sin t\,dt$

$$F'(x) = \sin(\sin^{-1}x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sin x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \sin x .$$

---

(3) $F(x)=\int_{e^{4\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln t\,dt$ $= \int_{c}^{e^{2x}} \ln t\,dt - \int_{c}^{e^{4\sqrt{x}}} \ln t\,dt$

$$F'(x) = \ln e^{2x} \cdot e^{2x} \cdot 2 - \ln e^{4\sqrt{x}} \cdot e^{4\sqrt{x}} \cdot 4\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= 2x e^{2x} \cdot 2 - 4\sqrt{x}\, e^{4\sqrt{x}} \cdot \frac{4}{2\sqrt{x}}$$

$$= 4x e^{2x} - 8 e^{4\sqrt{x}}.$$

---

(4) $F(x)=\int_{2-x}^{xe^{x}} 3t\,dt$ $= \int_{c}^{xe^{x}} 3t\,dt - \int_{c}^{2-x} 3t\,dt$

$$F'(x) = 3(xe^{x})\left[1\cdot e^{x} + x e^{x}\right] - 3(2-x)(-1)$$

$$= 3xe^{x} \cdot e^{x}(1+x) + 6 - 3x$$

$$= 3x(1+x)e^{2x} - 3x + 6 .$$

1) اذا كان $F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-t^2}\,dt$ ، حيث $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ فاثبت ان $F'(x)=-1$

$$F(x)=\int_{c}^{\cos x}\sqrt{1-t^2}\,dt-\int_{c}^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt .$$

$$F'(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)-\sqrt{1-\sin^2 x}\,(\cos x)$$

$$=\sqrt{\sin^2 x}\quad(-\sin x)-\sqrt{\cos^2 x}\cdot\cos x$$

$$=|\sin x|\,(-\sin x)-|\cos x|\cdot\cos x$$

$$=\sin x\cdot(-\sin x)-\cos x\cdot\cos x$$

$$=-\sin^2 x-\cos^2 x=-[\sin^2 x+\cos^2 x]=-1\ \#$$

---

2) اذا كان $F(x)=x+\int_{\tan x}^{0}\frac{1}{t^2+1}\,dt$ ، فاثبت ان $F'(x)=0$

$$F(x)=x-\int_{0}^{\tan x}\frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$F'(x)=1-\frac{1}{\tan^2 x+1}\cdot\sec^2 x$$

$$=1-\frac{1}{\sec^2 x}\cdot\sec^2 x$$

$$=1-1=0\quad\#$$

---

3) اذا كان $g(x)=\int_{0}^{3x}\left(\int_{0}^{u}\sin t\ dt\right)du$ ، فأوجد $g''(x)$

مساعدة: افرض

$f(u)=\int_{0}^{u}\sin t\ dt$

نفرض

$$g(x)=\int_{0}^{3x}f(u)\,du$$

$$g'(x)=f(3x)\cdot 3=3f(3x)$$

$$=3\int_{0}^{3x}\sin t\ dt .$$

$$g''(x)=3\cdot\sin(3x)\cdot 3$$

$$=9\sin 3x$$

ممكن حل السؤال بطريقة ثانية

(1) اعتمد على الجدول التالي في ايجاد $h'(3)$ حيث

$$h(x)=\int_{1}^{g(x)} f(t)\,dt$$

x	$f(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	6	2	5
3	16	4	2
4	−1	6	7

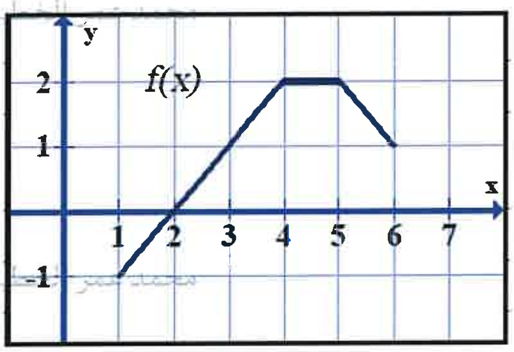
$$h'(x) = f(g(x))\cdot g'(x)$$

$$h'(3) = f(g(3))\cdot g'(3)$$

$$= f(4)\cdot(2) = (-1)(2) = -2$$

---

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$



المتصلة على الفترة $[1,6]$ حيث $H(x)=\int_{1}^{x} f(t)\,dt$

$H'(x) = f(x)$

في الاجابة عن الاسئلة التالية

(a) H(3) $= \int_1^3 f(t)\,dt = 0$ $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$

(b) H(6) $= \int_1^6 f(t)\,dt = 5$ $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+5\right)$

(c) H′(3) $= f(3) = 1$

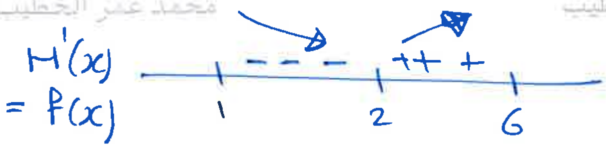
(d) اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[1,6]$

$$f_{ave} = \frac{1}{6-1}\int_1^6 f(t)\,dt = \frac{1}{5}(5) = 1.$$

(e) اوجد قيمة c التي تحقق القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[1,6]$

$f(c) = f_{ave} \Rightarrow f(c) = 1 \Rightarrow$ $c = 3$, $c = 6$ مرفوض

(f) اوجد فترة التزايد للدالة $H(x)$ على الفترة $[1,6]$

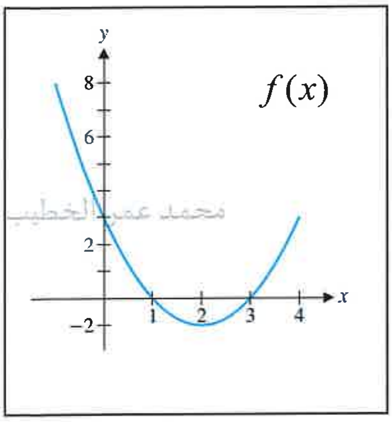


$(2,6)$ فترة التزايد للدالة $H(x)$.

(g) اوجد قيمة x التي عندها للدالة $H(x)$ قيمة صغرى محلية على الفترة $[1,6]$

عند $x = 2$ و قيمتها $H(2) = -\frac{1}{2}$

(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ المتصلة على R حيث



$$H(x)=\int_{0}^{x} f(t)\,dt \Rightarrow H'(x) = f(x).$$

في الاجابة عن الاسئلة التالية

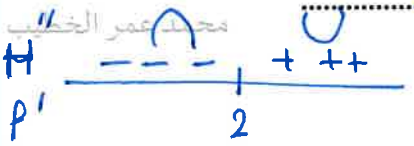
(أ) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $H(x)$ ....1 , 3........

(ب) اوجد فترة التزايد للدالة $H(x)$ ....$(-\infty,1) \cup (3,\infty)$........

(ج) اوجد فترة التناقص للدالة $H(x)$ ....$(1,3)$........

(د) اوجد قيمة x التي عندها للدالة $H(x)$ قيمة عظمى محلية........$x=1$........

(هـ) اوجد قيمة x التي عندها للدالة $H(x)$ قيمة صغرى محلية........$x=3$........



(و) اوجد فترة التقعر للاعلى للدالة $H(x)$ ....$(2,\infty)$........

(ي) اوجد فترة التقعر للاسفل للدالة $H(x)$ ....$(-\infty,2)$........

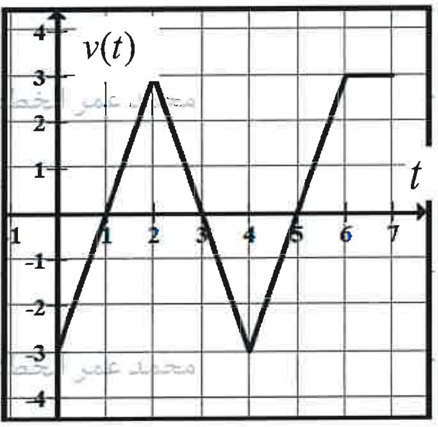
(ل) اوجد قيمة x التي عندها للدالة $H(x)$ نقطة انقلاب........$x=2$........

---

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل السرعة المتجهة $v(t)$ لجسم يتحرك على خط مستقيم

حيث دالة الموضع $s(t)=\int_{0}^{t} v(x)\,dx$

في الاجابة عن الاسئلة التالية



(أ) اوجد سرعة الجسم عند $t=5$ ....$v(5)=0$

(ب) اوجد تسارع الجسم عند $t=5$ ....$v'(5)=3$

(ج) اوجد موقع الجسم عند $t=7$ ....$s(7)=\int_{0}^{7} v(t)\,dt=3$

(د) اوجد المسافة التي يقطعها الجسم خلال 7 ثواني........12........

$d=\frac{1}{2}(1)(3)+\frac{1}{2}(2)(3)+\frac{1}{2}(2)(3)+\frac{1}{2}(1)(3)+(1)(3)$
$=12$

الازاحة هي التكامل

المسافة هي المساحة

(1) اوجد معادلة المماس للدالة y عند $x=2$ حيث $f(x) = y=\int_{2}^{x}\cos(\pi t^{3})\,dt$

$f(2) = \int_2^2 \cos(\pi t^3)\,dt = 0 \Rightarrow (2,0)$ مثل نقطة .

$f'(x) = \cos(\pi x^3)$

$m = f'(2) = \cos(8\pi) = 1$

$y-0 = 1(x-2)$

$y = x-2$.

---

(2) اوجد معادلة المماس للدالة $f(x)$ عند $x=0$ حيث $f(x)=\cos x+\int_{2x}^{x^{2}}e^{-t}\,dt$

$f(0) = \cos 0 + \int_0^0 e^{-t}\,dt = 1+0 = 1 \Rightarrow (0,1)$

$f'(x) = -\sin x + e^{-x^2}(2x) - e^{-2x}(2)$.

$m = f'(0) = -2$

$y-1 = -2(x-0)$. معادلة

$y = -2x+1$

---

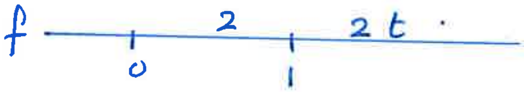
(3) اوجد قيمة النهاية التالية باستخدام قاعدة لوبتال

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{0}^{x}(e^{t}-1)\,dt}{x^{2}}$ $\left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}$ $\left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2} = 1/2$

---

(4) اذا كان $f(t)=\begin{cases}2 & 0\le t<1\\ 2t & 1\le t\end{cases}$ دالة متصلة على الفترة $[0,\infty)$ فأوجد الدالة $\mathrm{H}(x)$ حيث $\mathrm{H}(x)=\int_{0}^{x}f(t)\,dt$

* يمكن حل السؤال بأكثر من طريقة



$0 \le x < 1 \Rightarrow$

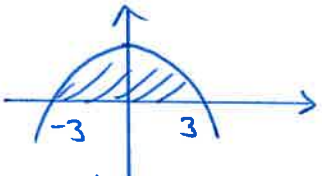
$H(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 2\,dt = 2x$.

$1 \le x \Rightarrow$

$H(x) = \int_0^1 2\,dt + \int_1^x 2t\,dt = 2 + t^2\Big]_1^x = 2 + x^2 - 1 = x^2+1$

$\therefore H(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x < 1 \\ x^2+1 & x \ge 1 \end{cases}$

(1) اوجد المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى $f(x) = 9 - x^2$



$$A = \int_{-3}^{3} 9 - x^2 - 0 \quad dx$$

$$9x - \frac{x^3}{3} \Big]_{-3}^{3}$$

$$= 36.$$

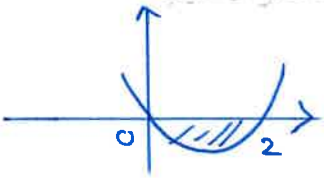
نقاط التقاطع

$9 - x^2 = 0$

$x = \pm 3$

---

(2) اوجد المساحة المحصورة تحت محور x وفوق المنحنى $f(x) = x^2 - 2x$



$$A = \int_{0}^{2} 0 - (x^2 - 2x)\, dx$$

$$= - \int_{0}^{2} x^2 - 2x \, dx$$

$$= \int_{0}^{2} 2x - x^2 \, dx = x^2 - \frac{x^3}{3} \Big]_{0}^{2} = \frac{4}{3}.$$

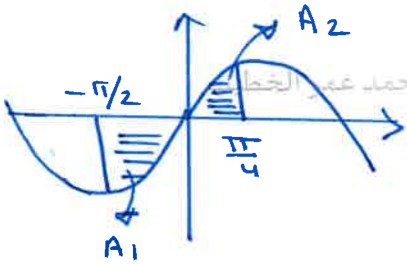
$x^2 - 2x = 0$

$x = 0, 2$

---

(3) اوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = \sin x$ ومحور x حيث $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

تجزئة المساحة



$$A_1 = \int_{-\pi/2}^{0} 0 - \sin x \, dx = 1$$

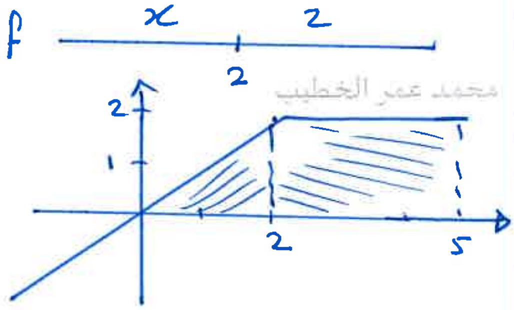
$$A_2 = \int_{0}^{\pi/4} \sin x \, dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A = A_1 + A_2 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

---

(4) اوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = \begin{cases} x & x < 2 \\ 2 & 2 \leq x \end{cases}$ ومحور x على الفترة $[0,5]$

تجزئة المساحة



$$A = \int_{0}^{2} x \, dx + \int_{2}^{5} 2 \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \Big]_{0}^{2} + 2(5-2)$$

$$= 2 + 6$$

$$= 8$$

الوحدة الخامسة: التكامل /// الدرس السادس: التكامل بالتعويض

يستخدم التكامل بالتعويض عندما نريد ايجاد تكامل حاصل ضرب او قسمة دالتين ، احدى الدالتين او جزء منها يساوي ثابت في مشتقة الدالة الاخرى

ويكون التعويض عادة (1) ما بداخل القوس (2) ما تحت الجذر (3) الزاوية (4) الأس

ويعتبر هو الخيار الاقوى في التكامل

يعتبر التكامل بالتعويض العملية العكسية للاشتقاق باستخدام قاعدة السلسلة

ويمكن استخدام هذه القاعدة

$$\boxed{\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = f(g(x)) + c}$$

قبل البدأ بالتكامل ...اسئل نفسك

1) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج جمع وطرح حدود وكل حدد قابل للتكامل

2) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج ضرب او قسمة ويمكن تحويلها ال جمع او طرح حدود وكل حدد قابل للتكامل

3) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي حاصل ضرب او قسمة دالتين، احدى الدالتين او جزء منها يساوي ثابت في مشتقة الدالة الاخرى

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int x^2(x^3+1)^5\, dx$

$u = x^3 + 1$

$\frac{du}{dx} = 3x^2$

$\frac{du}{3x^2} = dx$

$= \int x^2 u^5 \frac{du}{3x^2}$

$= \frac{1}{3} \int u^5\, du$

$= \frac{1}{18} u^6 + c = \frac{1}{18}(x^3+1) + c$

---

(2) $\int (2x+1)^5\, dx$

نكامل السؤال مباشرة او

$u = 2x+1$

$\frac{du}{dx} = 2$

$\frac{du}{2} = dx$

$= \int u^5 \frac{du}{2}$

$= \frac{1}{2}\int u^5\, du = \frac{1}{12} u^6 + c = \frac{1}{12}(2x+1)^6 + c.$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int e^x\sqrt{e^x+1}\,dx$

$u = e^x+1$

$\frac{du}{dx} = e^x$

$\frac{du}{e^x} = dx$

$= \int \cancel{e^x}\cdot\sqrt{u}\ \frac{du}{\cancel{e^x}}$

$= \int u^{1/2}\,du$

$= \frac{2}{3}u^{3/2}+C = \frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2}+C$

(2) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^4}}\,dx = \int x^3(4-x^4)^{-1/2}\,dx$

$u = 4-x^4$

$\frac{du}{dx} = -4x^3$

$\frac{du}{-4x^3} = dx$

$= \int x^3\,u^{-1/2}\,\frac{du}{-4x^3}$

$= \frac{-1}{4}\int u^{-1/2}\,du$

$= \frac{-1}{4}\cdot 2u^{1/2}+C = \frac{-1}{2}(4-x^4)^{1/2}+C$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}\ u}\cdot 2\sqrt{x}\,du$

$u = 1+\sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x}\,du = dx$

$= \int 2\cdot\frac{1}{u}\,du$

$= 2\ln|u|+C$

$= 2\ln|1+\sqrt{x}|+C$

(4) $\int x e^{-x^2/2}\,dx$

$u = \frac{-x^2}{2}$

$\frac{du}{dx} = -x$

$\frac{du}{-x} = dx$

$= \int x\,e^u\,\frac{du}{-x}$

$= \int -e^u\,du$

$= -e^u+C = -e^{-x^2/2}+C$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

$u = \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x}\,du = dx$

$= \int \frac{e^{u}}{\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x}\,du$

$= 2\int e^{u}\,du$

$= 2e^{u} + c = 2e^{\sqrt{x}} + c$

---

(2) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

$u = \mathrm{Ln}\,x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$x\,du = dx$

$= \int \frac{\sqrt{u}}{x} \cdot x\,du$

$= \int u^{1/2}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2} + c = \frac{2}{3}(\mathrm{Ln}\,x)^{3/2} + c$

---

(3) $\int \frac{1}{x\ln\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{x\,\mathrm{Ln}\,x^{1/2}}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1}{2}x\,\mathrm{Ln}\,x}\,dx$

$= \int \frac{2}{x\,\mathrm{Ln}\,x}\,dx$

$u = \mathrm{Ln}\,x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$x\,du = dx$

$= \int \frac{2}{x\,u} \cdot x\,du = 2\int \frac{1}{u}\,du = 2\,\mathrm{Ln}|u| + c$

$= 2\,\mathrm{Ln}|\mathrm{Ln}\,x| + c$

---

(4) $\int (x-1)\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$

$u = x^2 - 2x + 2$

$\frac{du}{dx} = 2x - 2$

$\frac{du}{2(x-1)} = dx$

$= \int (x-1)\sqrt{u} \cdot \frac{du}{2(x-1)}$

$= \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + c = \frac{1}{3}(x^2 - 2x + 2)^{3/2} + c$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int e^{\ln x}(x^2-1)^3\,dx = \int x(x^2-1)^3\,dx$

$U = x^2-1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$= \int x \cdot U^3 \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int U^3\,du$

$= \frac{1}{8}U^4 + C = \frac{1}{8}(x^2-1)^4 + C$

---

(2) $\int e^{\tan x + 2\ln\sec x}\,dx = \int e^{\tan x} \cdot e^{2\ln\sec x}\,dx$

$= \int e^{\tan x} \cdot e^{\ln\sec^2 x}\,dx$

$= \int \sec^2 x\, e^{\tan x}\,dx$

$U = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x.$

$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$

$= \int \sec^2 x\, e^{U} \cdot \frac{du}{\sec^2 x}$

$= \int e^{U}\,du = e^{U} + C = e^{\tan x} + C$

---

(3) $\int \frac{e^{\cot x}}{1-\cos^2 x}\,dx = \int \frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x}\,dx$

$= \int \csc^2 x\, e^{\cot x}\,dx$

$U = \cot x$

$\frac{du}{dx} = -\csc^2 x$

$\frac{du}{-\csc^2 x} = dx$

$= \int \csc^2 x\, e^{U} \frac{du}{-\csc^2 x}$

$= -\int e^{U}\,du$

$= -e^{U} + C$

$= -e^{\cot x} + C$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{4}{x(\ln x+1)^2}\, dx$

$u = \ln x + 1$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$x\, du = dx$

$= \int \frac{4}{x\, u^2} \cdot x\, du$

$= 4 \int u^{-2}\, du$

$= 4 \frac{u^{-1}}{-1} + c$

$= \frac{-4}{u} + c = \frac{-4}{\ln x + 1} + c.$

---

(2) $\int \tan 2x\, dx$

ممكن حل السؤال مباشرة بدون تعويض.

$= \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\, dx$

$u = \cos 2x$

$= \int \frac{\sin 2x}{u} \cdot \frac{du}{-2\sin 2x}$

$\frac{du}{dx} = -2\sin 2x$

$\frac{du}{-2\sin 2x} = dx$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{u}\, du$

$= -\frac{1}{2} \ln|u| + c = -\frac{1}{2} \ln|\cos 2x| + c$

---

(3) $\int \frac{(\sin^{-1} x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

$u = \sin^{-1} x$

$= \int \frac{u^3}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2}\, du$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \int u^3\, du$

$\sqrt{1-x^2}\, du = dx$

$= \frac{1}{4} u^4 + c$

$= \frac{1}{4} (\sin^{-1} x)^4 + c.$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{\cot x}{\ln(\sin x)}\,dx$

$u = \operatorname{Ln}(\sin x)$

$\frac{du}{dx} = \frac{x}{\sin x}$

$\frac{du}{dx} = \cot x$

$\frac{du}{\cot x} = dx$

$= \int \frac{\cot x}{u} \; , \; \frac{du}{\cot x}$

$= \int \frac{1}{u}\,du$

$= \operatorname{Ln}|u| + C$

$= \operatorname{Ln}|\operatorname{Ln}(\sin x)| + C.$

---

(2) $\int \sec x\,dx \times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$

* مهم حل سؤال بدون التحويل .

$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$

$u = \sec x + \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec x \tan x + \sec^2 x$

$\frac{du}{\sec x \tan x + \sec^2 x} = dx$

$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{u} \; , \; \frac{du}{\sec x \tan x + \sec^2 x}$

$= \int \frac{1}{u}\,du = \operatorname{Ln}|u| + c = \operatorname{Ln}|\sec x + \tan x| + c$

---

(3) $\int \csc x\,dx \times \frac{\csc x - \cot x}{\csc x - \cot x}.$

$= \int \frac{\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x - \cot x}\,dx.$

البسط مشتقة المقام

$= \operatorname{Ln}|\csc x - \cot x| + C.$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int x\cos x^2\,dx$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$= \int x \cos u \,\frac{du}{2x}$

$= \int \frac{1}{2} \cos u \,du$

$= \frac{-1}{2} \sin u + c = \frac{-1}{2} \sin x^2 + c.$

---

(2) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

$u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}.$

$x\,du = dx$

$= \int \frac{\cos(u)}{x} . x\,du$

$= \int \cos u \,du$

$= \sin u + c = \sin(\ln x) + c.$

---

(3) $\int x^2\sec^2 x^3\,dx$

$u = x^3$

$\frac{du}{dx} = 3x^2$

$\frac{du}{3x^2} = dx$

$= \int x^2 \sec^2 u \,\frac{du}{3x^2}$

$= \int \sec^2 u \,du$

$= \tan u + c$

$= \tan x^2 + c$

---

(4) $\int e^x\cos(e^{x+1})\,dx$

$u = e^{x+1}$

$\frac{du}{dx} = e^{x+1}$

$\frac{du}{e^{x+1}} = dx$

$= \int e^x \cos(u) \,\frac{du}{e^{x+1}}$

$= \int e^x \cos u \cdot \frac{du}{e^x . e}$

$= \frac{1}{e} \int \cos u \,du =$

$= \frac{1}{e} \sin u + c = \frac{1}{e} \sin(e^{x+1}) + c.$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \sin x \cos x \, dx$

$u = \cos x$ او $u = \sin x$

$\frac{du}{dx} = \cos x$

$\frac{du}{\cos x} = dx$

$= \int u \cdot \cos x \cdot \frac{du}{\cos x}$

$= \int u \, du$

$= \frac{1}{2} u^2 + c = \frac{1}{2} \sin^2 x + C.$

---

(2) $\int \cos x \sin^3 x \, dx = \int \cos x \, (\sin x)^3 dx$

$u = \sin x$

$\frac{du}{dx} = \cos x$

$\frac{du}{\cos x} = dx.$

$= \int \cos x \cdot u^3 \frac{du}{\cos x}$

$= \int u^3 du$

$= \frac{1}{4} u^4 + c = \frac{1}{4} \sin^4 x + C.$

---

(3) $\int \sec^2 x \sqrt{\tan x} \; dx$

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$\frac{du}{\sec^3 x} = dx$

$= \int \sec^2 x \sqrt{u} \, \frac{du}{\sec^2 x}$

$= \int u^{1/2} du$

$= \frac{2}{3} u^{3/2} + c = \frac{2}{3} (\tan x)^{3/2} + C$

---

(4) $\int \sqrt{\tan x} (\sec x \tan x)^2 \, dx = \int \tan^{1/2} x \cdot \sec^2 x \cdot \tan^2 x \, dx$

$= \int \sec^2 x \tan^{5/2} x \, dx$

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$

$= \int \sec^2 x \cdot u^{5/2} \frac{du}{\sec^3 x}$

$= \int u^{5/2} du$

$= \frac{2}{7} u^{7/2} + c = \frac{2}{7} (\tan x)^{7/2} + C$

أوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{(\sin x+1)^3}{\sec x}\,dx = \int \cos x(\sin x+1)^3\,dx$

$u = \sin x + 1$

$\frac{du}{dx} = \cos x$

$\frac{du}{\cos x} = dx$

$= \int \cos x \; u^3 \; \frac{du}{\cos x}$

$= \int u^3\,du$

$= \frac{1}{4}u^4 + c = \frac{1}{4}(\sin x+1)^4 + c.$

---

(2) $\int \sin 2x \cos x\,dx = \int 2\sin x \cos x \cdot \cos x\,dx$

اولاً توحيد الزاوية

$= \int 2\sin x \cdot \cos^2 x\,dx.$

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$\frac{du}{-\sin x} = dx$

$= \int 2\sin x \cdot u^2 \; \frac{du}{-\sin x}.$

$= -2\int u^2\,du = \frac{-2}{3}u^3 + c = \frac{-2}{3}\cos^3 + c.$

---

(3) $\int \sin 3x \;\cos^5 3x\,dx$

$u = \cos 3x$

$\frac{du}{dx} = -3\sin 3x$

$\frac{du}{-3\sin 3x} = dx$

$= \int \sin 3x \cdot u^5 \; \frac{du}{-3\sin 3x}$

$= \frac{-1}{3}\int u^5\,du$

$= \frac{-1}{3}\,\frac{u^6}{6} + c = \frac{-1}{18}(\cos 3x)^6 + c$

---

(4) $\int x\sec^2 x^2 \;\tan x^2\,dx$

$u = \tan x^2$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x^2 \cdot 2x$

$\frac{du}{2x\sec^2 x^2} = dx$

$= \int x\sec^2 x^2 \cdot u \; \frac{du}{2x\sec^2 x}$

$= \frac{1}{2}\int u\,du$

$= \frac{1}{4}u^2 + c = \frac{1}{4}(\tan x^2)^2 + c.$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$\frac{du}{-\sin x} = dx$

$= \int \frac{\sin x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{-\sin x}$

$= -\int u^{-1/2}\,du = -2u^{1/2} + c$

$= -2\sqrt{\cos x} + c.$

---

(2) $\int \frac{(\tan^{-1} x)^2}{x^2+1}\,dx$

$u = \tan^{-1} x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$.

$(1+x^2)\,du = dx.$

$= \int \frac{u^2}{x^2+1} \cdot (1+x^2)\,du$

$= \int u^2\,du$

$= \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{3}(\tan^{-1}x)^3 + c.$

---

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1} x}\,dx$

$u = \sin^{-1} x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\sqrt{1-x^2}\,du = dx$

$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\;u} \cdot \sqrt{1-x^2}\,du$

$= \int \frac{1}{u}\,du$

$= \text{Ln}|u| + c = \text{Ln}|\sin^{-1} x| + c.$

---

(4) $\int \frac{\sec^{-1} 2x}{|x|\sqrt{4x^2-1}}\,dx$

$u = \sec^{-1} 2x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{|2x|\sqrt{(2x)^2-1}} \cdot 2$

$|x|\sqrt{4x^2-1}\,du = dx$

$= \int \frac{u}{|x|\sqrt{4x^2-1}} \cdot |x|\sqrt{4x^2-1}\,dx$

$= \int u\,du$

$= \frac{1}{2}u^2 + c = \frac{1}{2}(\sec^{-1} 2x) + c.$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2} dx$

$= \int \frac{e^x}{1+u^2} \frac{du}{e^x}$

$= \int \frac{1}{1+u^2} du$

$= \tan^{-1}(u) + c = \tan^{-1}(e^x) + c.$

$u = e^x$

$\frac{du}{dx} = e^x$

$\frac{du}{e^x} = dx$

---

(2) $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$= \int \frac{\sin x}{1+u^2} \cdot \frac{du}{-\sin x}.$

$= \int \frac{-1}{1+u^2} du$

$= -\tan^{-1} u + c$

$= -\tan(\cos x) + c$

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$\frac{du}{-\sin x} = dx$

---

(3) $\int \frac{1}{x^2+4}dx$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\frac{x}{4}+1} dx$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1} dx$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+1} \cdot 2du$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1} du = \frac{1}{2}\tan^{-1} u + c = \frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{x}{2}) + c.$

$u = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$

$2du = 2dx$

اوجد التكاملات التالية (باكمال المربع)

عند اكمال المربع يجب إضافة

[نصف معامل x تربيع]

بشرط ان يكون معامل x تربيع

(1) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$

$= \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx$

$u = x+2$

$\frac{du}{dx} = 1$

$du = dx$

$= \int \frac{1}{u^2+1}\,du$

$= \tan^{-1} u + c$

$= \tan^{-1}(x+2) + c.$

x^2+4x+5

$= x^2+4x+\underline{\underline{4}}+5-\underline{\underline{4}}$

$= (x+2)^2+1$

---

(2) $\int \frac{1}{x^2-8x+25}\,dx = \int \frac{1}{(x-4)^2+9}\,dx.$

$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\frac{(x-4)^2}{9}+1}\,dx$

$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{(\frac{x-2}{3})^2+1}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{u^2+1}\,3du$

$= \frac{1}{3}\tan^{-1} u + c = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x-4}{3}\right)^2 + c$

$x^2-8x+25$

$x^2-8x+16+25-16$

$(x-4)^2+9$

$u = \frac{x-2}{3} = \frac{x}{3}-\frac{2}{3}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}$

$3du = dx$

---

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{9-(x-3)^2}}\,dx$

$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x-3}{3})^2}}\,dx$

$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,3du$

$= \sin^{-1} u + c$

$= \sin^{-1}\left(\frac{x-3}{3}\right) + c$

$6x - x^2$

$= -(x^2-6x)$

$= -(x^2-6x+9-9)$

$= -((x-3)^2-9)$

$= -(x-3)^2+9$

$= 9-(x-3)^2$

$u = \frac{x-3}{3} = \frac{1}{3}x-1$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}$

$3du = dx.$

اوجد التكاملات التالية * اختزال الرتبة .

(1) $\int \frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \int \frac{x^2}{(x^3)^2+1}\,dx$

$u = x^3$

$\frac{du}{dx} = 3x^2$

$\frac{du}{3x^2} = dx$

$= \int \frac{x^2}{u^2+1} \cdot \frac{du}{3x^2}$

$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\,du$

$= \frac{1}{3}\tan^{-1} u + c = \frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3) + c$

---

(2) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-\cdot(x^2)^2}}$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$= \int \frac{x}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du.$

$= \frac{1}{2}\sin^{-1} u + c$

$= \frac{1}{2}\sin^{-1}(x^2) + c.$

---

(3) $\int \sqrt[3]{x^5-x^3}\,dx = \int \sqrt[3]{x^3(x^2-1)}\,dx = \int \sqrt[3]{x^3}\,\sqrt[3]{x^2-1}\,dx$

$= \int x\,(x^2-1)^{1/3}\,dx$

$u = x^2-1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$= \int x\,u^{1/3}\,\frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int u^{1/3}\,du$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}u^{4/3} + c = \frac{3}{8}(x^2-1)^{4/3} + c$

اوجد التكاملات التالية * الخطوة الرابعة .

(1) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}\,dx = \int \frac{1}{x\sqrt{(x^2)^2-1}}\,dx$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$\rightarrow x^2 = u$.

$= \int \frac{1}{x\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2\sqrt{u^2-1}}\,du$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,du = \frac{1}{2}\sec^{-1}u + c = \frac{1}{2}\sec^{-1}x^2 + c.$

---

(2) $\int x(x-2)^5\,dx$

$u = x-2$

$\frac{du}{dx} = 1$

$du = dx$

$\rightarrow x-2 = u$

$x = u+2$

$= \int x\,u^5\,du$

$= \int (u+2)u^5\,du$

$= \int u^6 + 2u^5\,du$

$= \frac{1}{7}u^7 + \frac{2}{6}u^6 + c$

$= \frac{1}{7}(x-2)^7 + \frac{1}{3}(x-2)^6 + c$

---

(3) $\int \frac{t}{\sqrt{2t-1}}\,dt = \int t\,(2t-1)^{1/2}\,dt.$

$u = 2t-1$

$\frac{du}{dt} = 2$

$\frac{du}{2} = dt$

$\rightarrow 2t-1 = u$

$2t = u+1$

$t = \frac{1}{2}(u+1)$

$= \int t\,u^{1/2} \cdot \frac{du}{2}$

$= \int \frac{1}{2}(u+1)\,u^{1/2}\,\frac{du}{2}$

$= \frac{1}{4}\int u^{3/2} + u^{1/2}\,du$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + c\right) = \frac{1}{10}(2t-1)^{5/2} + \frac{1}{6}(2t-1)^{3/2} + c$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \int x^3 u^{1/2}\frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int x^2 u^{1/2}\,du$

$= \frac{1}{2}\int (u+1)\, u^{1/2}\,du$

$= \frac{1}{2}\int u^{3/2} + u^{1/2}\,du$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{2u^{5/2}}{5} + \frac{2u^{3/2}}{3}\right] + c = \frac{1}{5}(x^2-1)^{5/2} + \frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2} + c.$

$u = x^2 - 1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$x^2 - 1 = u$

$x^2 = u + 1$

---

(2) $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-25}}\,dx = \int \frac{1}{5|x|\sqrt{\left(\frac{x}{5}\right)^2-1}}\,dx$

$= \int \frac{1}{5|x|\sqrt{u^2-1}} \cdot 5\,du$

$= \int \frac{1}{|5u|\sqrt{u^2-1}}\,du$

$= \frac{1}{5}\sec^{-1} u + c$

$= \frac{1}{5}\sec^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + c.$

$u = \frac{x}{5}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{5}$

$5\,du = dx$

$\frac{x}{5} = u$

$x = 5u$

---

(3) $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$

$= \int \sqrt{u} \cdot 2\sqrt{x}\,du$

$= 2\int \sqrt{u}\,(u-1)\,du$

$= 2\int u^{3/2} - u^{1/2}\,du$

$= 2\left[\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\right] + c$

$= \frac{1}{5}(1+\sqrt{x})^{5/2} - \frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{3/2} + c$

$u = 1 + \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x}\,du = dx$

$\sqrt{x} = u - 1$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \cos^3 x \sin^5 x \, dx$

$= \int \cos^3 x \cdot U^5 \, \frac{du}{\cos x}$

$= \int \cos^2 x \cdot U^5 \cdot du .$

$= \int (1-U^2) U^5 du$

$= \int U^5 - U^7 \, du$

$= \frac{1}{6} U^6 - \frac{1}{8} U^8 + c = \frac{1}{6} \sin^6 x - \frac{1}{8} \sin^8 x + c$

$U = \sin x$

$\frac{du}{dx} = \cos x$

$\frac{du}{\cos x} = dx$

$\rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$= 1 - U^2 .$

---

(2) $\int \tan x \sec^4 x \, dx$

$= \int U \cdot \sec^4 x \, \frac{du}{\sec^2 x}$

$= \int U \cdot \sec^2 x \, du$

$= \int U (U^2 - 1) \, du$

$= \int U^3 - U \quad du$

$= \frac{1}{4} U^4 - \frac{1}{2} U^2 + C = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan x + c .$

$U = \tan x .$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$

$\rightarrow \sec^2 x = \tan^2 x - 1$

$= U^2 - 1$

* يمكنه حل السؤال نفرض $U = \sec x$.

---

(3) $\int \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3} dx$

$= \int \frac{3 U}{1+U^6} \; 2\sqrt{x} \, du$

$= \int \frac{6 U}{1+U^6} \cdot U \, du$

$= \int \frac{6 U^2}{1+U^6} \, du .$

$= \int \frac{6 U^2}{1+(U^3)^2}$

$= \int \frac{6 U^2}{1+w^2} \cdot \frac{dw}{3U^2}$

$= \int \frac{2 .}{1+w^2} \, dw$

$= 2 \tan^{-1} w + c$

$= 2 \tan^{-1} (U^3) + c$

$= 2 \tan^{-1} (x^{3/2}) + c$

* يمكنه حل السؤال بتعويض واحد

$U = x^{3/2}$

$U = \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x} \, du = dx$

$\rightarrow x = U^2$

$x^3 = U^6$

$w = U^3 .$

$\frac{dw}{du} = 3U^2$

$\frac{dw}{3U^2} = du$

الخطوة اضافية . **اوجد قيمة التكاملات المحدودة التالية**

(1) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}\,dx = \int \frac{x^3}{(x^4)^2+1}\,dx$

$= \int \frac{x^3}{u^2+1} \frac{du}{4x^3}.$

$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}\,du$

$= \frac{1}{4}\tan^{-1}u\Big]_0^1 = \frac{1}{4}\left[\tan^{-1}1 - \tan^{-1}0\right] = \frac{\pi}{16}.$

$u = x^4$

$\frac{du}{dx} = 4x^3.$

$\frac{du}{4x^3} = dx$

$x=0 \Rightarrow u=0$

$x=1 \Rightarrow u=1$

---

(2) $\int_1^e \frac{1}{x+x\ln x}\,dx = \int \frac{1}{x(1+\ln x)}\,dx$

$= \int \frac{1}{x\ u}\ x\,du$

$= \int_1^2 \frac{1}{u}\,du$

$= \ln|u|\Big]_1^2 = \ln 2 - \ln 1$

$= \ln 2\ .$

$u = 1+\ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$x\,du = dx$

$x=1 \Rightarrow u=1$

$x=e \Rightarrow u=2$

---

(3) $\int_0^2 \frac{4x^3}{(x^2+1)^2}\,dx = \int_0^2 4x^3(x^2+1)^{-2}\,dx$

$= \int 4x^3\,u^{-2}\,\frac{du}{2x}$

$= \int 2x^2\,u^{-2}\,du$

$= \int_1^5 2(u-1)\,u^{-2}\,du$

$= 2\int_1^5 u^{-1} - u^{-2}\,du$

$= 2\int_1^5 \frac{1}{u} - u^{-2}\,du$

$= 2(\ln|u| + u^{-1}\Big]_1^5$

$= 2\left[\ln|u| + \frac{1}{u}\right]_1^5$

$= 2\ln 5 - \frac{8}{5}$

$u = x^2+1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$\rightarrow x^2 = u-1$

$x=0 \Rightarrow u=1$

$x=2 \Rightarrow u=5$

(1) اذا كان $\int_0^1 f(x)\,dx=-6$ ، اوجد

(a) $\int_0^3 f(\frac{x}{3})\,dx = \int_0^1 f(u)\cdot 3\,du$

$= 3\int_0^1 f(u)\,du = 3(-6) = -18$

$u = \frac{x}{3}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}$

$3\,du = dx$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$x = 3$
$u \Rightarrow 1$

(b) $\int_1^2 2f(x-1)\,dx = \int_0^1 2\,f(u)\,du$

$= 2(-6) = -12.$

$u = x-1$

$\frac{du}{dx} = 1$

$du = dx$

$x = 1 \Rightarrow u = 0$

$x = 2 \Rightarrow u = 1$

---

(2) اذا كان $f(4)=-5\,,f(1)=3$ ، فأوجد $\int_1^2 x\,f'(x^2)\,dx$

$\int_1^2 x\,f'(x^2)\,dx$

$= \int \cancel{x}\,f'(u)\,\frac{du}{2\cancel{x}}$

$= \frac{1}{2}\int_1^4 f'(u)\,du$

$= \frac{1}{2}[f(4) - f(1)]$

$= \frac{1}{2}[-5-3]$

$= -4.$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$x = 1 \Rightarrow u = 1$

$x = 2 \Rightarrow u = 4$

---

(3) اذا كان $f(0)=1\,,f(1)=9$ ، فأوجد $\int_0^1 3\sqrt{f(x)}\,f'(x)\,dx$

$= \int 3\sqrt{u}\,f'(x)\cdot\frac{du}{f'(x)}$

$= 3\int_1^9 u^{1/2}\,du$

$= 3\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^9$

$= 2(9^{3/2} - 1^{3/2}) = 52$

$u = f(x)$

$\frac{du}{dx} = f'(x)$

$\frac{du}{f'(x)} = dx$

$x = 0 \Rightarrow u = f(0) = 1$

$x = 1 \Rightarrow u = f(1) = 9$

1) رصدت محطة الارصاد الجوية درجة الحرارة C° في احدى المدن بعد منتصف الليل فتبين انه يمكن نمذجتها بالعلاقة C°

$$T(t)=3-\frac{1}{3}(t-5)^{2}$$

حيث t هو الوقت بعد منتصف الليل

اوجد متوسط درجة الحرارة في المدينة في الفترة من الساعة 8 صباحاً الى 5 مساءً (الساعة 17)

$$T_{ave} = \frac{1}{17-8}\int_{8}^{17} 3-\frac{1}{3}(t-5)^{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{9}\left[3t-\frac{1}{3}\frac{(t-5)^{3}}{3(1)}\right]_{8}^{17}$$

$$= -18$$

---

2) عند اجراء عملية لمريض يحقن بالبنج، وبعد مضي t ساعة يكون تركيز المخدر في دم المريض هو $C(t)$ حيث mg/cm^{2}

$$C(t)=\frac{3t}{(t^{2}+36)^{\frac{3}{2}}}$$

اوجد متوسط تركيز المخدر في الدم اثناء الساعات الثمانية الاولى بعد حقن المريض

$$C_{ave} = \frac{1}{8}\int_{0}^{8} 3t(t^{2}+36)^{-3/2}\,dt$$

$$u = t^{2}+36$$

$$\frac{du}{dt} = 2t$$

$$\frac{du}{2t} = dt$$

$$= \frac{1}{8}\int 3t\,u^{-3/2}\,\frac{du}{2t}$$

$$= \frac{3}{16}\int_{36}^{100} u^{-3/2}\,du$$

$$= \frac{3}{16}(-2)u^{-1/2}\Big]_{36}^{100}$$

$$= \frac{-3}{8\sqrt{u}}\Big]_{36}^{100} = \frac{-3}{8}\left[\frac{1}{\sqrt{100}}-\frac{1}{\sqrt{36}}\right] = \frac{1}{40}\ mg/cm^{3}$$

(1) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[0,1]$ فاثبت ان

$$(1)\ \int_0^1 f(1-x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\int_0^1 f(1-x)\,dx = \int_1^0 f(u)\,\frac{du}{-1}$$

$$= -\int_1^0 f(u)\,du = \int_0^1 f(u)\,du = \int_0^1 f(x)\,dx \ \#$$

$u = 1-x$

$\frac{du}{dx} = -1$

$-du = dx$

$x = 0 \Rightarrow u = 1$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

---

(2) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[0,a]$ فيمكن اثبات ان $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx = \frac{a}{2}$

استفد من العلاقة السابقة لتبين ان

$$(a)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

$f(x) =$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x)}\,dx$$

$f(x) = \sin x$

$x = \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{\pi/2}{2} = \pi/4$$

$$(b)\ \int_0^{10} \frac{\sqrt{10-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{10-x}}\,dx = 5$$

$$= \int_0^{10} \frac{\sqrt{10-x}}{\sqrt{10-x}+\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \int_0^{10} \frac{f(x)}{f(x)+f(10-x)}\,dx$$

$$= \frac{10}{2} = 5.$$

$f(x) = \sqrt{10-x}$

$a = 10$

$f(a-x) = \sqrt{10-(10-x)}$

$= \sqrt{x}$

اجابات الدرس الأول

الوحدة الخامسة

①
Ⓒ

$$\int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$$

---

②
Ⓑ

$$\int t^2\left(4t - \frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$= \int 4t^3 - 1 \, dt$$

$$= t^4 - t + c$$

---

③
Ⓒ

$$\int \cos^2 x - \sin^2 x \, dx$$

$$= \int \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{\sin 2x}{2} + c$$

---

④
Ⓒ

$$\int \frac{2}{x} + \frac{1}{\sqrt{e^{2x}}} \, dx$$

$$= \int \left(\frac{2}{x} + e^{-x}\right) dx$$

$$= 2\ln|x| + \frac{e^{-x}}{-1} + c \quad = 2\ln|x| - e^{-x} + c$$

---

⑤
Ⓐ

$$\int \frac{x^{1/3} - 3}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx = \int \frac{x^{1/3}}{x^{2/3}} - \frac{3}{x^{2/3}} \, dx$$

$$= \int x^{-1/3} - 3x^{-2/3} \, dx$$

$$= \frac{3}{2}x^{2/3} - 3 \cdot 3x^{1/3} + c.$$

$$= \frac{3}{2}x^{2/3} - 9x^{1/3} + c$$

الوحدة الخامسة . تابع اجابات الدرس الأول

⑥ Ⓓ

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+1|+c$$

---

⑦ Ⓐ

$$\int \sec x(\tan x - \sec x)\,dx$$

$$= \int \sec x \tan x - \sec^2 x)\,dx$$

$$= \sec x - \tan x + c$$

---

⑧ Ⓓ

$$\int \sin^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx.$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)+c = \frac{1}{4}(2x - \sin 2x)+c$$

---

⑨ Ⓐ

$$\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}\,dx.$$

$$= \int \frac{\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x)}{\cancel{(1-\sin x)}}\,dx$$

$$= \int 1+\sin x\,dx = x - \cos x + c$$

---

⑩ Ⓑ

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}\,dx = \int \frac{e^{2x}}{e^x} - \frac{1}{e^x}\,dx$$

$$= \int e^x - e^{-x}\,dx$$

$$= e^x - \frac{e^{-x}}{-1}+c = e^x + e^{-x}+c$$

الوحدة الخامسة .   تابع اجابات الدرس الأول

⑪ Ⓓ

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$$

$$= \ln|\sin x| + c$$

⑫ Ⓒ

$$\int \frac{3}{x^2+1} \, dx$$

$$= 3 \tan^{-1} x + c$$

⑬ Ⓐ

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^4 - x^2}} \, dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2(x^2-1)}} \, dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x^2}\sqrt{(x^2-1)}} \, dx = \int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \, dx$$

$$= \sec^{-1} x + c$$

⑭ Ⓒ

$$\int \frac{x^2 + e^{3x}}{x^3 + e^{3x}} \, dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{3(x^2 + e^{3x})}{x^3 + e^{3x}} \, dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 + 3e^{3x}}{x^3 + e^{3x}} \, dx$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{Ln} |x^3 + e^{3x}| + c.$$

⑮ Ⓐ

$$\int e^{x^2 + \ln 2x} \, dx = \int e^{x^2} \cdot e^{\ln 2x} \, dx$$

$$= \int e^{x^2} \cdot 2x \, dx = \int 2x \, e^{x^2} \, dx.$$

$$= e^{x^2} + c$$

تابع اجابات الدرس الأول الوحدة الخامسة.

⑯ Ⓐ

$$\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \tan^{-1}x + \frac{1}{2}\ Ln\left|1+x^2\right| + c$$

---

⑰ Ⓐ

$$\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x}\,dx = \int \frac{\sec^3 x}{\sec x} + \frac{e^{\sin x}}{\sec x}\,dx$$

$$= \int \sec^2 x + \cos e^{\sin x}\,dx$$

$$= \tan x + e^{\sin x} + c$$

---

⑱ Ⓓ

$$\int 3x e^{x^2+1}\,dx = 3\int x\,e^{x^2+1}\,dx.$$

$$= \frac{3}{2}\int 2x\,e^{x^2+1}\,dx.$$

$$= \frac{3}{2}\ e^{x^2+1} + c$$

---

⑲ Ⓑ

$$\int \csc^2 x\,\cos x\,dx$$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$= \int \csc x\cdot\cot x\,dx$$

$$= -\csc x + c.$$

تابع اجابات الدرس الأول

الوحدة الخامسة .

⑳ Ⓒ

$$\int \frac{t+1}{t+2}\,dt.$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ t+2 \overline{) \, t+1} \\ \ominus t \overset{\ominus}{+} 2 \\ \hline -1 \end{array}$$

$$= \int 1 - \frac{1}{t+2}\,dt = t - \operatorname{Ln}|t+2| + c.$$

㉑ Ⓒ

$$\int \frac{x}{x+2}\,dx = \int \frac{x+2-2}{x+2}\,dx.$$

$$= \int \frac{x+2}{x+2} - \frac{2}{x+2}\,dx.$$

$$= \int 1 - \frac{2}{x+2}\,dx.$$

تحليل قسمة مطولة

$$= x - 2\ln|x+2| + c$$

㉒ Ⓐ

$$\int \frac{1}{2x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \sec x \tan x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Ln}|x| + \sec x + c.$$

㉓ Ⓐ

$$\int \left(1 + e^{\tan x}\right)\sec^2 x\,dx$$

$$= \int \sec^2 x + \sec^2 x\, e^{\tan x}\,dx.$$

$$= \tan x + e^{\tan x} + c$$

الوحدة الخامسة.

تابع اجابات الدرس الأول

24

(A)

$$\int \sec x dx = \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx.$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + c$$

25

(A)

$$\int \sin x + x \cos x) dx$$

$$= \int \frac{d}{dx}(x \sin x) dx$$

المشتقة تلغي التكامل

$$= x \sin x + c$$

26

(B)

$$\int \frac{1}{e^x+1} dx = \int \frac{1 \cdot e^{-x}}{(e^x+1)e^{-x}} dx.$$

$$= \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$= -\int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} dx.$$

$$= -\text{Ln}|1+e^{-x}| + c.$$

حل السؤال بالضرب والقسمة $\frac{e^{-x}}{e^{-x}}$

27

(B)

$$F(x) = \int f(x) dx = \int 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$= x^2 + \sqrt{x} + c.$$

$$F(1) = 3 \Rightarrow 3 = 1 + 1 + c \Rightarrow c = 1 \Rightarrow F(x) = x^2 + \sqrt{x} + 1$$

$$F(4) = 4^2 + \sqrt{4} + 1 = 19$$

تابع حل الدرس الأول

الوحدة الخامسة .

㉘ ⓒ

$$\int \frac{bx^2+10}{x^3+5x+1}\,dx = 2\ln|x^3+5x+1|$$

نشتق $\Downarrow$ نشتق $\Downarrow$

$$\frac{bx^2+10}{x^3+5x+1} = \frac{2(3x^2+5)}{x^3+5x+1}$$

تعلم حل السؤال بأكثر طريقة

$\boxed{b=6}$ من المقارنة يتضح ان قيمة b هي 6

㉙ Ⓑ

$$\int \frac{bx}{x^4+1}\,dx = \tan^{-1}x^2 + c$$

. نشتق

$$\frac{bx}{x^4+1} = \frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot 2x \Rightarrow b=2$$

㉚ ⓒ

$$\int (3x^2+f(x))\,dx = x^3+\sin x + c$$

نشتق $\Downarrow$ نشتق $\Downarrow$

$$3x^2+f(x) = 3x^2+\cos x$$

$f(x)=\cos x$ بالمقارنة يتضح ان

㉛ ⓒ

$$\int \tan x \sec^n x = \frac{1}{3}\sec^3 x + c$$

نشتق $\Downarrow$ نشتق $\Downarrow$

$$\tan x \sec^n x = \sec^2 x\cdot \sec x \tan x$$

$$\tan x \sec^n x = \sec^3 x \tan x$$

$\boxed{n=3}$ بالمقارنة يتضح ان قيمة n

تابع حل الدرس الأول الوحدة الخامسة

يمكن حل السؤال بأكثر من طريقة (32) (A)

$$d = 41\cdot(1-0) + 41(2-1) + 42(3-2) + 46(4-3)$$

متوسط سرعة الفترة الأولى

$$= 178$$

* أي جواب قريب منه 170 يكون صح

---

(33) (D)

$$f'(x) = 3e^{x} + 2x$$

$$f(x) = \int 3e^{x} + 2x \, dx$$

$$= 3e^{x} + x^{2} + c$$

$$f(0) = 4 \Rightarrow c = 1$$

$$f(x) = 3e^{x} + x^{2} + 1$$

---

(34) (C)

$$s(t) = \int 10t + 2 \, dt$$

$$= 5t^{2} + 2t + c$$

$$s(0) = 10 \Rightarrow c = 10$$

$$\therefore s(t) = 5t^{2} + 2t + 10$$

---

(35) (B)

$$a(t) = 12t^{2} + 4 \quad , \quad v(0) = 4 \quad , \quad s(0) = 1$$

$$v(t) = \int 12t^{2} + 4 \, dt$$

$$= 4t^{3} + 4t + c_1$$

$$v(0) = 4 \Rightarrow c_1 = 4$$

$$v(t) = 4t^{3} + 4t + 4$$

$$s(t) \int 4t^{3} + 4t + 4 \, dt = t^{4} + 2t^{2} + 4t + c_2$$

$$s(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1 \Rightarrow s(t) = t^{4} + 2t^{2} + 4t + 1$$

$$s(2) = 2^{4} + 2(2)^{2} + 4(2) + 1$$

$$= 33$$

㊱ Ⓑ

$v'(t) = f(t) = 20(t^2-1)$

$v(t) = \int 20(t^2-1)\,dt$

$= 20(\frac{1}{3}t^3-1) + c.$

$v(0) = 200. \Rightarrow c = 180$

$v(t) = 20(\frac{1}{3}t^3-1) + 180 \Rightarrow v(3) = 320$

㊲ Ⓐ

$f''(x) = 6x \quad , \quad f(0) = 1 \quad , \quad f'(0) = 0$

$f'(x) = \int 6x\,dx$

$= 3x^2 + c_1$

$f'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

$f(x) = \int 3x^2\,dx.$

$= x^3 + c_2$

$f(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1 \Rightarrow f(x) = x^3 + 1$

㊳ Ⓐ

$c'(x) = \frac{200}{\sqrt{x}} \quad , \quad c(1) = 1600$

$c'(x) = 200\,x^{-\frac{1}{2}}$

$c(x) = \int 200\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 200(2)\,x^{\frac{1}{2}} + c$

$= 400\,x^{\frac{1}{2}} + c$

$c(1) = 1600 \Rightarrow c = 1200$

$c(x) = 400\sqrt{x} + 1200$

$c(100) = 400\sqrt{100} + 1200$

$= 4000 + 1200$

$= 5200$

الوحدة الخامسة .

اجابات الدرس الثاني

①

Ⓒ

$$\sum_{i=2}^{7}(4i-3) = 5+9+13+17+21+25$$

②

Ⓑ

$$2+5+8+11+\cdots+65$$

$$= \sum_{i=1}^{22.} 3i-1$$

حسابية

$a_1 = 2$

$d = 3.$

$a_i = a_1 + (i-1)d$

$= 2 + (i-1)3$

$= 2 + 3i - 3$

$= \underbrace{3i-1}$

$3i-1 = 65$

$3i = 66$

$i = 22$

③

Ⓓ

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots \frac{1}{900}$$

$$= \sum_{i=1}^{30} \frac{(-1)^{i+1}}{i^2}$$

④

Ⓐ

$$\sum_{i=1}^{20} 2i+1 = 2\sum_{i=1}^{20} i + \sum_{i=1}^{20} 1$$

$$= 2 \cdot \frac{20(21)}{2} + 20(1)$$

$$= 440$$

تابع اجابات الدرس الثاني

الوحدة الخامسة

⑤ ⓒ

$$\sum_{i=1}^{20}(i-1)(i+1) = \sum_{i=1}^{20} i^2-1$$

$$= \sum_{i=1}^{20} i^2 - \sum_{i=1}^{20} 1$$

$$= \frac{20(21)(41)}{6} - 20(1)$$

⑥ Ⓑ

$$\sum_{i=1}^{20} i^2 - \sum_{i=1}^{4} i^2 = \sum_{i=5}^{20} i^2$$

⑦ Ⓑ

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2} + n(1)\right]$$

$$= \frac{n+1}{2n} + \frac{1}{n} = \frac{n+1+2}{2n} = \frac{n+3}{2n}$$

⑧ Ⓒ

$$\lim_{n\to\infty} \sum \frac{i^2}{n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

تابع اجابات الدرس الثاني

الوحدة الخامسة

⑨ Ⓐ

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2$$

$$= \sum_{i=1}^{20} i^2 = 2.870$$

---

⑩ Ⓑ

$$\sum_{i=1}^{10} (2i + c) = 140$$

$$2\,\frac{(10)(11)}{2} + 10c = 140$$

$$110 + 10c = 140 \rightarrow c = 3$$

---

⑪ Ⓐ

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^i = \frac{1/e}{1 - 1/e}$$

$$= \frac{1/e}{\frac{e-1}{e}} = \frac{1}{e-1}$$

---

⑫ Ⓒ

المطلوب $f(0.1) + f(0.2) + \cdots + f(10)$

$$= \sum_{i=1}^{100} f(0.1i)$$

$$= \sum_{i=1}^{100} 0.3i + 1$$

$$= 0.3\,\frac{(100)(101)}{2} + 100(1)$$

$$= 1615$$

قيم x_i حسابية

$x_i = 0.1i$

$0.1i = 10$

$i = 100$

$f(0.1i)$

$= 3(0.1i) + 1$

$= 0.3i + 1$

الوحدة الثانية تابع اجابات الدرس الثاني

(13)

Ⓑ

المطلوب

$f(0.1) + f(0.2) + \cdots + f(4)$

$= \sum_{i=1}^{40} f(0.1 i)$

$= \sum_{i=1}^{40} 0.01 i^2$

$= 0.01 \frac{(40)(41)(81)}{6}$

$= 221.4.$

قيم x_i هي

$x_i = 0.1 i$

$0.1 i = 4$

$i = \frac{4}{0.1} = 40$

$f(x) = x^2$

$f(0.1 i) = (0.1 i)^2$

$= 0.01 i^2$

الوحدة الخامسة .　　　　　　　　　　　　　　　اجابات الدرس الثالث

① عدد العناصر 15 فإن $n=14$

Ⓐ

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-^{-}1}{14} = \frac{3}{14}.$$

---

② $n=10 \Rightarrow \Delta x = \frac{2-0}{10} = \frac{2}{10}.$

Ⓒ

$$P = \left\{0, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, ---, 2\right\}$$

---

③ $n=30 \Rightarrow$ ....　　العنصر السابع هو x_6.

Ⓑ

$$x_6 = a + \frac{b-a}{n} i$$

$$= 2 + \frac{5-2}{30}(6)$$

$$= 2 + \frac{3}{30}(6)$$

---

④ $n=4.$, $\Delta x = \frac{4-0}{4} = 1$

Ⓒ

$$P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$A \approx \Delta x \left[f(1) + f(2) + f(3) + f(4)\right]$$

$$= 1\left[3 + 12 + 27 + 48\right] = 90$$

---

⑤ Ⓐ

$$A \approx \Delta x \left[f(0) + f(0.25) + f(0.50) + f(0.75)\right]$$

$$= 0.25\left[2 + 2.2 + 1.6 + 1.4\right]$$

$$= 1.8$$

تابع اجابات الدرس الثالث

الوحدة الخامسة

⑥

Ⓒ

$A \approx \Delta x\left[f(0.1) + f(0.2) + \cdots + f(0.8)\right]$

$= \quad 2.4+2.6+2.7+2.6+2.4+2+1.4+0.6]$

$= 1.67$

---

⑦

Ⓑ

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

$= \sum_{i=1}^{5} f(0.4i)\cdot 0.4$

$= \sum_{i=1}^{5} (1.2i+5)\; 0.4$

$= 0.4\left[1.2\cdot\frac{5(6)}{2}+5(5)\right]$

$= 17.2$

$x_i = 0.4i$

$f(0.4i)$

$= 3(0.4i)+5$

$= 1.2i+5$

---

⑧

Ⓒ

$A \approx \sum_{i=1}^{16} f(c_i)\,\Delta x$

$= \sum_{i=1}^{16} \frac{1}{2}i\;\frac{1}{4}$

$= \frac{1}{8}\cdot\frac{16(17)}{2}$

$= 17$

$n = 16$

$\Delta x = \frac{4-0}{16} = \frac{1}{4}$

$x_i = 0 + \frac{1}{4}i$

$= \frac{1}{4}i$

$c_i = x_i$

$= \frac{1}{4}i$

$f(c_i) = 2\left(\frac{1}{4}i\right)$

$= \frac{1}{2}i$

⑨ Ⓐ

$$\Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}.$$

$$c_i = x_i = 0 + \frac{4}{n} i$$
$$= \frac{4}{n} i$$

$$f(x_i) = \left(\frac{4}{n} i\right)^2$$
$$= \frac{16}{n^2} i^2$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{16}{n^2} i^2 \frac{4}{n}.$$

$$= \lim \frac{64}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

---

⑩ Ⓑ

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1/3 .$$

---

⑪ Ⓐ

$n = 2 \quad , \quad c_i = \{c, d\}$

$$\sum_{i=1}^{2} f(c_i)\,\Delta x = \frac{2}{3}.$$

$$\Delta x \sum_{i=1}^{2} f(c_i) = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1-0}{2}\left[f(c) + f(d)\right] = 2/3$$

$$\frac{1}{2}\left[c^2 + d^2\right] = \frac{2}{3} \Rightarrow c^2 + d^2 = 4/3$$

اجابات الدرس الرابع — الوحدة الخامسة .

① Ⓑ

$$\int_3^1 [2f(x) - g(x)]\,dx$$

$$= -\int_1^3 [2f(x) - g(x)]\,dx$$

$$= -[2(3) - -2] = -8.$$

---

② Ⓑ

$$\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^1 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx - \int_1^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx.$$

عكس الحل بخط التكامل

---

③ Ⓑ

$$\int_1^7 (g(x)+1)\,dx = 10$$

$$\int_1^7 g(x)\,dx + \int_1^7 1\,dx = 10$$

$$\int_1^7 g(x)\,dx + 6 = 10 \Rightarrow \int_1^7 g(x)\,dx = 4$$

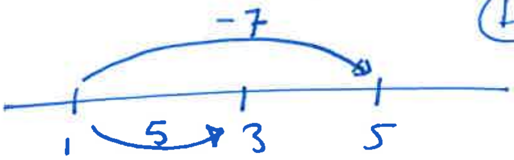
$$\therefore 3\int_7^1 g(x)\,dx = 3(-4) = -12$$

---

④ Ⓓ

$$\int_3^5 f(x)\,dx = -7 - 5 = -12$$

بخط التكامل.



تابع اجابات الدرس الرابع　　　　الورقة الخامسة .

⑤ Ⓑ

$$3k+10=-2$$

$$3k=-12$$

$$k=-4$$

---

⑥ Ⓒ

عندما $x=3$ تكون

$$\int_6^{2(3)} f(t)\,dt = \cos(3-3)+k.$$

$$0 = 1+k \Rightarrow k=-1$$

---

⑦ Ⓑ

عندما $x=1$ فان

$$\int_2^2 f(t)\,dt = 4(1)^2+b(1)-1$$

$$0 = 4+b-1$$

$$b=-3$$

---

⑧ Ⓓ

$$\int_0^3 (3x^2+k)\,dx = 3.$$

$$x^3\Big]_0^3 + k(3-0) = 3.$$

$$27+3k=3$$

$$3k=-24 \rightarrow k=-8$$

---

⑨ Ⓒ

$$\int_3^5 [f(x)+g(x)]\,dx$$

$$= \int_3^5 [g(x)+7+g(x)]\,dx$$

$$= \int_3^5 2g(x)\,dx + \int_3^5 7\,dx = 2\int_3^5 g(x)\,dx + 14$$

اللوحة الخامسة .

تابع اجابات الدرس الرابع

⑩ Ⓑ

$$\int_1^c (2x-1)\,dx + K = \int_5^c (2x-1)\,dx$$

$$\int_1^c (2x-1)\,dx - \int_5^c (2x-1)\,dx = -K.$$

$$\int_1^c (2x-1)\,dx + \int_c^5 (2x-1)\,dx = -K.$$

$$\int_1^5 (2x-1)\,dx = -K.$$

$$x^2 - x\Big]_1^5 = -K$$

$$20 = -K \Rightarrow K = -20.$$

⑪ Ⓓ

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}x\Big]_0^1 = \tan^{-1}1 - \tan^{-1}0$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

⑫ Ⓑ

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,(x+1)\,dx = \int_0^1 x^{3/2} + x^{1/2}\;dx$$

$$= \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15}$$

⑬ Ⓑ

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\ln|x^2+1|\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2$$

$$= \ln 2^{1/2}$$

$$= \ln\sqrt{2}$$

الوحدة الخامسة .

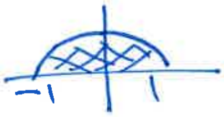
تابع اجابات الدرس الرابع

⑭ Ⓒ

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

نصف مساحة دائرة

نصف قطرها 1



$$= \frac{1}{2}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{2}$$

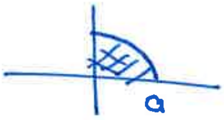
---

⑮ Ⓓ

$$\int_{0}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

مساحة ربع دائرة

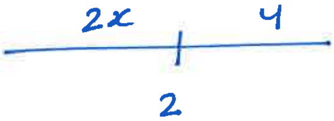
نصف قطرها a



$$= \frac{1}{4}\pi(a)^2 = \frac{\pi a^2}{4} = \frac{1}{4}\pi a^2$$

---

⑯ Ⓒ



$$\int_{0}^{4} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{4} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{2} 2x\,dx + \int_{2}^{4} 4\,dx$$

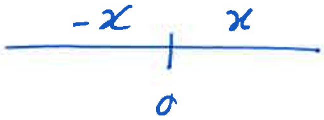
$$= x^2\Big]_{0}^{2} + 8 = 12$$

---

⑰ Ⓒ

$$\int_{-2}^{2} |x|\,dx$$

$|x|$



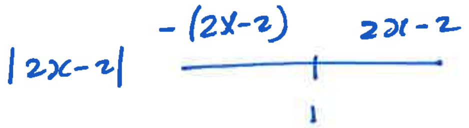
$$= \int_{-2}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}\Big]_{-2}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big]_{0}^{2}$$

$$= 4$$

الوحدة الخامسة .   تابع اجابات الدرس الرابع

⑱ Ⓓ



$$\int_0^3 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 -(2x-2)\,dx + \int_1^3 2x-2\,dx$$

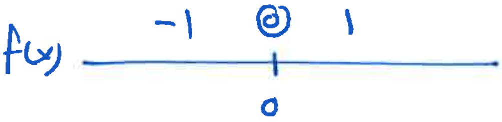
$$= -(x^2-2x)\Big]_0^1 + x^2-2x\Big]_1^3$$

$$= 5$$

---

⑲ Ⓐ

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



$$\int_{-5}^3 f(x)\,dx$$

$$= \int_{-5}^0 f(x)\,dx + \int_0^3 f(x)\,dx$$

$$= \int_{-5}^0 -1\,dx + \int_0^3 1\,dx$$

$$= -5+3 \quad = -2$$

---

⑳ Ⓑ

$$f_{av} = \frac{1}{2-0}\int_0^2 3x^2\,dx = \frac{1}{2}(8) = 4.$$

$$f(c) = f_{av}$$

$$3c^2 = 4$$

$$c^2 = \frac{4}{3}$$

$$c = +\sqrt{\frac{4}{3}} = +\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$c = -\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

مرفوض خارج الفترة .

الوحدة الخامسة .   تابع اجابات الدرس الرابع

㉑ Ⓑ

$f(c) = f_{ave}$

$3c^2+1 = 17$

$3c^2 = 16.$

$c^2 = \frac{16}{3}$

$c = +\sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ ✓

$, \ c = -\sqrt{\frac{16}{3}} = -\frac{4}{\sqrt{3}}$ مرفوض

㉒ Ⓓ

$f_{ave} = \frac{1}{2-0}\int_0^2 4x^3\,dx = 8$

$f(c) =$

$4c^3 = 8$

$c^3 = 2 \Rightarrow c = \sqrt[3]{2}$

㉓ Ⓓ

$f_{ave} = \frac{1}{2\pi - 0}\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$

$f(c) = f_{ave}$

$\sin c = 0 \Rightarrow c = 0 \ , \ c = \pi \ , \ c = 2\pi$

مرفوض ✓ مرفوض

㉔ Ⓓ

$f_{ave} = \frac{1}{k}\int_0^k \sqrt{x}\,dx$

$= \frac{1}{k}\int_0^k x^{1/2}\,dx$

$= \frac{1}{k}\left.\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^k$

$\frac{1}{k}\cdot\frac{2}{3}k^{3/2}$

$\frac{2}{3}k^{1/2} = 2$

$\sqrt{k} = 3$

$k = 9$

الوحدة الثالثة .

تابع اجابات الدرس الرابع

㉕

Ⓑ

عرض المستطيل $= f(c) = f_{ave}$

$$= \frac{1}{2-^-2}\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{8}{3}\ .$$

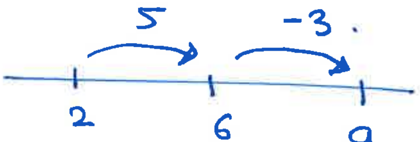
$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$

عرض المستطيل

طول المستطيل

㉖

Ⓑ



$$f_{ave} = \frac{1}{9-2}\int_{2}^{9} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{7}\left[\ 5 + {}^-3\right] = \frac{2}{7}.$$

㉗

Ⓒ

$$|f(x)| < 0.1$$

$$-0.1 \le f(x) \le 0.1$$

$$\int_{-1}^{2} -0.1\,dx \le \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \le \int_{-1}^{2} 0.1\,dx$$

$$-0.3 \le \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \le 0.3$$

اقل قيمة

-0.3 .

تابع إجابات الدرس الرابع

اللوحة الخامسة .

㉘ Ⓒ

$0 \le x \le 1$

$0 \le x^2 \le 1$

$-1 \le -x^2 \le 0$

$e^{-1} \le e^{-x^2} \le e^{0}$

$1/e \le e^{-x^2} \le 1$

$$\int_0^1 1/e \, dx \le \int_0^1 e^{-x^2} dx \le \int_0^1 1 \, dx$$

$$1/e \le \int_0^1 e^{-x^2} dx \le 1$$

الحدود هي 1 و $1/e$

㉙ Ⓐ

$0 \le x \le \pi$

$0 \le \sin x \le 1$

$1 \le 1+\sin x \le 2$

$1 \le \sqrt{1+\sin x} \le \sqrt{2}$

$$\int_0^\pi 1 \, dx \le \int_0^\pi \sqrt{1+\sin x} \, dx \le \int_0^\pi \sqrt{2} \, dx$$

$$\pi \le \int_0^\pi \sqrt{1+\sin x} \, dx \le \sqrt{2}\pi$$

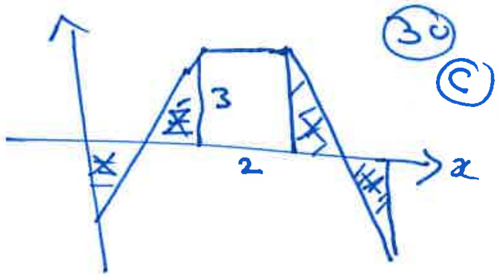
الحدود $\sqrt{2}\pi$ ، π

㉚ Ⓒ

$$\int_0^7 f(x) \, dx = 2 \times 3 = 6$$

مساحة المستطيل

بعد حذف المساحات المتساوية



㉛ Ⓒ

$$\int_{-2}^{2} f(x) \, dx = -A_1 + A_2$$

$$= -\frac{1}{2}(2)(2) + 4$$

$$= 2$$

㉜ Ⓒ

$$\int_0^3 f(x) \, dx \le \int_0^2 f(x) \, dx \le \int_0^1 f(x) \, dx$$

* ممكن افتراض مساحات من عندك منطقية .

الوحدة الخامسة. تابع اجابات الدرس الرابع

㉝
Ⓑ

$$A_1 + A_2 + A_3 = 13$$

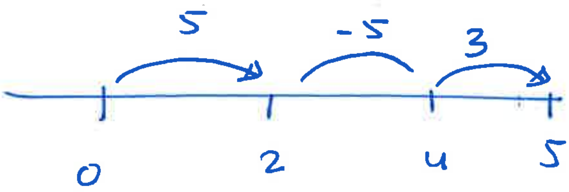
$$A_1 = A_2$$

$$2A_1 + A_3 = 13.$$

$$A_1 - A_2 + A_3 = 3$$

$$\Rightarrow A_3 = 3.$$

$$\Rightarrow A_1 = 5.$$



$$\Rightarrow \int_2^4 f(x)\,dx = -5$$

㉞
Ⓓ

$$\text{Lim} \sum_{i=1}^{\infty} \sin c_i^2 \, \Delta x = \int_0^2 \sin x^2 \, dx.$$

㉟
Ⓑ

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} 2 + \frac{3(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$= 2 + \frac{6}{6} = 3$$

㊱
Ⓓ

$$\int_2^5 x^2 \, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= \text{Lim} \sum \left(2 + \frac{3}{n} i\right)^2 \cdot \frac{3}{n}$$

$$\Delta x = \frac{5-2}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_i = 2 + \frac{3}{n} i$$

$$f(x_i) = \left(2 + \frac{3}{n} i\right)^2$$

㊲
Ⓑ

$$\text{Lim} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_0^2 3x^2 \, dx = x^3 \Big]_0^2 = 8$$

الورقة الخامسة.

تابع اجابات الدرس الرابع

(38)

(D)

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{6}{n} i + 1\right)\frac{1}{n}$$

$$= \lim \frac{1}{n}\left[\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

$$= \lim \frac{1}{n}\left[\frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n\right]$$

$$= \text{Lim}\ \frac{3(n+1)}{n} + 1 = 4.$$

---

(39)

(A)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{2i}{n}} \cdot \frac{2}{n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e^{x_i} \cdot \Delta x$$

$$= \int_0^2 e^{x}\,dx.$$

$$= e^{x}\Big]_0^2 = e^{2} - 1$$

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$

$b-a=2$

$a=0$ نفرض

$\Rightarrow b=2$

$x_i = 0 + \Delta x i$

$= \frac{2}{n} i$

---

(40)

(D)

يمكن حل السؤال بأكثر من طريقة.

$$f(x) = \frac{3}{x^3+2}.$$

$$f'(x) = \frac{-3(3x^2)}{(x^3+2)^2}$$

$$= \frac{-9x^2}{(x^3+2)^2} < 0$$

∴ الدالة متناقصة.

$$f(1) \leq f(x) \leq f(-1)$$

$$1 \leq f(x) \leq 3.$$

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx \leq \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq \int_{-1}^{1} 3\,dx$$

$$2 \leq \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq 6$$

تابع اجابات الدرس الرابع

الوحدة الخامسة .

㊶

Ⓓ

$$\int_1^8 \sqrt{x^{-2/3}}\,dx$$

$$= \int_1^8 \sqrt{(x^{-1/3})^2}\,dx$$

$$= \int_1^8 |x^{-1/3}|\,dx$$

$$= \int_1^8 x^{-1/3}\,dx.$$

$$= \frac{3}{2}\,x^{2/3}\Big]_1^8$$

$$= \frac{9}{2}$$

الوحدة الخامسة.　　　　　　　　اجابات الدرس الخامس

①
Ⓑ

$$\int_{-1}^{1} \frac{4}{1+x^2}\, dx = 4\tan^{-1} x \Big]_{-1}^{1}$$

$$= 4[\tan^{-1} 1 - \tan^{-1}(-1)] = 2\pi$$

②
Ⓑ

$$\int_0^t \sin^2 x + \cos^2 x\, dx = \int_0^t 1\, dx = t$$

③
Ⓐ

$$\int_1^e \frac{t-3}{t}\, dt = \int_1^e 1 - \frac{3}{t}\, dt = t - 3\ln t \Big]_1^e$$

$$= (e-3) - (1) = e-4.$$

④
Ⓑ

$$\int_0^{1/2} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 3\sin^{-1} x \Big]_0^{1/2} = 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

⑤
Ⓐ

$$\int_1^4 \left(x\sqrt{x} + \frac{3}{x}\right) dx = \int_1^4 x^{3/2} + \frac{3}{x}\, dx$$

$$= \frac{2}{5} x^{5/2} + 3\ln x \Big]_1^4 = \frac{64}{5} + 3\ln 4 - \frac{2}{5} = \frac{62}{5} + 3\ln 4$$

⑥
Ⓓ

$$\int_0^2 \frac{e^{2x} - 2e^{3x}}{e^{3x}}\, dx = \int_0^2 (e^{-x} - 2)\, dx$$

$$= -e^{-x} - 2x \Big]_0^2 = -e^{-2} - 4 - (-1) = -1/e^2 - 3$$

تابع اجابات الدرس

⑦ Ⓒ

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\pi/4} \sec x \tan x \, dx$$

$$= \sec x \Big]_0^{\pi/4} = \sec\frac{\pi}{4} - \sec 0$$

$$= \sqrt{2} - 1$$

---

⑧ Ⓒ

$$f(x) = \int_x^2 \sec t \, dt = -\int_2^x \sec t \, dt$$

$$f'(x) = - \sec x .$$

---

⑨ Ⓐ

$$f(x) = \int_1^2 (t^3 - 5t)\, dt$$ تكامل محدد

$$f'(x) = 0$$

---

⑩ Ⓓ

$$f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sin 3t \, dt .$$

$$f'(x) = \sin 3x^3 \cdot 3x^2 - \sin 3x^2 \cdot 2x .$$

$$= 3x^2 \sin 3x^3 - 2x \sin 3x^2$$

---

⑪ Ⓑ

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{t^2+1}\, dt$$

$$= \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$$

تابع اجابات الدرس الخامس   الوحدة الخامسة .

⑫ Ⓑ

$$\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$=\sqrt{1-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)-\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\cos x$$

$$=\sqrt{\sin^2 x}\cdot(-\sin x)-\sqrt{\cos^2 x}\cdot\cos x$$

$$=|\sin x|\,(-\sin x)-|\cos x|\cdot\cos x$$

$$=\sin x\cdot(-\sin x)-\cos x\cdot\cos x$$

$$=-\sin^2 x-\cos^2 x=-(\sin^2 x+\cos^2 x)=-1 \quad \#$$

---

⑬ Ⓓ

$$f(x)=5+\int_{2}^{2x}e^{-t^2}\,dt\,.$$

$$f'(x)=e^{-(2x)^2}\cdot 2=2e^{-4x^2}\quad,\quad f(1)=5$$

---

⑭ Ⓐ

$$\int_{1}^{3}2x\,dx=F(3)-F(1)$$

$$x^2\Big]_1^3=F(3)-5$$

$$8=F(3)-5\Rightarrow F(3)=13$$

---

⑮ Ⓐ

$$h(x)=\int_{1}^{g(x)}f(t)\,dt$$

$$h'(x)=f(g(x))\cdot g'(x).$$

$$h'(3)=f(g(3))\cdot g'(3)$$

$$=f(4)\cdot 2$$

$$=-1\cdot 2=-2$$

الوحدة الخامسة اجابات الدرس الخامس

⑯ Ⓑ

$$\int_1^x f(t)\,dt = e^{\sin 2x} - \ln \cos x - 1$$

اشتق الطرفين

$$f(x) = e^{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2 - \frac{-\sin x}{\cos x}$$

$$f(0) = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 0$$

$$= 2$$

---

⑰ Ⓐ

$$\int_{-1}^{2} f'(x)\,dx = x^3 + 9x \Big]_{-1}^{2}$$

$$f(2) - f(-1) = x^3 + 9x \Big]_{-1}^{2}$$

$$f(2) - f(-1) = 26 - (-10)$$

$$7 - f(-1) = 36$$

$$-f(-1) = 36 - 7 \Rightarrow f(-1) = -29$$

---

⑱ Ⓓ

$$\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^x e^{t^2}\,dt}{x^2 - 1} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{e^{x^2}}{2x} = \frac{e}{2}$$

من لوبيتال

---

⑲ Ⓓ

$$\int_0^{2x} f(t)\,dt = 3x^3 - x + 5$$

اشتق الطرفين

$$f(2x) \cdot 2 = 9x^2 - 1$$

$$f(2) \cdot 2 = 9(1)^2 - 1 = 8$$ عند $x = 1$

$$f(2) = 4$$

---

⑳ Ⓑ

$$\int_0^K 2Kx - x^2\,dx = 18$$

$$2K\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^K = 18$$

$$K^3 - \frac{K^3}{3} = 18$$

$$\frac{2K^3}{3} = 18$$

$$K^3 = 27$$

$$K = 3$$

اللوحة الخامسة .   تابع اجابات الدرس الخامس

㉑ Ⓒ

$$\int_{1}^{2x} f(t)\,dt = 2x^2 - 2x + 1$$

ا اشتق الطرفين

$$f(2x)\cdot 2 = 4x - 2 .$$

$$f(2x) = 2x - 1 .$$

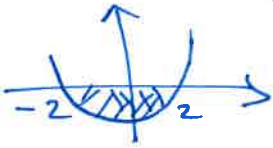
$$f(u) = u - 1$$

$$f(x) = x - 1 .$$

㉒ Ⓑ

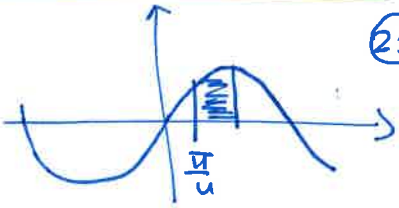
$$A = \int_{-2}^{2} -(x^2 - 4)\,dx .$$

$$= -\int_{-2}^{2} x^2 - 4 \, dx$$



㉓ Ⓒ

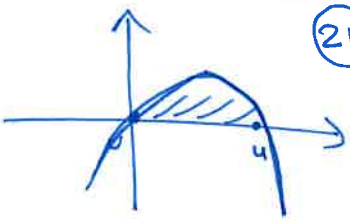
$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2} \sin x \, dx = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



㉔ Ⓑ

$$A = \int_{0}^{4} 4x - x^2 \, dx$$

$$= 2x^2 - \frac{x^3}{3} \Big]_0^4 = \frac{32}{3}$$



㉕ Ⓑ

$$H(1) = \int_{1}^{1} 2t - 1 \, dt = 0 \Rightarrow (1, 0)$$

$$H'(x) = (2x^2 - 1)\cdot 2x \Rightarrow m = H'(1) = 2$$

$$y - 0 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 2$$

الوحدة الخامسة

تابع اجابات الدرس الخامس

㉖ Ⓓ

$$\int_{-1}^{3}(f(x)+1)\,dx = \int_{-1}^{3} f(x)\,dx + \int_{-1}^{3} 1\,dx$$

$$= F(3) - F(-1) + 4.$$

$$= 2 - (-4) + 4 .$$

$$= 10$$

㉗ Ⓐ ملاحظ

الدالة

$v(x) = 9(1-e^{-t})$

دائما موجب

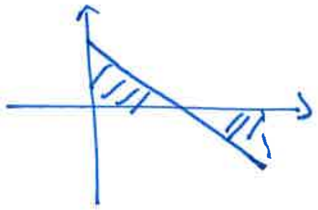
$$d = \int_{0}^{5} 9(1-e^{-t})\,dt$$

$$= 9\left(t - \frac{e^{-t}}{-1}\right)\Big]_{0}^{5}$$

$$\approx 36.$$

㉘ Ⓓ

المسافة = المساحة الكلية .



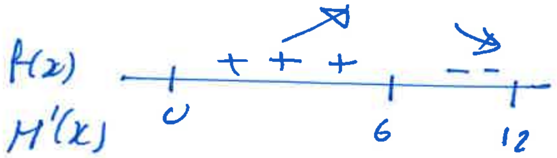
$$\frac{1}{2}(3)(96) + \frac{1}{2}(3)(96)$$

$$= 288$$

㉙ Ⓐ

$$H(x) = \int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

$$H'(x) = f(x).$$



$(0, 6)$ فترة التزايد

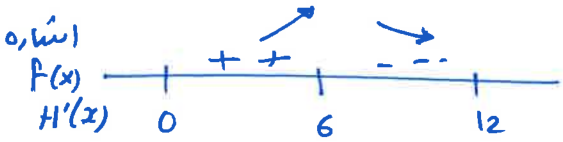
تابع اجابات الدرس الخامس

الوحدة الخامسة .

(30)

(B)

$H'(x) = f(x)$



القيمة العظمى للدالة H(x) عند $x = 6$.

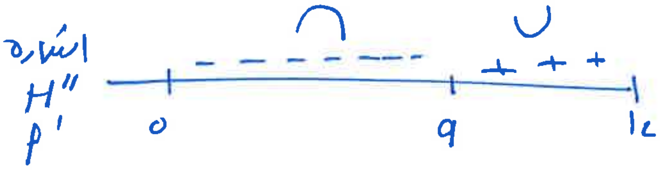
---

(31)

(C)

$H'(x) = f(x)$

$H''(x) = f'(x)$



الدالة f متناقصة
على الفترة (0, 9)
لذلك فان $f' < 0$

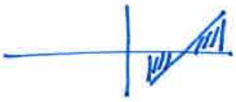
فترة التقعر للاعلى للدالة H(x) هي (9, 12)

---

(32)

(B)

$H(3) = \int_1^3 f(t)\,dt = 0$



المساحة متساوية

---

(33)

(C)

$H(x) = \int_1^x f(t)\,dt.$

$H'(x) = f(x) . \Rightarrow H'(4) = f(3) = 2$

---

(34)

(B)

$f_{ave} = \frac{1}{6-1} \int_1^6 f(t)\,dt.$

$= \frac{1}{5} [\ 5\ ] = 1.$

عدد المربعات .

㉟ Ⓑ

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$g'(x) = f(x).$$

الاجابة B

㊱ Ⓑ

نفرض ان $F(x) - G(x) = c.$

$$\int_0^4 (F(x) - G(x))\,dx = 12$$

$$\int_0^4 c\,dx = 12$$

$$4c = 12 \Rightarrow c = 3. \Rightarrow F(x) - G(x) = 3.$$

$$\int_0^4 (F(x) - G(x))\,x^2\,dx$$

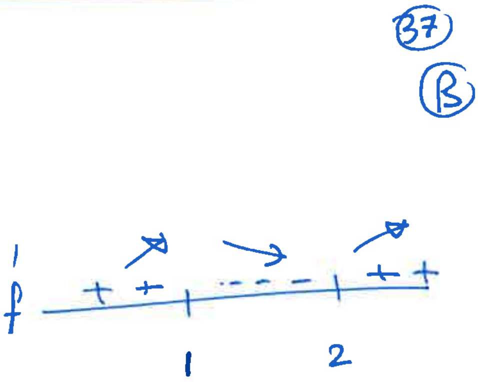
$$= \int_0^4 3x^2\,dx = 64.$$

㊲ Ⓑ

$$f(x) = \int_0^x t^2 - 3t + 2\,dt$$

$$f'(x) = x^2 - 3x + 2.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1, 2$$



القيمة العظمى للدالة $f(x)$ عند $x = 1$

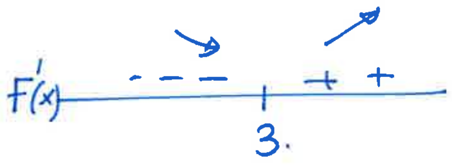
الوحدة الخامسة. تابع اجابات الدرس الخامس

㊳ Ⓑ

$$F(x) = \int_{-2}^{x^2-6x} e^t \, dt.$$

$$F'(x) = e^{x^2-6x}(2x-6)$$

$$F'(x) = 0 \Rightarrow x = 3.$$



للدالة قيمة صغرى محلية عند $x=3.$

㊴ Ⓑ

$$\int f(x) + 2x \; dx = x^3 + ax + 1$$

اشتق الطرفين

$$f(x) + 2x = 3x^2 + a.$$

$$f(1) + 2 = 3 + a.$$

$$5 + 2 = 3 + a \Rightarrow a = 4.$$

㊵ Ⓐ

$$K + L = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/3} \sec^2 x \, dx + \int_{\pi/3}^{\pi/6} \tan^2 x \, dx$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sec^2 x \, dx - \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan^2 x \, dx$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sec^2 x - \tan^2 x \, dx$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} 1 \, dx = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

تابع اجابات الدرس الخامس   الوحدة الخامسة .

㊶ يوجد أكثر من طريقة للحل .

Ⓑ

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x < 1 \\ 2x & 1 \leq x \end{cases}$$

$$H(x) = \int_0^x f(t)\,dt .$$

$$= \begin{cases} \int_0^x 2\,dt & 0 \leq x < 1 \\ \int_0^1 2\,dx + \int_1^x 2x\,dx & 1 \leq x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1 \\ 2 + x^2 - 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1 \\ x^2 + 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

㊷ سؤال صعب

Ⓒ

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left[\frac{n+1}{n} + \frac{n+2}{n} + \cdots + \frac{2n}{n}\right]$$

$$= \lim \frac{1}{n} \sum \frac{n+i}{n}$$

$$= \lim \frac{1}{n} \sum 1 + \frac{i}{n} .$$

$$= \lim \sum \left(1 + \frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} .$$

$$= \int_0^1 (1 + x)\,dx = 3/2$$

$$\Delta x = \frac{1}{n} .$$

$$a = 0 \Rightarrow b = 1$$

$$x_i = 0 + \frac{1}{n} i$$

$$x_i = \frac{1}{n} i$$

$$f(x_i) = 1 + \frac{1}{n} i$$
$$= 1 + x_i$$

$$f(x) = 1 + x .$$

الوحدة الخامسة .

تابع اجابات الدرس الخامس

السؤال صعب

⑬

ⓒ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sin\frac{\pi i}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sin\frac{\pi i}{n} \cdot \frac{1}{n}.$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sin \pi x_i \;\Delta x.$$

$$= \int_0^1 \sin\pi x \, dx = \frac{2}{\pi}.$$

$\Delta x = \frac{1}{n}$.

$a=0 \Rightarrow b=1$

$x_i = 0 + \Delta x\, i$

$= \frac{1}{n} i$

اجابات الدرس السادس // الوحدة الخامسة .

① Ⓑ

$$\int x^2 (x^3+1)^5 \, dx$$

$$= \int x^2 \, u^5 \, \frac{du}{3x^2}$$

$$= \frac{1}{3} \int u^5 \, du$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^6}{6} + c = \frac{1}{18} (x^3+1)^6 + c$$

$$u = x^3 + 1$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{du}{3x^2} = dx$$

---

② Ⓐ

$$\int \sec^2 x \sqrt{\tan x} \, dx$$

$$= \int \sec^2 x \sqrt{u} \, \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int u^{1/2} \, du$$

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} + c = \frac{2}{3} (\tan x)^{3/2} + c$$

$$u = \tan x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$$

---

③ Ⓑ

$$\int \sin x \cos^6 x \, dx$$

$$= \int \sin x \cdot u^6 \cdot \frac{du}{-\sin x}$$

$$= - \int u^6 \, du$$

$$= - \frac{u^7}{7} + c$$

$$= - \frac{1}{7} \cos^7 x + c$$

$$u = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = - \sin x$$

$$\frac{du}{-\sin x} = dx$$

تابع اجابات الدرس السادس // الوحدة الخامسة .

④ Ⓐ

$$\int x^2 \cos x^3 \, dx$$

$$= \int x^2 \cos u \cdot \frac{du}{3x^2}$$

$$= \frac{1}{3} \int \cos u \cdot du$$

$$= \frac{1}{3} \sin u + c$$

$$= \frac{1}{3} \sin x^3 + c$$

$$u = x^3$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{du}{3x^2} = dx$$

---

⑤ Ⓒ

$$\int \frac{x^2}{e^{x^3}} dx = \int x^2 e^{-x^3} dx$$

$$= -\frac{1}{3} \int -3x^2 e^{-x^3} dx$$

$$= -\frac{1}{3} e^{-x^3} + c$$

ممكن الحل بالتعويض

---

⑥ Ⓑ

$$\int \tan 2x \, dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx$$

$$= \int \frac{\sin 2x}{u} \cdot \frac{du}{-2\sin 2x}$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} \, du$$

$$= -\frac{1}{2} \ln |u| + c$$

$$= -\frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + c$$

$$u = \cos 2x$$

$$\frac{du}{dx} = -2 \sin 2x$$

$$\frac{du}{-2\sin 2x} = dx$$

تابع اجابات الدرس السادس // الوحدة الخامسة .

⑦ Ⓐ

$$\int \frac{1}{x(\ln x+1)^2}\,dx$$

$u = \ln x + 1$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$x\,du = dx$

$$= \int \frac{1}{x\,u^2} \cdot x\,du$$

$$= \int u^{-2}\,du$$

$$= -u^{-1} + c = \frac{-1}{\ln x + 1} + c$$

---

⑧ Ⓒ

$$\int \frac{(\tan^{-1} x)^2}{x^2+1}\,dx$$

$u = \tan^{-1} x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2+1}$

$(x^2+1)\,du = dx$

$$= \int \frac{u^2}{x^2+1} \cdot (x^2+1)\,du$$

$$= \int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + c$$

$$= \frac{1}{3}(\tan^{-1} x)^3 + c$$

---

⑨ Ⓓ

$$\int \frac{1}{4x^2+25}\,dx = \frac{1}{25}\int \frac{1}{(\frac{2}{5}x)^2+1}\,dx$$

$u = \frac{2x}{5}$

$\frac{du}{dx} = \frac{2}{5}$

$\frac{5}{2}\,du = dx$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{1}{u^2+1} \cdot \frac{5}{2}\,du$$

$$= \frac{1}{10}\tan^{-1} u + c$$

$$= \frac{1}{10}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{5}\right) + c$$

تابع اجابات الدرس السادس // الوحدة الخامسة .

⑩

(c)

$$\int \sqrt[3]{x^5 - x^3}\ dx$$

$$= \int \sqrt[3]{x^3(x^2-1)}\ dx$$

$u = x^2 - 1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$$= \int x \sqrt[3]{x^2-1}\ dx$$

$$= \int x\ u^{1/3}\ \frac{du}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{1/3}\ du = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\ u^{4/3} + c$$

$$= \frac{3}{8}\left(x^2-1\right)^{4/3} + c$$

---

⑪

(B)

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\ dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\ dx$$

$u = e^x$

$\frac{du}{dx} = e^x$

$\frac{du}{e^x} = dx$

$$= \int \frac{e^x}{1+u^2}\ \frac{du}{e^x}$$

$$= \int \frac{1}{1+u^2}\ du = \tan^{-1} u + c$$

$$= \tan^{-1} e^x + c$$

---

⑫

(B)

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}\ dx$$

اكمال مربع

$2x - x^2 = -(x^2 - 2x)$

$= -(x^2 - 2x + 1 - 1)$

$= -((x-1)^2 - 1)$

$= 1 - (x-1)^2$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\ dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\ du$$

$u = x - 1$

$du = dx$

$$= \sin^{-1} u + c$$

$$= \sin^{-1}(x-1) + c$$

تابع اجابات الدرس السادس // الوحدة الخامسة .

⑬ (B)

$$\int \frac{3x\sqrt{x}}{1+x^5}\,dx$$

$u = \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x}\,du = dx$

$$= \int \frac{3u^3}{1+u^{10}}\,2\sqrt{x}\,du$$

$$= \int \frac{6u^4}{1+u^{10}}\,du$$

$$= \int \frac{6u^4}{1+w^2}\,\frac{dw}{5u^4}$$

$w = u^5$

$\frac{dw}{du} = 5u^4$

$\frac{dw}{5u^4} = du$

$$= \frac{6}{5}\int \frac{1}{1+w^2}\,dw$$

$$= \frac{6}{5}\tan^{-1} w + c$$

$$= \frac{6}{5}\tan^{-1}(u^5) + c = \frac{6}{5}\tan^{-1}(x^{5/2}) + c$$

ممكن الحل بالتعويض
$U = x^{5/2}$

---

⑭ (A)

$$\int t\sqrt{t-1}\,dt$$

$u = t-1$

$\frac{du}{dt} = 1$

$du = dt$

$\to t = u+1$

$$= \int (u+1)\sqrt{u}\,du$$

$$= \int (u^{3/2} + u^{1/2})\,du$$

$$= \frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + c$$

$$= \frac{2}{5}(t-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(t-1)^{3/2} + c$$

---

⑮ (C)

$$\int \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \sec x\tan x + \sec^2 x\,dx$$

$$= \sec x + \tan x + c$$

تابع اجابات الدرس السادس // الوحدة الخامسة .

⑯ Ⓒ

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+5}}\, dx = \int x\,(3x^2+5)^{-1/2}\, dx .$$

$$= \int x \; U^{-1/2} \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{6} \int U^{-1/2}\, du .$$

$$= \frac{1}{6} \; \frac{U^{1/2}}{1/2} + c$$

$$= \frac{1}{3} \,(3x^2+5)^{1/2} + c$$

let $U = 3x^2+5$

$$\frac{du}{dx} = 6x$$

$$\frac{du}{6x} = dx$$

---

⑰ Ⓐ

$$\int \frac{3}{x^{1/4}+x}\, dx = \int \frac{3}{x^{1/4}(1+x^{3/4})}\, dx$$

$$= \int \frac{\cancel{3}}{\cancel{x^{1/4}}(u)} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\, \cancel{x^{1/4}}\, du$$

$$= 4 \int \frac{du}{u}$$

$$= 4 \ln|u| + c$$

$$= 4 \ln|1+x^{3/4}| + c$$

let $U = 1+x^{3/4}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{4} x^{-1/4}$$

$$\frac{4}{3} \frac{du}{x^{-1/4}} = dx$$

$$\frac{4}{3} x^{1/4} du = dx .$$

---

⑱ Ⓒ

$$\int \frac{1}{x^2-6x+10}\, dx .$$

$$= \int \frac{1}{(x-3)^2+1}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{U^2+1}\, du .$$

$$= \tan^{-1} U + c$$

$$= \tan^{-1}(x-3) + c$$

أكمال مربع

$x^2-6x+9+10-9$

$(x-3)^2+1$

$U = x-3$

$du = dx .$

تابع اجابات الدرس السادس // الوحدة الخامسة .

⑲ Ⓓ

$$\int \frac{x^3}{x^8+1}\,dx$$

let $U = x^4$

$\frac{du}{dx} = 4x^3$

$\frac{du}{4x^3} = dx$.

$$= \int \frac{x^3}{(x^4)^2+1}\,dx$$

$$= \int \frac{x^3}{U^2+1}\,\frac{du}{4x^3}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{du}{U^2+1}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\tan^{-1}U + c \quad = \frac{1}{4}\tan^{-1}x^4 + c .$$

---

⑳ Ⓒ

$$\int \frac{x^5}{x^{12}+4}\,dx$$

$u = x^6$

$\frac{du}{dx} = 6x^5$

$\frac{du}{6x^5} = dx$

$$= \int \frac{x^5}{u^2+4}\,\frac{du}{6x^5}$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{1}{u^2+4}\,du$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{u}{2})^2+1}\,du$$

$w = \frac{u}{2}$

$\frac{dw}{du} = \frac{1}{2}$

$2\,dw = du$

$$= \frac{1}{24}\int \frac{1}{w^2+1}\,2\,dw$$

$$= \frac{1}{12}\tan^{-1}w + c$$

$$= \frac{1}{12}\tan^{-1}(\frac{u}{2}) + c \quad = \frac{1}{12}\tan^{-1}(\frac{x^6}{2}) + c$$

㉑ Ⓐ

$$\int 2(\tan x + \tan^3 x)\,dx = \int 2\tan x(1+\tan^2 x)\,dx .$$

$$= \int 2\tan x \sec^2 x\,dx .$$

let $U = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$.

$$= \int 2U \cdot \sec^2 x\,\frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int 2u\,du$$

$$= U^2 + c$$

$$= \tan^2 x + c$$

تابع اجابات الدرس السادس // الوحدة الخامسة .

(22) (A)

$$\int 18(3\tan x+4)^5 \sec^2 x \, dx$$

$$= \int 18\, u^5 \sec^2 x \, \frac{du}{3\sec^2 x}$$

$$= 6\int u^5 \, du$$

$$= u^6 + c = (3\tan x+4)^6 + c$$

$u = 3\tan x + 4$

$\frac{du}{dx} = 3\sec^2 x$

$\frac{du}{3\sec^2 x} = dx$

---

(23) (C)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\, dx$$

$$= \int \frac{x}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{2x}$$

$$= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1} u + c = \frac{1}{2}\sin^{-1} x^2 + c$$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

---

(24) (B)

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}\, dx = \int \frac{1}{x\sqrt{(x^2)^2-1}}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{x\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{2x}$$

$$= \int \frac{1}{2x^2\sqrt{u^2-1}}\, du$$

$$= \int \frac{1}{2u\sqrt{u^2-1}}$$

$$= \int \frac{1}{2|u|\sqrt{u^2-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\sec^{-1} u + C$$

$$= \frac{1}{2}\sec^{-1} x^2 + c.$$

$U = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

تابع اجابات الدرس السادس ،، الوحدة الخامسة .

25

B

$$\int_0^1 x\sqrt{8x^2+1}\,dx$$

let $u = 8x^2+1$

$\frac{du}{dx} = 16x$

$\frac{du}{16x} = dx.$

تغيير الحدود ←

$x=0 \Rightarrow u=1$

$x=1 \Rightarrow u=9.$

$$\int x\, u^{1/2}\,\frac{du}{16x}$$

$$= \frac{1}{16}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{16}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^9$$

$$= \frac{1}{24}(27-1)$$

$$= \frac{13}{12}$$

26

C

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$u = \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x}\,du = dx.$

تغيير الحدود ←

$x=1 \Rightarrow u=1$

$x=4 \Rightarrow u=2$

$$= \int \frac{e^u}{\cancel{\sqrt{x}}}\cdot 2\cancel{\sqrt{x}}\,du$$

$$= \int_1^2 2e^u\,du.$$

27

A

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx.$$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$$= \int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2 x}\,dx.$$

$$= \int_0^{\pi/2}|\cos x|\,dx.$$

$$= \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx = \sin x\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

تابع اجابات الدرس السادس // الوحدة الخامسة .

㉘ ⓒ

$$\int_0^1 \frac{x}{e^{x^2}}\,dx = \int_0^1 x\,e^{-x^2}\,dx.$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 -2x\,e^{-x^2}\,dx.$$

$$= -\frac{1}{2}\,e^{-x^2}\Big]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-1}-1\right] = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

㉙ Ⓓ

$$\int_1^2 2f(x-1)\,dx.$$

$U = x-1$

$du = dx$

$x=1 \Rightarrow U=0$

$x=2 \Rightarrow U=1$

$$= 2\int_0^1 f(u)\,du$$

$$= 2(-3) = -6$$

㉚ ⓒ

$$\int_2^6 f(4-x)\,dx.$$

$U = 4-x$

$\frac{du}{dx} = -1$

$-du = dx$

$x=2 \Rightarrow U=2$

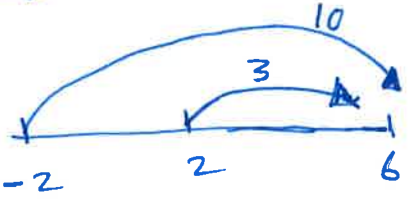
$x=6 \Rightarrow U=-2$

$$= \int_2^{-2} f(u)\,(-du)$$

$$= -\int_2^{-2} f(u)\,du.$$

$$= \int_{-2}^{2} f(u)\,du = 10-3 = 7$$

$\int f$



㉛ ⓒ

$$\int_0^{\pi} \cos x\, f'(\sin x)\,dx.$$

$U = \sin x.$

$\frac{du}{dx} = \cos x.$

$\frac{du}{\cos x} = dx.$

$x=0 \Rightarrow U=0$

$x=\pi \Rightarrow U=0$

$$= \int \cancel{\cos x}\, f'(U)\,\frac{du}{\cancel{\cos x}}$$

$$= \int_0^0 f'(u)\,du = 0$$

تابع اجابات الدرس السادس // الوحدة الخامسة .

㉜ ⓒ

$$\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)+1}\,dx = \ln|f(x)+1|\Big]_0^1$$

$$= \ln|f(1)+1| - \ln|f(0)+1|$$

$$= \ln|2+1| - \ln|-2+1|$$

$$= \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$$

㉝ ⓒ

$$\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx .$$

$U = \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x}\,du = dx .$

$x = 1 \Rightarrow U = 1$

$X = 4 \Rightarrow U = 2$

$$= \int_1^2 \frac{f(u)}{\cancel{\sqrt{x}}}\, 2\cancel{\sqrt{x}}\,du$$

$$= 2\int_1^2 f(u)\,du .$$

$$= 2\,(f(2) - f(1))$$

$$= 2\,(5 - (-1)) = 12 .$$

㉞ Ⓑ

$$\int_0^3 2f(x)\,F(x)\,dx .$$

يوجد اكثر من طريقة للحل

$U = F(x)$

$\frac{du}{dx} = f(x)$

$\frac{du}{f(x)} = dx$

$x = 0 \Rightarrow U = F(0) = 1$

$x = 3 \Rightarrow U = F(3) = 4$

$$= \int 2f(x) \cdot U\,\frac{du}{f(x)}$$

$$= \int_1^4 2U\,du .$$

$$= U^2\Big]_1^4$$

$$= 16 - 1$$

$$= 15$$

تابع اجابات الدرس السادس // الوحدة الخامسة .

35

D

$$\int_3^5 x\sqrt{2x-1}\,dx .$$

$$= \int \frac{u+1}{2}\sqrt{u}\,\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int (u+1)\sqrt{u}\,du$$

$$k = \frac{1}{4}$$

$u = 2x-1$

$\frac{du}{dx} = 2$

$\frac{du}{2} = dx .$

$\to 2x-1 = u$

$2x = u+1$

$x = \frac{u+1}{2}$

36

C

$$\int \left(\frac{1}{x}\int_1^x \frac{1}{u}\,du\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{x}\ln x\,dx .$$

$$= \int \frac{1}{\cancel{x}}\, w \cdot \cancel{x}\,dw \rightsquigarrow$$

$$= \int w\,dw$$

$$= \frac{1}{2}w^2 + c \qquad = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$$

$\int_1^x \frac{1}{u}\,du$

$= \ln u\,\Big|_1^x$

$= \ln x$

$w = \ln x .$

$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{x} \Longrightarrow x\,dw = dx .$

37

D

$$g(x) = \int_0^{2x}\left(\int_0^u \sqrt{t^2+1}\,dt\right)du$$

let $\int_0^u \sqrt{t^2+1}\,dt = f(u)$

$$= \int_0^{2x} f(u)\,du$$

$$g'(x) = f(2x)\cdot 2$$

$$= 2\int_0^{2x}\sqrt{t^2+1}\,dt .$$

$$g''(x) = 2\cdot\sqrt{(2x)^2+1}\cdot 2$$

$$= 4\sqrt{4x^2+1}$$