نماذج أجابة أسئله أمتحان تقييمى ثانى

عمل / أ . أحمد نصار

(1)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظاθ = ٢$\sqrt{٢}$ جتاθ < ٠

فأوجد جتا θ ، جاθ ، قتاθ

الحل:

باستخدام متطابقة فيثاغورث:

قا^{٢} θ = ١ + ظا^{٢} θ

= ١ + (٢$\sqrt{٢}$)^{٢}

= ١ + ٤×٢

= ١ + ٨

= ٩

قا θ = ٣ أو قا θ = -٣

∵ جتا θ < ٠

∴ قا θ = -٣

∴ جتا θ = $\frac{١}{\text{قا}\theta}$

جتا θ = $\frac{-١}{٣}$

ظا θ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

جاθ = ظاθ × جتاθ

جاθ = ٢$\sqrt{٢}$ × $\frac{-١}{٣}$ = $\frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$

قتاθ = $\frac{١}{\text{جا}\theta}$ = $\frac{-٣}{٢\sqrt{٢}}$

(2)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جا$\theta = \frac{٣}{٥}$ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$

فأوجد كلا من : جتاθ ، ظاθ ، قاθ ، ظتاθ ، قتاθ

باستخدام متطابقة فيثاغورث:

جا$^٢\theta$ + جتا$^٢\theta$ = ١

$(\frac{٣}{٥})^٢$ + جتا$^٢\theta$ = ١

جتا$^٢\theta$ = ١ − $(\frac{٣}{٥})^٢$

جتا$^٢\theta$ = ١ − $\frac{٩}{٢٥}$

جتا$^٢\theta$ = $\frac{١٦}{٢٥}$

جتا θ = $\frac{٤}{٥}$ أو جتاθ = − $\frac{٤}{٥}$ مرفوض لأن $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$

ظا θ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ = $\frac{\frac{٣}{٥}}{\frac{٤}{٥}}$ = $\frac{٣}{٤}$

قاθ = $\frac{١}{\text{جتا}\theta}$ = $\frac{٥}{٤}$

ظتا θ = $\frac{١}{\text{ظا}\theta}$ = $\frac{٤}{٣}$

قتا θ = $\frac{١}{\text{جا}\theta}$ = $\frac{٥}{٣}$

(3)

اثبت صحة المتطابقة : $\frac{(\text{قا}\,\theta + ١)(\text{قا}\,\theta - ١)}{\text{جا}^{٢}\theta} = \text{قا}^{٢}\theta$

الإجابة

$$\frac{(\text{قا}\,\theta + ١)(\text{قا}\,\theta - ١)}{\text{جا}^{٢}\theta} = \frac{\text{قا}^{٢}\theta - ١}{\text{جا}^{٢}\theta}$$

$$= \frac{\text{ظا}^{٢}\theta}{\text{جا}^{٢}\theta}$$

$$= \frac{\text{جا}^{٢}\theta}{\text{جتا}^{٢}\theta} \times \frac{١}{\text{جا}^{٢}\theta}$$

$$= \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\theta}$$

(4)

حل المعادلة : ٢ جتا س − ١ = ٠

الإجابة

٢ جتا س = ١

جتا س = $\frac{١}{٢}$

جتا س = جتا $\frac{\pi}{٣}$

∵ جتا س > ٠

∴ س تقع في الربع الاول أو تقع في الربع الرابع

∴ س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ ك π أو س = $\frac{-\pi}{٣}$ + ٢ ك π : (ك ∈ ص)

(5)

حل المعادلة : ٢ جاس − ١ = ٠

الإجابة

٢ جا س = ١

جا س = $\frac{١}{٢}$

جا س = جا $\frac{\pi}{٦}$

∵ جا س > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الربع الثاني

س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ ك π أو س = (π − $\frac{\pi}{٦}$) + ٢ ك π

س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ ك π أو س = $\frac{٥\pi}{٦}$ + ٢ ك π (ك ∈ ص)

(6)

بدون استخدام الألة الحاسبة :

إذا كان جا $\theta = \frac{٣}{٧}$ ، جتا θ < ٠ فأوجد جتا θ ، ظا θ ، ظتا θ

الإجابة

باستخدام متطابقة فيثاغورث :

$$\text{جا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta = ١$$

$$\left(\frac{٣}{٧}\right)^{٢} + \text{جتا}^{٢}\theta = ١$$

$$\text{جتا}^{٢}\theta = ١ - \left(\frac{٣}{٧}\right)^{٢} = \frac{٤٠}{٤٩}$$

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{٢\sqrt{١٠}}{٧} \approx ٠,٩٠٤$$ (مرفوض لأن جتا θ < ٠)

$$\text{أو جتا}\,\theta = -\frac{٢\sqrt{١٠}}{٧} \approx -٠,٩٠٤$$

$$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} = \frac{\frac{٣}{٧}}{-\frac{٢\sqrt{١٠}}{٧}} = -\frac{٣}{٢\sqrt{١٠}}$$

$$\text{ظتا}\,\theta = \frac{١}{\text{ظا}\,\theta} = -\frac{٢\sqrt{١٠}}{٣}$$

(7)

(أ)

$$\text{ظا}\,\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٣} \text{ ، } \text{ظا}\,\theta = \text{ظا}\,\frac{\pi}{٦}$$

$$\theta = \frac{\pi}{٦} + \text{ك}\,\pi \text{ ، حيث } (\text{ك} \in \text{ص})$$

(ب)

بسّط التعبيرات التالية لأبسط صورة:

$$\frac{\text{جتا}(\pi - \theta) - \text{جتا}(-\theta) + \text{جا}(\pi + \theta) + \text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)}{\text{جا}(\pi + \theta) - \text{جتا}\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right) + \text{جتا}(\pi - \theta) + \text{جا}\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)}$$

$$= \frac{-\text{جتا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta - \text{جا}\,\theta + \text{جا}\,\theta}{-\text{جا}\,\theta + \text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta} = \frac{-٢\,\text{جتا}\,\theta}{\text{صفر}}$$

(8)

جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° − س).

الحل:

جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° − س)

= جا س + جتا س − جا س + جتا س

= ٢ جتا س

جتا (٩π + θ) = جتا (π + π + θ)

= جتا (π + θ)

= − جتا θ

جتا (− π/٢ − θ) = جتا (π/٢ + θ) = − جا θ

(9)

(أ)

أثبت صحة المتطابقة: (قا^{٢} θ + قتا^{٢} θ) − (ظا^{٢} θ + ظتا^{٢} θ) = ٢.

الحل

(قا^{٢}θ + قتا^{٢}θ) − (ظا^{٢}θ + ظتا^{٢}θ)

= ١ + ~~ظا^{٢}θ~~ + ١ + ~~ظتا^{٢}θ~~ − ~~ظا^{٢}θ~~ − ~~ظتا^{٢}θ~~

= ٢

(ب)

أوجد قيمة كلًّا مما يلي:

(جاθ + جتاθ)^{٢} − ٢جاθ جتاθ. = جا^{٢}θ + جتا^{٢}θ + ٢جاθ جتاθ − ٢جاθ جتاθ = ١

(ظا^{٢}θ + ١)جتا^{٢}θ. = قا^{٢}θ جتا^{٢}θ = (قاθ جتاθ)^{٢} = ١^{٢} = ١

(10)

اذا كانت أ = $\begin{bmatrix} \text{س} & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س.

الحل:

∵ أ منفردة

∴ | أ | = صفر

$\begin{vmatrix} \text{س} & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{vmatrix} = ٠$

∴ ٦س − ٤٨ = ٠

٦س = ٤٨

س = ٨

(11)

حل النظام $\begin{cases} ٥ س + ٣ ص = ٧ \\ ٣ س + ٢ ص = ٥ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة

الإجابة

المعادلة المصفوفية للنظام هي :

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix}$$

حيث $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ع = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix}$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٥ \times ٢ - ٣ \times ٣ = ١ \neq ٠$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{١} \times \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix}$$

وبضرب المعادلة المصفوفية للنظام (١) من جهة اليمين في $أ^{-١}$

$$\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٤ \end{bmatrix}$$

س = ـ ١ ، ص = ٤

(12)

أوجد س بحيث : $\begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ١٠ & ٢- \end{bmatrix} \times \text{س} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ١٠ \end{bmatrix}$

الإجابة

نوجد النظير الضربي للمصفوفة : $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٥ & ٣- \\ ٤ & ٢- \end{vmatrix} = ٥ \times (٢-) - (٣-) \times ٤ = ٢ \neq ٠$$

$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} ٢- & ٣ \\ ٤- & ٥ \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} ٢- & ٣ \\ ٤- & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ \\ ١٠ \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} ٢- \times ٥ + ٣ \times ١٠ \\ ٤- \times ٥ + ٥ \times ١٠ \end{bmatrix} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} ٢٠ \\ ٣٠ \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} ١٠ \\ ١٥ \end{bmatrix}$$

(13)

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام: $\begin{cases} ٤س - ٥ص + ٧ = ٠ \\ ٣ص - ٦س + ٣ = ٠ \end{cases}$

الحل:

نكتب أولًا النظام بالطريقة القياسية: $\begin{cases} ٤س - ٥ص = -٧ \\ -٦س + ٣ص = -٣ \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & -٥ \\ -٦ & ٣ \end{vmatrix} = -١٨$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} -٧ & -٥ \\ -٣ & ٣ \end{vmatrix} = -٣٦$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٤ & -٧ \\ -٦ & -٣ \end{vmatrix} = -٥٤$$

$$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{-٣٦}{-١٨} = ٢$$

$$ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{-٥٤}{-١٨} = ٣$$

(14)

أثبت أن ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$.

الحل:

أ × ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \times ٢ + ٣ \times (-١) & ٢ \times (-٣) + ٣ \times ٢ \\ ١ \times ٢ + ٢ \times (-١) & ١ \times (-٣) + ٢ \times ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

أ × ب = و ∴ ب هي النظير الضربي لِـ أ .

يمكن القول أن المصفوفة أ هي النظير الضربي للمصفوفة ب .