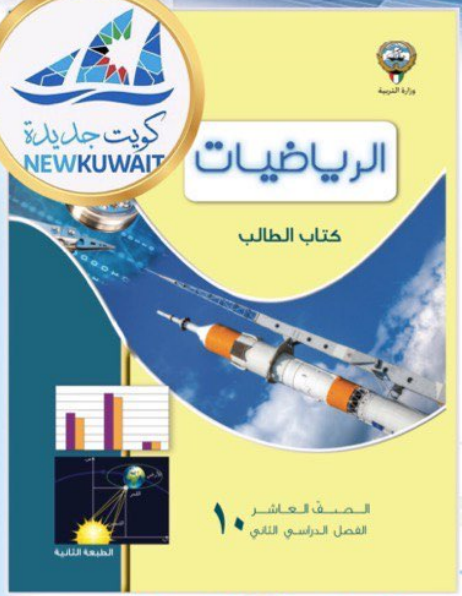


كويت جديدة
NEWKUWAIT

10th

الرياضيات

الصف العاشر الثانوي

أ/ وائل زيدان

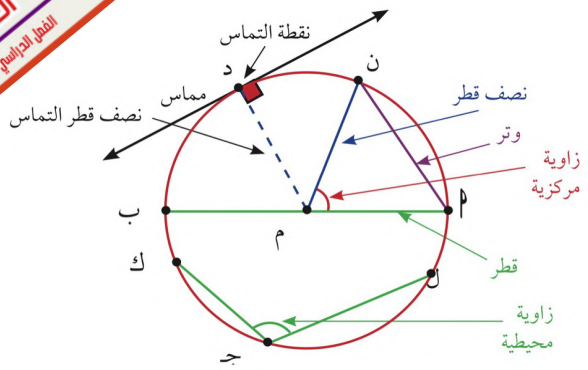
الفصل الدراسي الثاني

دفتر متابعة الطالب

اسم الطالب:.....

تصميم وائل زيدان

الدائرة
The Circle



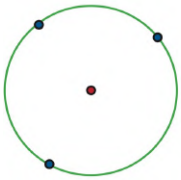
تعريف الدائرة

الدائرة هي مجموعة نقاط المستوى التي تبعد كل منها عن نقطة ثابتة م في المستوى بعدًا ثابتًا.

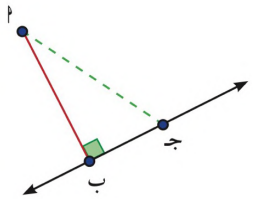
تسمى النقطة الثابتة **مركز الدائرة** ويسمى البعد الثابت طول نصف القطر ويرمز إليه عادة بالرمز نق.

نظرية (١)

كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.



استنتاج



في الشكل المقابل، $\overline{أب} \perp \overline{ب جـ}$

بفرض أن المستقيم $\overleftrightarrow{أجـ}$ يمر بالنقطة أ عموديًّا على $\overleftrightarrow{ب جـ}$.

يصبح مجموع قياسات زوايا Δأب جـ أكبر من ١٨٠° (ق (ب̂) + ق (جـ̂) = ١٨٠°)

وهذا يتناقض مع النظرية: مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ $\overleftrightarrow{أجـ}$ ليس عموديًّا على $\overleftrightarrow{ب جـ}$.

استنتاج ١ : من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بهذه النقطة وعمودي على المستقيم المعلوم.

لاحظ أنه في Δأب جـ، أب < أجـ مهما كان موضع النقطة جـ على المستقيم (جـ لا تنطبق على ب).

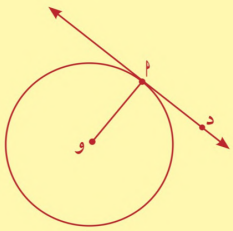
استنتاج ٢ : أقصر بعد بين نقطة ومستقيم هو البعد العمودي.

كلما ابتعدت جـ عن ب على المستقيم أصبح طول $\overline{أجـ}$ أكبر.

مماس الدائرة
Tangent of the Circle

المماس للدائرة هو مستقيم في المستوي يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة.

نقطة التقاطع تسمى نقطة التماس.



$\overleftrightarrow{أد}$ مماس.

$\overrightarrow{أد}$ شعاع مماس.

$\overline{أد}$ قطعة مماسية

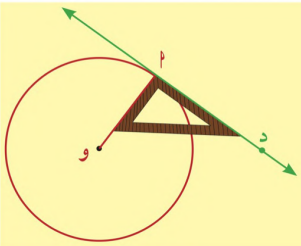
$\overline{أو}$ نصف قطر التماس

نظرية (٢)

المماس عمودي على نصف قطر التماس.

إذا كان مستقيم مماسًّا لدائرة، فإنه يكون متعامدًا مع نصف القطر المار بنقطة التماس.

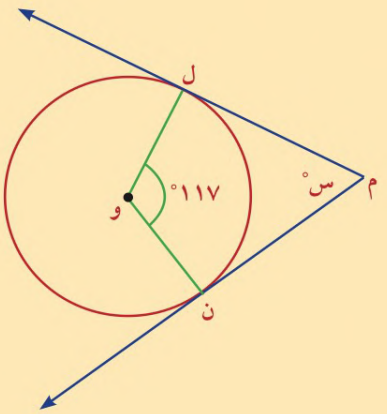
أي أن $\overline{أو} \perp \overleftrightarrow{دأ}$.



مثال (٢)

في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ مماسان للدائرة التي مركزها و.

أوجد قياس الزاوية ل $\hat{\text{م}}$ ن.



الحل:

المعطيات: $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ مماسان للدائرة التي مركزها و.

المطلوب: إيجاد قياس الزاوية ل $\hat{\text{م}}$ ن

البرهان:

∵ $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس

وَ ل نصف قطر التماس

∴ ق(م$\hat{\text{ل}}$و) = ٩٠°

وبالمثل: ق(م$\hat{\text{ن}}$و) = ٩٠° نظرية

ل م ن و شكل رباعي

∴ ق($\hat{\text{ل}}$) + ق($\hat{\text{ن}}$) + ق($\hat{\text{م}}$) + ق($\hat{\text{و}}$) = ٣٦٠°

٩٠° + ٩٠° + س° + ١١٧° = ٣٦٠° بالتعويض

٢٩٧° + س° = ٣٦٠° بالتبسيط

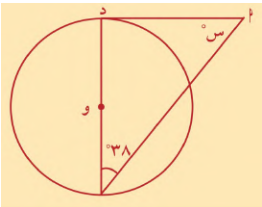
س° = ٦٣°

∴ ق(ل $\hat{\text{م}}$ ن) = ٦٣°

حاول أن تحل

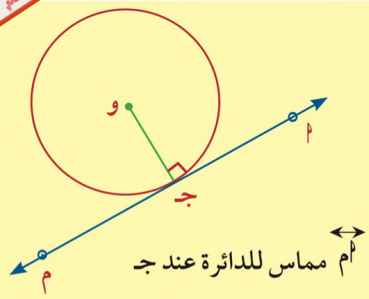
٢ في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ مماس للدائرة التي مركزها و.

أوجد قيمة س°.



نظرية (٣)

المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماسًا لهذه الدائرة عند هذه النقطة.



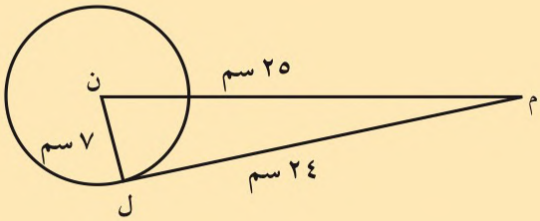
$\overleftrightarrow{\text{أم}}$ مماس للدائرة عند جـ

مثال (٤)

في الشكل المقابل، ن ل = ٧ سم ، ل م = ٢٤ سم ، ن م = ٢٥ سم.

أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة التي مركزها ن.

الحل:



المعطيات: ن ل = ٧ سم ، ن م = ٢٥ سم ، م ل = ٢٤ سم

المطلوب: إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماسًّا للدائرة التي مركزها ن

البرهان: باستخدام عكس نظرية فيثاغورث

$(\text{ن ل})^{٢} + (\text{ل م})^{٢} \stackrel{؟}{=} (\text{ن م})^{٢}$

$(٧)^{٢} + (٢٤)^{٢} \stackrel{؟}{=} (٢٥)^{٢}$ بالتعويض

٦٢٥ = ٦٢٥ بالتبسيط

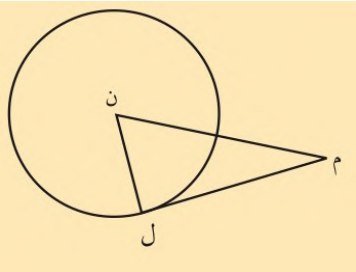
نستنتج أن المثلث م ل ن قائم في ل.

∴ $\overline{\text{م ل}} \perp \overline{\text{ن ل}}$

∴ م ل مماس للدائرة في النقطة ل. نظرية

حاول أن تحل

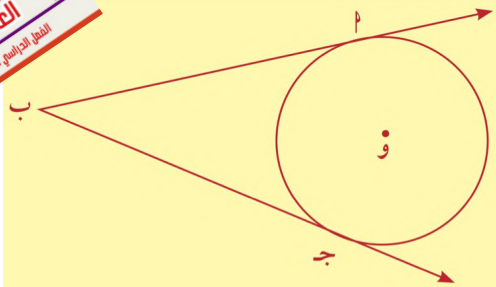
٤ في الشكل المقابل، إذا كان ن ل = ٤ ، ل م = ٧ ، ن م = ٨، فهل $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة؟ فسِّر إجابتك.



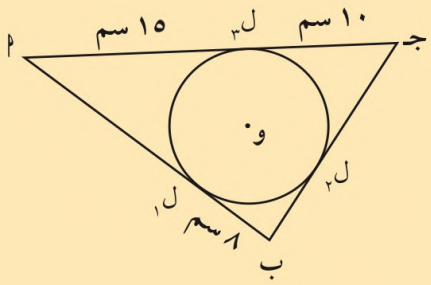
نظرية (٤)

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

$\overline{أب} \cong \overline{جـ ب}$



مثال (٦)



في الشكل المقابل، أوجد محيط المثلث أ ب جـ.

الحل:

المعطيات:

دائرة مركزها و

$\overline{بأ}$ مماس للدائرة في $ل_1$ حيث $ب ل_1 = ٨$ سم

$\overline{ب جـ}$ مماس للدائرة في $ل_2$.

$\overline{أجـ}$ مماس للدائرة في $ل_3$ حيث $جـ ل_3 = ١٠$ سم، $أل_3 = ١٥$ سم.

المطلوب: إيجاد محيط المثلث أ ب جـ.

البرهان:

$أل_3 = أل_1 = ١٥$ سم نظرية

$جـ ل_2 = جـ ل_3 = ١٠$ سم نظرية

$ب ل_1 = ب ل_2 = ٨$ سم نظرية

محيط المثلث = أب + ب جـ + جـأ

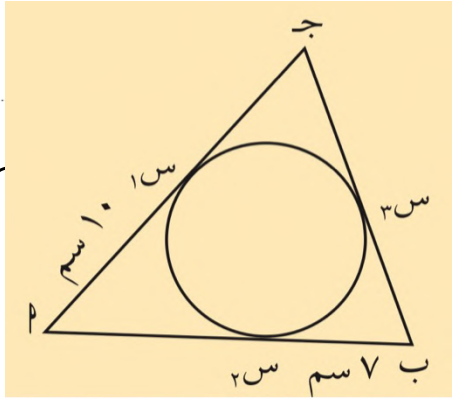
$= أل_1 + ل_1ب + ب ل_2 + ل_2جـ + جـ ل_3 + ل_3أ$

$= ١٥ + ٨ + ٨ + ١٠ + ١٠ + ١٥ = ٦٦$

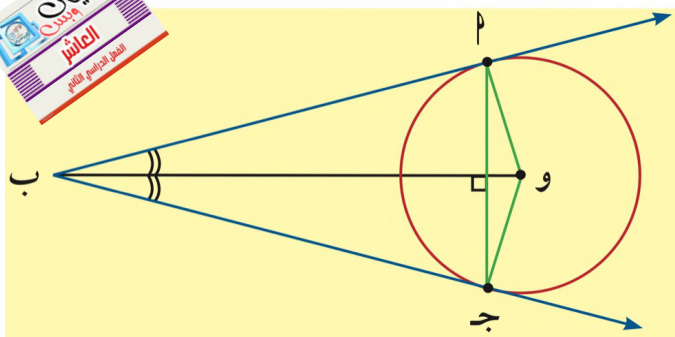
محيط المثلث = ٦٦ سم.

حاول أن تحل

٦ في الشكل المقابل إذا كان محيط المثلث أب جـ = ٥٠ سم، فأوجد طول $\overline{ب جـ}$.



نتائج النظرية



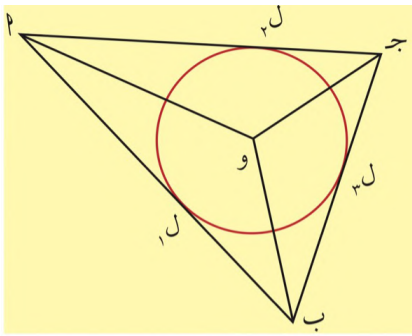
Δ ب أ جـ متطابق الضلعين من النظرية السابقة.

١ $\overleftarrow{\text{ب و}}$ منصف الزاوية أ ب̂ جـ

٢ $\overleftarrow{\text{و ب}}$ منصف الزاوية أ و̂ جـ

٣ $\overline{\text{و ب}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$

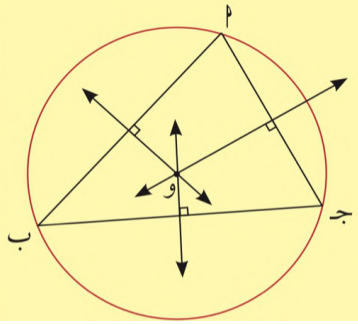
الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة) (Inscribed Circle of a Triangle)



هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث Circum Center.

الدائرة المحيطة لمثلث (الخارجة) (Circumscribed Circle of a Triangle)



هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث (نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث).

تمرّن ٦-١

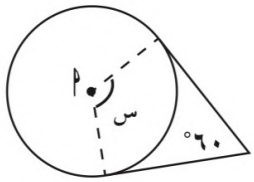
مماس الدائرة

Tangent of The Circle

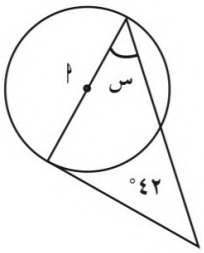
المجموعة أ تمارين أساسية

في التمرينين (١–٢)، القطع المستقيمة تمس الدوائر، أ مركز كل دائرة. أوجد قيمة س.

(١)

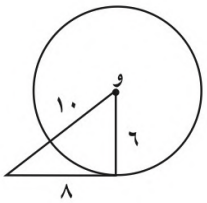


(٢)

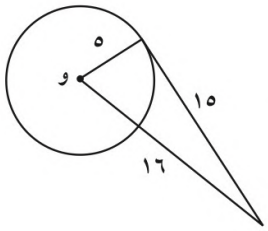


في التمرينين (٣–٤)، حدّد ما إذا كان المستقيم مماسًا للدائرة التي مركزها و.

(٣)

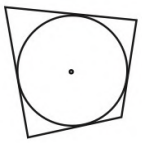


(٤)

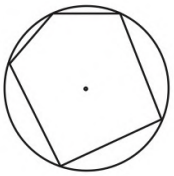


في التمرينين (٥–٦)، حدّد ما إذا كانت الدائرة محاطة بمضلع (داخلة) أو محيطة بمضلع (خارجة).

(٥)

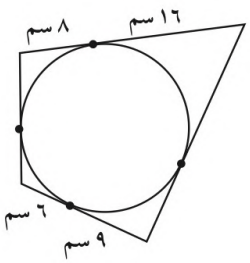


(٦)



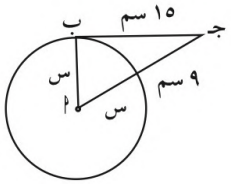
في التمرين (٧)، يحيط المضلّع بدائرة. أوجد محيط المضلع.

(٧)

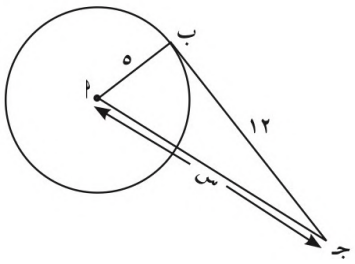


في التمرينين (٨–٩)، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ مماس للدائرة. أوجد قيمة س.

(٨)

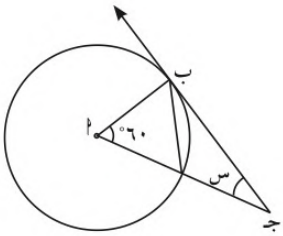


(٩)

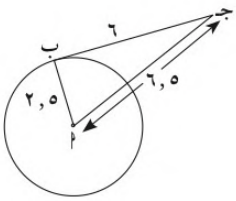


المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

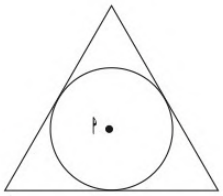
(١) المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ في الشكل المقابل مماس للدائرة، أوجد قيمة س.



(٢) حدّد ما إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ مماس للدائرة.

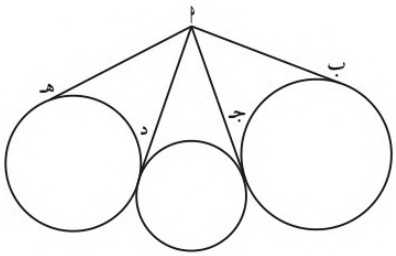


(٣) حدّد ما إذا كانت الدائرة محاطة بمثلث (داخلة) أو محيطة بمثلث (خارجة).



(٤) يبيّن الشكل ٤ قطع مماسية من نقطة مشتركة أ إلى ٣ دوائر.

ما الذي يمكنك استنتاجه حول أطوال القطع الأربع؟ فسّر.

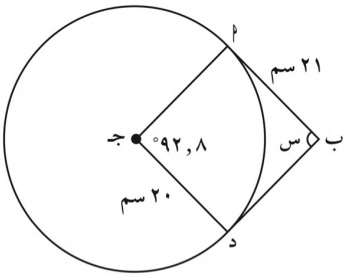


(٥) $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ مماسان للدائرة.

(أ) أوجد قيمة س.

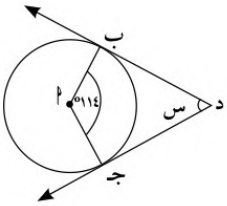
(ب) أوجد محيط الشكل الرباعي ب أ جـ د.

(جـ) أوجد ب جـ.



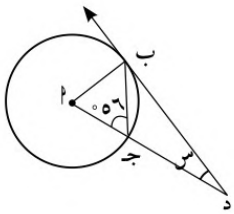
في التمارين (٨–١١)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٨) إذا كان $\overleftarrow{\text{دب}}$ ، $\overleftarrow{\text{دجـ}}$ مماسان للدائرة. فإن س =



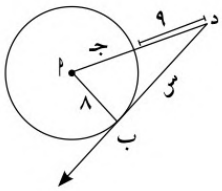
(أ) ٢٦° (ب) ٥٧° (جـ) ٦٦° (د) ١١٤°

(٩) إذا كان $\overleftarrow{\text{دب}}$ مماس للدائرة. فإن س =



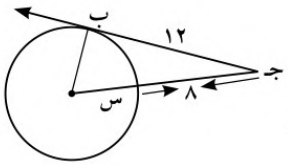
(أ) ٢٢° (ب) ٢٨° (جـ) ٣٤° (د) ٤٠°

(١٠) إذا كان $\overleftarrow{\text{دب}}$ مماس للدائرة. فإن س =



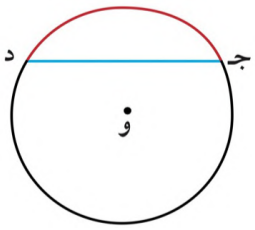
(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ١٥ (د) ١٧

(١١) إذا كان $\overleftarrow{\text{جـب}}$ مماس للدائرة. فإن س =



(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

الأوتار والأقواس
Chords and Arcs



الوتر (Chord) هو قطعة مستقيمة ينتمي طرفاها إلى دائرة.

يبيّن الشكل المقابل الوتر $\overline{\text{جـ د}}$ والقوس (Arc) $\overset{\frown}{\text{جـ د}}$ المناظر لهذا الوتر.

تتمحور النظرية التالية على العلاقة بين الزوايا المركزية في دائرة والأوتار والأقواس التي تحصرها.

نظرية (١)

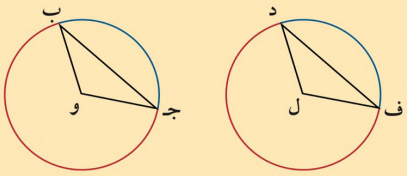
في دائرة أو في دوائر متطابقة:

١ للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.

٢ الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.

٣ للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة.

مثال (١)



في الشكل المقابل الدائرتان متطابقتان، $\overset{\frown}{\text{ب جـ}} \cong \overset{\frown}{\text{د ف}}$. ماذا تستنتج؟

الحل:

باستخدام النظرية السابقة

ق(جـ $\hat{\text{و}}$ ب) = ق(ف $\hat{\text{ل}}$ د)

$\overline{\text{ب جـ}} \cong \overline{\text{د ف}}$

حاول أن تحل

١ في الرسم أعلاه، إذا كان $\overline{\text{ب جـ}} \cong \overline{\text{دف}}$ ، فماذا تستنتج؟

نظرية (٢)

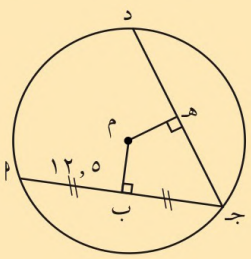
١ الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.

٢ الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.

مثال (٢)

في الشكل المقابل ليكن م مركز الدائرة. م ب = م هـ ، أوجد طول $\overline{\text{جـ د}}$. فسّر.

الحل:



المعطيات:

$\overline{\text{جـ د}}$ ، $\overline{\text{جـ أ}}$ وتران في الدائرة.

ب منتصف $\overline{\text{جـ أ}}$. ب أ = ١٢,٥ .

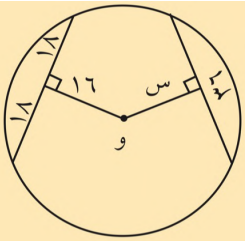
هـ ∈ $\overline{\text{جـ د}}$ حيث م هـ ⊥ $\overline{\text{جـ د}}$ ، م هـ = م ب.

المطلوب: إيجاد طول $\overline{\text{جـ د}}$.

البرهان:

أب = ب جـ = ١٢,٥	معطى
أب + ب جـ = أجـ	
٢٥ = أجـ	بالتعويض
∵ م هـ = م ب	معطى
∴ جـ د = أجـ	نظرية
جـ د = ٢٥	بالتعويض

حاول أن تحل



٢ دائرة مركزها و.

أوجد قيمة س في الشكل المقابل، وفسّر إجابتك.

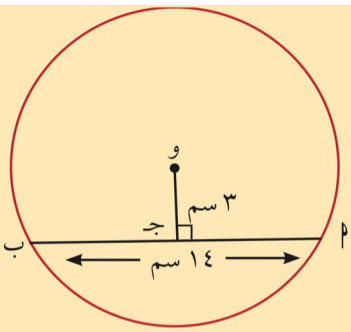
نظرية (٣)

١ القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلًّا من قوسيه.

٢ القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) في دائرة يكون عموديًّا على هذا الوتر.

٣ العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة.

مثال (٣)



أ في الشكل المقابل، أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و.

الحل:

المعطيات:

$\overline{أب}$ وتر في دائرة مركزها و. أب = ١٤ سم. $\overline{وجـ} \perp \overline{أب}$. وجـ = ٣ سم

المطلوب: إيجاد طول نصف قطر الدائرة

العمل: نرسم $\overline{وب}$

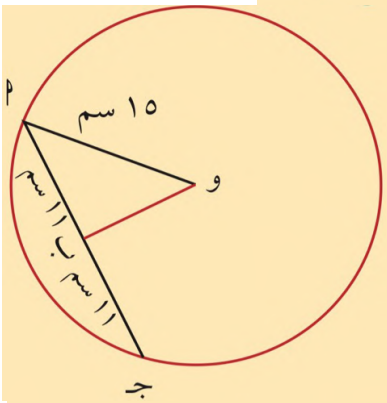
البرهان:

ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أب = $\frac{١}{٢}$ (١٤) = ٧ سم — القطر العمودي على وتر ينصفه

(وب)^{٢} = (وجـ)^{٢} + (جـ ب)^{٢} = (٣)^{٢} + (٧)^{٢} = ٥٨ — نظرية فيثاغورث

وب = $\sqrt{٥٨}$ ≈ ٧,٦ سم — الجذر التربيعي لكلا الطرفين

طول نصف قطر الدائرة يساوي حوالى ٧,٦ سم.



ب في الشكل المقابل أوجد البعد بين مركز الدائرة والوتر.

الحل:

المعطيات: و مركز الدائرة.

$\overline{وأ}$ نصف قطر الدائرة، وأ = ١٥ سم. $\overline{أجـ}$ وتر في الدائرة.

ب ∈ $\overline{أجـ}$، ب أ = ب جـ = ١١ سم.

المطلوب: إيجاد البعد بين مركز الدائرة و والوتر $\overline{أجـ}$.

البرهان:

$\overline{\text{وب}} \perp \overline{\text{أب}}$ القطر الذي ينصف الوتر (ليس القطر) هو عمودي على الوتر

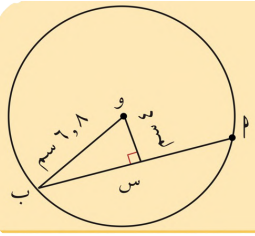
$(\text{وب})^{٢} + (١١)^{٢} = (١٥)^{٢}$ نظرية فيثاغورث في Δوبأ

$(\text{وب})^{٢} = ١٠٤$

وب $\simeq$ ١٠,٢ سم الجذر التربيعي لكلا الطرفين

البعد بين مركز الدائرة والوتر $\simeq$ ١٠,٢ سم.

حاول أن تحل



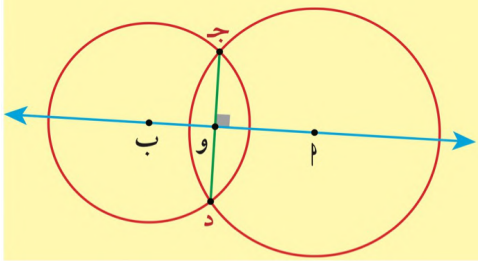
٣ استخدم الشكل المقابل لإيجاد:

أ طول الوتر $\overline{\text{أب}}$.

ب المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{أب}}$.

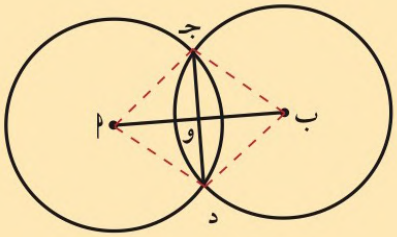
نتيجة

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًّا على الوتر المشترك بينهما وينصفه.



مثال (٤)

يمثل الشكل المقابل دائرتين متطابقتين. $\overline{\text{جـ د}}$ وتر مشترك. إذا كان أب = ٢٤سم، نق = ١٣ سم. فما طول $\overline{\text{جـ د}}$؟



الحل:

المعطيات: دائرتان متطابقتان مركزاهما أ، ب.

جـ د وتر مشترك.

أب = ٢٤، طول نصف قطر كل من الدائرتين = ١٣ سم.

المطلوب: إيجاد طول جـ د

العمل: نرسم $\overline{\text{أجـ}}$، $\overline{\text{أد}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{ب د}}$.

البرهان:

في الشكل أدب جـ فيه أ د = د ب = ب جـ = جـ أ = نق = ١٣ سم

∴ أ د ب جـ معين.

والقطران $\overline{\text{أب}}$، $\overline{\text{جـ د}}$ متعامدان وينصف كل منهما الآخر.

في Δ أوجـ، ق(أ$\hat{\text{و}}$جـ) = ٩٠° ∴ Δ أوجـ قائم الزاوية و.

(وجـ)^{٢} = (أجـ)^{٢} − (وأ)^{٢} نظرية فيثاغورث

(وجـ)^{٢} = (١٣)^{٢} − $(\frac{٢٤}{٢})^{٢}$ = ٢٥

وجـ = ٥

جـ د = ٢ × جـ و (و منتصف $\overline{\text{جـ د}}$)

= ٢ × ٥ = ١٠سم.

طول جـ د يساوي ١٠سم.

حاول أن تحل

٤ في مثال (٤)، إذا كان جـ د = ١٤سم، نق = ١٣سم ، فأوجد طول $\overline{\text{أب}}$.

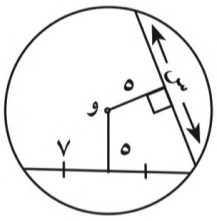
تمرَّنْ ٦-٢

الأوتار والأقواس
Chords and Arcs

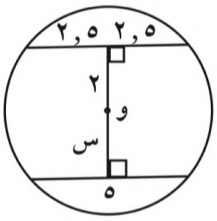
المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أوجد قيمة س في الأشكال التالية:

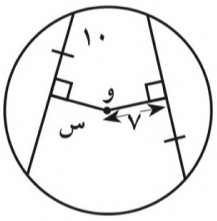
(أ)



(ب)

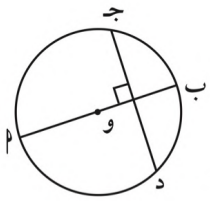


(جـ)



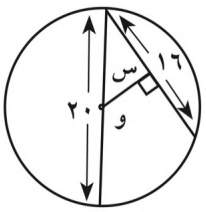
(٢) في الشكل المقابل إذا كان:

$\overline{\text{أب}}$ قطر الدائرة، $\overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{جـ د}}$. ماذا تستنتج؟

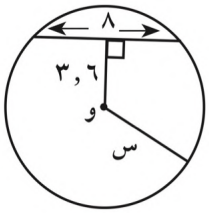


(٣) أوجد قيمة س في الأشكال التالية:

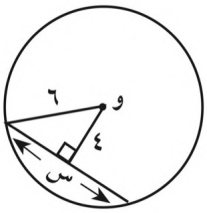
(أ)



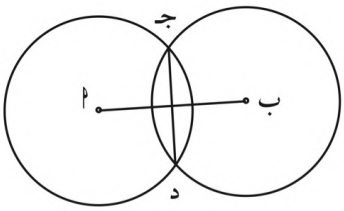
(ب)



(جـ)



(٥) أ، ب مركزا دائرتين متطابقتين. $\overline{\text{جـ د}}$ وتر مشترك للدائرتين.



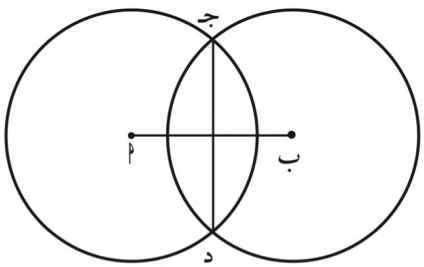
(أ) إذا كان أب = ٨ سم، جـ د = ٦ سم. فما طول نصف القطر؟

(ب) إذا كان أب = ٢٤ سم، نصف القطر = ١٣ سم. فما طول $\overline{\text{جـ د}}$؟

(٨) دائرتان مركزاهما على الترتيب أ، ب تتقاطعان بالنقطتين جـ ، د.

وطول نصف قطر كل دائرة ٦ سم.

أوجد طول جـ د إذا كان طول أب يساوي ٨ سم.

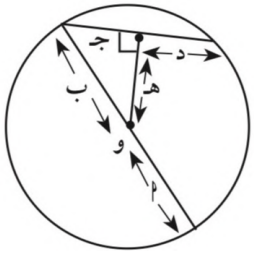


في التمرينين (٩–١٠)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٩) إذا كان طول قطر دائرة يساوي ٢٥ سم وطول أحد أوتارها ١٦ سم فإن البعد بين مركز الدائرة والوتر هو تقريبًا:

(أ) ٩ سم (ب) ٩,٦ سم (جـ) ١٨ سم (د) ١٩,٢ سم

(١٠) في الشكل المقابل العبارة الخاطئة فيما يلي هي:



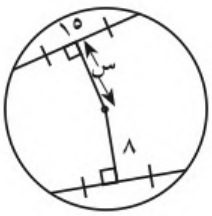
(أ) جـ = د (ب) أ = ب

(جـ) جـ^{٢} + هـ^{٢} = ب^{٢} (د) هـ = د

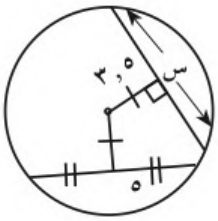
(١) أوجد قيمة س في الأشكال التالية:

(أ)

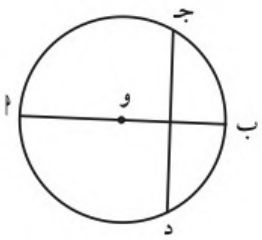
(ب)



(جـ)



(٢) مستخدمًا الشكل المقابل، املأ الفراغ بما هو مناسب.

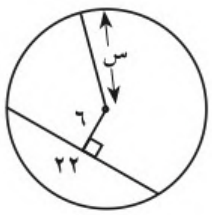


∵ $\overleftrightarrow{أب}$ منصف عمودي لـ $\overline{جـ د}$.

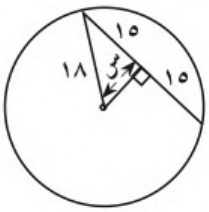
∴ يمر $\overleftrightarrow{أب}$ بـ .....

(٣) أوجد قيمة س في كل من الأشكال التالية:

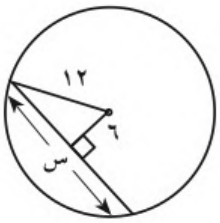
(أ)



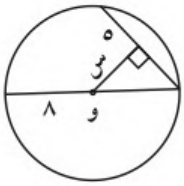
(ب)



(جـ)



(٤) في الشكل المقابل، أوجد قيمة س إلى أقرب جزء من عشرة.



(٥) طول نصف قطر دائرة يساوي ١٠,٨ سم، وطول الوتر ١٢ سم.

ما البعد بين مركز الدائرة والوتر؟

الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

Central and Inscribed Angles

١ – الزاوية المركزية والزاوية المحيطية Central Angle and Inscribed Angle

تعريف:

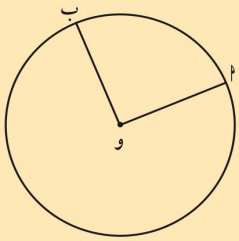
١ الزاوية التي رأسها مركز الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى **بالزاوية المركزية**.

٢ الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى **بالزاوية المحيطية**.

نظرية (١)

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة.

مثال (١)



في الشكل المقابل دائرة مركزها و. إذا كان ق(أب) = ٩٠°.
فأوجد ق(أوب).

الحل:

المعطيات: دائرة مركزها و

ق(أب) = ٩٠°

المطلوب: إيجاد ق(أوب).

البرهان:

و مركز الدائرة

(أوب) زاوية مركزية تقابل (أب)

∴ ق(أب) = ق (أوب)

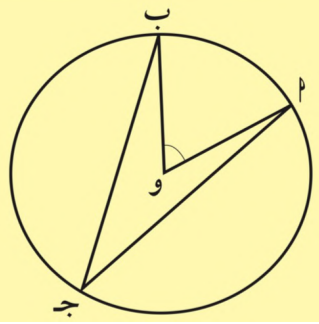
∴ ق(أوب) = ٩٠°

حاول أن تحل

١ إذا كان قياس زاوية مركزية ٣٥°، فأوجد قياس القوس على الدائرة المحصور بين ضلعيها.

نظرية (٢)

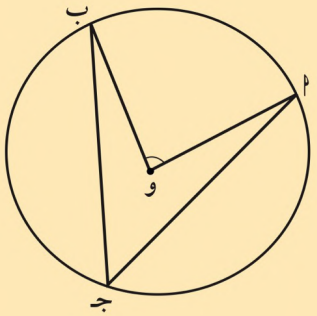
في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.



ق(أجـب) = $\frac{١}{٢}$ ق(أوب) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{أب}$)

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.

مثال (٢)



في الشكل المقابل: إذا كان ق($\overset{\frown}{أب}$) = ٨٠° فأوجد ق(أجـب).

الحل:

المعطيات: دائرة مركزها و. أ، ب، جـ نقاط تنتمي إلى الدائرة. ق($\overset{\frown}{أب}$) = ٨٠°

المطلوب: إيجاد ق(أجـب).

البرهان:

أجـب زاوية محيطية في الدائرة ∴ ق(أجـب) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{أب}$)

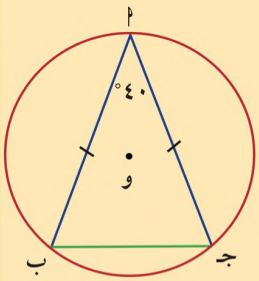
= $\frac{١}{٢}$ (٨٠°) = ٤٠°

وبالتالي ق(أجـب) = ٤٠°

حاول أن تحل

٢ إذا كان قياس زاوية محيطية في دائرة يساوي ٥٤°، فأوجد قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

مثال (٣)



في الشكل المقابل أب جـ مثلث متطابق الضلعين حيث أ، ب، جـ نقاط على الدائرة التي مركزها و، ق(ب أ̂ جـ) = ٤٠°.

أوجد قياس كل من الأقواس $\overset{\frown}{\text{أب}}$، $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$، $\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$.

الحل:

المعطيات: دائرة مركزها و. أ، ب، جـ نقاط تنتمي إلى الدائرة.

Δ أ ب جـ متطابق الضلعين، أ ب = أ جـ.

ق(ب أ̂ جـ) = ٤٠°

المطلوب: إيجاد قياس كل من الأقواس $\overset{\frown}{\text{أب}}$، $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$، $\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$

البرهان:

زوايا المثلث هي زوايا محيطية في الدائرة ∴ ق(ب أ̂ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$)

ومنه: ٤٠° = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$). ∴ ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) = ٢ × ٤٠° = ٨٠°.

∴ ق($\overset{\frown}{\text{جـ أ ب}}$) = ٣٦٠° − ٨٠° = ٢٨٠°

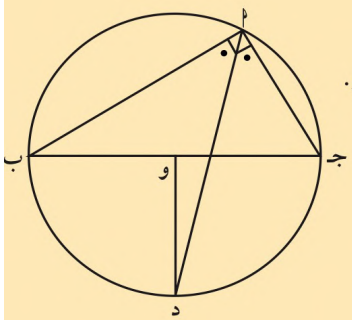
∵ أب = أجـ

∴ ق($\overset{\frown}{\text{أب}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{أجـ}}$) = $\frac{٢٨٠}{٢}$ = ١٤٠°.

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣) إذا كان $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$، منصف الزاوية الداخلية أجـب ويقطع الدائرة في النقطة هـ.
ما قياس القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{أهـ}}$؟

مثال (٤)



في الشكل المقابل دائرة مركزها و. أثبت أن $\overline{\text{د و}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$.

الحل:

المعطيات: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية أ، رؤوسه الثلاثة تنتمي إلى الدائرة التي مركزها و.

$\overleftarrow{\text{أ د}}$ منصف (ب أ̂ جـ) ويقطع الدائرة في د.

المطلوب: إثبات أن $\overline{\text{د و}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

البرهان:

∴ ق(جـ أ̂ ب) = ٩٠° — معطى

$\overleftarrow{\text{أ د}}$ منصف الزاوية ب أ̂ جـ

∴ ق(جـ أ̂ د) = ٤٥°

∵ ق(جـ أ̂ د) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{د جـ}}$) — نظرية

∴ ق($\overset{\frown}{\text{د جـ}}$) = ٩٠°، ق(جـ و̂ د) = ٩٠° — نظرية

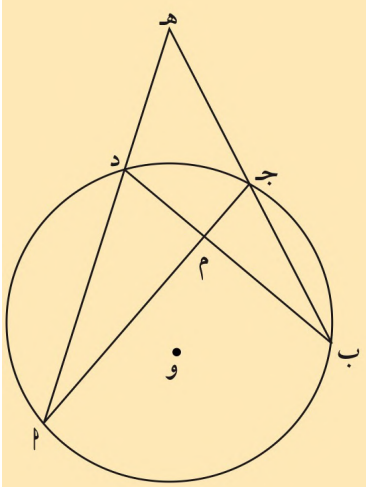
∴ $\overline{\text{د و}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$.

حاول أن تحل

٤ في المثال (٤)، إذا كان ق(أ ب̂ جـ) = ٣٠°، أوجد ق(أ د̂ ب).

مثال (٥)

في الشكل المقابل، أثبت أن: ق(ب م̂ أ) = $\frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{ب أ}}) + \text{ق}(\overset{\frown}{\text{جـ د}})}{٢}$.



الحل:

المعطيات: أ، ب، جـ، د نقاط تنتمي إلى الدائرة التي مركزها و.

$\overline{\text{أ جـ}} \cap \overline{\text{ب د}}$ = {م} ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}} \cap \overleftarrow{\text{أ د}}$ = {هـ}

المطلوب: إثبات أن ق(ب م̂ أ) = $\frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{ب أ}}) + \text{ق}(\overset{\frown}{\text{جـ د}})}{٢}$

البرهان:

(ب م̂ أ) هي زاوية خارجة عن المثلث أ م د.

ق(ب م̂ أ) = ق(ب د̂ أ) + ق(م أ̂ د)

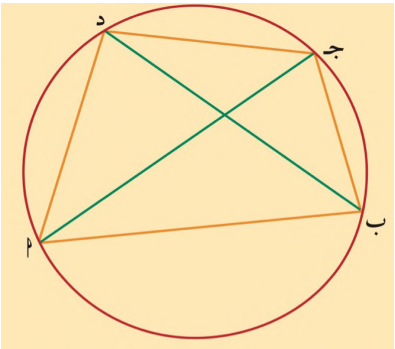
= $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{ب أ}}$) + $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{جـ د}}$) = $\frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{ب أ}}) + \text{ق}(\overset{\frown}{\text{جـ د}})}{٢}$

حاول أن تحل

٥ في المثال (٥)، أثبت أن ق(ب هـ̂ أ) = $\frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{ب أ}}) - \text{ق}(\overset{\frown}{\text{جـ د}})}{٢}$

مثال (٦)

أ ب جـ د شكل رباعي دائري.
أثبت أن ق(أ ب̂ د) = ق(أ جـ̂ د).



الحل:

المعطيات: أ ب جـ د شكل رباعي دائري.

المطلوب: إثبات تساوي قياسي الزاويتين (أ ب̂ د)، (أ جـ̂ د).

البرهان: أ ب جـ د شكل رباعي دائري.

أ ب̂ د زاوية محيطية ∴ ق(أ ب̂ د) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{د أ}$) (١)

أ جـ̂ د زاوية محيطية ∴ ق(أ جـ̂ د) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{د أ}$) (٢)

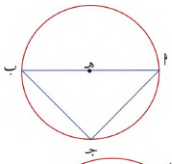
من (١)، (٢) نستنتج أن ق (أ ب̂ د) = ق (أ جـ̂ د).

معلومة رياضية:

الشكل الرباعي الدائري هو مضلع رباعي تقع رؤوسه على دائرة.

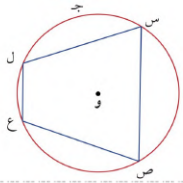
تدريب (١):

إذا كان $\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة التي مركزها هـ، جـ ∈ الدائرة، أثبت أن (أ جـ̂ ب) زاوية قائمة.



تدريب (٢):

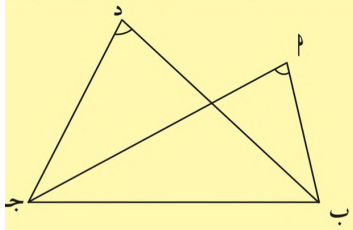
س ص ع ل شكل رباعي دائري.
أثبت أن ق(ل س̂ ص) + ق(ل ع̂ ص) = ١٨٠°



حاول أن تحل

٦ في المثال (٦)، أثبت أن ق (أ د̂ ب) = ق (أ جـ̂ ب)

نتائج

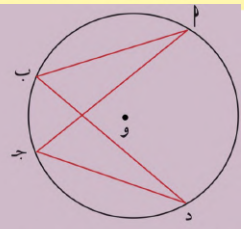


١ كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.

٢ كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.

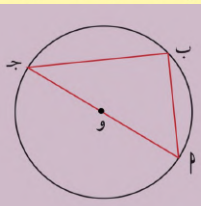
٣ كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة)، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.

٤ في الشكل إذا تطابقت الزاويتان أ̂، د̂ المرسومات على القاعدة $\overline{ب جـ}$ وفي جهة واحدة منها. كان الشكل أ ب جـ د رباعيًّا دائريًّا.



أ ب̂ د ، أ جـ̂ د تحصران $\overset{\frown}{أ د}$

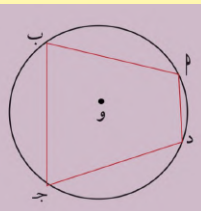
∴ ق(أ ب̂ د) = ق(أ جـ̂ د)



أ ب̂ جـ تحصر $\overset{\frown}{أ جـ}$ (نصف دائرة)

∴ ق(أ ب̂ جـ) = ٩٠°

(أ ب̂ جـ) زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة وهي زاوية قائمة



ق(أ̂) + ق(جـ̂) = ١٨٠°

ق(ب̂) + ق(د̂) = ١٨٠°

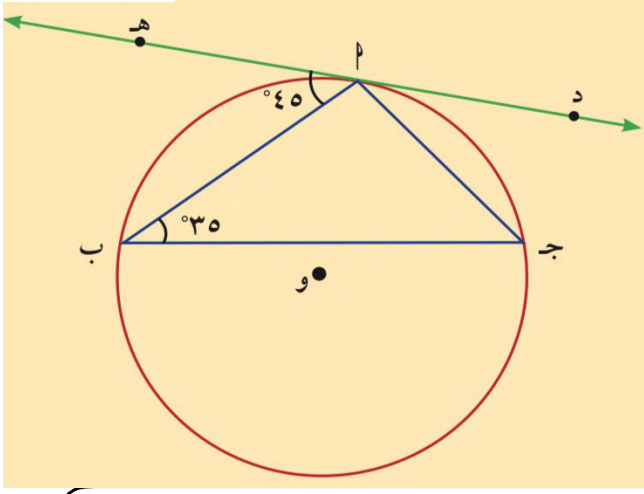
نظرية (٣)

(١) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.

(٢) قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

مثال (٧)

في الشكل المقابل إذا كان $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$ مماسًّا للدائرة عند أ، فأوجد ق(جـ$\hat{\text{أ}}$ب).



الحل:

المعطيات:

$\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$ مماس للدائرة عند أ.

ق(هـ$\hat{\text{أ}}$ب) = ٤٥°، ق(أ$\hat{\text{ب}}$جـ) = ٣٥°

المطلوب: إيجاد ق(جـ$\hat{\text{أ}}$ب).

البرهان:

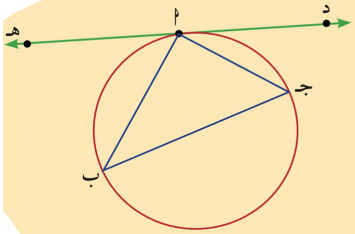
ق(أ$\hat{\text{جـ}}$ب) = ق(هـ$\hat{\text{أ}}$ب) = ٤٥° نظرية

∵ ق(جـ$\hat{\text{أ}}$ب) + ق(أ$\hat{\text{جـ}}$ب) + ق(أ$\hat{\text{ب}}$جـ) = ١٨٠°

∴ ق(جـ$\hat{\text{أ}}$ب) = ١٨٠° − ق(أ$\hat{\text{جـ}}$ب) − ق(أ$\hat{\text{ب}}$جـ)

ق(جـ$\hat{\text{أ}}$ب) = ١٨٠° − ٤٥° − ٣٥° = ١٠٠°

حاول أن تحل

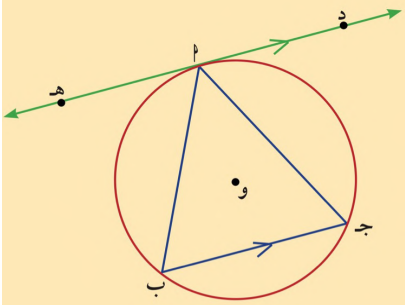


٧ في الشكل المقابل، لدينا: ق(د$\hat{\text{أ}}$جـ) = ٤٠°، ق(هـ$\hat{\text{أ}}$ب) = ٥٠°.

أ أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ.

ب أثبت أن $\overline{\text{جـ ب}}$ قطر للدائرة.

مثال (٩)



في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة أ،
$\overline{\text{ب جـ}}$ وتر في الدائرة موازٍ للمماس $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$.
أثبت أن المثلث أب جـ متطابق الضلعين.

الحل:

المعطيات: $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة أ. $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

المطلوب: أثبت أن Δ أب جـ متطابق الضلعين.

البرهان

∵ $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ ق(د$\hat{\text{أ}}$جـ) = ق(أ$\hat{\text{جـ}}$ ب) بالتبادل والتوازي (١)

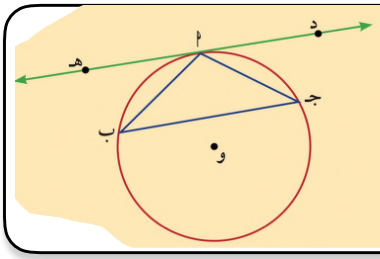
∵ ق(د$\hat{\text{أ}}$جـ) = ق(أ$\hat{\text{ب}}$ جـ) زاوية مماسية وزاوية محيطية تحصران القوس نفسه $\overset{\frown}{\text{أجـ}}$ (٢)

(١) ، (٢) تعطي: ق(أ$\hat{\text{جـ}}$ ب) = ق(أ$\hat{\text{ب}}$ جـ)

ومنه: أ جـ = أ ب

أي أن المثلث متطابق الضلعين

حاول أن تحل



٩ في الشكل المقابل، إذا كان لدينا $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة أ.
المثلث أب جـ متطابق الضلعين (أب = أجـ).
أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

تمرَّنْ ٦-٣

الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

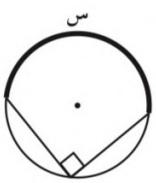
Central Angles and Inscribed Angles

المجموعة أ تمارين أساسية

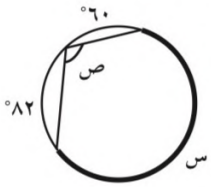
(١) أوجد قيمة المجهول في كل من الأشكال التالية:

(أ)

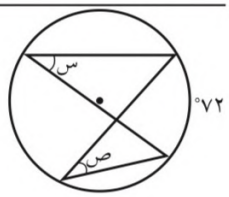
(ب)



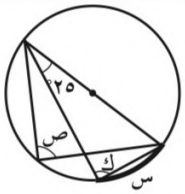
(جـ)



(د)

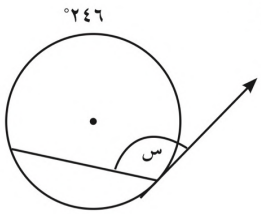


(هـ)

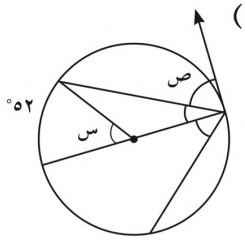


(٢) أوجد قيمة المجهول في كل من الأشكال التالية بمعلومية أن الشعاع في كل رسم يمثل مماسًا للدائرة.

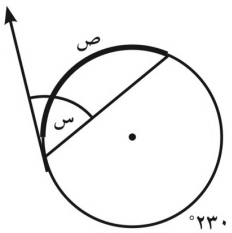
(أ)



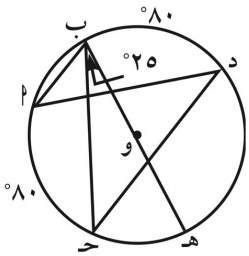
(ب)



(جـ)



(٣) أوجد قياسات الزوايا والأقواس التالية مستخدمًا الرسم المقابل:



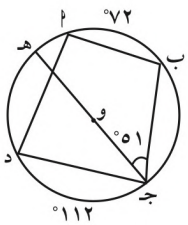
(أ) ق(أ̂).

(ب) ق(جـ هـ⌒).

(جـ) ق(جـ̂).

(د) ق(أ̂ب̂هـ).

(٤) في الشكل المقابل، أوجد قياس كل من:



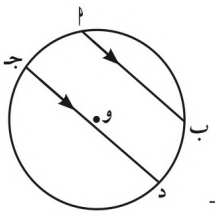
(أ) القوس الأصغر ب جـ⌒.

(ب) ق(ب̂).

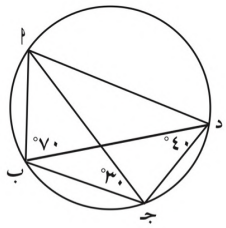
(جـ) ق(ب جـ̂ د).

(٥) في الشكل المقابل فيه الوتر $\overline{\text{ب جـ}}$.

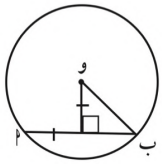
أثبت أن: $\overset{\frown}{\text{أجـ}} \cong \overset{\frown}{\text{ب د}}$.



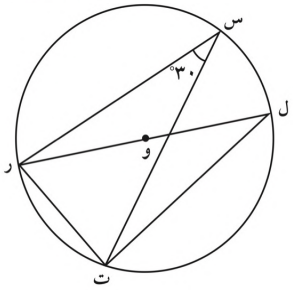
(٧) في الشكل المقابل أوجد ق(جـ ب̂ د).



(٨) في الشكل المقابل، أوجد قياس القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{أب}}$.



(١١) مستخدمًا معطيات الشكل المقابل حيث و مركز الدائرة:



(أ) ما نوع المثلث ر ل ت؟

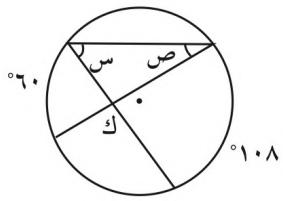
(ب) أوجد ق(ل ر̂ ت).

(جـ) أوجد محيط Δر ل ت بدلالة نق.

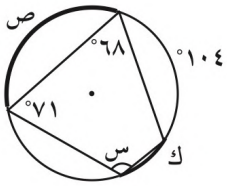
المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) أوجد قياسات الزوايا والأقواس المجهولة في كلّ من الأشكال الهندسية التالية:

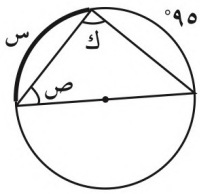
(أ)



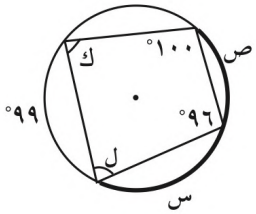
(ب)



(جـ)

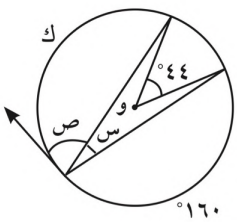


(د)

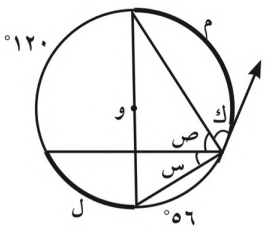


(٢) أوجد قيمة المجهول في كلّ من الأشكال التالية بمعلومية أن الشعاع في كل شكل يمثل مماسًا للدائرة.

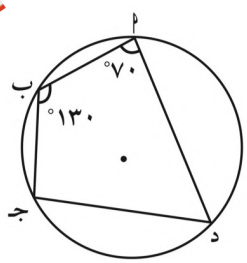
(أ)



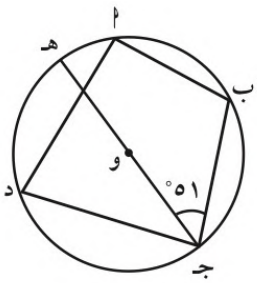
(ب)



(٤) أ ب جـ د رباعي دائري (محوط بدائرة). ق(أ̂) = ٧٠° ، ق(ب̂) = ١٣٠°.
أوجد ق(جـ̂) ، ق(د̂).

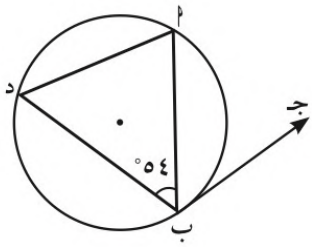


(٦) في الشكل المقابل، إذا كان ق(أب) = ٧٢° ، ق(ب جـ هـ) = ٥١°.
فإن قياس القوس هـ أ =



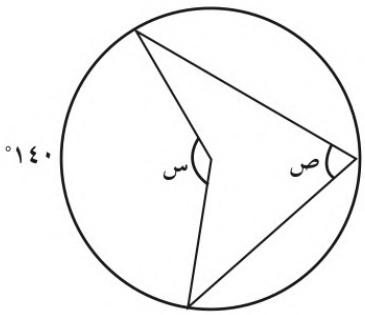
(أ) ٣٠° (ب) ١٠٢° (جـ) ٧٢° (د) ٦٨°

(٧) في الشكل المقابل، إذا كان ق(ب د) = ١٤٠°، فإن ق(أ ب̂ جـ) =



(أ) ٧٠° (ب) ٥٠° (جـ) ٥٦° (د) ١٢٤°

(٨) في الشكل المقابل، قيمة كل من س، ص على الترتيب هما:



(أ) ٢٨٠° ، ١٤٠° (ب) ٧٠° ، ٣٥°
(جـ) ١٤٠° ، ٤٠° (د) ١٤٠° ، ٧٠°

الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس

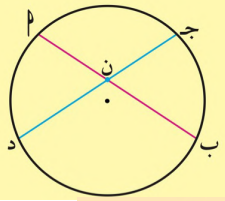
Circle: Intersecting Chords and Tangent

١ - تقاطع الأوتار داخل الدائرة Intersecting Chords Inside the Circle

نظرية (١)

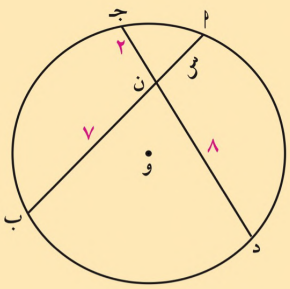
إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزءي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزءي الوتر الآخر.

ن أ × ن ب = ن جـ × ن د



مثال (١)

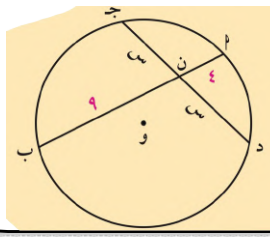
في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



الحل:

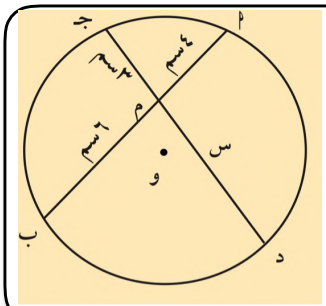
ن جـ × ن د = ن أ × ن ب	نظرية
٢ × ٨ = س × ٧	بالتعويض
١٦ = ٧س	بالتبسيط
$\frac{١٦}{٧} = \frac{٧س}{٧}$	بالقسمة
$س = \frac{١٦}{٧}$	

حاول أن تحل



١ في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.

حاول أن تحل



٢ في الدائرة المقابلة التي مركزها و:

م أ = ٤ سم، م ب = ٦ سم، م جـ = ٣ سم، م د = س.

أ أوجد قيمة س.

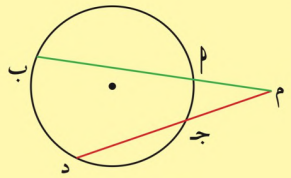
ب أوجد البعد بين المركز و والوتر $\overline{دجـ}$ إذا علمت أن طول نصف قطر الدائرة يساوي ٦ سم.

٢ – تقاطع الأوتار خارج الدائرة Intersecting Chords Outside the Circle

نتيجة (١)

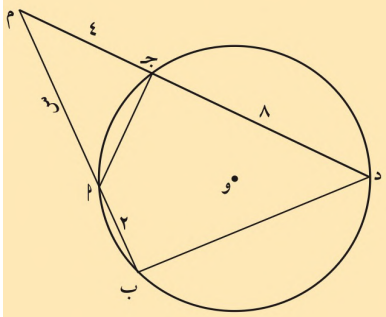
إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.

م أ × م ب = م جـ × م د.



مثال (٣)

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



الحل:

المعطيات: $\overline{\text{ب أ}}$ ، $\overline{\text{د جـ}}$ وتران للدائرة التي مركزها ويتقاطع امتدادهما خارجها عند النقطة م.

المطلوب: إيجاد قيمة س

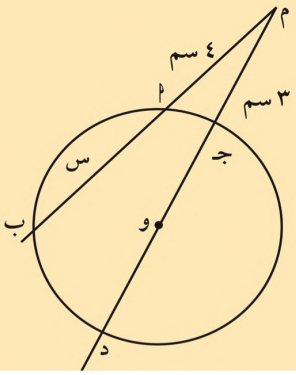
البرهان:

م أ × م ب = م جـ × م د	نتيجة
س(س + ٢) = ٤(٤ + ٨)	بالتعويض
س^{٢} + ٢س – ٤٨ = ٠	بالتبسيط
س = $\frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{\text{٢أ}}$	باستخدام المميز
س = ٦ أو س = –٨	الحلول

فتكون قيمة س = ٦ لأن س = –٨ مرفوضة

حاول أن تحل

٣ في الشكل المقابل، دائرة مركزها و. طول نصف قطرها يساوي ٤ سم. أوجد قيمة س.



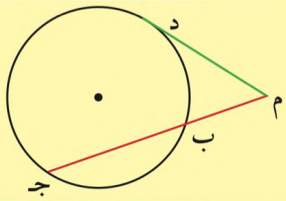
٣ – تقاطع مماس وقاطع الدائرة من نقطة خارج دائرة

Intersection Between Tangent and Secant from any Point Outside of a Circle

نتيجة (٢)

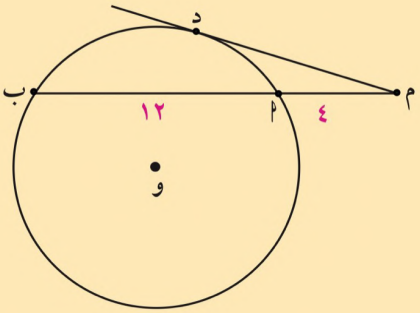
إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.

(م د)^{٢} = م ب × م جـ .



مثال (٤)

في الشكل المقابل، أوجد طول القطعة المماسية $\overline{\text{م د}}$ علمًا بأن: أم = ٤ سم ، أب = ١٢ سم.



الحل:

نجد طول $\overline{\text{م ب}}$.

م ب = ٤ + ١٢ = ١٦

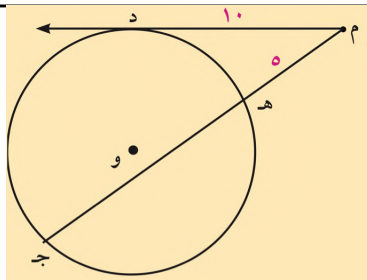
نكتب: $(\text{م د})^{٢} = \text{م أ} \times \text{م ب}$ نتيجة

$(\text{م د})^{٢} = ٤ \times ١٦$ بالتعويض

$(\text{م د})^{٢} = ٦٤$ بالتبسيط

م د = ٨ بإيجاد الجذر التربيعي

حاول أن تحل



٤ في الشكل المقابل، $\overline{\text{م د}}$ قطعة مماسية حيث م د = ١٠

م هـ = ٥.

أوجد طول $\overline{\text{هـ جـ}}$.

تمرَّنْ ٦-٤

الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس

Circle: Intersecting Chords and Tangent

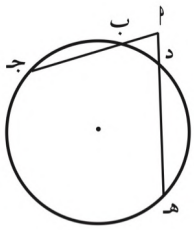
المجموعة أ تمارين أساسية

(١) في الشكل المقابل:

أجـ = ٢٠، ب جـ = ١٥

أهـ = ٢٥.

أوجد: د هـ.

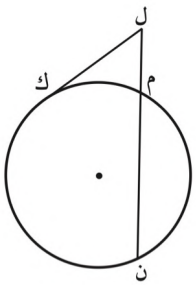


(٢) في الشكل المقابل:

$\overline{\text{ل ك}}$ مماس الدائرة

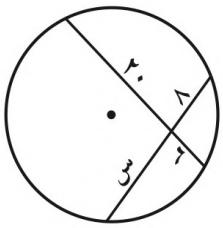
ل ك = ٨ ؛ ل م = ٤.

أوجد: م ن.

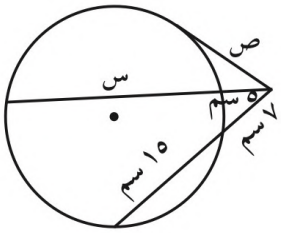


في التمرينين (٣–٤)، أوجد قيمة كل متغيّر.

(٣)

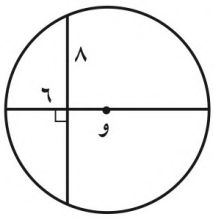


(٤)

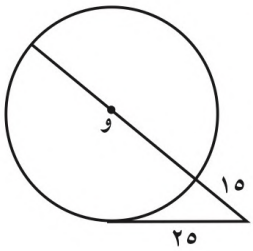


في التمرينين (٥–٦)، أوجد طول قطر كل دائرة.

(٥)

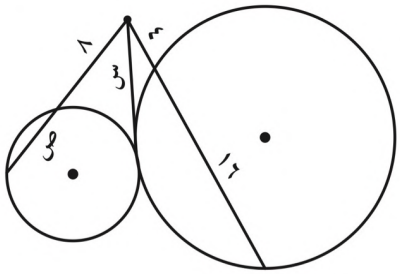


(٦)

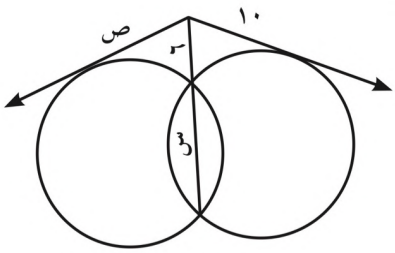


في التمرينين (٧–٨)، استخدم معطيات الشكل لإيجاد قيمة كل من س، ص.

(٧)



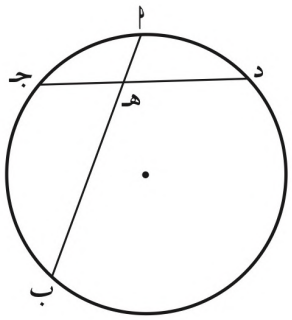
(٨)



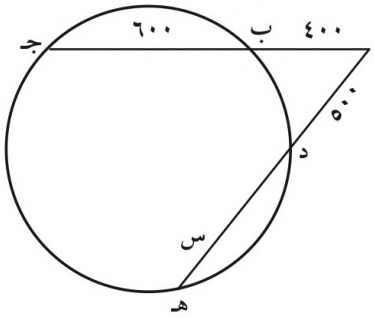
(١١) في الشكل أدناه:

أهـ = ١٩ ، هـ د = ٤٠ ، هـ جـ = ٣٨

أوجد هـ ب.



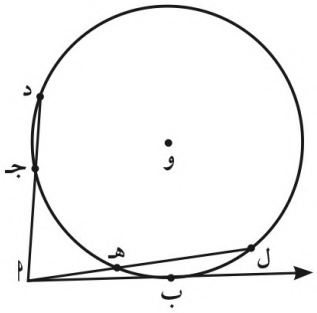
(١٢) أوجد قيمة س.



(١٣) في الشكل المقابل: $\overleftarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة.

أجـ = ١٠ ، أهـ = ٨ ، هـ ل = ١٢ .

(أ) أوجد جـ د.



(ب) أوجد أب.

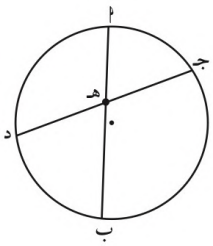
المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) في الشكل أدناه:

هـ جـ = ٥ ، هـ أ = ٣ ،

هـ د = ٦.

أوجد هـ ب.

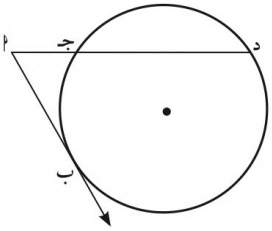


(٢) في الشكل أدناه:

$\overleftarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة

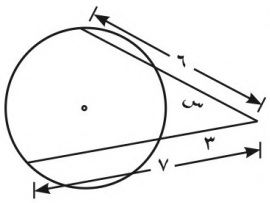
أب = ٦ ، أجـ = ٣

أوجد أد، جـ د.

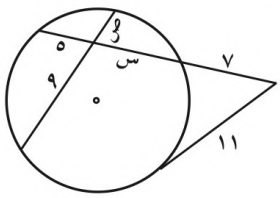


في التمرينين (٣–٤)، أوجد قيمة كل من س ، ص.

(٣)

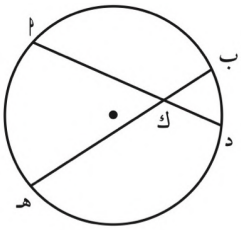


(٤)



(٦) في الشكل المقابل، إذا كان أك = ١٤ ، هـ ك = ١٧ ، ب ك = ٧.

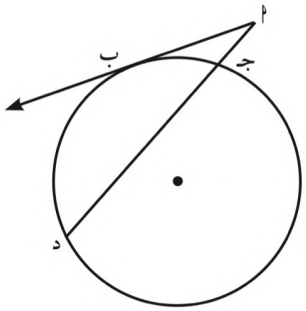
فأوجد د ك.



(٧) في الشكل المقابل،

$\overline{\text{أب}}$ مماس للدائرة. أب = ١٢ ، جـ د = ٣٢.

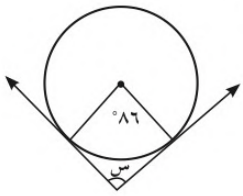
أوجد أجـ.



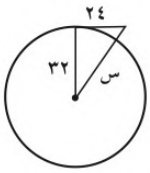
مراجعة الوحدة السادسة

في التمرينين (١–٢)، لنفرض أن الخطوط التي تبدو مماسة هي مماس للدائرة، أوجد قيمة س.

(١)

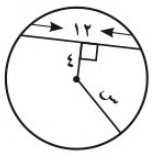


(٢)



في التمرينين (٣–٤)، أوجد قيمة س.

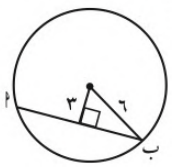
(٣)



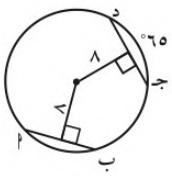
(٤)

في التمرينين (٥–٦)، أوجد قياس القوس $\widehat{\text{أب}}$.

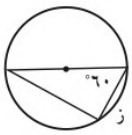
(٥)



(٦)

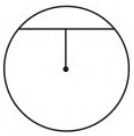


(٧) في الشكل المقابل، أوجد قيمة ز.



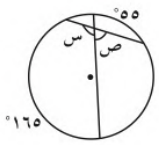
(٨) وتر في دائرة طوله ٢ , ٤ سم ويبعد ٨ سم عن مركز الدائرة.

فما طول نصف قطر الدائرة؟



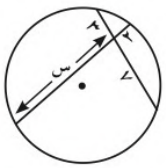
في التمارين (٩–١٢)، الخط الذي يبدو مماس هو مماس للدائرة أوجد قيمتي س، ص في كل مما يلي:

(٩)

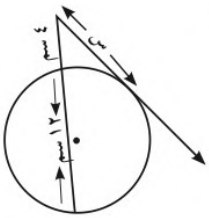


(١٠)

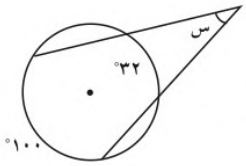
(١١)



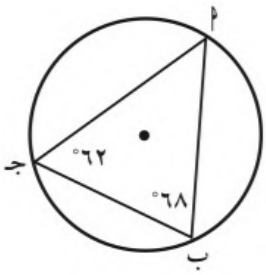
(١٢)



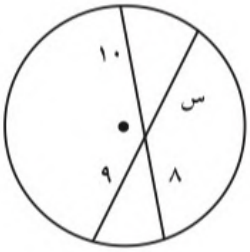
(١٣) في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



(١٤) في الشكل المقابل، أوجد قيمة $\widehat{ب جـ}$.

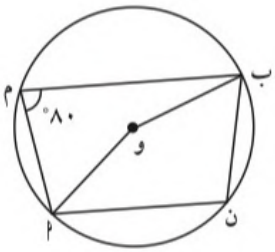


(١٥) في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



(١٦) أوجد محيط المثلث أ ب جـ.

(١٧) أوجد ق(ن̂).



(١٨) في الشكل المقابل، Δ أ ب جـ متطابق الأضلاع.

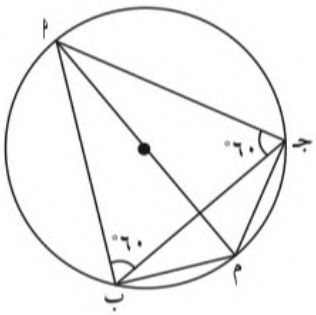
أوجد:

ق(أ م̂ ب).

ق(ب م̂ جـ).

ق(م جـ̂ ب).

ق(أ م̂ جـ).



تنظيم البيانات في مصفوفات
Organising Data Into Matrices

تعريف

المصفوفة هي تنظيم من الأعداد المرتبة في صفوف وأعمدة.

الأعداد المكونة للمصفوفة تسمى عناصر Elements.

رتبة المصفوفة Dimension of a Matrix

نرمز إلى المصفوفة بأحد حروف الهجاء ونضع تحته خطًّا، نكتب $\underline{أ}$ ونقرأ **المصفوفة أ**.

عدد الصفوف (م) وعدد الأعمدة (ن) يحددان **رتبة المصفوفة** وتكتب م × ن.

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ٦ & ٧ & ٠ \end{bmatrix}$$

المصفوفة $\underline{أ}$ هي من **الرتبة ٢ × ٣**.

ملاحظة: لكتابة رتبة المصفوفة نكتب أولًا عدد الصفوف يليه عدد الأعمدة.

مثال (١)

اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٥ \\ ٢ & -٣ & -٧ \\ ١ & ٠ & ٩ \end{bmatrix} \qquad \underline{ب} = \begin{bmatrix} -٤ & \frac{٢}{٣} & -٣ \end{bmatrix} \qquad \underline{جـ} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ ٠,٥ \end{bmatrix}$$

الحل:

تتكون المصفوفة $\underline{أ}$ من ٣ صفوف و٣ أعمدة: المصفوفة من الرتبة ٣ × ٣.

تتكون المصفوفة $\underline{ب}$ من صف واحد و٣ أعمدة: المصفوفة من الرتبة ١ × ٣.

تتكون المصفوفة $\underline{جـ}$ من ٤ صفوف وعمود واحد: المصفوفة من الرتبة ٤ × ١.

حاول أن تحل

١ اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ٠ \\ -٢ & ٠,٥ & ٧ \end{bmatrix} \qquad \underline{ب} = \begin{bmatrix} -٨ & ٣ & ١٠ \end{bmatrix} \qquad \underline{جـ} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ١ & -٥ \\ ٠,٦ & ٩ \end{bmatrix}$$

ترميز عناصر المصفوفة

يحدد أي عنصر في المصفوفة بدلالة رقمي الصف والعمود الواقع فيهما، فمثلًا، في المصفوفة أ العنصر الذي في الصف الأول والعمود الثالث نرمز إليه بالرمز $أ_{٣١}$ (الصف أولًا والعمود ثانيًا).

$$أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{bmatrix}$$

العنصر في الصف الأول والعمود الثالث: $أ_{٣١}$

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، أوجد $ب_{٢٣}$ من المصفوفة ب.

مثال (٣)

في المصفوفة: $ب = \begin{bmatrix} ١٢ & ١ & ٥ & ٤ \\ ٢ & ٦ & ٢ & ٣,٥ \\ ١ & ٠ & ١ & -٤ \end{bmatrix}$ اكتب قيمة كل عنصر مما يلي:

أ $ب_{٢٢}$ ب $ب_{١٣}$ ج $ب_{١١}$

الحل:

أ العنصر $ب_{٢٢}$ يقع في الصف ٢ وفي العمود ٢ ∴ $ب_{٢٢} = ٦$

ب العنصر $ب_{١٣}$ يقع في الصف ٣ وفي العمود ١ ∴ $ب_{١٣} = ١$

ج العنصر $ب_{١١}$ يقع في الصف ١ وفي العمود ١ ∴ $ب_{١١} = ١٢$

معلومة رياضية:

المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار تسمى مصفوفة صفرية

Zero Matrix

ويرمز إليها بالرمز $ـم_{م \times ن}$

مثال (٤)

صنّف كلًّا من المصفوفات التالية:

$أ = \begin{bmatrix} ١ & -٥ & ٠ \\ ٠ & ٤ & ٧ \\ ٣ & ٢ & ٨ \end{bmatrix}$ $ب = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٠,٢ \end{bmatrix}$

$جـ = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & -٥ \end{bmatrix}$ $د = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ & ١,٤ \\ ١٢ & ٨ & ٥ \end{bmatrix}$

الحل:

أ : مصفوفة ٣ × ٣ ∴ أ مصفوفة مربعة.

ب : مصفوفة ٣ × ١ ∴ ب مصفوفة عمودية.

جـ : مصفوفة ١ × ٣ ∴ جـ مصفوفة أفقية.

د : مصفوفة ٢ × ٣ ∴ د مصفوفة مستطيلة.

حاول أن تحل

٤ صنّف المصفوفات في المثال (١).

$أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٥ \\ ٢ & -٣ & -٧ \\ ١ & ٠ & ٩ \end{bmatrix}$ $ب = \begin{bmatrix} -٤ & \frac{٢}{٣} & -٣ \end{bmatrix}$ $جـ = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ ٠,٥ \end{bmatrix}$

حاول أن تحل

٥ هل المصفوفتان س، ص متساويتان؟ فسّر.

$$\text{س} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{ص} = \begin{bmatrix} -١ & ٩ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$$

معلومة رياضية:

كل عنصرين لهما الموقع نفسه في المصفوفتين اللتين لهما الرتبة نفسها يسميان عنصرين متناظرين.

مثال (٦)

إذا كانت: $\begin{bmatrix} ٢\text{س} - ٥ & ٤ \\ ٣ & ٣\text{ص} + ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٤ \\ ٣ & \text{ص} + ١٨ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

الحل:

$$\begin{bmatrix} ٢\text{س} - ٥ & ٤ \\ ٣ & ٣\text{ص} + ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٤ \\ ٣ & \text{ص} + ١٨ \end{bmatrix}$$

بما أن المصفوفتين متساويتان، فإن عناصرهما المتناظرة متساوية.

٢س − ٥ = ٢٥	٣ص + ١٢ = ص + ١٨
٢س = ٣٠	٢ص = ٦
س = ١٥	ص = ٣

الحل هو: س = ١٥، ص = ٣

حاول أن تحل

٦ أ إذا كانت $\begin{bmatrix} ٣٨ & ٥ \\ ٣ & ٤\text{ص} - ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} + ٨ & ٥ \\ ٣ & -\text{ص} \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

ب إذا كانت [٣س س + ص س − ص] = [−٩ ٤ −١٠] فأوجد قيمة كل من س، ص.

تمرَّنْ ٧–١

تنظيم البيانات في مصفوفات

Organising Data in Matrices

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمرينين (١–٢)، اذكر رتبة كل مصفوفة.

(١) $\begin{bmatrix} ٢ & \sqrt{٥} \end{bmatrix}$

_____

(٢) $\begin{bmatrix} ٤ & -٢ & ٢ \\ ١ & ٤ & ١ \\ ٠ & ٥ & -٧ \end{bmatrix}$

_____

حدّد ما إذا كان زوج المصفوفات متساويًا أم لا. علّل إجابتك.

(٣) $\begin{bmatrix} ٤ \\ -٦ \\ ٨ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} \sqrt{١٦} & -٦ & \sqrt{٦٤} \end{bmatrix}$

_____

اذكر رتبة (أبعاد) المصفوفة، مع ذكر العنصر $أ_{٣٢}$.

(٤) $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٥ \\ ٢ & -٣ & -٧ \\ ١ & ٠ & ٩ \end{bmatrix}$

_____

(٥) أي زوج من المقادير التالية يحقّق ما يلي: [٢س س – ص] = [أ ب]؟

_____

(أ) س = ٢أ ، ص = $\frac{١}{٢}$أ – ب (ب) س = $\frac{١}{٢}$أ ، ص = $\frac{١}{٢}$أ + ب

(جـ) س = $\frac{١}{٢}$أ ، ص = $\frac{١}{٢}$أ – ب (د) س = ٢أ ، ص = $\frac{١}{٢}$أ + ب

في التمرين (٦)، أوجد قيم كل من س، ص.

(٦) $\begin{bmatrix} س^{٢} & ٤ \\ -٢ & ص^{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٤ \\ -٢ & ٥ص \end{bmatrix}$

في التمرينين (٩–١٠)، أوجد قيم المتغيرات بحيث تكون المصفوفتان متساويتين.

(٩) $\begin{bmatrix} ٢س - ٥ & ٣ \\ ٥ & ٢ص + ١٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ص + ١٩ \end{bmatrix}$

_____

=

_____

(١٠) $\begin{bmatrix} ٤س & ٢ - ص & ٥ \\ -٣ & -١ & ٢ \\ ٠ & -١٠ & ١٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢س + ٥ & ٤ص & ل \\ -٣ & م & ك - ل \\ ٠ & -٤س & ١٥ \end{bmatrix}$

_____

_____

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمرينين (١–٢)، اذكر رتبة كل مصفوفة مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٠ & -٣ \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} ١ \\ -٩ \\ ٥ \end{bmatrix}$

في التمرينين (٣–٤)، حدّد ما إذا كان كل زوج من المصفوفات التالية متساويًا أم لا. علّل إجابتك.

(٣) $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢(-١) & ٢(٥,١) \\ ٢(٥,٢) & ٢(٠) \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -٢ \\ -٣ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ -٢ & -٣ & -٤ \end{bmatrix}$

في التمرينين (٥–٦)، اذكر رتبة (أبعاد) كلّ مصفوفة، مع ذكر قيمة العنصر الموضّح.

(٥) $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\text{أ}_{٢٣}$

(٦) $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} -٤ & ١ & -٣ \\ ٢ & -١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب}_{٢١}$

(٩) أوجد قيم كل من س، ص.

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٨ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤\text{س} - ٦ & -١٠\text{ص} + ٥\text{س} \\ ٤\text{س} & -١٠\text{ص} + ٥,٧\text{س} \end{bmatrix}$$

في التمرينين (١٠–١١)، أوجد قيم المتغيرات بحيث تكون المصفوفتان متساويتين.

(١٠) $\begin{bmatrix} ٢\text{س} + ٤ & \text{ص} - ٥ \\ \text{ل} + ٦ & ٢\text{ك} - ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢\text{ص} - ٢ \\ ٤ & ٤\text{ك} + ١٥ \end{bmatrix}$

(١١) $\begin{bmatrix} ٤\text{ص} + ٢ & -٣ & ٤\text{ل} \\ -٤\text{س} & ٢ & ٣ \\ ٢\text{ن} - ١ & -١٤ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ & ٢\text{ك} - ١ & ٠ \\ -٨ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٣\text{م} - ٢ & ١ \end{bmatrix}$

جمع وطرح المصفوفات Adding and Subtracting Matrices

لجمع مصفوفتين أ، ب يجب أن تكونا من **الرتبة نفسها**.

نجمع كل عنصرين لهما الموقع نفسه في أ، ب. مصفوفة الجمع لها رتبة كل من المصفوفتين أ، ب.

جـ = أ + ب

أ من الرتبة م × ن ، ب من الرتبة م × ن

∴ جـ من الرتبة م × ن.

$جـ_{وس} = أ_{وس} + ب_{وس}$.

مثال (١)

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٠ \\ ٣ & -٥ & ٧ \end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & -٤ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix}$ جـ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٩ & -٣ \\ -٩ & ٦ & ١٢ \end{bmatrix}$

فأوجد إن أمكن:

أ أ + ب ب أ + جـ

وإذا لم يكن الجمع ممكنًا، فاذكر السبب.

الحل:

أ أ + ب. لا يمكن الجمع، لأن رتبة أ هي ٢ × ٣ لا تساوي رتبة ب وهي ٣ × ٢.

ب أ + جـ. يمكن الجمع، لأن المصفوفتين لهما الرتبة نفسها: ٢ × ٣.

أ + جـ = $\begin{bmatrix} ١+٣ & -٢+٩ & ٠-٣ \\ ٣-٩ & -٥+٦ & ٧+١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٧ & -٣ \\ -٦ & ١ & ١٩ \end{bmatrix}$

رتبة أ + جـ هي ٢ × ٣.

حاول أن تحل

١ أوجد ناتج ما يلي: $\begin{bmatrix} -١٢ & ٢٤ \\ -٣ & ٥ \\ -١ & ١٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & -١ \\ -٥ & ٤ \\ ١ & -٧ \end{bmatrix}$

مثال (٣)

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ جـ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix}$

فأوجد: أ + ب ، ب + أ ، (أ + ب) + جـ ، أ + (ب + جـ) ، أ + $٠_{٢×٢}$ ، أ + (−أ).

الحل:

أ + ب = $\begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ ب + أ = $\begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$

(أ + ب) + جـ = $\begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$

أ + (ب + جـ) = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ -٣ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$

أ + $٠_{٢×٢}$ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$

أ + (−أ) = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & -٣ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

معلومة رياضية:

المصفوفة − أ هي النظير الجمعي للمصفوفة أ.

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، أوجد جـ + ب ، (جـ + ب) + أ .

خواص جمع المصفوفات

إذا كان أ ، ب ، جـ مصفوفات من الرتبة م × ن فإن:

- أ + ب هي من الرتبة م × ن — خاصية الإقفال (الانغلاق)
- أ + ب = ب + أ — خاصية الإبدال Commutative
- (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) — خاصية التجميع Associative
- $\underline{\text{٠}}_{\text{م×ن}}$ + أ = أ + $\underline{\text{٠}}_{\text{م×ن}}$ = أ — المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد الجمعي من الرتبة م × ن
- أ + (−أ) = $\underline{\text{٠}}_{\text{م×ن}}$ — خاصية المعكوس الجمعي (النظير الجمعي).

طرح المصفوفات

يمكن طرح المصفوفات باستخدام خاصية مصفوفة المعكوس الجمعي.

إذا كان للمصفوفتين أ ، ب الرتبة نفسها، فإن أ − ب = أ + (−ب).

ملاحظة: إذا كان أ ≠ ب ولهما الرتبة نفسها فإن: أ − ب ≠ ب − أ وبالتالي، عملية طرح المصفوفات ليست إبدالية.

مثال (٤)

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{bmatrix} ، \quad \text{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ -٢ & ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

أوجد أ − ب ، ب − أ

الحل:

الطريقة الأولى:

أ − ب = أ + (−ب)

$$= \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & -٤ & -٣ \\ ٢ & -٢ & -٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣ + (-١) & ٢ + (-٤) & ٤ + (-٣) \\ -١ + (٢) & ٤ + (-٢) & ٠ + (-٤) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & -٢ & ١ \\ ١ & ٢ & -٤ \end{bmatrix}$$

الطريقة الثانية:

$$\text{أ} - \text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ -٢ & ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣ - ١ & ٢ - ٤ & ٤ - ٣ \\ -١ - (-٢) & ٤ - ٢ & ٠ - ٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & -٢ & ١ \\ ١ & ٢ & -٤ \end{bmatrix}$$

$$\text{ب} - \text{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ -٢ & ٢ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ -٢ & ٢ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & -٢ & -٤ \\ ١ & -٤ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ - ٣ & ٤ - ٢ & ٣ - ٤ \\ -٢ - (-١) & ٢ - ٤ & ٤ - ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ٢ & -١ \\ -١ & -٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل

٤ أوجد ناتج كل مما يلي:

أ $\begin{bmatrix} ٦ & -٩ & ٧ \\ -٢ & ١ & ٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٠ \\ ٦ & ٥ & ١٠ \end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ -١ & ١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$

حل المعادلات المصفوفية Solving Matrix Equations

المعادلة المصفوفية هي معادلة إحدى مصفوفاتها غير معلومة (المتغير).

يمكنك استخدام خواص المساواة لحل المعادلات المصفوفية.

لأي مصفوفات أ، ب، جـ لها الرتبة نفسها إذا كان: أ = ب، فإن: أ + جـ = ب + جـ، أ − جـ = ب − جـ.

مثال (٥)

حل المعادلة المصفوفية التالية:

$\text{س} - \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٩ & ٨ \end{bmatrix}$

الحل:

$\text{س} - \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٩ & ٨ \end{bmatrix}$

$\text{س} - \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٩ & ٨ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ بإضافة $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ لكل من طرفي المعادلة

وبالتالي: $\text{س} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١١ & ١١ \end{bmatrix}$

حاول أن تحل

٥ أوجد س حيث:

$\text{س} - \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ١٠ \\ ٤ & -٤ \end{bmatrix}$

تمرَّنْ ٧-٢

جمع وطرح المصفوفات

Adding And Subtracting Matrices

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمرينين (١–٢)، أوجد ناتج كلّ مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$

_____

(٢) $\begin{bmatrix} ٣ & ٦- \\ ٢- & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣- & ٦ \\ ٢ & ٧- \end{bmatrix}$

_____

في التمرينين (٣–٤)، استخدم الحساب الذهني أو الورقة والقلم أو الآلة الحاسبة لإيجاد الناتج:

(٣) $\begin{bmatrix} ١ & ٤- & ٢- \\ ١٠ & ١١ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ٩- & ٦ \\ ٧ & ٥ & ٨- \end{bmatrix}$

_____

(٤) $\begin{bmatrix} ٥ & ٧ \\ ٢- & ٣ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٦ & ٣- \\ ٧ & ٥- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \\ ٧ & ٦ \end{bmatrix}$

في التمارين (٥–٩)، اذكر ما إذا كان الجمع أو الطرح ممكنًا أو غير ممكن مع تفسير إجابتك:

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ & \frac{١}{٢} & ١ \\ ٩ & ٨ & \frac{٣}{٥} & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ٤ & ٠,٣٣ \\ ٠,١٥ & ٧- \end{bmatrix}$

$\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٤٤ & ٣ \\ ٠ & ١ \\ ٢٣,٣ & ١٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{د} = \begin{bmatrix} ١١/٢ & ٧/٨ & ٤- & ٢- \\ ١٠/١١- & ١- & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

(٥) $\underline{أ} + \underline{د}$

_____

(٦) $\underline{جـ} + \underline{ب}$

_____

(٧) $\underline{أ} + \underline{ب}$

_____

(٨) $\underline{جـ} - \underline{د}$

_____

(٩) $\underline{ب} + \underline{جـ}$

_____

في التمارين (١٠–١٣)، أوجد س في كل مما يلي:

(١٠) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣- \\ ٢ & ١ & ٣ \end{bmatrix} + \text{س} = \begin{bmatrix} ٥ & ١ & ٨ \\ ٦- & ٠ & ٥ \end{bmatrix}$

(١١) $\text{س} - \begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ٧٥ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٥٠ \\ ٥٠ & ١٠- \end{bmatrix}$

(١٢) $-\text{س} + \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ & ٩ \\ ١٢ & ٨ & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥- & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٥ & ٣- \end{bmatrix}$

(١٣) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٤ & ٢٤- \end{bmatrix} = \text{س} - \begin{bmatrix} ١٣ & ٢٤ & ٥ \\ ٦- & ١٧- & ١ \end{bmatrix}$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

الحساب الذهني: في التمارين (١–٤)، أوجد ناتج كلّ مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣- & ٤ \\ ٥ & ٦ & ٧- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ ١ & ٢- & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٥ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٥- \\ ١ & ٢- \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} ٠,٥ & ٩,٥ \\ ٥- & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠,٥ & ٩,٥ \\ ٥- & ٣ \end{bmatrix}$

في التمارين (٦–٨)، استخدم الحساب الذهني أو الورقة والقلم لإيجاد ناتج كلّ مما يلي:

(٦) $\begin{bmatrix} ٤- & ٢ \\ ٩ & ٥- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$

(٧) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٥- \\ ٦ & ١ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٢- & ٦ \\ ٥- & ٥ & ٦- \end{bmatrix}$

(٨) $\begin{bmatrix} ٩ & ٧- & ٨ \\ ٦ & ٣- & ٤- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١٠ & ٥- & ٢ \\ ٤ & ١ & ٩- \end{bmatrix}$

في التمارين (١٠–١٢)، اختر الحساب الذهني أو الورقة والقلم أو الآلة الحاسبة لإيجاد ناتج كلّ مما يلي:

(١٠) $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٤- & ٣ \\ ٢- & ٠ & ٧ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٢- \\ ٥ & ٤- & ١ \\ ١٠- & ٠ & ٧ \end{bmatrix}$

(١١) $\begin{bmatrix} ٤ & ٠ & ٨ \\ ٧ & ٦- & ٥ \\ ١- & ٢ & ٢- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٦ & ١ & ٩- \\ ٩- & ٠ & ٥- \\ ٣ & ٢- & ٢ \end{bmatrix}$

(١٢) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

في التمارين (١٣–١٦)، اذكر ما إذا كان الجمع أو الطرح ممكنًا أو غير ممكن:

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ & \frac{١}{٢} & ١ \\ ٩ & ٨ & \frac{٣}{٥} & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ٤ & ٠,٣٣ \\ ٠,١٥ & ٧- \end{bmatrix}$

$\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٤٤ & ٣ \\ ٠ & ١ \\ ٢٣,٣ & ١٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{د} = \begin{bmatrix} \frac{١١}{٢} & \frac{٧}{٨} & ٤- & ٢- \\ -\frac{١٠}{١١} & ١- & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

(١٣) $\underline{ب} - \underline{جـ}$

(١٤) $\underline{د} + \underline{أ}$

(١٥) $\underline{أ} + \underline{ب} + \underline{جـ}$

(١٦) $\underline{أ} + (\underline{جـ} - \underline{د})$

في التمارين (١٧–٢٠)، أوجد $\underline{س}$ في كل مما يلي:

(١٧) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \\ ٤ & ٣- \end{bmatrix} + \underline{س} = \begin{bmatrix} ٦- & ٥ \\ ٠ & ١ \\ ٥ & ٨ \end{bmatrix}$

(١٨) $\begin{bmatrix} ١- & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{bmatrix} - \underline{س} = \begin{bmatrix} ١٣- & ٣ & ١١ \\ ٨ & ٩- & ١٥ \end{bmatrix}$

(١٩) $\underline{س} - \begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ ٢- & ٣ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ ٢- & ٣ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

(٢٠) $\underline{س} + \begin{bmatrix} ٥ & ١٢ \\ ٢٨ & ١٧ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠ & ١٤ \\ ٠ & ٥- \\ ١٩- & ٣ \end{bmatrix}$

ضرب المصفوفات
Matrix Multiplication

ضرب مصفوفة في عدد
Multiplying a Matrix by a Scalar

يمكنك أن تضرب عدد حقيقي في مصفوفة مثل:

$$٣\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣- & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥ & ٦ \\ ٩- & ١٢ \end{bmatrix}$$

الضرب القياسي Scalar Multiplication

الضرب القياسي هو عملية ضرب مصفوفة أ في عدد حقيقي ك : ك ≠ ٠.

الناتج هو المصفوفة كأ.

نحصل على المصفوفة كأ بضرب كل عنصر من أ في ك.

إذا كان ك = ٠، يكون الناتج مصفوفة صفرية.

معلومة رياضية:
رتبة المصفوفة كأ تساوي رتبة المصفوفة أ.

مثال (١)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٤- & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ١- & ٢- \end{bmatrix}$

فأوجد: ٥أ ، ٣ب . ثم ٥أ − ٣ب

الحل:

$$٥أ = \begin{bmatrix} ٥ \times ٢ & ٥ \times ٣ & ٥ \times (٤-) \\ ٥ \times ٥ & ٥ \times ٤ & ٥ \times ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ١٥ & ٢٠- \\ ٢٥ & ٢٠ & ١٥ \end{bmatrix}$$

$$٣ب = \begin{bmatrix} ٣ \times ٠ & ٣ \times ١ & ٣ \times ٢ \\ ٣ \times (٢-) & ٣ \times (١-) & ٣ \times ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ٦ \\ ٦- & ٣- & ٩ \end{bmatrix}$$

$$٥أ - ٣ب = \begin{bmatrix} ١٠ & ١٥ & ٢٠- \\ ٢٥ & ٢٠ & ١٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ٦ \\ ٦- & ٣- & ٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ١٢ & ٢٦- \\ ٣١ & ٢٣ & ٦ \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل

١ من المثال (١)، أوجد:

أ ٥ب − ٤أ

ب أ + ٦ب

خواص الضرب القياسي

إذا كان أ ، ب ، ٠ مصفوفات من الرتبة م × ن. ك، د عددان قياسيان. فإن:

- ك أ : مصفوفة من الرتبة م × ن — خاصية الإغلاق
- (ك د) أ = ك(د أ) — خاصية التجميع للضرب
- ك(أ + ب) = ك أ + ك ب — خاصية التوزيع من اليمين
- (أ + ب)ك = أ ك + ب ك — خاصية التوزيع من اليسار
- ٠ × أ = ٠ — خاصية الضرب في صفر

يمكن استخدام خواص الضرب القياسي لحل معادلات تتضمن مصفوفات.

مثال (٣)

حل المعادلة: ٤س + ٢ $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ثم تحقق من إجابتك.

الحل:

$$٤س + ٢\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$٤س + \begin{bmatrix} ٣ \times ٢ & ٤ \times ٢ \\ (-٢) \times ٢ & ١ \times ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$٤س + \begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$٤س = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$٤س = \begin{bmatrix} ٤ & -٨ \\ ٨ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$س = \frac{١}{٤}\begin{bmatrix} ٤ & -٨ \\ ٨ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

تحقق:

$$٤س + ٢\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$٤\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} + ٢\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} \stackrel{؟}{=} \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٤ & -٨ \\ ٨ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix} \stackrel{؟}{=} \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} \checkmark$$

حاول أن تحل

٣ حل كل معادلة مما يلي:

أ) $٢س = \begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

ب) $-٣س + \begin{bmatrix} ٧ & ٠ & -١ \\ ٢ & -٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ & ٨ \\ -١٩ & -١٨ & ١٠ \end{bmatrix}$

ضرب المصفوفات :

المصفوفة أ هي مصفوفة من الرتبة م × ن والمصفوفة ب هي مصفوفة من الرتبة ن × ر، عندئذٍ مصفوفة الضرب أ × ب هي مصفوفة من الرتبة م × ر.

مصفوفة أ

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \\ ٦ & ٥ \end{bmatrix}$$

٣ × ٢

مصفوفة ب

$$\begin{bmatrix} ١٠ & ٩ & ٨ & ٧ \\ ١٤ & ١٣ & ١٢ & ١١ \end{bmatrix}$$

٢ × ٤

٣ صفوف

عمودان

صفان

٤ أعمدة

متساويان

أبعاد مصفوفة الضرب ٣ × ٤

تكون مصفوفة الضرب معرّفة إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساويًا لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

$$\text{أ}_{\text{م}\times\text{ن}} \times \text{ب}_{\text{ن}\times\text{ر}} = \text{جـ}_{\text{م}\times\text{ر}}$$

مثال (٤)

أوجد ناتج أ × ب.

حيث $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٤- & ١- \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix}$

الحل:

اضرب $\text{أ}_{١١}$ و $\text{ب}_{١١}$، ثم اضرب $\text{أ}_{٢١}$ و $\text{ب}_{١٢}$، ثم اجمع نواتج الضرب.

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٤- & ١- \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & ؟ \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$$(٠)(٤) + (٣)(٢-) = ٦-$$

الناتج هو العنصر في الصفّ الأوّل والعمود الأوّل. كرّر الخطوات نفسها مع باقي الصفوف والأعمدة.

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٤- & ١- \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦- & ؟ \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$$(٠)(٠) + (٣)(١) = ٣$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٤- & ١- \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦- & ٣ \\ ؟ & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$$(٤)(١-) + (٤-)(٢-) = ٤$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٤- & ١- \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦- & ٣ \\ ٤ & ٤- \\ ؟ & \square \end{bmatrix}$$

$$(٠)(١-) + (٤)(٤-) = ٤-$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٤- & ١- \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦- & ٣ \\ ٤ & ٤- \\ \square & ؟ \end{bmatrix}$$

$$(٤)(١) + (٢-)(٢) = ٠$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٤- & ١- \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦- & ٣ \\ ٤ & ٤- \\ ٠ & ؟ \end{bmatrix}$$

$$(٠)(٢) + (١)(١) = ٢$$

ناتج الضرب:

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٤- & ١- \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦- & ٣ \\ ٤ & ٤- \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل

٤ أ صف الإجراءات التي تمّت لضرب الصفّ المظلّل في العمود المظلّل في المثال (٤).

ب أوجد ناتج الضرب: $\begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ٣- \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$

جـ في المثال (٤)، ما رتبة المصفوفات الأصليّة؟ ما رتبة مصفوفة الضرب؟

د التفكير الناقد: كيف تقارن رتبة مصفوفة الضرب برتب المصفوفات الأصليّة؟

مثال (٥)

بفرض أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٨ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٨ & ٠ \\ ٢ & -٥ \end{bmatrix}$

حدّد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب: أ × ب، ب × أ معرّفة أو غير معرّفة.

أوجد رتبة كل مصفوفة ضرب معرّفة.

الحل:

أ × ب

(٣ × ٢) (٢ × ٢)

متساويتان

أ × ب معرّفة ورتبتها ٣ × ٢

ب × أ

(٢ × ٢) (٣ × ٢)

غير متساويتين

ب × أ غير معرّفة

ملاحظة: عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية.

مثال (مضاد)

أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix}$

أوجد أ × ب، ب × أ . ماذا تستنتج؟

الحل:

أ × ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣١ & ١٦ \\ ٢٧ & ١٢ \end{bmatrix}$

ب × أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٨ & ١٧ \\ ٣٠ & ٢٥ \end{bmatrix}$

أ × ب ≠ ب × أ ∴ عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية.

مربع المصفوفة Square Matrix

إذا كانت أ مصفوفة مربعة، فإن المصفوفة أ × أ يرمز إليها بالرمز أ^{٢}.

وتقرأ مربع المصفوفة أ. وبالمثل أ^{٣} = أ × أ × أ، أ^{٤} = أ^{٣} × أ ،....

حاول أن تحل

٥ بفرض: أ = $\begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٨ & ٠ & -١ & ٠ \\ ٢ & -٥ & ١ & ٨ \end{bmatrix}$

أ حدّد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب أ × ب، ب × أ معرّفة أو غير معرّفة.

ب أوجد ناتج الضرب المعرّف.

جـ بفرض أن المصفوفة أ هي مصفوفة من الرتبة ٢ × ٣، المصفوفة ب هي مصفوفة من الرتبة ٣ × ٢.

هل أ × ب، ب × أ متساويتان؟ وضّح إجابتك.

مثال (٦)

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

أوجد: $\underline{أ}^{٢}$ ، $\underline{أ}^{٣}$

الحل:

$$\underline{أ}^{٢} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\underline{أ}^{٣} = \underline{أ}^{٢} \times \underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل

٦ إذا كانت $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$. أوجد: $\underline{ب}^{٢}$ ، $\underline{ب}^{٣}$.

تمرَّنْ ٧-٣

ضرب المصفوفات

Matrices Multiplication

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمارين (١–٣)، أوجد ناتج ضرب كلّ مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ _____

(٢) $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٣ \\ ٥ \end{bmatrix}$ _____

(٣) $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ -١ & -٥ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ _____

(٤) أوجد رتبة مصفوفة الضرب، ثم أوجد الناتج.

$\begin{bmatrix} ٥ & ٧ & -٢ \\ \frac{-٤}{٥} & ٣ & ٦ \\ ٠ & \frac{-٢}{٣} & ٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ١ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ _____

في التمارين (٥–٩)، حدّد ما إذا كان الضرب معرّفًا أم لا.

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٦ & ٩ \end{bmatrix}$ $\underline{ب} = \begin{bmatrix} -٣ & ٦ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$ $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} -٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$ $\underline{د} = \begin{bmatrix} ٠ & ٧ \end{bmatrix}$

(٥) $\underline{أ} \times \underline{ب}$ _____

(٦) $\underline{أ} \times \underline{جـ}$ _____

(٧) $\underline{جـ} \times \underline{ب}$ _____

(٨) $\underline{د} \times \underline{أ}$ _____

(٩) $\underline{د} \times \underline{جـ}$ _____

في التمارين (١٠–١٢)، أوجد ناتج ضرب كلّ مما يلي:

(١٠) $٢\begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ _____

(١١) $٠,٥\begin{bmatrix} ٣ & ١٤ \\ ٧ & -٤ \end{bmatrix}$ _____

(١٢) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ _____

في التمارين (١٤–١٧)، استخدم المصفوفات د، و، ف. نفذ العمليات المطلوبة إذا كانت معرّفة. وإذا كانت إحدى العمليات غير معرّفة فاكتب «غير معرّفة».

$$\text{د} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ ٠ & ٣ & ١ \\ ٢ & -١ & -٢ \end{bmatrix} ، \quad \text{و} = \begin{bmatrix} ٢ & -٥ & ٠ \\ ١ & ٠ & -٢ \\ ٣ & ١ & ١ \end{bmatrix} ، \quad \text{ف} = \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ -٥ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

(١٦) د − ٢ × و

(١٧) (٢ × د) (٣ × ف)

(٢٠) أوجد قيمة كل من س ، ص:

$$\begin{bmatrix} ٢\text{س} & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -\text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & -٩ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$$

في التمرين (٢١)، استخدم المصفوفات أ، ب، جـ، حدّد ما إذا كان التعبيران في الزوج التالي متساويين.

$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ $\quad$ $\text{ب} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ $\quad$ $\text{جـ} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$

(٢١) (أ + ب) × جـ ، أ × جـ + ب × جـ .

(٢٢) إذا كانت م = $\begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ن = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فهل م × ن = ن × م ؟ فسّر.

(٢٣) أي ضرب مما يلي غير معرّف؟

(أ) $\begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ & ٢ \end{bmatrix}$ $\quad$ (ب) $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ & ٢ \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ $\quad$ (د) $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix}$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١–٤)، أوجد ناتج ضرب كلّ مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ -٤ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ -٤ & ٠ \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$

(٣) $-١ \begin{bmatrix} ٩ & -٧ & -٤ \\ -٨ & -٢ & ٣ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ & ٠ & ١ \\ ٠ & -١ & ١ \end{bmatrix}$

في التمارين (٥–٩)، حدّد ما إذا كان الضرب معرّفًا أم لا مع تفسير إجابتك.

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٦ & ٩ \end{bmatrix}$ $\underline{ب} = \begin{bmatrix} -٣ & ٦ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$ $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} -٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$ $\underline{د} = \begin{bmatrix} ٠ & ٧ \end{bmatrix}$

(٥) $\underline{ب} \times \underline{أ}$

(٦) $\underline{جـ} \times \underline{أ}$

(٧) $\underline{ب} \times \underline{جـ}$

(٨) $\underline{أ} \times \underline{د}$

(٩) $\underline{جـ} \times \underline{د}$

(١٦) أوجد قيمة كل من س ، ص إذا كانت:

$$\begin{bmatrix} ٢س & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٢س & -ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & -٩ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$$

في التمرين (١٧)، استخدم المصفوفات $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$، $\underline{هـ}$ لتبين صحة العبارة.

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ $\underline{ب} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ $\underline{هـ} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

(١٧) $(\underline{أ} + \underline{ب}) \times \underline{هـ} = \underline{أ} \times \underline{هـ} + \underline{ب} \times \underline{هـ}$.

مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)
Identity and Inverse Matrices

مصفوفة الوحدة Identity Matrix

المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي ١، وبقية العناصر صفر تسمى **مصفوفة الوحدة** للضرب. ويرمز إليها بـ و.

$\text{و}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\text{و}_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

بفرض أن $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix}$ ، $\text{و} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$\text{أ} \times \text{و} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \text{أ}\times١ + \text{ب}\times٠ & \text{أ}\times٠ + \text{ب}\times١ \\ \text{جـ}\times١ + \text{د}\times٠ & \text{جـ}\times٠ + \text{د}\times١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} = \text{أ}$

كذلك $\text{و} \times \text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} = \text{أ}$

أي أن: $\text{أ} \times \text{و} = \text{و} \times \text{أ} = \text{أ}$

$\text{و} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية.

وبصورة عامة $\text{و}_{\text{ن}\times\text{ن}}$ هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة ن.

النظير الضربي Multiplicative Inverse

إذ كانت أ، س مصفوفتين مربعتين من الرتبة نفسها بحيث يكون أ × س = و ، فإن س هي النظير الضربي للمصفوفة أ.

ويرمز إليها بـ $\text{أ}^{-١}$.

إذًا $\text{أ} \times \text{أ}^{-١} = \text{أ}^{-١} \times \text{أ} = \text{و}$

مثال (١)

أثبت أن $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$.

الحل:

$\text{أ} \times \text{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢\times٢ + ٣\times(-١) & ٢\times(-٣) + ٣\times٢ \\ ١\times٢ + ٢\times(-١) & ١\times(-٣) + ٢\times٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$\text{أ} \times \text{ب} = \text{و}$ ∴ ب هي النظير الضربي لـ أ .

يمكن القول أن المصفوفة أ هي النظير الضربي للمصفوفة ب .

حاول أن تحل

١ أ أثبت أن المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢,٥ & ١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي لـ $\begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

ب في المثال (١)، أثبت أن أ هي النظير الضربي لـ ب.

محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية Determinant of a 2 × 2 Matrix

ترتبط كل مصفوفة مربعة أ بعدد حقيقي يسمى **محدد أ** ويرمز إلى هذا العدد بالرمز |أ| ويقرأ **محدد المصفوفة أ**.

سنقتصر في هذا الدرس على محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية.

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{د} \end{bmatrix}$ هو أ د − ب ج

نكتب $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{د} \end{vmatrix} = \text{أ د} - \text{ب ج}$

تسمى المصفوفة التي محددها يساوي الصفر **بالمصفوفة المنفردة**

مثال (٢)

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية: $\text{أ} = \begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{bmatrix}$ $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ $\text{ج} = \begin{bmatrix} \text{س} & ٠ \\ ٠ & \text{س} \end{bmatrix}$

الحل:

$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{vmatrix} = (-٣) \times (-٥) - ٤ \times ٢ = ٧$

$|\text{ب}| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix} = (٢) \times (-٢) - (-٣) \times (٣) = ٥$

$|\text{ج}| = \begin{vmatrix} \text{س} & ٠ \\ ٠ & \text{س} \end{vmatrix} = \text{س}^٢ - ٠ = \text{س}^٢$

حاول أن تحل

٢ أوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

أ $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ب $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٨ & ٧ \\ ٢ & ١٠ \end{bmatrix}$ ج $\text{ج} = \begin{bmatrix} \text{ك} & ٣ \\ ٣ - \text{ك} & -٣ \end{bmatrix}$

ليس لكلّ المصفوفات المربّعة نظير ضربي (معكوسات). سوف يساعدك الاختبار التالي على استنتاج ما إذا كانت المصفوفة ٢ × ٢ لها نظير ضربي، وكيف يمكنك إيجاده إن وجد.

خاصية

بفرض أن: $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{bmatrix}$ إذا كان أ د − ب ج ≠ ٠ ، فإن أ لها نظير ضربي $\text{أ}^{-١}$ حيث:

$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{ج} & \text{أ} \end{bmatrix}$$

$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{\text{أ د} - \text{ب ج}} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{ج} & \text{أ} \end{bmatrix}$$

معلومة رياضية:

المصفوفة التي محددها الصفر ليس لها نظير ضربي وتسمى **مصفوفة منفردة**.

مثال (٣)

إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} \text{س} & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س.

الحل:

$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{س} & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{vmatrix} = ٠$ محدد المصفوفة المنفردة

٦س − ٤٨ = ٠ تبسيط المحدد

٦س = ٤٨

س = ٨

حاول أن تحل

٣ إذا كانت المصفوفة ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ -٤ & ٢\text{س} \end{bmatrix}$ منفردة، أوجد قيمة س.

مثال (٤)

هل للمصفوفة: أ = $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٨ & -٢ \end{bmatrix}$ نظير (معكوس) ضربي؟ في حالة الإيجاب أوجده.

الحل:

أ د − ب جـ = (−١)(−٢) − (٠)(٨) = ٢ ∵ ٢ ≠ ٠ ∴ أ لها نظير ضربي $\text{أ}^{-١}$

$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ -٨ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ -٤ & -٠,٥ \end{bmatrix}$

حاول أن تحل

٤ أ هل ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

ب هل ب = $\begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -٣ & -٤ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

مثال (٥)

حدّد أي مصفوفة مما يلي لها نظير (معكوس) ضربي، ثم أوجده.

أ $\underline{م} = \begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix}$

ب $\underline{ن} = \begin{bmatrix} ٩ & ٣ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$

الحل:

أ $\underline{م} = \begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix}$

احسب: أ د − ب جـ

أ د − ب جـ = (−٢)(−٤) − (٢)(٥) = −٢

حيث إن: أ د − ب جـ ≠ ٠، فإن النظير الضربي (المعكوس) لـ $\underline{م}$ يكون موجودًا.

$\underline{م}^{-١} = \frac{١}{-٢} \times \begin{bmatrix} -٤ & -٢ \\ -٥ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢,٥ & ١ \end{bmatrix}$

ب $\underline{ن} = \begin{bmatrix} ٣ & ٩ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

احسب: أ د − ب جـ

أ د − ب جـ = (٣)(٦) − (٩)(٢) = ٠

حيث إن: أ د − ب جـ = ٠، فإن معكوس $\underline{ن}$ غير موجود.

$\underline{ن}^{-١}$ غير موجود.

حاول أن تحل

٥ حدّد أي مصفوفة من المصفوفات التالية لها نظير ضربي (معكوس)، ثم أوجده.

أ $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix} ٠,٥ & ٢,٣ \\ ٣ & ٧,٢ \end{bmatrix}$

تمرَّنْ ٧-٤

مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوس)

Identity Matrices and Inverse Matrix

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمرينين (١–٢)، بيّن أن كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى.

(١) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$

_____

(٢) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٥} & -\frac{١}{١٠} \\ ٠ & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$

_____

في التمارين (٣–٥)، أوجد محدّد كل مصفوفة.

(٣) $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٦ & -٢ \end{bmatrix}$

_____

(٤) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{٢}{٣} \\ \frac{٣}{٥} & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$

_____

(٥) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

_____

في التمارين (٦–٩)، أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة إن وجد، وإذا لم يوجد فاكتب «لا يوجد نظير ضربي» مع ذكر السبب.

(٦) $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

_____

(٧) $\begin{bmatrix} ٤ & ٨ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix}$

_____

(٨) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

_____

(٩) $\begin{bmatrix} ٦ & -٨ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix}$

_____

في التمارين (١٠–١٢)، حلّ كل معادلة في س. وإذا كان من غير الممكن حلها، فاكتب السبب.

(١٠) $\begin{bmatrix} ١٢ & ٧ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix} \times \underline{س} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

_____

(١١) $\begin{bmatrix} ٠ & -٤ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix} \times \underline{س} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٤ \end{bmatrix}$

_____

(١٢) $\underline{س} \times \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣١ & ١٦ \\ ٢٧ & ١٢ \end{bmatrix}$

_____

في التمارين (١٣–١٥)، أوجد قيمة كل محدد.

(١٣) $\begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ -٤ & ٤ \end{vmatrix}$ _____

(١٤) $\begin{vmatrix} -\frac{١}{٢} & ٢ \\ -٢ & ٨ \end{vmatrix}$ _____

(١٥) $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix}$ _____

في التمرينين (١٦–١٧)، هل كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى؟ اشرح إجابتك.

(١٦) $\begin{bmatrix} ٢ & ٠,٥ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ١٠ & -٤ \end{bmatrix}$ _____

(١٧) $\begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٦ & -٨ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$

(١٨) أوجد المصفوفة س: $\begin{bmatrix} ٤ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ س + $\begin{bmatrix} ٢ & ٧ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

بيّن أن كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى.

(١) $\begin{bmatrix} -٣ & ٧ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -٥ & ٧ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$

في التمارين (٢–٤)، أوجد محدّد كل مصفوفة.

(٢) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠,٥ \\ ١,٥ & ٢ \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$

في التمارين (٥–٨)، أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة إذا وجد، وإذا لم يوجد فاكتب «لا يوجد نظير ضربي».

(٥) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

(٦) $\begin{bmatrix} -١,٥ & ٣ \\ ٢,٥ & -٠,٥ \end{bmatrix}$

(٧) $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

(٨) $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$

(٩) أوجد $\underline{س}$: $\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix} \times \underline{س} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ١٠ \end{bmatrix}$

في التمرينين (١٠–١١)، أوجد قيمة كل محدد.

(١٠) $\begin{vmatrix} -٣ & ١٠ \\ ٦ & ٢٠ \end{vmatrix}$

(١١) $\begin{vmatrix} ٦ & ٩ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix}$

(١٢) هل كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى؟ اشرح.

$\begin{bmatrix} -٢ & -٥ \\ -٢ & -٤ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -٢,٥ & ٢ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$

حل نظام من معادلتين خطيتين
Solving a System of Two Linear Equations

حل النظام: Solving a System

تستطيع إيجاد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات، ثم الحصول سريعًا على حل النظام من المعادلات الخطية.

١ – الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة المربعة: Solving by Using Inverse Matrix

مثال (١)

حلّ النظام: $\begin{cases} \text{س} + \text{ص} = ٣ \\ \text{س} - \text{ص} = ٧ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

الحل:

اكتب النظام مع معادلة المصفوفات.

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١- & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٧ \end{bmatrix} \quad (١)$$

حيث $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$، $\underline{\text{ع}} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٧ \end{bmatrix}$

$$|\underline{\text{أ}}| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١- & ١ \end{vmatrix} = ١ \times (-١) - ١ \times ١ = -٢ \neq ٠$$

$$\underline{\text{أ}}^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} ١- & ١- \\ ١ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢}- & \frac{١}{٢}- \end{bmatrix}$$

وبضرب كل من طرفي المعادلة (١) من جهة اليمين في $\underline{\text{أ}}^{-١}$.

نحصل على $\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢}- & \frac{١}{٢}- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ \\ ٧ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٢- \end{bmatrix}$$

وبالتالي: س = ٥، ص = −٢

حاول أن تحل

١ حلّ النظام: $\begin{cases} ٥\text{س} + ٣\text{ص} = ٧ \\ ٣\text{س} + ٢\text{ص} = ٥ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

- مصفوفة النظير (المعكوس) الضربي للمصفوفة المربعة $\underline{\text{أ}}$، تكتب $\underline{\text{أ}}^{-١}$ ويكون:
  $\underline{\text{أ}}^{-١} \times \underline{\text{أ}} = \underline{\text{ي}}$، $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}}^{-١} = \underline{\text{ي}}$، وتسمى النظير الضربي للمصفوفة $\underline{\text{أ}}$.
- تقترن كل مصفوفة مربعة $\underline{\text{أ}}$ بعدد حقيقي يسمى «محدد» ويرمز إليه بالرمز $|\underline{\text{أ}}|$ ويقرأ محدد المصفوفة $\underline{\text{أ}}$. وإذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix}$
  فإن $|\underline{\text{أ}}| = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{vmatrix} = \text{أد} - \text{ب جـ}$
  $\underline{\text{أ}}^{-١} = \frac{١}{\text{أد} - \text{ب جـ}} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{bmatrix}$ حيث أد − ب جـ ≠ ٠
- في المصفوفة $\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix}$، إذا كان أ د − ب جـ = ٠. تسمى المصفوفة منفردة وليس لها نظير ضربي.
- حلّ نظام من معادلتين خطيتين هو زوج مرتب يحقق المعادلتين معًا.
- يمكن حلّ نظام من معادلتين خطيتين باستخدام النظير الضربي للمصفوفة أو باستخدام المحددات (قاعدة كرامر).

يمكن أيضًا حلّ نظام من معادلتين خطيتين باستخدام المحددات، وتسمى قاعدة كرامر Crammer's Rule.

٢ – استخدام قاعدة كرامر (المحددات) لحل معادلتين خطيتين:

Using Crammer's Rule to Solve Two Linear Equations

لحل نظام معادلتين خطيتين:

أ س + ب ص = ل

جـ س + د ص = م

نكتب: $\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ب} \\ \text{م} & \text{د} \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات بعد استبدال العمود الزائد بعمود معاملات س

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ل} \\ \text{جـ} & \text{م} \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات بعد استبدال العمود الزائد بعمود معاملات ص

فإن س = $\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$ ، ص = $\frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$ (بشرط أن $\Delta \neq ٠$)

وهذه تعرف بقاعدة كرامر Cramer's Rule

مع الملاحظة أن:

١ إذا كان $\Delta \neq ٠$ ، فإن للمعادلتين حلًّا وحيدًا

٢ إذا كان $\Delta = ٠$ ، $\Delta_{\text{س}} \neq ٠$ فالحل ϕ

وسنكتفي بهاتين الحالتين ولا نتعرض للحالة التي كل من Δ ، $\Delta_{\text{س}}$ مساويا الصفر

مثال (٢)

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام: $\begin{cases} ٤\text{س} - ٥\text{ص} + ٧ = ٠ \\ ٣\text{ص} - ٦\text{س} + ٣ = ٠ \end{cases}$

الحل:

نكتب أولًا النظام بالطريقة القياسية: $\begin{cases} ٤\text{س} - ٥\text{ص} = -٧ \\ -٦\text{س} + ٣\text{ص} = -٣ \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & -٥ \\ -٦ & ٣ \end{vmatrix} = -١٨$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} -٧ & -٥ \\ -٣ & ٣ \end{vmatrix} = -٣٦$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٤ & -٧ \\ -٦ & -٣ \end{vmatrix} = -٥٤$$

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-٣٦}{-١٨} = ٢$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-٥٤}{-١٨} = ٣$$

حاول أن تحل

٢ استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام: $\begin{cases} ٣\text{س} + ٢\text{ص} = -٦ \\ -٤\text{س} - ٣\text{ص} - ٧ = ٠ \end{cases}$

تمرَّنْ ٧-٥

حل نظام من معادلتين خطيتين

Solving System of Two Linear Equations

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمرينين (١–٢)، اكتب نظام المعادلات التالية على شكل معادلة مصفوفية محددًا مصفوفة المعاملات ومصفوفة المتغيرات ومصفوفة الثوابت.

(١) $\begin{cases} \text{س} + \text{ص} = ٥ \\ \text{س} - ٢\text{ص} = -٤ \end{cases}$

(٢) $\begin{cases} ٢\text{س} + ٥\text{ص} = ٠ \\ \text{س} + \text{ص} = ٢ \end{cases}$

في التمرينين (٣–٤)، اكتب المعادلات المصفوفية التالية على شكل نظام معادلات.

(٣) $\begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٣ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ -٢ \end{bmatrix}$

في التمرينين (٥–٦)، استخدم النظير الضربي للمصفوفة لحل نظام معادلات.

(٥) $\begin{cases} \text{س} + ٣\text{ص} = ٥ \\ \text{س} + ٤\text{ص} = ٦ \end{cases}$

(٦) $\begin{cases} \text{س} - ٣\text{ص} = -١ \\ -٥\text{س} + ١٦\text{ص} = ٥ \end{cases}$

في التمارين (٧–٩)، بيّن ما إذا كان لنظام معادلات حلًّا وحيدًا أم لا.

(٧) $\begin{cases} ٢٠\text{س} + ٥\text{ص} = ٢٤٠ \\ \text{ص} + ٢٠\text{س} = ٠ \end{cases}$

(٨) $\begin{cases} ٣\text{س} + ٢\text{ص} = ١٠ \\ ٦\text{س} + ٤\text{ص} = ١٦ \end{cases}$

(١٣) $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} - \underline{س} = \begin{bmatrix} ٨ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

(١٤) $\underline{س} + \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٦ \\ -١ & ٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ١ & ٠ \\ ١٤ & ٣ & -١ \end{bmatrix}$

(١٥) $\begin{bmatrix} -٣ & -٢ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \times \underline{س} = \begin{bmatrix} ٨ & -١ \\ ٦ & ٠ \end{bmatrix}$

(١٦) $٤\underline{س} + ٣\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٨ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$

(١٧) $٢\underline{س} = \frac{١}{٤}\begin{bmatrix} -٦ & ٢ \\ ٨ & -٨ \end{bmatrix}$

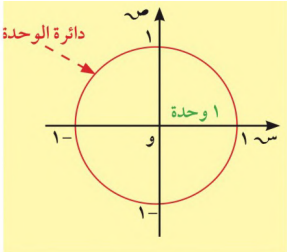
(١٨) حل النظام: $\begin{cases} ٢س - ص = ٢ \\ ٢س - ٢ص = ٤ \end{cases}$ مستخدمًا النظير الضربي.

(١٩) حل النظام: $\begin{cases} -٣س + ٥ص = -٤ \\ س - ٣ص = ٤ \end{cases}$ مستخدمًا طريقة كرامر.

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)
The Unit Circle in the Coordinate Plane and Trigonometric Functions (Circular Functions)

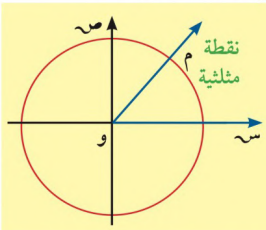
دائرة الوحدة Unit Circle

هي دائرة مركزها نقطة الأصل و، وطول نصف قطرها واحد وحدة.



النقطة المثلثية The Triangular Point

هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة.



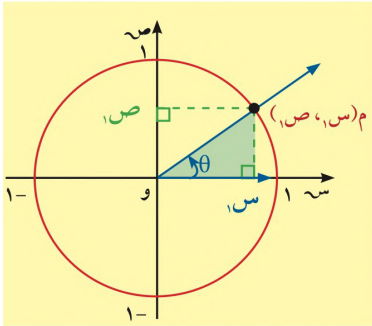
معلومة مفيدة:
عادة ما يستخدم الحرف اليوناني θ (يلفظ ثيتا) للتعبير عن قياس زاوية.

ملاحظة: تكون النقطة (س، ص) نقطة مثلثية إذا وفقط إذا كان $س^٢ + ص^٢ = ١$

سوف نستخدم الرمز θ لنرمز إلى قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي.

النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ

بفرض أنّ زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ، يقطع ضلعها النهائي دائرة الوحدة في النقطة م $(س_١ ، ص_١)$.



في الشكل المقابل المثلث المظلل قائم الزاوية.

تعرف من دراستك السابقة: أن جتا θ = $\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}$

∵ طول الوتر = نق = ١

∴ جتا θ = $\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{س_١}{١} = س_١$ أي أن جتا θ = $س_١$

كذلك جا θ = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{ص_١}{١} = ص_١$ أي أن جا θ = $ص_١$

وبالتالي تكون النسب المثلثية للزاوية θ هي:

جتا θ = $س_١$	جا θ = $ص_١$
ظا θ = $\frac{ص_١}{س_١}$ ، $س_١ \neq ٠$	ظتا θ = $\frac{س_١}{ص_١}$ ، $ص_١ \neq ٠$
قا θ = $\frac{١}{س_١}$ ، $س_١ \neq ٠$	قتا θ = $\frac{١}{ص_١}$ ، $ص_١ \neq ٠$

معلومة مفيدة:
عندما نقول الزاوية θ أو α أو ... نقصد الزاوية التي قياسها θ أو α أو ...

مثال (١)

باستخدام دائرة الوحدة أوجد جا ٦٠°، جتا ٦٠°.

الحل:

نرسم دائرة الوحدة، ونرسم الزاوية الموجهة التي قياسها ٦٠° في الوضع القياسي.

فيكون م و = ١ وحدة طول

نسقط من م عمودًا على المحور السيني وليكن $\overline{م هـ}$.

Δ م هـ و قائم الزاوية هـ.

ق(هـ م̂ و) = ٣٠°.

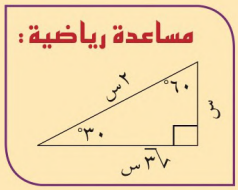
∴ وهـ = $\frac{١}{٢}$ (لأن في المثلث الثلاثيني الستيني طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ طول الوتر)

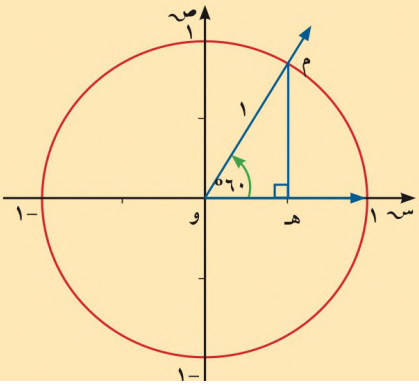
∴ م هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ من نظرية فيثاغورث

إحداثيا النقطة م هما: $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$ ، جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$.

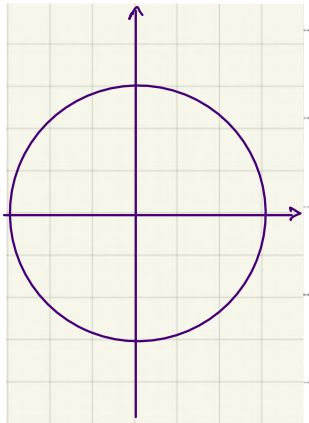
مساعدة رياضية:





حاول أن تحل

١ على دائرة الوحدة، ارسم زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها ٤٥°. ثم أوجد جتا ٤٥°، جا ٤٥°.



الدوال الدائرية (المثلثية) Circular Functions (Trigonometric Functions)

إذا كانت م(س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها θ، وتحرك الضلع النهائي لهذه الزاوية في الاتجاه الموجب (الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة)، فإن م تتغير على دائرة الوحدة وبالتالي تتغير معها كل من س، ص ويكون: لكل قيمة تأخذها θ حيث θ ∈ [٠، ٢π)، قيمة واحدة لكل من المتغيرين س، ص حيث س، ص تنتميان إلى [−١، ١].

مما تقدم، نستطيع تعريف الدوال المثلثية (أو الدوال الدائرية) التالية:

تعريف:

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها θ حيث ٠ ≤ θ < ٢π فإن:

(١) دالة الجيب: د(θ) = جاθ — حيث جاθ = ص (الإحداثي الصادي للنقطة المثلثية)

(٢) دالة جيب التمام: د(θ) = جتاθ — حيث جتاθ = س (الإحداثي السيني للنقطة المثلثية)

(٣) دالة الظل: د(θ) = ظاθ — حيث ظاθ = $\frac{ص}{س}$ ، س ≠ ٠

(٤) دالة القاطع: د(θ) = قاθ — حيث قاθ = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠

(٥) دالة قاطع التمام: د(θ) = قتاθ — حيث قتاθ = $\frac{١}{ص}$ ، ص ≠ ٠

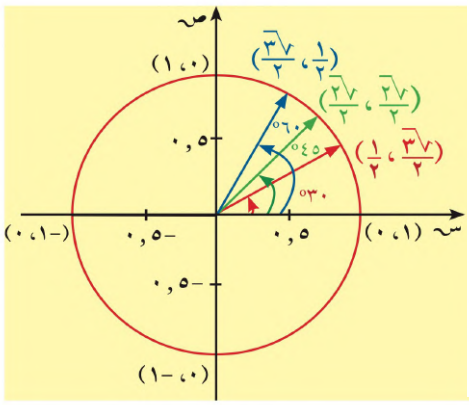
(٦) دالة ظل التمام: د(θ) = ظتاθ — حيث ظتاθ = $\frac{س}{ص}$ ، ص ≠ ٠

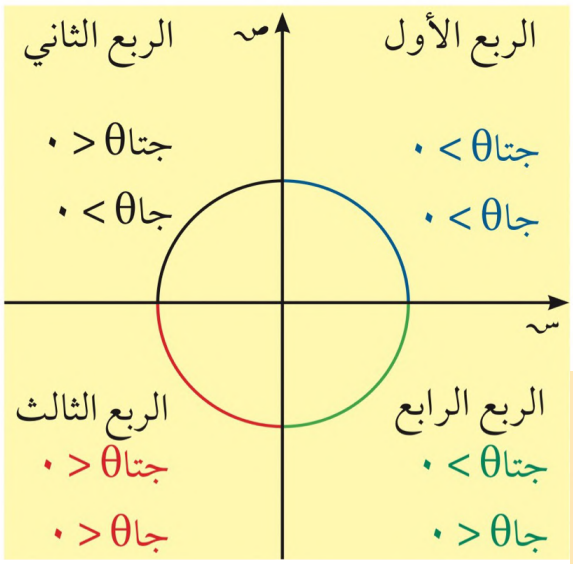
معلومة رياضية:

- الاتجاه الموجب هو الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة.
- النقطة المثلثية (س، ص) يمكن التعبير عنها بـ (جتاθ، جاθ).

يمكن بسهولة إيجاد قيم الدوال المثلثية لبعض قيم θ الخاصة.

الدالة / قياس الزاوية θ	٠°	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠°
	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π
جاθ	٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	١	٠	−١	٠
جتاθ	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	٠	−١	٠	١
ظاθ	٠	$\frac{\sqrt{٣}}{٣}$	١	$\sqrt{٣}$	غير معرّف	٠	غير معرّف	٠





من الشكل: يمكن ملاحظة ما يلي:

إذا كانت θ في الربع الأول فإن: جاθ > ٠، جتاθ > ٠

إذا كانت θ في الربع الثاني فإن: جاθ > ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الثالث فإن: جاθ < ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الرابع فإن: جاθ < ٠، جتاθ > ٠

مثال (٢)

حدّد إشارة جاθ، جتاθ في كل مما يلي:

أ θ = ١٣٥° ب θ = $\frac{٧\pi}{٦}$ ج θ = ٣٠٥°

الحل:

أ ∵ θ = ١٣٥°، ∴ ٩٠° < θ < ١٨٠° أي أن θ تقع في الربع الثاني.

∴ جا θ > ٠، جتا θ < ٠

ب ∵ θ = $\frac{٧\pi}{٦}$، ∴ π < θ < $\frac{٣\pi}{٢}$ أي أن θ تقع في الربع الثالث.

∴ جاθ < ٠، جتاθ < ٠

ج ∵ θ = ٣٠٥°، ∴ ٢٧٠° < θ < ٣٦٠° أي أن θ تقع في الربع الرابع.

∴ جاθ < ٠، جتاθ > ٠

حاول أن تحل

٣ أ إذا كانت ٩٠° < θ < ٢٧٠°. ما هي إشارة جتاθ؟

ب إذا كانت ٠° < θ < π. ما هي إشارة جاθ؟

زاوية الإسناد Reference Angle

تحتاج أحيانًا إلى معرفة قيم النسب المثلثية لزاوية θ ضلعها النهائي موجود في الربع الثاني أو الربع الثالث أو الربع الرابع.

يمكن إسناد هذه الزاوية إلى زاوية حادة α، محددة بمحور السينات والضلع النهائي للزاوية θ.

معلومة

الرمز α يُقرأ ألفا.

تعريف زاوية الإسناد:

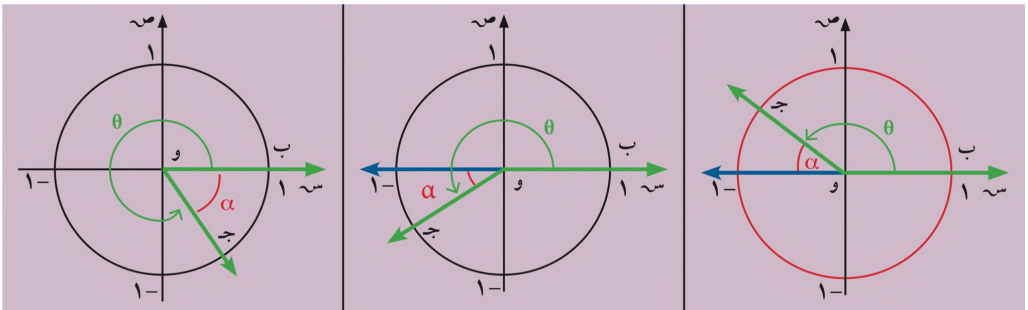
زاوية الإسناد للزاوية الموجهة ($\overrightarrow{وب}$، $\overrightarrow{وجـ}$) التي في وضع قياسي هي الزاوية **الحادة** α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات.

فإذا كان α زاوية الإسناد فإن: ٠° < α < ٩٠°

تذكر

الزاوية الموجهة ب و جـ يمكن أن نرمز لها بالرمز ($\overrightarrow{وب}$، $\overrightarrow{وجـ}$) حيث $\overrightarrow{وب}$ الضلع الابتدائي، $\overrightarrow{وجـ}$ الضلع النهائي.

الأشكال التالية توضح الحالات المختلفة لإيجاد زاوية الإسناد:



عندما θ تقع في الربع الثاني
$\theta^\circ - 180^\circ = \alpha^\circ$
$\theta^{\text{د}} - \pi = \alpha^{\text{د}}$

عندما θ تقع في الربع الثالث
$180^\circ - \theta^\circ = \alpha^\circ$
$\pi - \theta^{\text{د}} = \alpha^{\text{د}}$

عندما θ تقع في الربع الرابع
$360^\circ - \theta^\circ = \alpha^\circ$
$2\pi - \theta^{\text{د}} = \alpha^{\text{د}}$

مثال (٣)

ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة في وضع قياسي، ثم عيّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها لكل مما يلي:

أ 125° ب 215° جـ $\frac{11\pi}{6}$

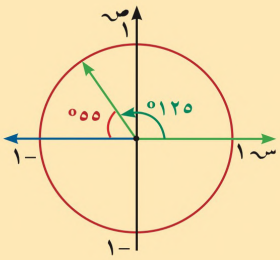
الحل:

أ $\theta = 125^\circ$ تقع في الربع الثاني

∴ قياس زاوية الإسناد $\alpha^\circ = 180^\circ - \theta^\circ$

$= 180^\circ - 125^\circ$

$= 55^\circ$

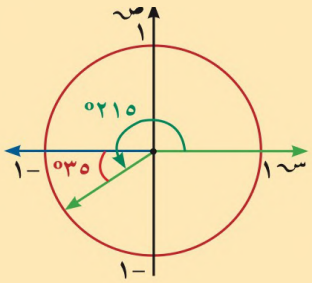


ب $\theta = 215^\circ$ تقع في الربع الثالث

∴ قياس زاوية الإسناد $\alpha = \theta - 180^\circ$

$= 215^\circ - 180^\circ$

$= 35^\circ$

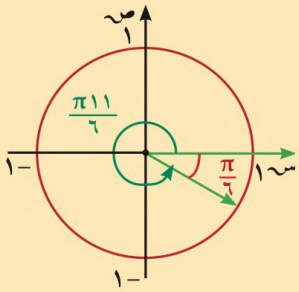


جـ $\theta = \frac{11\pi}{6}$ تقع في الربع الرابع

∴ قياس زاوية الإسناد $\alpha = 2\pi - \theta$

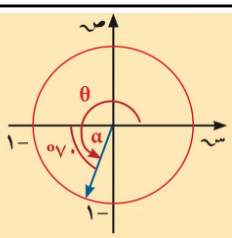
$= 2\pi - \frac{11\pi}{6}$

$= \frac{\pi}{6}$



حاول أن تحل

٤ يبيّن الشكل المقابل، زاوية الإسناد α° للزاوية θ°. أوجد θ.



تمرَّنْ ١-٨

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي

The Unit Circle in the Coordinate Plar

(١) أكمل الجدول أدناه.

القياس بالدرجات	القياس بالراديان
٤٥°	
	$\frac{٣\pi}{٤}$
	$-\pi$
$-١٥٠°$	
$-٢٢٥°$	
	$\frac{٥\pi}{٦}$

(٢) اذكر النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها ٣٠°، ثمّ أوجد كلاً من:

(أ) جا٣٠° _____

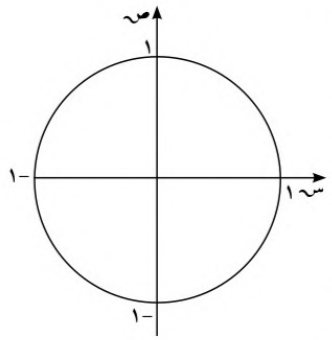
(ب) جتا٣٠° _____

(جـ) ظا٣٠° _____

(د) ظتا٣٠° _____

(هـ) قا٣٠° _____

(و) قتا٣٠° _____



في التمارين (٥-٧)، بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جيب تمام، جيب، ظل الزاوية على الترتيب لكلّ من الزوايا التالية:

(٥) $\frac{\pi}{٤}$ _____

(٦) ٦٠° _____

(٧) ٠° _____

في التمارين (٨-١١)، في أيّ ربع أو على أيّ محور يقع الضلع النهائي لكلّ من الزوايا التالية:

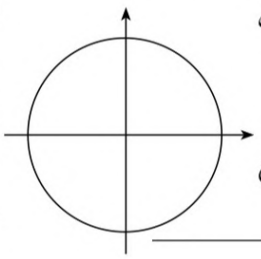
(٨) ١٥٠° _____

(٩) $-\pi$ _____

(١٠) $-٦٠°$ _____

(١١) $\frac{٧\pi}{٦}$ _____

(١٢) (أ) أكمل الفراغ في الرسم أدناه.



الربع الأول

جتاθ > ٠

جاθ > ٠

الربع الثاني

جتاθ _____

جاθ _____

الربع الثالث

جتاθ _____

جاθ _____

الربع الرابع

جتاθ _____

جاθ _____

(ب) افترض أن جتاθ سالبة جاθ موجبة. يقع الضلع النهائي للزاوية θ في:

(أ) الربع الأول (ب) الربع الثاني (جـ) الربع الثالث (د) الربع الرابع

(١٣) **الكتابة في الرياضيات:** فسِّر كيفية إيجاد جيب، جيب تمام الزوايا التالية: ٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠° بدون استخدام الآلة الحاسبة.

في التمارين (١٤-١٧)، ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة التالية في وضع قياسي، ثم عيّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها.

(١٤) ٢١٠° (١٥) $\frac{٢\pi}{٣}$

(١٦) ١٧٠° (١٧) $\frac{٧\pi}{٣}$

في التمرينين (١٨-١٩)، اختر الإجابة الصحيحة:

(١٨) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها تختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(أ) ١٩٠° (ب) ١٧٠°

(جـ) ٣٥٠° (د) ١١٠°

(١٩) الزاوية التي في الوضع القياسي وضلعها النهائي يمر بالنقطة م$\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢}, \frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$ التي تقع على دائرة الوحدة هي:

(أ) ٤٥° (ب) ٢٢٥°

(جـ) ١٣٥° (د) ٣٣٠°

المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

في التمارين (١-٤)، إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

(١) جتا(-٣٠٠°) = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٢) جا(١٢٠°) = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٣) ظا(-١٥٠°) = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (أ) (ب)

(٤) قا(٣١٥°) = $\sqrt{٢}$ (أ) (ب)

في التمارين (٥-٩)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٥) الزاوية التي يقع ضلعها النهائي في الربع الرابع في ما يلي هي:

(أ) $-٣٢٠°$ (ب) $-٢٧٠°$

(ج) $\frac{٥\pi}{٣}$ (د) $\frac{١٣\pi}{٩}$

(٦) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها يختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(أ) $\frac{٧\pi}{٤}$ (ب) $١٣٥°$

(ج) $\frac{٣\pi}{٤}$ (د) $٢١٥°$

(٧) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها $\frac{\pi}{٣}$ هي:

(أ) $\frac{١١\pi}{٦}$ (ب) $٢٥٥°$

(ج) $\frac{٧\pi}{٨}$ (د) $\frac{٥\pi}{٣}$

(٨) زاوية في الوضع القياسي قياسها يساوي $-٢٢٥°$. فإن النقطة المثلثية التي يمكن أن تقع على الضلع النهائي لهذه الزاوية هي:

(أ) $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}، \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$ (ب) $\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢}، \frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$

(ج) $\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢}، \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$ (د) $(-١، ١)$

(٩) $[\text{جا}(-١٣٥°)]^٢ + [\text{جتا}(-١٣٥°)]^٢ =$

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$

(ج) $\frac{١}{٤}$ (د) صفر

٦١

العلاقات بين الدوال المثلثية (١)
Relations Between Trigonometric Functions (1)

تسمى جاθ، جتاθ، ظاθ النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ وتدعى **النسب المثلثية الأساسية**

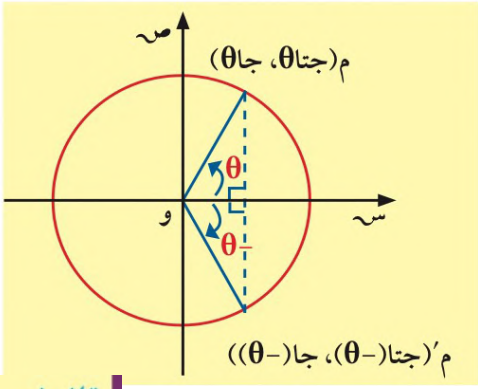
علمًا بأن
$-١ \le$ جتاθ ≤ ١
$-١ \le$ جاθ ≤ ١
ظاθ $\in$ ح

النسب المثلثية للزاويتين θ، −θ.

النقطة المثلثية م′ هي انعكاس للنقطة المثلثية م في محور السينات حيث م(س، ص) $\xrightarrow{ع_{س}}$ م′(س، −ص)

ويكون جتا(−θ) = جتاθ

جا(−θ) = −جاθ



تذكر

$ع_{س}$ تعني انعكاس في محور السينات.

قانون:

جتا(−θ) = جتاθ

جا(−θ) = −جاθ

وبالتالي ظا(−θ) = −ظاθ بشرط أن يكون ظاθ معرّف.

مثال (١)

أ إذا كان جتا $\frac{٣\pi}{٨} = \frac{\sqrt{٢ - \sqrt{٢}}}{٢}$ ، فأوجد جتا $\left(-\frac{٣\pi}{٨}\right)$.

ب إذا كان جا ٣٦° ≃ ٠,٥٨٧٨ ، فأوجد جا(−٣٦°).

جـ إذا كان ظا ٤٥° = ١ ، فأوجد ظا(−٤٥°).

الحل:

أ جتا$\left(-\frac{٣\pi}{٨}\right)$ = جتا $\frac{٣\pi}{٨} = \frac{\sqrt{٢ - \sqrt{٢}}}{٢}$.

ب جا(−٣٦°) = −جا ٣٦° ≃ −٠,٥٨٧٨.

جـ ظا(−٤٥°) = −ظا ٤٥° = −١.

حاول أن تحل

١ أكمل إذا كان:

أ جا م = ٠,٣ فإن جا(−م) = ...

ب جتا ل = ٠,٣٨ فإن جتا(−ل) = ...

جـ ظا س = ٣,١٤ فإن ظا(−س) = ...

د جتا(−ص) = $\frac{١}{٤}$ فإن جتا ص = ...

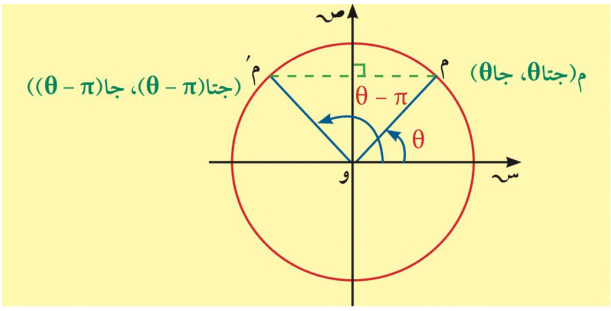
النسب المثلثية للزاويتين θ ، (π − θ).

النقطة المثلثية م′ هي انعكاس للنقطة المثلثية م في محور الصادات.

حيث م(س، ص) $\xrightarrow{ع_{ص}}$ م′(−س، ص)

فيكون: جتا(π − θ) = −جتاθ

جا(π − θ) = جاθ



قانون:

جتا(π − θ) = −جتاθ

جا(π − θ) = جاθ

وبالتالي ظا(π − θ) = −ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

تذكر

$ع_{ص}$ تعني انعكاس في محور الصادات.

مثال (٢)

بدون استخدام الآلة الحاسبة

إذا كان:

أ جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$ ، أوجد جتا ١٢٠°.

ب جا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، أوجد جا $\frac{٣\pi}{٤}$.

جـ ظاθ = $\frac{٣}{٥}$ ، أوجد ظا(π − θ).

الحل:

أ جتا ١٢٠° = جتا(١٨٠° − ٦٠°) = − جتا ٦٠° = − $\frac{١}{٢}$.

ب جا $\frac{٣\pi}{٤}$ = جا$\left(\pi - \frac{\pi}{٤}\right)$ = جا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$.

جـ ظا(π − θ) = − ظاθ = − $\frac{٣}{٥}$.

معلومة مفيدة:

إذا كانت الزاوية α هي زاوية الإسناد للزاوية θ فإن:

جاα = |جاθ|

جتاα = |جتاθ|

ظاα = |ظاθ|

فمثلًا: الزاوية ٦٠° زاوية إسناد للزاوية ١٢٠°.

جتا ٦٠° = |جتا ١٢٠°|

حاول أن تحل

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة. إذا كان:

أ جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ، فأوجد جا ١٥٠°.

ب جتاس = $\frac{٤}{٥}$ ، فأوجد جتا(π − س).

جـ ظا $\frac{\pi}{١٢}$ = ٢ − $\sqrt{٣}$، فأوجد ظا $\frac{١١\pi}{١٢}$.

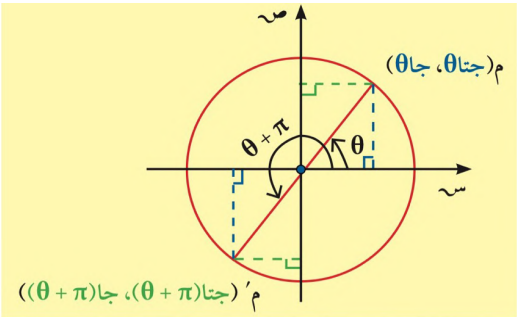
النسب المثلثية للزاويتين θ، (π + θ).

النقطة م′ هي انعكاس للنقطة م في نقطة الأصل.

حيث م(س، ص) $\xrightarrow[\text{نقطة الأصل}]{\text{انعكاس في}}$ م′(−س، −ص)

فيكون: جتا(π + θ) = −جتاθ

جا(π + θ) = −جاθ



قانون:

جتا(π + θ) = −جتاθ

جا(π + θ) = −جاθ

وبالتالي ظا(π + θ) = ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

مثال (٣)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان:

أ جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ، فأوجد جا ٢١٠°.

ب ظا $\frac{\pi}{٨}$ = −١ + $\sqrt{٢}$ ، فأوجد ظا $\frac{٩\pi}{٨}$.

الحل:

أ جا ٢١٠° = جا(١٨٠° + ٣٠°) = −جا ٣٠° = −$\frac{١}{٢}$.

ب ظا $\frac{٩\pi}{٨}$ = ظا$\left(\pi + \frac{\pi}{٨}\right)$ = ظا $\frac{\pi}{٨}$ = −١ + $\sqrt{٢}$.

حاول أن تحل

٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جتا ٤٠° ≃ ٠,٧٦٦ . فأوجد جتا ٢٢٠°.

مثال (٤)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، أوجد:

أ جا ١٥٠°. ب جتا ٢٤٠°. جـ ظا $\frac{٢\pi}{٣}$.

الحل:

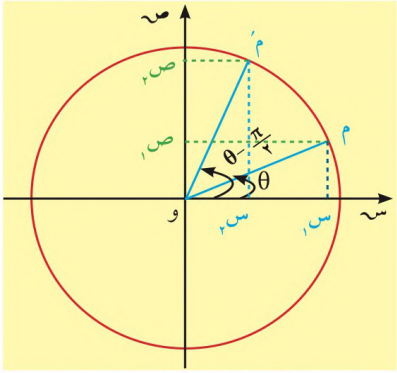
أ جا ١٥٠° = جا(١٨٠° − ٣٠°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$.

ب جتا ٢٤٠° = جتا(١٨٠° + ٦٠°) = −جتا ٦٠° = −$\frac{١}{٢}$.

جـ ظا $\frac{٢\pi}{٣}$ = ظا$\left(\pi - \frac{\pi}{٣}\right)$ = −ظا $\frac{\pi}{٣}$ = −$\sqrt{٣}$.

حاول أن تحل

٤ إذا كان جا ٥٦° ≃ ٠,٨٢٩ . بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جا ٢٣٦°.



النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

Δوس١ م ≅ Δ وص٢ م′ لماذا؟

استخدم تطابق الأضلاع المتناظرة لإثبات:

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جاθ

جا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جتاθ

استنتاج: لأي زاويتين متتامتين، فإن جيب إحداهما يساوي جيب تمام الأخرى.

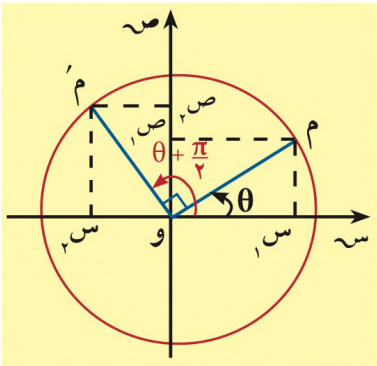
قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$



المثلثان وس١ م ≅ و ص٢ م′ متطابقان. لماذا؟

ما هي إحداثيات كلٍّ من م، م′؟

ما إشارة كلٍّ من جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$، جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$؟

أثبت: جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = −جاθ، جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = جتاθ.

قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = −جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = −ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

إذا كان ك عددًا صحيحًا فإن:

جا(θ + ٢ك π) = جاθ

جتا(θ + ٢ك π) = جتاθ

ظا(θ + ك π) = ظاθ حيث ظاθ معرّف

تعريف:

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ فإن:

١ جاθ = ص ∀ θ ∈ ح

٢ جتاθ = س ∀ θ ∈ ح

٣ ظاθ = $\frac{ص}{س}$ ، س ≠ ٠ حيث θ ∈ ح

٤ قاθ = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ حيث θ ∈ ح

٥ قتاθ = $\frac{١}{ص}$ ، ص ≠ ٠ حيث θ ∈ ح

٦ ظتاθ = $\frac{س}{ص}$ ، ص ≠ ٠ حيث θ ∈ ح

مثال (٥)

بسط التعبير التالي لأبسط صورة:

جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° − س).

الحل:

جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° − س)

= جا س + جتا س − جا س + جتا س

= ٢جتا س

حاول أن تحل

٥ بسّط كلًّا من التعبيرات التالية لأبسط صورة:

أ جتا(θ + ٩π)

ب جتا$\left(\theta - \frac{\pi}{٢} -\right)$

حل معادلات مثلثية Solving Trigonometric Equations

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية −θ تقع في الربع الرابع.

تعلمت في هذا الدرس أن جتاθ = جتا(−θ).

ولكن إذا عرفت جيب التمام لإحدى الزوايا، فهل يمكنك الجزم إن كانت الزاوية تساوي θ أو −θ؟ عليك اعتماد الحلّين.

حل المعادلة: جتا س = جتاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = −θ + ٢ك π (ك ∈ ص)

لاحظ أن جيب تمام الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع.

مثال (٦)

حل كلًّا من المعادلتين:

أ جتا س = $\frac{١}{٢}$ ب ٢جتا س − $\sqrt{٣}$ = ٠

الحل:

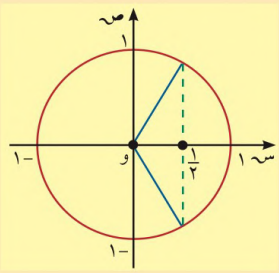
أ جتا س = $\frac{١}{٢}$

جتا س = جتا $\frac{\pi}{٣}$ (نعتمد عادة على أصغر قياس غير سالب)

∵ جتا س > ٠

∴ سَ تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

∴ س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π أو س = − $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π (ك ∈ ص)



ب ٢جتا س − $\sqrt{٣}$ = ٠

جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا س = جتا $\frac{\pi}{٦}$

∵ جتا س > ٠

∴ سَ تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

∴ س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ك π أو س = − $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ك π (ك ∈ ص)

حاول أن تحل

٦ حل المعادلة : $\sqrt{٢}$ جتا س = ١ .

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية (π − θ) تقع في الربع الثاني.

تعلمت أيضًا أن جاθ = جا(π − θ).

وبالتالي، إذا كانت جا س = جاθ فإنّ: س = θ + ٢ك π أو س = (π − θ) + ٢ك π (ك ∈ ص)

حل المعادلة جا س = جاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = (π − θ) + ٢ك π ، (ك ∈ ص)

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني.

مثال (٧)

حل كلًّا من المعادلتين:

أ جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ب ٢جا س = $\sqrt{٢}$

الحل:

أ جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

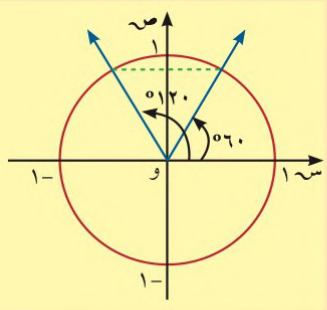
جا س = جا $\frac{\pi}{٣}$

∵ جاس > ٠

∴ سَ تقع في الربع الأول أو الربع الثاني.

س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π أو س = $\left(\pi - \frac{\pi}{٣}\right)$ + ٢ك π (ك ∈ ص)

س = $\frac{٢\pi}{٣}$ + ٢ك π



ب ٢جا س = $\sqrt{٢}$

جا س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

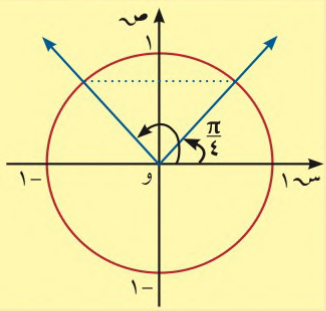
∴ جا س = جا $\frac{\pi}{٤}$

∵ جا س > ٠

∴ سَ تقع في الربع الأول أو الربع الثاني.

∴ س = $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ك π أو س = $\left(\pi - \frac{\pi}{٤}\right)$ + ٢ك π (ك ∈ ص)

س = $\frac{٣\pi}{٤}$ + ٢ك π



حاول أن تحل

٧ حل المعادلة: ٢جا س − ١ = ٠.

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $(\pi + \theta)$ تقع في الربع الثالث.

الزاويتان θ، $\pi + \theta$ لهما الظل نفسه.

$$\text{ظا}\,\theta = \text{ظا}(\pi + \theta)$$

حل المعادلة ظا س = ظاθ هو س = θ + ك π، (ك ∈ ص)

لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث.

مثال (٨)

حل المعادلة: ظا س = $\sqrt{٣}$.

الحل:

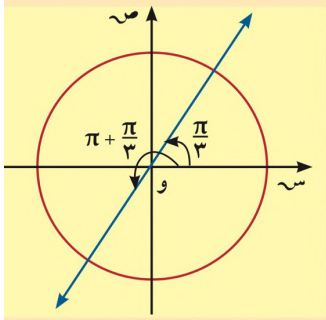
ظا س = $\sqrt{٣}$

ظا س = ظا $\frac{\pi}{٣}$ وحيث ظا س > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الربع الثالث.

س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π أو س = $\left(\pi + \frac{\pi}{٣}\right)$ + ٢ك π (ك ∈ ص)

س = $\frac{٤\pi}{٣}$ + ٢ك π



حاول أن تحل

٨ حل المعادلة: $\sqrt{٣}$ ظا س = ١ .

تمرَّنْ ٨-٢

العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

Relations Between Trigonometric Functions (1)

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) اكتب النسب المثلثية التالية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ.

(أ) جا(π + θ) _____

(ب) جتا(π − θ) _____

(جـ) جا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$ _____

(د) جتا$\left(\theta - \frac{\pi}{٢}\right)$ _____

(٢) اكتب النسب المثلثية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية س.

(أ) ظا(١٨٠° − س) _____

(ب) جتا(١٨٠° + س) _____

(جـ) جا(− س) _____

(٤) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جا١٥٠° _____

(ب) ظا(−٢٢٥°) _____

(جـ) جتا(−١٣٥°) _____

(٥) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جتا $\frac{٧\pi}{٦}$ _____

(ب) جا$\left(-\frac{٢\pi}{٣}\right)$ _____

(جـ) ظا $\frac{١١\pi}{٦}$ _____

في التمارين (٧–١٠)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة .

(٧) إذا كانت جاθ = ٠,٢ فإن جا(π + θ) = ٠,٢ (أ) (ب)

(٨) إذا كانت جتاθ = $\frac{٢}{٣}$ فإن قاθ = $\frac{٣}{٢}$ (أ) (ب)

(٩) إذا كانت ظاθ = ٣ فإن ظتا(π + θ) = ٣ (أ) (ب)

(١٠) إذا كانت جاθ = $\frac{١}{٥}$ فإن قتا(π + θ) = –٥ (أ) (ب)

(١١) بسّط التعبيرات التالية لأبسط صورة:

(أ) جتا(π – θ) – جتا(– θ) + جا(π + θ) + جتا$\left(\theta - \frac{\pi}{٢}\right)$.

(ب) جا(π + θ) – جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ + جتا(π – θ) + جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$.

---

(١٢) حلّ المعادلات التالية:

(أ) جتا س = + $\frac{١}{٢}$

(ب) ظتا س = $\sqrt{٣}$

(جـ) ٢ جا س = + $\sqrt{٢}$

(٢) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

إذا كان جا س = $\sqrt{٣}$ فإن مجموعة الحل = ∅ (أ) (ب)

إذا كان جتا س = $\frac{١}{٢}$ فإن س = $\frac{\pi}{٣}$ (أ) (ب)

إذا كانت س = $\frac{\pi}{٦}$ فإن جا س = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

مجموعة حل قا س = ٠,٣ هي ∅ (أ) (ب)

ظا (١٥π) = صفر (أ) (ب)

في التمارين (٣-٥)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٣) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها $\frac{١}{٢}$ هي:

(أ) جا(-٣٣٠°) (ب) جتا(-٢٤٠°) (جـ) ظتا(-١٥٠٠°) (د) ظا٧٦٥°

(٤) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$:

(أ) جتا $\frac{٣١\pi}{٦}$ (ب) جا$\left(-\frac{٣٥\pi}{٣}\right)$ (جـ) ظا $\frac{١٧\pi}{٦}$ (د) قا $\frac{١٣\pi}{٣}$

(٥) إن قيمة المقدار قا(٢π - θ) - قتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ + جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ + جاθ هي:

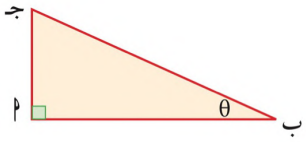
(أ) -١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)
Relations Between Trigonometric Functions (2)

أكمل:

جاθ = $\frac{\dots}{\text{الوتر}}$ ، جتاθ = $\frac{\dots}{\text{الوتر}}$

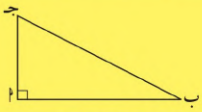
ظاθ = $\frac{\text{جاθ}}{\dots}$ = $\frac{\frac{\dots}{\text{الوتر}}}{\frac{\dots}{\text{الوتر}}}$ = $\frac{\dots}{\dots}$



المتطابقات المثلثية الأساسية
Basic Trigonometric Identities

ظاθ = $\frac{\text{جاθ}}{\text{جتاθ}}$ ، ظتاθ = $\frac{\text{جتاθ}}{\text{جاθ}}$ ، ظتاθ = $\frac{١}{\text{ظاθ}}$ حيث المقام ≠ ٠

قاθ = $\frac{١}{\text{جتاθ}}$ ، قتاθ = $\frac{١}{\text{جاθ}}$



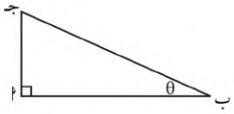
متطابقات فيثاغورث
Pythagorian Identities

في الشكل المقابل Δ ب أ جـ قائم الزاوية أ:

جاθ = $\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب جـ}}$ ، جتاθ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$ ، ظاθ = $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$

جا^{٢}θ + جتا^{٢}θ = $\left(\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب جـ}}\right)^٢ + \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}\right)^٢ = \frac{(\text{أ جـ})^٢}{(\text{ب جـ})^٢} + \frac{(\text{أ ب})^٢}{(\text{ب جـ})^٢}$

$= \frac{(\text{أ جـ})^٢ + (\text{أ ب})^٢}{(\text{ب جـ})^٢}$ (١)

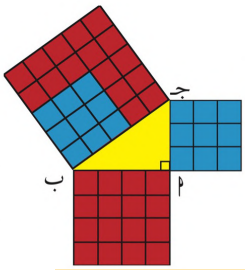


∵ أ ب جـ قائم الزاوية في أ

∴ (أ جـ)^٢ + (أ ب)^٢ = (ب جـ)^٢ نظرية فيثاغورث

وبالتعويض في (١) نحصل على: جا^{٢}θ + جتا^{٢}θ = $\frac{(\text{ب جـ})^٢}{(\text{ب جـ})^٢}$ = ١

جا^{٢}θ + جتا^{٢}θ = ١ تسمى متطابقة فيثاغورث



(أ ب)^٢ تساوي عدد المربعات الصغيرة الموجودة في المربع الذي ضلعه $\overline{\text{أ ب}}$ كذلك بالنسبة إلى $\overline{\text{أ جـ}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$.

مثال (١)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جتاθ = ٠,٤ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$.

أ أوجد جاθ.

ب استنتج ظاθ.

الحل:

أ باستخدام متطابقة فيثاغورث:

جا^{٢}θ + جتا^{٢}θ = ١

جا^{٢}θ + (٠,٤)^٢ = ١

جا^{٢}θ = ١ − (٠,٤)^٢ = ٠,٨٤

جاθ ≃ ٠,٩١٧ أو جاθ ≃ −٠,٩١٧ مرفوض لأن ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$.

ب ظاθ = $\frac{\text{جاθ}}{\text{جتاθ}}$ ≃ $\frac{٠,٩١٧}{٠,٤}$ ≃ ٢,٢٩.

حاول أن تحل

١ بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جاθ = $\frac{٣}{٥}$ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$ فأوجد جتاθ، ظاθ.

العلاقة بين ظاθ، قاθ Relation Between tan θ, sec θ

إذا قسمنا طرفي متطابقة فيثاغورث على جتا² θ نحصل على:

$\frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} + \frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} = \frac{1}{\text{جتا}^2\theta}$ حيث جتا θ ≠ ٠

١ + ظا² θ = قا² θ

∴ ١ + ظا² θ = قا² θ

معلومة رياضية:

إذا كان ظا θ > ٠

∴ جاθ، جتاθ لهما الإشارة نفسها.

مثال (٢)

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظاθ = ٢√٢، جتاθ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

الحل:

طريقة أولى:

ظاθ = ٢√٢

$\frac{\text{جاθ}}{\text{جتاθ}} = ٢\sqrt{٢}$

∴ جاθ = ٢√٢ جتاθ (١)

∵ جا² θ + جتا² θ = ١

∴ (٢√٢ جتاθ)² + جتا² θ = ١ متطابقة فيثاغورث

٨جتا² θ + جتا² θ = ١ عوّض عن جاθ بـ ٢√٢ جتاθ

٩جتا² θ = ١

∴ جتا² θ = $\frac{١}{٩}$

∴ جتاθ = $\frac{١}{٣}$ (قيمة مرفوضة لأن جتاθ < ٠) أو جتاθ = $-\frac{١}{٣}$

من (١) نحصل على: جاθ = ٢√٢ × $\left(-\frac{١}{٣}\right)$

جاθ = $\frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$

حاول أن تحل

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظاθ = $\frac{٣}{٤}$، جا θ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

مثال (٣)

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظا$\theta = \frac{١٢}{٥}$ ، جا$\theta > ٠$ فأوجد جاθ، جتاθ.

الحل:

طريقة أولى: نبدأ بتحديد إشارة جتاθ

$$\text{ظا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$$

$$\therefore \text{جتا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{ظا}\theta} > ٠ \text{ لأن جا}\theta > ٠ ، \text{ظا}\theta > ٠$$

$$١ + \text{ظا}^٢\theta = \text{قا}^٢\theta$$

$$١ + \left(\frac{١٢}{٥}\right)^٢ = \text{قا}^٢\theta$$

$$\text{قا}^٢\theta = ١ + \frac{١٤٤}{٢٥} = \frac{٢٥ + ١٤٤}{٢٥} = \frac{١٦٩}{٢٥}$$

$$\text{قا}\theta = \frac{١٣}{٥} \qquad \text{قا}\theta = -\frac{١٣}{٥} \text{ مرفوضة}$$

$$\text{جتا}\theta = \frac{١}{\text{قا}\theta} = \frac{٥}{١٣}$$

$$\text{ظا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$$

$$\text{جا}\theta = \text{ظا}\theta \times \text{جتا}\theta$$

$$\text{جا}\theta = \frac{١٢}{٥} \times \left(\frac{٥}{١٣}\right) \qquad \text{جا}\theta = \frac{١٢}{١٣}، \qquad \text{جتا}\theta = \frac{٥}{١٣}$$

حاول أن تحل

٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظا$\theta = \frac{٢٤}{٧}$ ، جتا$\theta > ٠$ فأوجد جاθ، جتاθ.

مثال (٤)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جا$\theta = \frac{٣}{٧}$ ، جتاθ > ٠ فأوجد ظتاθ، ظاθ.

الحل:

$$١ + \text{ظتا}^{٢}\theta = \frac{١}{\text{جا}^{٢}\theta}$$

$$١ + \text{ظتا}^{٢}\theta = \frac{١}{\left(\frac{٣}{٧}\right)^{٢}} = \frac{١}{\frac{٩}{٤٩}} = \frac{٤٩}{٩}$$

$$\text{ظتا}^{٢}\theta = \frac{٤٩}{٩} - ١ = \frac{٤٠}{٩}$$

$$\text{ظتا}\theta = \frac{\sqrt{٤٠}}{٣} \quad \text{أو} \quad \text{ظتا}\theta = -\frac{\sqrt{٤٠}}{٣}$$

∵ جاθ، جتاθ لهما الإشارة نفسها (موجبة)

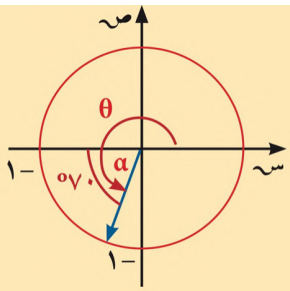
∴ ظتاθ > ٠ وبالتالي ظتا$\theta = \frac{\sqrt{٤٠}}{٣}$

$$\text{ظا}\theta = \frac{١}{\text{ظتا}\theta} = \frac{١}{\frac{\sqrt{٤٠}}{٣}} = \frac{٣}{\sqrt{٤٠}} \simeq ٠,٤٧٤$$

ملاحظة: يمكن حل المثال ٤ باستخدام متطابقة فيثاغورث: جا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$ = ١ .

حاول أن تحل

٤ يبيّن الشكل المقابل، زاوية الإسناد α^{o} للزاوية θ^{o}. أوجد θ.



مثال (٥)

أثبت صحة المتطابقة التالية: جا^{٣}س + جاس × جتا^{٢}س = جاس.

الحل:

جا^{٣}س + جاس × جتا^{٢}س = جا س (جا^{٢}س + جتا^{٢}س)

= جا س × ١ جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١

= جاس.

حاول أن تحل

٥ أثبت صحة المتطابقة: جتا^{٤}س + جا^{٢}س × جتا^{٢}س = جتا^{٢}س.

مثال (٦)

أثبت صحة المتطابقة التالية: $\frac{(\text{قا}\theta + ١)(\text{قا}\theta - ١)}{\text{جا}^{٢}\theta} = \text{قا}^{٢}\theta$. حيث المقام ≠ ٠

الحل:

$\frac{(\text{قا}\theta + ١)(\text{قا}\theta - ١)}{\text{جا}^{٢}\theta} = \frac{\text{قا}^{٢}\theta - ١}{\text{جا}^{٢}\theta}$ $(\text{أ} + \text{ب})(\text{أ} - \text{ب}) = \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}$

$= \frac{\text{ظا}^{٢}\theta}{\text{جا}^{٢}\theta}$ $١ + \text{ظا}^{٢}\theta = \text{قا}^{٢}\theta$

$= \frac{\text{جا}^{٢}\theta}{\text{جتا}^{٢}\theta} \times \frac{١}{\text{جا}^{٢}\theta}$ $\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

$= \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\theta}$

$= \text{قا}^{٢}\theta$

حاول أن تحل

٦ أثبت صحة المتطابقة: $(\text{قا}^{٢}\,\theta + \text{قتا}^{٢}\,\theta) - (\text{ظا}^{٢}\,\theta + \text{ظتا}^{٢}\,\theta) = ٢$.

تمرَّنْ ٨-٣

العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

Relations Between Trigonometric Functions (2)

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) إذا كانت جاθ = $\frac{١}{٥}$ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$.

فأوجد قيمة النسب المثلثية الأخرى للزاوية θ.

(٢) إذا كانت ظاθ = $\sqrt{٨}$ ، جتاθ < ٠

أوجد جاθ، جتاθ.

(٣) إذا كانت جتاθ = $\frac{١}{٣}$ ، جاθ < ٠

أوجد جاθ، ظتاθ.

في التمارين (٤-٧)، أوجد قيمة كلّ مما يلي:

(٤) (جاθ + جتاθ)^{٢} − ٢ جاθ جتاθ.

(٥) (ظا^{٢} θ + ١)جتا^{٢} θ.

المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

في التمارين (١-٦)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

(١) قتاθ × جتاθ − ظتاθ = ٠ (أ) (ب)

(٢) ظتا^{٢} (−θ) − قتا^{٢} θ = −١ (أ) (ب)

(٣) (قاθ + ظاθ)(قاθ − ظاθ) = ١ (أ) (ب)

(٤) جاθ قتاθ − جتا^{٢} θ − جا^{٢} θ = ٠ (أ) (ب)

(٥) $\frac{\text{جا}^{٢}\,\theta}{١ - \text{جتا}\theta}$ − جتاθ = −١ (أ) (ب)

(٦) ظاθ + ظتاθ − قاθ قتاθ = ٠ (أ) (ب)

في التمرينين (٧-٨)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٧) إذا كانت جتاθ = $-\frac{٥}{٧}$ ، θ تقع في الربع الثالث. فإن جا θ =

(أ) $\frac{-٧}{\sqrt{٢}\,\sqrt{٦}}$ (ب) $\frac{\sqrt{٢}\,\sqrt{٦}}{٧}$

(جـ) $\frac{-\sqrt{٢}\,\sqrt{٦}}{٧}$ (د) $\frac{٧}{\sqrt{٢}\,\sqrt{٦}}$

(٨) إذا كانت قاθ = $\frac{٣}{٢}$ ، θ تقع في الربع الرابع. فإن ظا θ =

(أ) $\frac{\sqrt{٧}\,\sqrt{٥}}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{\sqrt{٧}\,\sqrt{٥}}$

(جـ) $\frac{-٢}{\sqrt{٧}\,\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{-\sqrt{٧}\,\sqrt{٥}}{٢}$

في التمرينين (٩-١٠)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

(٩) جاθ (ظتاθ + ظاθ) = قاθ

(١٠) $\frac{\text{جاθ}}{\text{جاθ} - \text{جتاθ}} = \frac{١}{١ - \text{ظتاθ}}$.

(١) في أيّ ربع أو على أيّ محور يقع الضلع النهائي لـ θ في الحالات التالية:

(أ) جاθ = $\frac{١}{٣}$. _____

(ب) قاθ = −١ . _____

(جـ) ظاθ = −٣. _____

(د) جتاθ = −$\frac{٧}{٨}$. _____

(٢) إذا كان ظاθ = ٤ فأوجد:

(أ) قا^{٢}θ. _____

(ب) ظتاθ. _____

(جـ) ظتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$. _____

(د) قتا^{٢} θ. _____

(٣) إذا كان جا ٣٨° ≃ ٠,٦٢ ، بدون استخدام الآلة الحاسبة بطريقة مباشرة أوجد قيمة كل من:

(أ) جتا٣٨°. _____

(ب) جا(−٥٢°). _____

(جـ) ظا(١٤٢°) − جتا(٢١٨°) + ظتا(−٣٨°). _____

(٤) أوجد قيمة كل مما يلي:

(أ) قا(−٦٠°) + ظا(٦٠°) − ظتا(٢١٠°) + قتا(٣٠°). _____

(ب) جتا$\left(\frac{٣\pi}{٢}\right)$ + ٢جا(−π) + جتا(−٨π) + جا$\left(-\frac{٧\pi}{٢}\right)$. _____

(٥) أثبت صحّة ما يلي:

(أ) $\text{قا}^{٢}\theta - ٢\text{ظا}^{٢}\theta + \frac{١}{\text{جتا}^{٢}(-\theta)} = ٢$

(ب) $\text{جتا}\theta + \frac{\text{جا}^{٢}\theta}{١ + \text{جتا}\theta} = ١$

(٦) أثبت صحّة المتطابقات التالية:

(أ) $\text{جتا}^{٤}\theta - \text{جا}^{٤}\theta = \text{جتا}^{٢}\theta - \text{جا}^{٢}\theta$

(ب) $\text{جتا}\theta\,(\text{ظا}\theta + \text{ظتا}\theta) = \text{قتا}\theta$

(٧) أوجد مجموعة حل المعادلات المثلثية التالية:

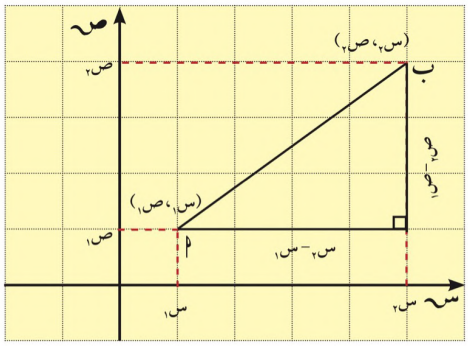
(أ) $\text{جتا س} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

(ب) $٢\text{جا س} - \sqrt{٣} = ٠$

(جـ) $\text{ظا س} = ١$

المستوى الإحداثي
Coordinate Plane

أي نقطتين أ(س$_١$، ص$_١$) ، ب (س$_٢$ ، ص$_٢$) ليستا على مستقيم أفقي أو مستقيم رأسي، يمكن تمثيلهما بيانيًّا وصنع مثلث قائم الزاوية (كما هو مبين في الشكل المقابل).



نستخدم نظرية فيثاغورث لإيجاد المسافة بين النقطتين أ ، ب.

(أب)^٢ = (أجـ)^٢ + (ب جـ)^٢ نظرية فيثاغورث

(أب)^٢ = (س$_٢$ − س$_١$)^٢ + (ص$_٢$ − ص$_١$)^٢ التعويض

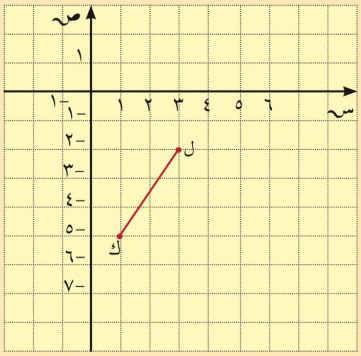
أب = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ الجذر التربيعي الأساسي

قانون:

المسافة بين أي نقطتين أ(س$_١$، ص$_١$)، ب (س$_٢$، ص$_٢$) تساوي $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

مثال (١)

أوجد المسافة بين ك (١، −٥) ، ل(٣، −٢).



الحل: المسافة = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

= $\sqrt{(٣ - ١)^٢ + (-٢ - (-٥))^٢}$

= $\sqrt{(٢)^٢ + (٣)^٢}$

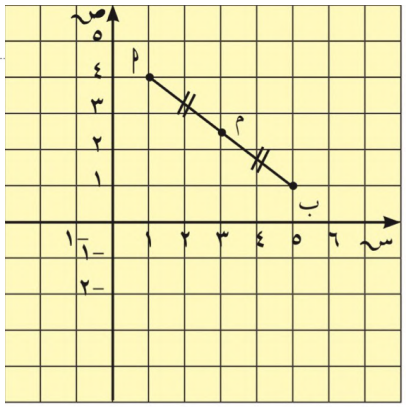
= $\sqrt{١٣}$ = ٣,٦ وحدة طول

المسافة بين ك، ل تساوي حوالى ٣,٦ وحدات طول.

حاول أن تحل

١ أوجد المسافة بين م(−٢، ١) ، ن(−٧ ، ٤) . قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

نقطة المنتصف Midpoint



أب نقطتان في المستوى. م نقطة منتصف $\overline{أب}$.

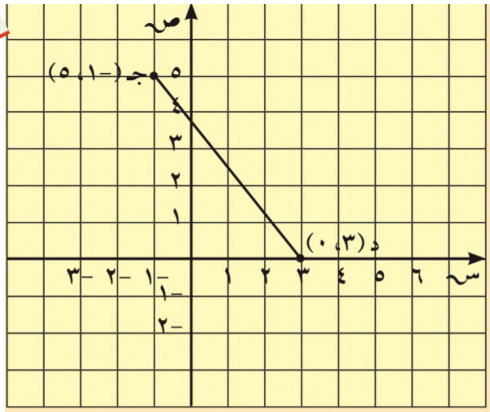
النقطة م تقسم القطعة $\overline{أب}$ إلى قطعتين متطابقتين $\overline{أم}$ ، $\overline{م ب}$.

قانون:

إذا كانت أ(س$_١$، ص$_١$)، ب (س$_٢$، ص$_٢$)، فإن إحداثيات نقطة المنتصف هي م(س، ص) حيث س = $\frac{س_١ + س_٢}{٢}$ ، ص = $\frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$.

مثال (٢)

في الشكل المقابل أوجد نقطة منتصف $\overline{\text{جـ د}}$ حيث جـ (−١، ٥)، د (٣، ٠).



الحل: $\left(\frac{\text{س}_١ + \text{س}_٢}{٢} ، \frac{\text{ص}_١ + \text{ص}_٢}{٢}\right) = \left(\frac{-١ + ٣}{٢} ، \frac{٥ + ٠}{٢}\right)$

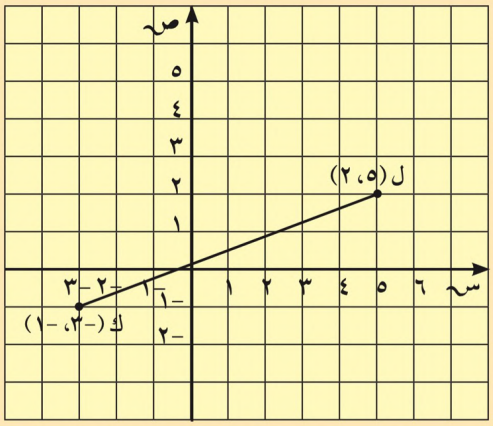
$= \left(\frac{٢}{٢} ، \frac{٥}{٢}\right)$

$= (١ ، ٢,٥)$

نقطة منتصف $\overline{\text{جـ د}}$ هي (١ ، ٢,٥).

حاول أن تحل

٢ في الشكل المقابل، أوجد نقطة منتصف $\overline{\text{ك ل}}$ حيث ك (−٣، −١)، ل (٥، ٢).



تمرَّنْ ٩-١

المستوى الإحداثي

Coordinate Plane

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمرينين (١-٢)، أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط التالية.

(١) (٧، -٣)(-٢، ٩)

(٢) (-٢، ٧)(-٢، -٧)

في التمرينين (٣-٤)، أوجد إحداثيي نقطة المنتصف لكل من القطع المستقيمة التالية، بمعلومية إحداثيات طرفي القطعة المستقيمة.

(٣) أ(٢، ٥)، ب(٠، ٧)

(٤) س(-٣، ١٤)، ص(١، ١٠)

في التمرينين (٥-٦)، أوجد أطوال أضلاع كل من المثلثات التالية بمعلومية إحداثيات رؤوسها. قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

(٥) أ(٢، ٢) ، ب(٦، ٣) ، جـ(٥، ٦)

(٦) م(-١، -٥) ، ن(٤، -٤) ، ك(٢، -١)

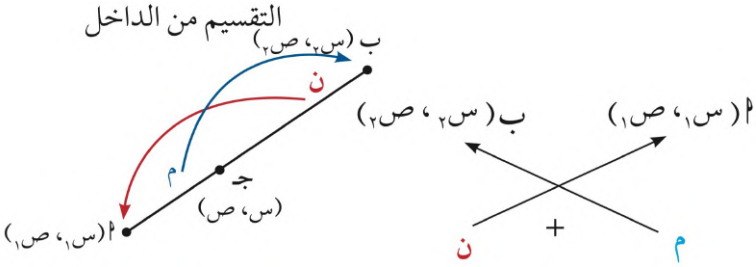
في التمارين (١-٥)، اختر من القائمة الأولى ما يناسب في القائمة الثانية لتحصل على عبارة صحيحة.

القائمة الأولى	القائمة الثانية
المسافة بين النقطتين بالوحدات الطولية	(أ) ٢
(١) (٣، ٠)، (٠، ٤) هي:	(ب) ٣
(٢) (-٢، ٠)، (-٢، ٤) هي:	(جـ) ٤
(٣) (٣، -٦)، (٥، -٦) هي:	(د) ٥

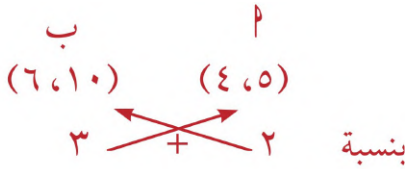
القائمة الأولى	القائمة الثانية
نقطة المنتصف لـ $\overline{أب}$ حيث	(أ) $\left(٥، ٥\frac{١}{٢}\right)$
(٤) أ(١٢، -٢)، ب(-٢، -٩) هي:	(ب) $\left(٥، -٥\frac{١}{٢}\right)$
(٥) أ(١٢، ٠)، ب(٢، ١١) هي:	(جـ) $\left(٧، ٥\frac{١}{٢}\right)$
	(د) $\left(٧، -٥\frac{١}{٢}\right)$

تقسيم قطعة مستقيمة
Dividing Line Segment

التقسيم من الداخل



جـ ($\frac{\text{م س}_2 + \text{ن س}_1}{\text{م} + \text{ن}}$ ، $\frac{\text{م ص}_2 + \text{ن ص}_1}{\text{م} + \text{ن}}$)



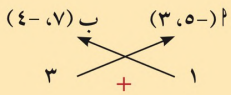
نقطة التقسيم جـ (س، ص)

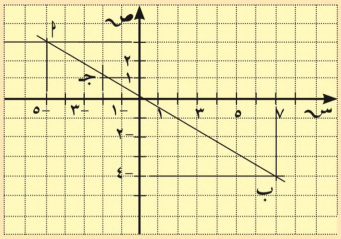
$= \left(\frac{٢ \times ١٠ + ٣ \times ٥}{٢ + ٣} ، \frac{٢ \times ٦ + ٣ \times ٤}{٢ + ٣} \right)$

$= (٧ ، ٤,٨)$

مثال (١)

إذا كان أ (−٥، ٣)، ب (٧، −٤). فأوجد نقطة تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من جهة أ بنسبة ١ : ٣ من الداخل.





الحل: نقطة التقسيم (س، ص) = $\left(\frac{\text{م س}_2 + \text{ن س}_1}{\text{م} + \text{ن}} ، \frac{\text{م ص}_2 + \text{ن ص}_1}{\text{م} + \text{ن}} \right)$

س = $\frac{١ \times ٧ + ٣ \times (-٥)}{١ + ٣} = \frac{-٨}{٤} = -٢$، ص = $\frac{١ \times (-٤) + ٣ \times ٣}{١ + ٣} = \frac{٥}{٤} =$ ١,٢٥

نقطة التقسيم هي: جـ (−٢ ، ١,٢٥).

حاول أن تحل

١ إذا كان أ (٣، −٤) ، ب (−٢، ٣). فأوجد جـ بحيث ٢ أ جـ = جـ ب ، جـ ∈ $\overline{\text{أب}}$.

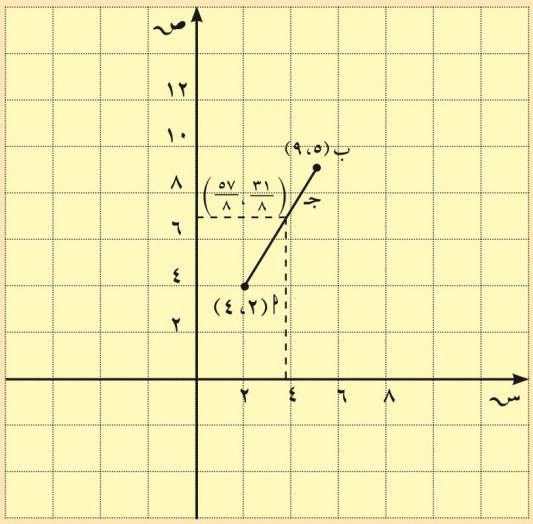
[إرشاد: أ جـ : جـ ب = ١ : ٢]

مثال (٢)

إذا كان أ (٢، ٤)، ب (٥، ٩)،

ويراد تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل من جهة ب في نقطة جـ بنسبة ٣:٥.

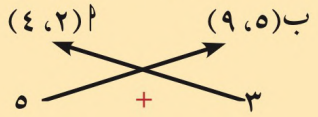
أوجد إحداثيات النقطة جـ.



الحل:

المطلوب إيجاد قيم س، ص إحداثيات النقطة جـ حيث $\frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ أ}} = \frac{٣}{٥}$

من الداخل. باستخدام قاعدة التقسيم من الداخل من جهة ب نكتب:



س = $\frac{٣ \times ٢ + ٥ \times ٥}{٣ + ٥} = \frac{٣١}{٨}$ ؛ ص = $\frac{٣ \times ٤ + ٥ \times ٩}{٣ + ٥} = \frac{٥٧}{٨}$

فتكون جـ ($\frac{٣١}{٨}$ ، $\frac{٥٧}{٨}$)

حاول أن تحل

٢ لتكن أ (٢، −٣)، ب (−٤، ٧). أوجد إحداثيات النقطة جـ على $\overline{\text{أب}}$ بحيث: ٧جـ ب = ٢جـ أ .

تمرَّنْ ٩-٢

تقسيم قطعة مستقيمة

Dividing Line Segment

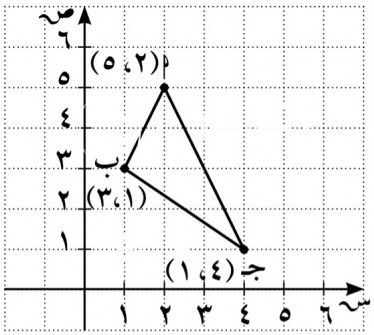
المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أوجد إحداثيي النقطة ن التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل من جهة أ إذا علم أن:

(أ) أ(-٧، ٥)، ب(٨، -٥) ونسبة التقسيم ١ : ٢.

(ب) أ(٦، ٩)، ب(-٢، ١) ونسبة التقسيم ١ : ٣.

(٤) أ ب جـ مثلث فيه أ(٢، ٥)، ب(١، ٣)، جـ(٤، ١).



(أ) أوجد إحداثيي النقطة ن التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل من جهة أ بنسبة ١ : ٣.

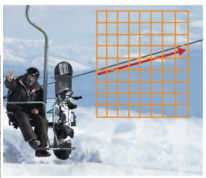
(ب) أوجد إحداثيي النقطة ك التي تقسم $\overline{\text{ب جـ}}$ من الداخل من جهة ب بنسبة ١ : ٢.

ميل الخط المستقيم
Slope of a Straight Line

Finding The Slope

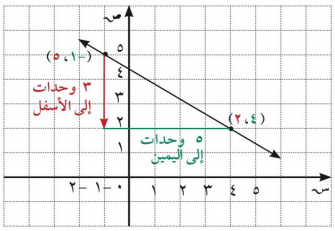
إيجاد الميل

درست في ما سبق أن ميل المستقيم يمكن إيجاده باستخدام العلاقة.



$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$

فمثلًا ميل المستقيم الموضح بالشكل المقابل



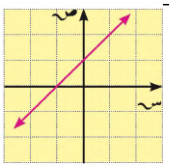
$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$

$$= \frac{٢ - ٥}{٤ - (-١)}$$

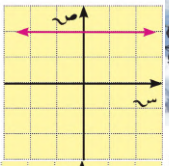
$$= \frac{-٣}{٥}$$

ميل الخط المستقيم يساوي $\frac{-٣}{٥}$.

ميل المستقيم موجب

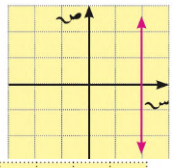


ميل المستقيم الأفقي يساوي صفرًا



ميل المستقيم سالب

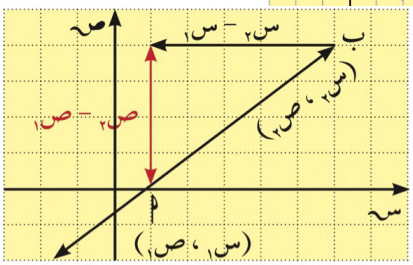
المستقيم الرأسي ليس له ميل



كذلك يمكن استخدام نقطتين على خط مستقيم لإيجاد ميله.

في الرسم البياني إلى اليسار،

لإيجاد ميل $\overleftrightarrow{أب}$ ،حيث أ(س١ ، ص١)، ب (س٢ ، ص٢) نستخدم الصيغة التالية:



$$\text{الميل} = \frac{\text{التغيير الرأسي}}{\text{التغيير الأفقي}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} \text{ ، } س_٢ - س_١ \neq ٠$$

يجب مراعاة الترتيب المعتمد في كتابة إحداثيات النقطتين عند إيجاد الميل. فمثلًا، إذا بدأنا بالإحداثي الصادي للنقطة ب في البسط فيجب البدء بالإحداثي السيني للنقطة ب في المقام.

مثال (٢)

أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ(-٢، ١) ، ب(٥، ٧).

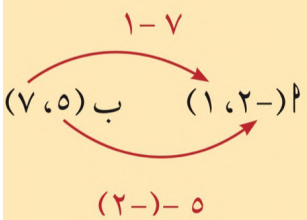
الحل:

$$\text{الميل} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{٧ - ١}{٥ - (-٢)}$$ عوّض

$$= \frac{٦}{٧}$$ بسّط

ميل الخط المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يساوي $\frac{٦}{٧}$.



حاول أن تحل

٢ أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بكل زوج من النقاط.

أ جـ(٢، ٥) ، د(٤، ٧) ب ق(−١، ٤) ، ك(٣، −٢) جـ م (٤، ٣) ، ن(−٧، ٣)

مثال (٣)

نأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: أ(١، −١) ، ب(٢، ٢) ، جـ(−١، −٧). أثبت أن النقاط أ، ب، جـ على استقامة واحدة

الحل:

$$م_١ = \text{ميل } \overleftrightarrow{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٢ - (-١)}{٢ - ١} = ٣$$

$$م_٢ = \text{ميل } \overleftrightarrow{أجـ} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-٧ - (-١)}{-١ - ١} = \frac{-٦}{-٢} = ٣$$

أي أن $م_١ = م_٢ = ٣$

∴ $\overleftrightarrow{أب} \,//\, \overleftrightarrow{أجـ}$ ولكنهما يشتركان في النقطة أ.

∴ تكون النقاط أ، ب، جـ على استقامة واحدة.

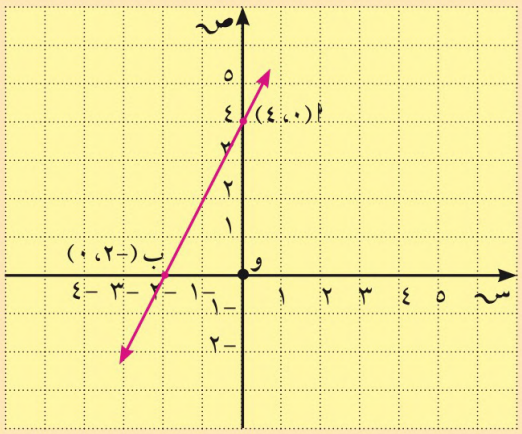
حاول أن تحل

٣ أثبت أن النقاط أ(٢، −١) ، ب(−١، ٥) ، جـ (٣، −٣) على استقامة واحدة.

مثال (٤)

أوجد ميل $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ(٠، ٤) ، ب (−٢، ٠) وقارنه بظل الزاوية $\hat{ب}$ في المثلث قائم الزاوية ب و أ.

الحل:



الميل = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

= $\frac{٤ - ٠}{٠ - (-٢)}$ عوّض

= $\frac{٤}{٢}$ بسّط

= ٢

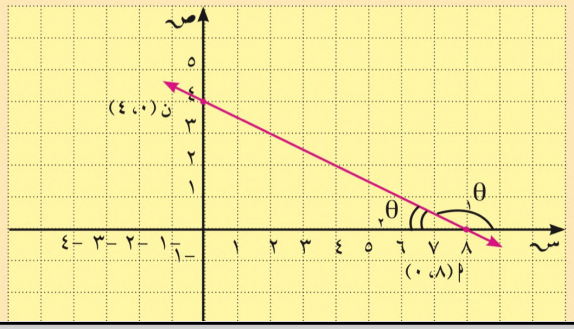
في المثلث أوب: أو = ٤ ، وب = ٢

ظاب = $\frac{أو}{ب و}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

∴ ظاب = ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ٢

حاول أن تحل

٤ أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أن}$ وقارنه بظل الزاوية الحادة التي قياسها $\theta_٢$ وظل الزاوية المنفرجة التي قياسها $\theta_١$.



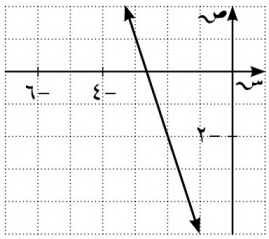
تمرَّنْ
٩-٣
(أ)

ميل الخط المستقيم

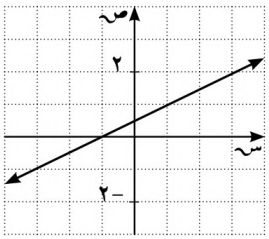
Slope of a Straight Line

في التمارين (٢-٥)، أوجد ميل كل مستقيم إن أمكن مما يلي:

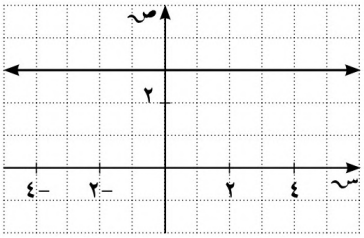
(٢)



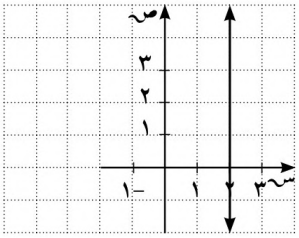
(٣)



(٤)



(٥)



في التمارين (٦-٩)، أوجد ميل المستقيم إن أمكن المار بكل من أزواج النقاط التالية:

(٦) (٣، ٢)، (٥، ٦)

(٧) (٦، ٥)، (٢، ٣)

(٨) (٣، ٤)، (-٣، ٤)

(٩) (٤، ٣)، (٤، -٣)

(١٠) أوجد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(١١) أثبت أن المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° يوازي المستقيم: س = ص + ٧.

في التمارين (١٧-١٩)، أوجد قيمة كل من س، ص إذا كانت النقطتان على المستقيم مع المعطيات التالية:

(١٧) (س، ٣)، (٢، ٨)، الميل = $\frac{-٥}{٢}$.

(١٨) (-٤، ص)، (٢، ٤ص)، الميل = ٦.

(١٩) (٣، ٥)، (س، ٢)، الميل غير معرّف.

في التمارين (٢١-٢٤)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و (ب) إذا كانت العبارة خطأ.

(٢١) من الممكن أن يكون لمستقيمين مختلفين الميل نفسه. (أ) (ب)

(٢٢) إن ميل المستقيم الذي يمر بالربع الثالث ونقطة الأصل هو دائمًا سالب. (أ) (ب)

(٢٣) لا يمر المستقيم الذي ميله يساوي صفرًا بنقطة الأصل. (أ) (ب)

(٢٤) نقطتين لديهما الإحداثي السيني نفسه، فإنهما ينتميان إلى المستقيم الرأسي نفسه. (أ) (ب)

في التمرينين (٢٧-٢٨)، حدِّد إن كانت مجموعة النقاط التالية تقع على استقامة واحدة.

(٢٧) أ(١، ٣)، ب(٤، ٢)، جـ(-٢، ٤).

(٢٨) أ(-٢، ٣)، ب(٠، -١)، جـ(٢، ١).

(٢٩) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (-١، -١)، (-٤، ٥) عمودي على المستقيم المار بالنقطتين (٠، ١)، (٤، ٣).

المجموعة ب تمارين تعزيزية

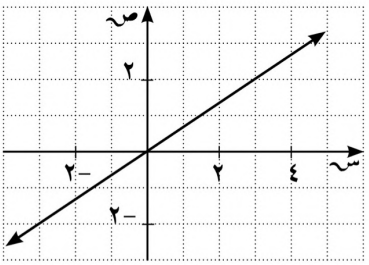
(١) (أ) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين أ(٤، -٣)، ب(١، -٥) مستخدمًا أ(س$_٢$، ص$_٢$)، ب (س$_١$، ص$_١$).

(ب) أوجد ميل المستقيم في (أ) مستخدمًا أ(س$_١$، ص$_١$)، ب(س$_٢$، ص$_٢$).

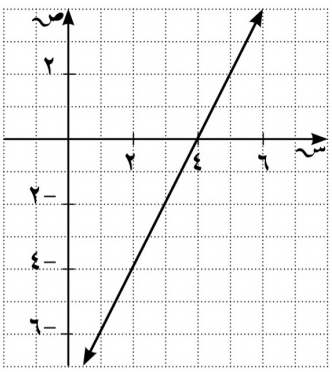
(جـ) ماذا تلاحظ؟

في التمرينين (٣-٤)، أوجد ميل كل مستقيم مما يلي:

(٣)



(٤)



في التمرينين (٥-٦)، أوجد ميل المستقيم المار بكل من أزواج النقاط التالية:

(٥) (-٤، ٤)، (٢، -٥)

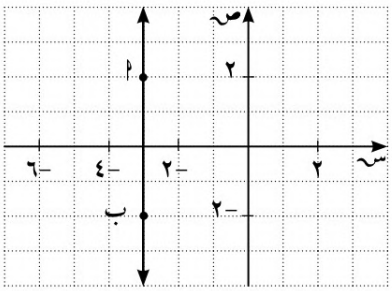
(٦) (-٢، ١)، (١، -٢)

(٧) أوجد ميل مستقيم موازٍ لمحور السينات.

(٨) أوجد ميل مستقيم يصنع مع محور السينات زاوية قياسها ٤٥° ويمر بنقطة الأصل.

في التمارين (٩-١١)، حدِّد ما إذا كان ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يساوي صفرًا أم هو غير معرّف.

(٩)



(١٠) أ$\left(-٥، \frac{١}{٢}\right)$، ب (-٥، ٣)

(١١) أ(-٥، ١)، ب (-٤، ١)

في التمارين (١٣-١٥)، أوجد قيمة س إذا مر المستقيم المعطى ميله بالنقطتين.

(١٣) (٢، ٤)، (س، ٨)، الميل = -٢.

(١٤) (٢، ٤)، (س، ٨)، الميل = $\frac{-١}{٢}$.

(١٥) (٤، ٣)، (س، ٧)، الميل = ٢.

في التمارين (١٧-١٩)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة وظلّل (ب) إذا كانت العبارة خطأ.

(١٧) معدل التغير دائمًا موجبًا أو يساوي صفر. (أ) (ب)

(١٨) كل المستقيمات الأفقية لها الميل نفسه. (أ) (ب)

(١٩) المستقيم الذي ميله يساوي ١ دائمًا يمر بنقطة الأصل. (أ) (ب)

في التمرينين (٢٢-٢٣)، هل النقاط المعطاة تقع على استقامة واحدة؟

(٢٢) أ(٤، ٢)، ب(-٣، ٢)، جـ(٢، ٥).

(٢٣) أ(١، -٢)، ب(-١، -٥)، جـ(٥، ٤).

(٢٤) أوجد ميل مستقيم متعامد مع المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

معادلة الخط المستقيم
Equation of a Straight Line

ملاحظة:

١ لكتابة معادلة خط مستقيم ليس رأسيًّا نحن بحاجة إلى معرفة:

- الميل (م).
- نقطة من نقاط المستقيم ولتكن (س$_١$، ص$_١$).

تكون معادلة المستقيم: ص − ص$_١$ = م(س − س$_١$).

٢ معادلة المستقيم الرأسي هي س = أ (وهذا المستقيم ليس له ميل)

تذكر:
معادلة محور السينات هي: ص = ٠
معادلة محور الصادات هي: س = ٠
وبالتالي إحداثيات نقاط محور السينات (س، ٠) وإحداثيات نقاط محور الصادات (٠، ص).

مثال (١)

اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{٣}{٢}$ و يمر بالنقطة (٤، −١).

الحل:

ص − (−١) = $\frac{٣}{٢}$ (س − ٤) بالتعويض

ص + ١ = $\frac{٣}{٢}$ س − ٦

ص = $\frac{٣}{٢}$ س − ٧ بالتبسيط

∴ المعادلة: ص = $\frac{٣}{٢}$ س − ٧.

حاول أن تحل

١ اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{-٢}{٣}$ ويمر بالنقطة (−٦، ٥).

مثال (٢)

اكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ (١، ٣) ، ب(−٢، ٠).

الحل:

نوجد الميل

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ٠}{١ - (-٢)}$$

$$م = \frac{٣}{٣} = ١$$

المعادلة: $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ٣ = ١ (س - ١)$ بالتعويض في المعادلة

$ص = ٣ + س - ١$ بالتبسيط

$ص = س + ٢$

وبالتالي معادلة المستقيم هي: ص − س − ٢ = ٠ أو س − ص + ٢ = ٠ وهي الصورة العامة لمعادلة المستقيم.

معلومة مفيدة:

الصورة العامة لمعادلة المستقيم هي:

أس + ب ص + جـ = ٠

حيث أ، ب لا يساويان الصفر معًا.

حاول أن تحل

٢ أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين جـ (٣، −١) ، د(٢، −٢).

مثال (٣)

إذا كان المستقيم ل: ص = ٢س + ١، فأوجد:

أ معادلة المستقيم هـ الموازي للمستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٢، −٣).

ب معادلة المستقيم ف العمودي على المستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٤، −٣).

الحل:

أ ∵ المستقيمان ل، هـ متوازيان ، ميل المستقيم هـ = ميل المستقيم ل

∴ ميل المستقيم هـ = ٢

وبالتالي، معادلة المستقيم هـ تكتب على الشكل:

ص − ص$_{١}$ = م(س − س$_{١}$)

ص − (−٣) = ٢ (س − ٢) بالتعويض في المعادلة

ص = −٣ + ٢س − ٤ بالتبسيط

ص = ٢س − ٧ وبالتالي معادلة هـ : ص − ٢س + ٧ = ٠

أو ٢س − ص − ٧ = ٠ وهي الصورة العامة لمعادلة المستقيم.

ب ∵ ل ، ف مستقيمان متعامدان ∴ ميل المستقيم ل × ميل المستقيم ف = −١

٢ × ميل المستقيم ف = −١

ميل المستقيم ف = $\frac{-١}{٢}$

وبالتالي معادلة المستقيم ف:

ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)

ص − (−٣) = $\frac{-١}{٢}$ (س − ٤) بالتعويض

ص + ٣ = $\frac{-١}{٢}$ س + ٢ بالتبسيط

ص = $\frac{-١}{٢}$ س − ١

∴ معادلة المستقيم ف: ص = $\frac{-١}{٢}$ س − ١

تذكر:

إذا كان ميل المستقيم هو $\frac{أ}{ب}$

فإن ميل المستقيم المتعامد معه

هو $\frac{-ب}{أ}$ حيث أ، ب ≠ ٠

حاول أن تحل

٣ إذا كان المستقيم ك: ٣ص + س + ٣ = ٠، فأوجد:

أ معادلة المستقيم أ الموازي للمستقيم ك والذي يمر بالنقطة (−٣، ٢).

ب معادلة المستقيم ز العمودي على المستقيم ك والذي يمر بالنقطة (١، ٤).

تمرَّنْ ٩-٣ (ب)

معادلة الخط المستقيم

Equation of a Straight Line

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أوجد معادلة الخط المستقيم إذا علم:

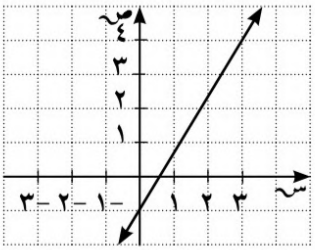
(أ) يمر بالنقطة (٥، ٢) وميله = ٣.

(ب) يمر بالنقطة (−٢، ٤) وميله = −٢.

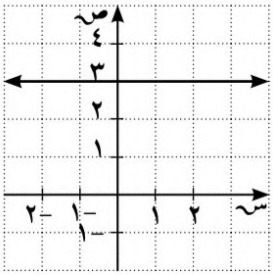
(جـ) يمر بالنقطة (١، −١) وميله = $\frac{٢}{٣}$.

(٢) أوجد الصورة العامة لمعادلة المستقيم في كل من الأشكال التالية:

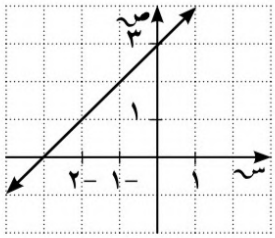
(أ)



(ب)



(جـ)



(٣) أوجد الصورة العامة لمعادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين في كل من:

(أ) (٥، ٣)، (٤، ٧).

(ب) (٣، −٤)، (٧، ١).

(٤) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٧، −١) والعمودي على الخط المستقيم: ٣س + ٢ص − ١ = ٠.

(٥) أوجد معادلة المستقيم المتعامد مع المستقيم: ص = −٢س + ٤ ويمر بالنقطة (−٢، ٣).

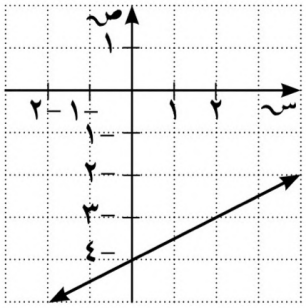
(٦) أوجد معادلة المستقيم المتوازي مع المستقيم: س = − $\frac{١}{٤}$ ص + ١٧ ويمر بنقطة الأصل.

(٧) أوجد معادلة الخط المستقيم العمودي على المستقيم: ٢س + ص + ١ = ٠ ويمر بالنقطة (−١، ١).

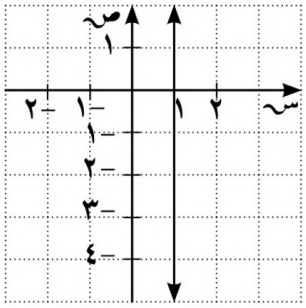
المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) أوجد معادلة الخط المستقيم المرسوم في ما يلي:

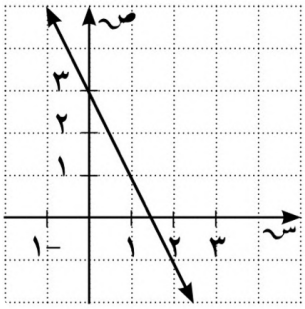
(أ)



(ب)



(جـ)



(٦) أوجد معادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين: (٥، ٢)، (٠، −٣).

(٧) أوجد معادلة الخط المستقيم في كل مما يلي:

(أ) يمر بنقطة الأصل وميله ٧.

(ب) يمر بنقطة الأصل وبالنقطة (٣، −٤).

(٨) أوجد الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة أ(٥، ٧) والموازي للمستقيم المار بالنقطتين (٣، ٤)، (٢، ١).

البعد بين نقطة ومستقيم
Distance Between a Point and a Straight Line

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة ل: أ س + ب ص + جـ = ٠، فإن البعد ف بين النقطة د (س$_١$، ص$_١$) والمستقيم ل تعطى بالصيغة: ف = $\frac{|\text{أ س}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}$.

مثال (١)

أثبت أن النقطة هـ(٢، ١) لا تنتمي إلى المستقيم ل الذي معادلته: ص = ٣ س − ٤، ثمّ أوجد البعد بين المستقيم ل والنقطة هـ.

الحل:

بالتعويض عن (س، ص) بـ (٢، ١) في المعادلة: ص = ٣س − ٤

نحصل على ١ $\stackrel{؟}{=}$ ٣ × ٢ − ٤

١ ≠ ٢ ∴ هـ لا تنتمي إلى المستقيم ل.

لإيجاد البعد بين هـ، المستقيم ل يجب كتابة معادلة المستقيم ل على الصورة :

أ س + ب ص + جـ = ٠

∴ ل: ٣س − ص − ٤ = ٠

أ = ٣ ب = −١ جـ = −٤

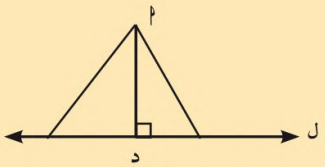
س$_١$ = ٢ ص$_١$ = ١

البعد ف = $\frac{|\text{أ س}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}$

= $\frac{|٣ \times ٢ - ١ - ٤|}{\sqrt{٣^٢ + (-١)^٢}}$ = $\frac{|٦ - ٥|}{\sqrt{١٠}}$ = $\frac{١}{\sqrt{١٠}}$ ∴ البعد يساوي $\frac{\sqrt{١٠}}{١٠}$ وحدة طول.

ملاحظة:

بعد نقطة عن مستقيم هو طول القطعة العمودية المرسومة من النقطة على الخط المستقيم.



أ د هي أقصر مسافة بين النقطة أ والمستقيم ل.

حاول أن تحل

١ أوجد البعد بين المستقيم ل: ص = −س + ٣ والنقطة د(٢، ٥).

ملاحظة:

إذا كانت المسافة بين نقطة ومستقيم تساوي صفرًا تكون النقطة تنتمي للمستقيم.

مثال (٢)

أوجد البعد من النقطة د(−٤، −٣) إلى المستقيم ل: ٢ص = ٣ س − ٧.

الحل:

نكتب أولًا معادلة المستقيم ل على الصورة: أ س + ب ص + جـ = ٠

ل: ٣س − ٢ص − ٧ = ٠

أ = ٣ ب = −٢ جـ = −٧

$س_١$ = −٤ $ص_١$ = −٣

$$البعد\ ف = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$$

$$ف = \frac{|٣(-٤) - ٢(-٣) - ٧|}{\sqrt{(٣)^٢ + (-٢)^٢}} = \frac{|-١٣|}{\sqrt{٩ + ٤}} = \frac{١٣}{\sqrt{١٣}} = \sqrt{١٣}.$$

أي أن البعد من النقطة د إلى المستقيم ل يساوي $\sqrt{١٣}$ وحدة طول.

حاول أن تحل

٢ أوجد البعد من النقطة ط(٣، −٤) إلى المستقيم ل: ص = $-\frac{٤}{٣} + \frac{س}{٦}$.

تمرَّنْ ٩-٤

البعد بين نقطة ومستقيم

Distance Between a Point and a Straight Line

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمارين (١-٤)، معادلة المستقيم ل: ٢س - ص + ٣ = ٠

بيّن ما إذا كانت النقطة تنتمي إلى المستقيم ل أم لا.

(١) م(-٢، -١) _____ (٢) ب(٠، -٢) _____

(٣) جـ(٤، ٠) _____ (٤) د(٢، -١) _____

(٥) أوجد البعد بين النقطة جـ(٢، ١) والمستقيم: ٣س - ص - ١ = ٠

_____

(٦) أوجد البعد بين نقطة الأصل والمستقيم: ٢ص = ٣س + ٤

_____

(٧) أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و(٢، -١) إذا كان المستقيم: ٣س - ٤ص + ٧ = ٠ مماس لها.

_____

(٨) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢، -٣) على المستقيم: -٢س + ص - ٤ = ٠

_____

(٩) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (-٤، ٧) على المستقيم: ص = -٥س + ١

_____

(١٠) أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على المستقيم المار بالنقطتين (٧، ٣)، (-٥، ١)

_____

تمرَّنْ
٩-٤

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١-٣)، معادلة المستقيم ل: ٣ص - س + ١ = ٠

بيّن ما إذا كانت النقطة تنتمي إلى المستقيم ل أم لا.

(١) (٣، ٣)

(٢) (٢، ٠)

(٣) (٤، ١)

(٤) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٤، ٥) على المستقيم: ٣س + ٤ص = ٠

(٥) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٨، ٠) على المستقيم: ٥س + ١٢ص = ٠

(٦) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢، ٧) على المستقيم المار بالنقطتين: (٣، ١)، (٥، ٣).

(٧) أوجد بعد النقطة (٤، ٤) عن المستقيم المار بنقطة الأصل وميله $\frac{٣}{٤}$.

(٨) أوجد أقصر مسافة من النقطة (٤، ٤) إلى المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٠)، (٠، ٢).

معادلة الدائرة
Equation of a Circle

وعلى ذلك، تكون معادلة الدائرة التي مركزها (د، هـ) وطول نصف قطرها نق على الصورة:

$$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$$

وتسمّى هذه الصورة القياسية لمعادلة الدائرة بمعلومية المركز م(د، هـ) وطول نصف القطر نق.

مثال (١)

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣، −٢) وطول نصف قطرها ٧ وحدات.

الحل:

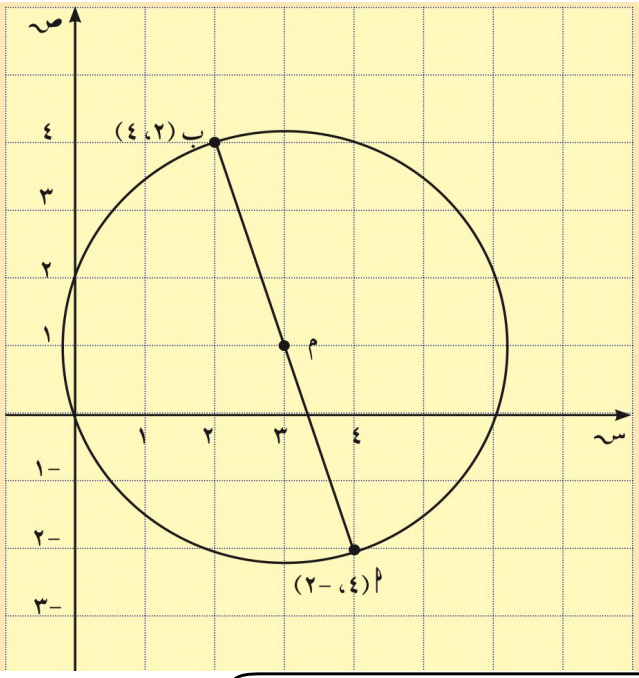
معادلة الدائرة على الصورة القياسية: $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$ ، حيث (د، هـ) مركزها

$(س - ٣)^٢ + [ص - (-٢)]^٢ = ٤٩$ بالتعويض عن (د، هـ) بـ (٣، −٢)

$(س - ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٤٩$

حاول أن تحل

١ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٥، −٣) وطول نصف قطرها ٥ وحدات.



مثال (٢)

أوجد معادلة دائرة قطرها $\overline{\text{أب}}$ حيث أ (٤، -٢) ، ب(٢، ٤).

الحل:

نوجد أولًا إحداثيات مركز الدائرة والتي هي منتصف $\overline{\text{أب}}$

م$\left(\frac{٤ + ٢}{٢} ، \frac{-٢ + ٤}{٢}\right)$ أي

م(٣، ١)

نوجد طول نصف قطر الدائرة $\frac{\text{أب}}{٢}$،

نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{(٤ - ٢)^٢ + (-٢ - ٤)^٢} = \frac{١}{٢}\sqrt{٤٠}$

نق = $\sqrt{١٠}$ وحدة طول

معادلة الدائرة:

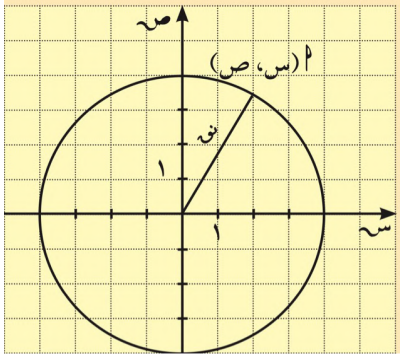
$(\text{س} - ٣)^٢ + (\text{ص} - ١)^٢ = ١٠$

حاول أن تحل

٢ أوجد معادلة دائرة قطرها أ ب حيث أ (-٣، ٦) ، ب(١، -٢).

مثال (٣)

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٤ وحدات.



الحل:

إذا فرضنا نقطة مثل أ(س، ص) على الدائرة، فإن م أ = نق = ٤ وحدات،

معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل: $س^٢ + ص^٢ = نق^٢$

$س^٢ + ص^٢ = ١٦$ معادلة الدائرة المطلوبة.

حاول أن تحل

٥ أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

أ $س^٢ + ص^٢ = ٤٩$.

ب $(س - ٤)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٣٦$.

الصورة العامة لمعادلة الدائرة

معادلة الدائرة التي مركزها م (د، هـ) وطول نصف قطرها نق تكتب على الصورة التالية: $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

وبالفك نحصل على الصورة التالية: $س^٢ + ص^٢ - ٢د س - ٢ هـ ص + د^٢ + هـ^٢ - نق^٢ = ٠$

بوضع ل = −٢ د ؛ ك = −٢ هـ ؛ ب = $د^٢ + هـ^٢ - نق^٢$ تصبح صورة المعادلة:

$س^٢ + ص^٢ + ل س + ك ص + ب = ٠$ ، حيث ل، ك، ب ثوابت

وتسمى الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها $\left(\frac{-ل}{٢}، \frac{-ك}{٢}\right)$

طول نصف قطرها $نق = \frac{١}{٢}\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ٤ب}$. حيث $ل^٢ + ك^٢ - ٤ب > ٠$

الصورة العامة: $س^٢ + ص^٢ + ل س + ك ص + ب = ٠$ هي معادلة دائرة ونلاحظ التالي:

١ إنها معادلة من الدرجة الثانية في س، ص.

٢ معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$.

٣ لا يوجد الحد الذي يتضمن س ص.

معلومة مفيدة:

$ب = د^٢ + هـ^٢ - نق^٢$

$\therefore نق^٢ = د^٢ + هـ^٢ - ب$

$نق^٢ = \left(\frac{-ل}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{-ك}{٢}\right)^٢ - ب$

$= \frac{ل^٢}{٤} + \frac{ك^٢}{٤} - ب$

$نق^٢ = \frac{١}{٤}(ل^٢ + ك^٢ - ٤ب)$

$\therefore نق = \frac{١}{٢}\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ٤ب}$

مثال (٦)

عيّن مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: $٣س^٢ + ٣ص^٢ - ٦س + ٩ص - ١٢ = ٠$

الحل:

$س^٢ + ص^٢ - ٢س + ٣ص - ٤ = ٠$ بالقسمة على ٣

وهي معادلة دائرة على الصورة العامة

∴ ل = −٢، ك = ٣، ب = −٤

المركز = $\left(\frac{-ل}{٢}، \frac{-ك}{٢}\right) = \left(١، -\frac{٣}{٢}\right)$

$نق = \frac{١}{٢}\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ٤ب}$

$نق = \frac{١}{٢}\sqrt{٤ + ٩ - ٤ \times (-٤)}$

$نق = \frac{١}{٢}\sqrt{٢٩}$ الدائرة مركزها $\left(١، -\frac{٣}{٢}\right)$ وطول نصف قطرها $نق = \frac{١}{٢}\sqrt{٢٩}$ وحدة طول.

حاول أن تحل

٦ عيّن مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: $٢س^٢ + ٢ص^٢ - ١٢س - ٤ص - ٣٠ = ٠$

ملاحظة

عندما يكون لدينا معادلة على الصورة العامة التالية: $س^٢ + ص^٢ + ل س + ك ص + ب = ٠$

يمكننا معرفة ما تمثله بيانيًّا هذه المعادلة بمجرد مقارنة

$ل^٢ + ك^٢ - ٤ب$ مع الصفر.

١ عندما $ل^٢ + ك^٢ - ٤ب < ٠$ فإن المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.

٢ عندما $ل^٢ + ك^٢ - ٤ب = ٠$ فإن المعادلة تمثل نقطة.

٣ عندما $ل^٢ + ك^٢ - ٤ب > ٠$ فإن المعادلة تمثل دائرة.

مثال (٧)

هل كل معادلة مما يلي تمثل معادلة دائرة؟ فسّر.

أ $س^٢ + ص^٢ - ٣س + ٥ص - \frac{١٥}{٤} = ٠$

ب $س^٢ + ص^٢ + ٤س - ٧ص + ٢٠ = ٠$

جـ $س^٢ + ص^٢ - ٦س + ٨ص + ٢٥ = ٠$

الحل:

أ المعادلة: $س^٢ + ص^٢ - ٣س + ٥ص - \frac{١٥}{٤} = ٠$

معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = ١

$ل = -٣$، $ك = ٥$، $ب = \frac{-١٥}{٤}$

$ل^٢ + ك^٢ - ٤ب = ٩ + ٢٥ - ٤\left(\frac{-١٥}{٤}\right) = ٩ + ٢٥ + ١٥ = ٤٩ > ٠$

$٤٩ > ٠$ ∴ المعادلة تمثل معادلة دائرة.

ب المعادلة: $س^٢ + ص^٢ + ٤س - ٧ص + ٢٠ = ٠$

معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = ١

$ل = ٤$، $ك = -٧$، $ب = ٢٠$

$ل^٢ + ك^٢ - ٤ب = ١٦ + ٤٩ - ٤ \times ٢٠ = -١٥ < ٠$

∴ المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.

جـ المعادلة $س^٢ + ص^٢ - ٦س + ٨ص + ٢٥ = ٠$

معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = ١

$ل = -٦$، $ك = ٨$، $ب = ٢٥$

$ل^٢ + ك^٢ - ٤ب = ٣٦ + ٦٤ - ٤ \times ٢٥ = ٠$

∴ المعادلة تمثل نقطة.

حاول أن تحل

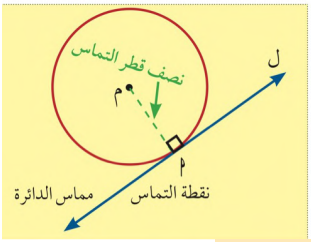
٧ هل كل معادلة مما يلي تمثل معادلة دائرة؟ فسّر.

أ $س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ٧ص + ١٧ = ٠$

ب $س^{٢} + ص^{٢} + ٥س - ٦ص - ٤ = ٠$

جـ $س^{٢} + ص^{٢} - ٢س - ٢ص + ٢ = ٠$

معادلة مماس لدائرة Tangent to a Circle



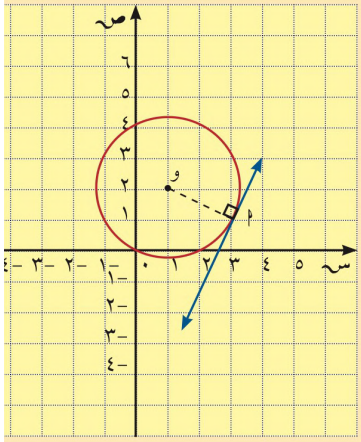
سبق وتبين لنا أن نصف قطر الدائرة عمودي على مماس الدائرة عند نقطة التماس.

باستخدام هذه الخاصية، نستطيع إيجاد معادلة مماس الدائرة.

مثال (٨)

أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها:

$(س - ١)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٥$ عند نقطة التماس أ(٣، ١).



الحل:

النقطة أ (٣، ١) تنتمي إلى الدائرة .

إحداثيات مركز الدائرة و(١، ٢).

$ميل \overline{وأ} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١ - ٢}{٣ - ١} = -\frac{١}{٢}$

∵ نصف قطر التماس $\overline{وأ}$ عمودي على مماس الدائرة

∴ $ميل_{المماس} \times ميل \overline{وأ} = -١$

$م_{المماس} \times (-\frac{١}{٢}) = -١$

$م_{المماس} = ٢$

معادلة المماس $\overline{وأ}$ الذي ميله ٢ ويمر بالنقطة (٣، ١) هي:

$ص - ص_١ = م (س - س_١)$

$ص - ١ = ٢ (س - ٣)$

$ص - ١ = ٢س - ٦$

∴ معادلة المماس $ص = ٢س - ٥$

حاول أن تحل

٨ أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها $(س - ٢)^٢ + (ص - ١)^٢ = ٢٥$ عند النقطة أ(٦، ٤).

تمرَّنْ ٩-٥

معادلة الدائرة

Equation of a Circle

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) حدّد ما إذا كانت المعادلات التالية، معادلة دائرة أم لا.

(أ) $٣س^٢ + ص^٢ = ٤$

(ب) $(س - ١)^٢ + (ص + ١)^٢ + ٤ = ٠$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ - ٢س - ٢ص - ٨ = ٠$

(د) $س^٢ + ص^٢ - ٢س + ٧ = ٠$

(٢) أوجد معادلة كل من الدوائر الآتية إذا علم:

(أ) المركز (٠، ٠) وطول نصف القطر = ٣.

(ب) المركز (٤، ٥) وطول نصف القطر = ٢.

في التمارين (٦-٨)، أوجد مركز وطول نصف قطر كلّ من الدوائر ذات المعادلات التالية:

(٦) $س^٢ + ص^٢ - ٨س + ٢ص - ٨ = ٠$.

(٧) $س^٢ + ص^٢ - ١٦س - ١٧ = ٠$.

(٨) $٥س^٢ + ٥ص^٢ - ٢٠ص - ٣٠ = ٠$.

(٩) أوجد معادلة مماس دائرة، معادلتها: $(س - ٢)^٢ + ص^٢ = ٨$ عند النقطة أ(٠، ٢).

(٢) أوجد معادلة كل من الدوائر التالية إذا علم:

(أ) المركز (٠، ٣) وطول نصف القطر = ٧

(ب) المركز (-٤، ٠) وطول نصف القطر = ٣

(٤) اكتب معادلة كل دائرة حيث:

(أ) المركز (٠، ٤) وتمرّ بالنقطة (٣، ٤).

(ب) المركز (٥، ١) وتمرّ بالنقطة (٦، ١).

في التمرينين (٥-٦)، أوجد مركز وطول نصف قطر كل من الدوائر التالية:

(٥) $٢س^٢ + ٢ص^٢ - ٤س - ٨ص = ٠$

(٦) $س^٢ + ص^٢ + ٢س - ٢ص - ١٦ = ٠$

(٧) أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها $(س - ١)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ١٠$ عند النقطة (٢، ١).

(٨) طول قطر الدائرة التي معادلتها $(س - ١)^٢ + (ص + ١)^٢ = ٤$ هو:

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ١٦

مراجعة الوحدة التاسعة

(١) أوجد قيمة ص إذا كانت النقطة (١، ص) تبعد وحدة واحدة عن النقطة (٠، ١).

(٢) أوجد النقاط (١، ص) التي تبعد $\sqrt{١٧}$ وحدة عن النقطة (٠، ١).

(٣) إذا كان المستقيمان: ٤س − أ ص = ٦، حيث أ ثابت ، ٦س + ٣ص + ٢ = ٠ متعامدين. فما هي قيمة أ؟

(٤) يمر مستقيم بالنقطتين: (−٣، ٩)، (٤، ٤) ومستقيم آخر بالنقطتين: (٩، −١)، (٤، −٨). هل المستقيمان متوازيان أم متعامدان؟

(٥) إذا كان المستقيم ٢س − ٣ص = ١٠ مماس لدائرة مركزها (−٢، ٤). أوجد معادلة هذه الدائرة.

(٦) أ ب جـ مثلث فيه أ (٢، ٣)، ب(٧، ٨)، جـ(−٢، ٥). د يقسم $\overline{\text{ب جـ}}$ من الداخل من جهة ب بنسبة ١ : ٢.

(أ) أوجد إحداثيي د.

(ب) أوجد معادلة $\overleftrightarrow{\text{أد}}$.

(٧) لتكن معادلة $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ هي: ٥س − ص + ٢ = ٠، اختر نقطة تقع على $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ولتكن جـ (٠، ٢).

أوجد معادلة المستقيم العمودي على $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ويمر بالنقطة جـ.

(٨) أ ب جـ مثلث فيه أ (٤، ٣)، ب(٨، ٥)، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ يوازي محور السينات، $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ يوازي محور الصادات.

(أ) أوجد إحداثيي النقطة جـ.

(ب) في السؤال (أ)، أثبت أن Δأ ب جـ قائم الزاوية في جـ.

(٩) أ ب جـ مثلث، إحداثيات رؤوسه على الترتيب هي: (٨، ١١)، (١٢، ٥)، (٣، ٥)، ق منتصف $\overline{\text{أب}}$، ك منتصف $\overline{\text{أجـ}}$.

(أ) أوجد إحداثيات ق، ك.

(ب) أثبت أن $\overline{\text{ق ك}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$.

(جـ) أثبت أن ق ك = $\frac{١}{٢}$ ب جـ.

(د) أثبت أن $\overline{\text{أب}}$ ليس عموديًا على $\overline{\text{ب جـ}}$.

الانحراف المعياري
Standard Deviation

إذا كانت $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ... ، $س_ن$ مجموعة من القيم عددها ن حيث متوسطها الحسابي $\overline{س}$ فإن:

$$\text{التباين} = ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢}{ن}$$

ومنه الانحراف المعياري $= ع = \sqrt{ع^٢}$

مثال (١)

أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم البيانات:

٤، ٦، ٨، ٥، ٣، ٧، ٢

الحل:

نوجد أولًا المتوسط الحسابي:

$$\overline{س} = \frac{٤ + ٦ + ٨ + ٥ + ٣ + ٧ + ٢}{٧} = \frac{٣٥}{٧} = ٥$$

نكون الجدول التالي:

القيمة $س_ر$	الانحراف عن المتوسط الحسابي $س_ر - \overline{س}$	مربع الانحراف عن المتوسط الحسابي $(س_ر - \overline{س})^٢$
٤	١-	١
٦	١	١
٨	٣	٩
٥	٠	٠
٣	٢-	٤
٧	٢	٤
٢	٣-	٩
		المجموع = ٢٨

$$\text{التباين } ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢}{ن} = \frac{٢٨}{٧} = ٤$$

التباين $ع^٢ = ٤$

الانحراف المعياري $ع = \sqrt{٤} = ٢$.

مثال (٣)

يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات ٦٠ طالبًا في امتحان نهاية العام الدراسي حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة.

الفئة (درجات)	٠-	٢٠-	٤٠-	٦٠-	٨٠-
التكرار	٤	٦	١٦	٢٤	١٠

أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$ والتباين $ع^٢$ والانحراف المعياري ع لقيم هذه البيانات.

الحل:

المتوسط الحسابي: $\frac{\sum س_ر ت_ر}{\sum ت_ر} = \frac{٣٦٠٠}{٦٠} = ٦٠$

$\therefore \bar{س} = ٦٠$

الفئة	مركز الفئة $س_ر$	التكرار $ت_ر$	$س_ر ت_ر$	$(س_ر - \bar{س})$	$(س_ر - \bar{س})^٢$	$(س_ر - \bar{س})^٢ \times ت_ر$
٠-	١٠	٤	٤٠	٥٠-	٢٥٠٠	١٠٠٠٠
٢٠-	٣٠	٦	١٨٠	٣٠-	٩٠٠	٥٤٠٠
٤٠-	٥٠	١٦	٨٠٠	١٠-	١٠٠	١٦٠٠
٦٠-	٧٠	٢٤	١٦٨٠	١٠	١٠٠	٢٤٠٠
٨٠-	٩٠	١٠	٩٠٠	٣٠	٩٠٠	٩٠٠٠
		المجموع: ٦٠	المجموع: ٣٦٠٠			المجموع: ٢٨٤٠٠

التباين $= \frac{\sum (س_ر - \bar{س})^٢ ت_ر}{\sum ت_ر} = \frac{٢٨٤٠٠}{٦٠} = ٤٧٣\frac{١}{٣}$

التباين $= ع^٢ = ٤٧٣,\bar{٣}$

الانحراف المعياري: $ع = \sqrt{٤٧٣,\bar{٣}} \simeq ٢١,٧٥٦$

مثال (٤)

إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم من بيانات هو $ع = ٦$ وأن مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو ٥٤٠، فما عدد قيم هذه البيانات؟

الحل:

نأخذ القاعدة: $ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^٢}{ن}$

وبالتعويض: $(٦)^٢ = \frac{٥٤٠}{ن}$

$ن = \frac{٥٤٠}{٣٦} = ١٥$

عدد قيم هذه البيانات هو ١٥.

حاول أن تحل

٤ الانحراف المعياري لمجموعة قيم من بيانات هو $ع = ٤$، ومجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو ٤٨٠.

فما عدد قيم هذه البيانات؟

تمرَّنْ ١٠-٣

الانحراف المعياري

Standard Deviation

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أوجد الانحراف المعياري لقيم البيانات التالية (يمكن استخدام الآلة الحاسبة):

(أ) ٥٢، ٦٣، ٥٤، ٧٠، ٦٦.

(ب) ١، ٢، ١٧، ١٢، ١٥، ٨، ١٠، ١٥.

(٢) يبيّن الجدول التالي الطاقة الكهربائية المستهلكة بالميغاواط/ ساعة خلال خمسة أيام متتالية في إحدى المدن.

اليوم	١	٢	٣	٤	٥
الطاقة المستهلكة	٤٨,٠	٥٣,٢	٥٢,٣	٤٦,٦	٤٩,٩

أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم هذه البيانات.

(٣) يمثّل الجدول التالي الاستهلاك الأسبوعي من البنزين لعينة مكوّنة من ٥٠ سيارة لأقرب لتر.

الفئة	-٢٠	-٢٥	-٣٠	-٣٥	-٤٠	-٤٥
عدد السيارات	٦	٦	٨	١٠	١٤	٦

أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لاستهلاك السيارات من البنزين.

(٤) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات ٢٠ طالبًا في أحد الاختبارات حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة.

الفئة	-٤	-٨	-١٢	-١٦
التكرار	٥	٧	٦	٢
مركز الفئة	٦	١٠	١٤	١٨

أوجد الانحراف المعياري لدرجات الطلاب.

في التمرينين (٥-٦)، ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة وظلّل (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

(٥) مجموع انحرافات مجموعة من القيم عن متوسطها الحسابي يساوي صفرًا. (أ) (ب)

(٦) إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم يساوي ٣ وكان مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي يساوي ١٨٠ فإن عدد القيم هو ٦. (أ) (ب)

في التمرينين (٧-٨)، اختر الإجابة الصحيحة.

(٧) في البيانات: ١٠، ١٣، ٩، ٧، ١٢، ١٥ الانحراف المعياري هو:

(أ) ٧ (ب) ٦

(جـ) $\sqrt{7}$ (د) ليس أيّ مما سبق

(٨) إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم بيانات يساوي ٤ ومجموع مربعات انحرافات قيم البيانات عن متوسطها الحسابي يساوي ١٩٢ فإن عدد قيم هذه البيانات هو:

(أ) ١٦ (ب) ٤٨

(جـ) ١٢ (د) ليس أيّ مما سبق

المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

(١) أوجد الانحراف المعياري لقيم البيانات التالية، ماذا تستنتج؟

(أ) ٥، ٧، ٦، ٤، ٨، ٩، ٣.

(ب) ٣٤، ٤٥، ٣٧، ٤٢، ٣٦، ٤٣، ٤٤، ٣٩.

(٢) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لاستهلاك الطاقة الكهربائية بالميغاواط/ ساعة طيلة شهر أغسطس في إحدى المدن:

الكمية	٣٣	٣٦	٣٩	٤٠	٤١	٤٢
التكرار	٨	٢	٦	٦	٤	٥

(أ) أوجد المتوسط الحسابي.

(ب) أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم هذه البيانات باستخدام الآلة الحاسبة.

(٣) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لكمية المياه بالسنتيلتر الموجودة في ١٠٠ عبوة.

سعة العبوة الواحدة المفترضة ١٠٠ سنتيلتر.

الفترة	-٨٦	-٩٠	-٩٤	-٩٨	-١٠٢	-١٠٦
التكرار	٥	١٠	٣٩	٣٢	٩	٥

أوجد المتوسط الحسابي، التباين، الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات.

طرق العد
Methods of Counting

مثال (٢) الشجرة البيانية

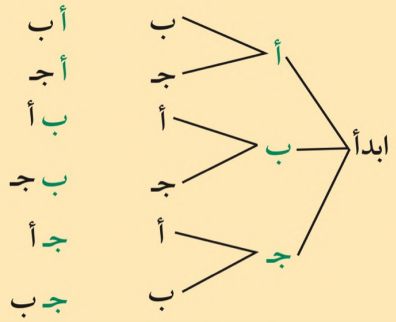
في تجربة على سلوك الحيوان، استخدم علماء النفس نوعين من الأطعمة على التوالي كمكافأة، كل مكافأة عبارة عن واحدة من ثلاثة أنواع ممكنة. كم عدد التشكيلات المختلفة الممكنة في حال كانت أنواع الجوائز غير مكررة؟

الحل:

ميّز بين الأنواع الثلاثة من الجوائز كالتالي: أ، ب، جـ.

الشجرة البيانية إلى اليسار توضّح كل الإمكانيات. كل طريق عبر الشجرة البيانية بالاتجاه من اليمين إلى اليسار تمثل تتابعًا ممكنًا لجائزة، ولأن هناك ست طرق لذلك سيكون لدينا ست تشكيلات ممكنة.

لاحظ أن: ٣ × ٢ = ٦.



حاول أن تحل

٢ يقدم أحد المطاعم وجبة غداء مؤلفة من: سلطة أو حساء، دجاج أو سمك أو لحمة، حلويات أو فاكهة. استخدم الشجرة البيانية لإعطاء عدد الوجبات الممكنة.

مثال (٤) استخدام مبدأ العد

يوجد ثمانية متسابقين في سباق ١٠٠ م جري. ما هو عدد النتائج الممكنة لهذا السباق؟ افترض عدم وجود تعادل بين أي متسابقين. علمًا بأن المتسابقين وصل كلًّا منهم إلى خط النهاية.

الحل:

$ع_{ن}$: قائمة العدائين بترتيب إنهاء السباق.

$ع_{١}$: المتسابق الذي ينهي السباق أولًا.

$ع_{٢}$: المتسابق الذي ترتيبه الثاني في إنهاء السباق.

وهكذا لدينا:

العمليات :	$ع_{١}$	$ع_{٢}$	$ع_{٣}$	$ع_{٤}$	$ع_{٥}$	$ع_{٦}$	$ع_{٧}$	$ع_{٨}$
عدد الطرق لاستكمال كل عملية :	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١

عدد الطرق لإجراء $ع_{ن}$ = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

= ٨! = ٤٠٣٢٠

يوجد ٤٠٣٢٠ ناتجًا ممكنًا لهذا السباق.

تذكر:

مضروب ن أو

ن! هو: ن × (ن − ١) × ... × ٣ × ٢ × ١

فمثلًا: ٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

٠! = ١ تُقرأ مضروب صفر = ١

حاول أن تحل

٠! = ١ تُقرأ مضروب صفر = ١

٤ اشترك ٢٠ جملًا في سباق للهجن ووصلت جميعها إلى خط النهاية في أوقات مختلفة (أي أنه لا يوجد أي تعادل).
ما هو عدد النتائج الممكنة لهذا السباق؟

مثال (٥) إيجاد عدد التباديل

افترض أن ٣١ عضوًا من جمعية الرياضيات في مدرستك يريدون اختيار أربعة أشخاص لأربعة مناصب: رئيس، نائب رئيس، أمين السر، أمين الصندوق. حدّد كم طريقة يمكن بها الاختيار لهذه المناصب.

الحل:

اختيار الرئيس: ٣١ طريقة

اختيار نائب الرئيس: ٣٠ طريقة

اختيار أمين السر: ٢٩ طريقة

اختيار أمين الصندوق: ٢٨ طريقة

عدد الطرق التي يمكن بها اختيار الأشخاص للمناصب الأربعة هو: ٣١ × ٣٠ × ٢٩ × ٢٨ = ٧٥٥ ١٦٠

حاول أن تحل

٥ في إحدى الجمعيات الخيرية يوجد ٢٠ عضوًا يشكلون مجلس الأمناء. يريدون اختيار رئيسًا، أمينًا للسر، أمينًا للصندوق.
حدّد كم طريقة يمكن بها الاختيار لهذه المناصب.

قانون التباديل Law of Permutations

عدد تباديل ن من العناصر المختلفة مأخوذة منها ر في كل مرة هو:

$^{ن}ل_{ر} = ن(ن - ١)(ن - ٢) \dots (ن - ر + ١)$، ر ، ن ∈ صـ$_{+}$ ، ر ≤ ن

عندما ر = ٠ يعرّف $^{ن}ل_{٠} = ١$

لاحظ: $^{ن}ل_{ر} = ن \times (ن - ١) \times (ن - ٢) \times \dots \times (ن - ر + ١)$

$$= \overbrace{ن(ن - ١) \times (ن - ٢) \times \dots \times (ن - ر + ١)}^{ر \text{ عامل}} \times \frac{(ن - ر) \times \dots \times ٣ \times ٢ \times ١}{(ن - ر) \times \dots \times ٣ \times ٢ \times ١}$$

$$= \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$

قانون

$^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$ حيث ر، ن ∈ صـ$_{+}$ ، ر ≤ ن، $^{ن}ل_{٠} = ١$

مساعدة:

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد عدد التباديل، اضغط على nPr.

مثال (٦)

أوجد قيمة كل تبديل بدون استخدام الآلة الحاسبة بصورة مباشرة.

أ $^{٦}ل_{٤}$ ب $^{١١}ل_{٣}$ جـ $^{ن}ل_{٣}$

الحل:

أ الطريقة الأولى:

$$^{٦}ل_{٤} = \frac{٦!}{(٦ - ٤)!} = \frac{٦!}{٢!}$$

$$= \frac{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٢ \times ١} = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = ٣٦٠$$

الطريقة الثانية:

نبدأ بـ ٦

$$^{٦}ل_{٤} = \underbrace{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣}_{\text{٤ أعداد}} = ٣٦٠$$

ب $$^{١١}ل_{٣} = \frac{١١!}{(١١ - ٣)!} = \frac{١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨!}{٨!} = ١١ \times ١٠ \times ٩ = ٩٩٠$$

جـ $$^{ن}ل_{٣} = \frac{ن!}{(ن - ٣)!} = \frac{ن \times (ن - ١) \times (ن - ٢) \times (ن - ٣)!}{(ن - ٣)!} = ن(ن - ١)(ن - ٢)$$

حاول أن تحل

٦ أوجد قيمة كل تبديل بدون استخدام الآلة الحاسبة بصورة مباشرة.

أ $^{٥}ل_{٣}$ ب $^{١٠}ل_{٤}$ جـ $^{ن}ل_{٤}$

مثال (٧)

ما عدد الكلمات التي يمكن أن تتشكل من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية العربية وذلك في حال عدم تكرار أي منها؟

الحل:

المطلوب في المسألة إيجاد عدد التباديل لـ ٥ حروف من ٢٨ حرفًا في الوقت نفسه.

$$^{٢٨}ل_{٥} = \frac{٢٨!}{(٢٨ - ٥)!} = \frac{٢٨!}{٢٣!} = ٢٨ \times ٢٧ \times ٢٦ \times ٢٥ \times ٢٤$$

$$= ١١٧٩٣٦٠٠$$

يوجد ١١٧٩٣٦٠٠ كلمة مكونة من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية العربية.

مساعدة:

ترتيب الحروف مهم في كتابة الكلمات. فكلمة كتاب تختلف عن كلمة كاتب.

حاول أن تحل

٧ ما عدد الأعداد التي يمكن أن تتشكل من ٤ أرقام من أرقام النظام العشري بدون الصفر وذلك في حال عدم تكرار أي رقم؟

وبصفة عامة، عدد التوافيق المكوّن كل منها من ر عنصر والمختارة من بين مجموعة مكونة من ن عنصر يمكن إيجادها كالآتي:

$$\text{عدد التوافيق} = \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{ر!} = \frac{ن!}{(ن - ر)!\ ر!}$$

تعريف: قانون التوافيق

إذا كان ن، ر عددان صحيحان موجبان حيث ن ≥ ر، فإن:

عدد التوافيق المكونة كل منها من ر من الأشياء والمختارة من بين ن من الأشياء هو:

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!\ ر!}$$

ملاحظة:

يستخدم الرمز ${}^{ن}ق_{ر}$ للتعبير عن عدد التوافيق.

ملاحظات:

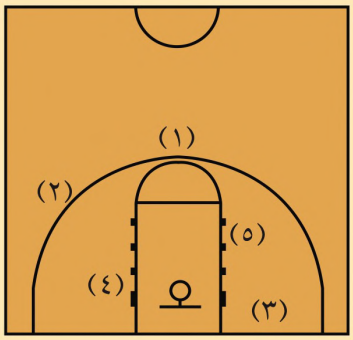
(١) عندما ر = ٠ يُعرَّف $\binom{ن}{٠} = ١$

(٢) $\binom{ن}{ن} = ١$

مثال (٩)

إذا كان فريق كرة سلة يتكوّن من ١٢ لاعبًا.

فما عدد الفرق المختلفة التي يمكن تكوينها من خمسة لاعبين من بين لاعبي هذا الفريق (يمكن لأي لاعب اللعب في كل المراكز) ؟



(١) لاعب الهجوم الخلفي
(٢) المدافع مسدد الهدف
(٣) لاعب الهجوم صغير الجسم
(٤) لاعب الهجوم قوي الجسم
(٥) لاعب الوسط

الحل:

يجب أن نوجد $\binom{١٢}{٥}$ وهي عدد الفرق المختلفة المكونة من ٥ لاعبين والذين يمكن اختيارهم من ١٢ لاعبًا.

$\binom{١٢}{٥} = \frac{١٢!}{٥!(١٢-٥)!} = \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٧٩٢$ عند استخدام الآلة الحاسبة 12 shift nCr 5 = 792

يوجد ٧٩٢ فريقًا مختلفًا، كل فريق مكون من ٥ لاعبين وتم اختيارهم من بين ١٢ لاعبًا.

حاول أن تحل

٩ إذا كان فريق كرة قدم يتكوّن من ٢٠ لاعبًا. فما عدد الفرق المختلفة التي يمكن تكوينها من ١١ لاعبًا من بين لاعبي هذا الفريق؟ (يمكن لأي لاعب اللعب في أي مركز)

مثال (١٠)

من أجل اختيار لوائح المرشحين للانتخابات النيابية، يجب اختيار ١٠ مرشحين من بين ٥١ مرشحًا.

ما عدد اللوائح المختلفة التي يمكن تكوينها؟

الحل:

إن الترتيب أثناء اختيار اللائحة غير مطلوب، إذًا هذه مسألة تتعلق بالتوافيق لإيجاد $^{٥١}ق_{١٠}$.

$^{٥١}ق_{١٠} = \frac{٥١!}{١٠! \times ٤١!} = ١٢\,٧٧٧\,٧١١\,٨٧٠$ عند استخدام الآلة الحاسبة 51 nCr 10 = $1,2777711870.10^{10}$

عدد اللوائح المختلفة الممكنة هو ١٢ ٧٧٧ ٧١١ ٨٧٠

حاول أن تحل

١٠ أثناء الإعداد لزيارة المتحف الوطني، أراد منظمو الزيارة إعداد لوائح للطلاب لاستخدام حافلات تتسع كل منها ١٥ طالبًا. علمًا بأن عدد الطلاب هو ٦٠ طالبًا، فما عدد اللوائح المختلفة التي يمكن إعدادها لهذه الزيارة؟

مثال (١١)

في كل مما يلي حدّد ما إذا كان المثال يبيّن تبديلًا أو توفيقًا واحسب عدد الطرق في كل حالة.

أ اختيار رئيس، نائب رئيس، أمين سر من بين ٢٥ عضوًا في نادي القراءة.

ب اختيار ٥ حبات بطاطا من كيس يحتوي على ١٢ حبة لإعداد وجبة غذائية.

ج وضع معلم مخططًا يبيّن مقاعد ٢٢ طالبًا في غرفة بها ٢٥ مقعدًا.

د اختيار ٤ أبيات من قصيدة شعرية مكونة من ١١ بيتًا لكتابتها وتعليقها في غرفة الفصل.

الحل:

أ الترتيب مهم في الاختيار ∴ تباديل. $ل^{٢٥}_{٣} = ١٣٨٠٠$

ب الترتيب غير مهم في الاختيار ∴ توافيق. $ق^{١٢}_{٥} = ٧٩٢$

ج الترتيب مهم ∴ تباديل. $ل^{٢٥}_{٢٢} \simeq ٢,٥٨٥٢ \times ١٠^{٢٤}$

د الترتيب غير مهم ∴ توافيق. $ق^{١١}_{٤} = ٣٣٠$

حاول أن تحل

١١ في ما يلي، حدّد ما إذا كان المثال يبيّن تبديلًا أو توفيقًا.

أ اختيار ٣ طلاب من الصف العاشر للمشاركة في مسابقة تلاوة القرآن.

ب مراكز المشاركين الثلاثة في مسابقة تلاوة القرآن.

تمرَّنْ ١٠-٤

طرق العد

Methods of Counting

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمارين (١-٣)، اكتب قائمة بكل الإمكانيات أو ارسم شجرة بيانية للإجابة عن الأسئلة التالية:

(١) **كلمات مكونة من ثلاثة حروف:** ما عدد الكلمات المختلفة التي تستطيع تكوينها من بين ثلاثة حروف: ع، ل، م دون تكرارها (دون الاهتمام بالمعنى)؟

(٢) **الطرق الممكنة:** توجد ثلاثة طرق ممكنة تصل بين القرية أ والقرية ب، وتوجد أربعة طرق ممكنة تصل بين القرية ب والقرية جـ. كم عدد الطرق المختلفة من القرية أ إلى القرية جـ مرورًا بالقرية ب؟

(٣) **الرئيس ونائب الرئيس:** يوجد ثلاثة مرشحين لمنصب الرئيس وأربعة مرشحين لمنصب نائب الرئيس. كم عدد الأزواج التي يمكن أن تكوّن من رئيس ونائب رئيس؟

في التمارين (٤-٦)، استخدم مبدأ العد الأساسي.

(٤) **أرقام الهاتف:** كم عدد أرقام الهاتف التي يمكن أن تكونها من سبعة أرقام علمًا بأنه لا يمكن أن يبدأ الرقم من اليسار بـ ٠ أو ١، لماذا؟

(٦) **رمي حجر نرد:** عند رمي حجري نرد أحدهما أحمر والثاني أخضر معًا وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما. كم عدد النواتج الممكنة؟

في التمارين (٧-١٠)، أوجد قيمة كلّ مما يلي:

(٧) ${}^{٨}ل_{٥}$

(٨) ${}^{١٢}ل_{٧}$

(٩) ${}^{١٤}ق_{٥}$

(١٠) ${}^{٤٨}ق_{٤٦}$

في التمارين (١١-١٣)، حل المسائل التالية:

(١١) **تكوين اللجان**: سوف يتم انتخاب لجنة مكونة من ٣ سيدات من بين ٢٥ سيدة. كم عدد اللجان المختلفة التي يمكن انتخابها؟

---

(١٢) **شراء أقراص حاسوب مدمجة**: لدى جيهان نقود تكفي لشراء ثلاثة أقراص حاسوب مدمجة فقط من بين ٤٨ قرصًا. كم عدد مجموعة أقراص الحاسوب التي يمكن شراؤها؟

---

(١٣) يجري مدير شؤون الموظفين مقابلات شخصية مع ثمانية أشخاص مرشحين لثلاث وظائف شاغرة. كم عدد المجموعات المكونة من ثلاثة أشخاص التي يمكن توظيفها؟

الاحتمال المشروط
Conditional Probability

إذا كانت جميع نواتج التجربة لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث أ هو:

$$\text{ل(الحدث أ)} = \frac{\text{عدد نواتج الحدث أ}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

أي أن: $\text{ل(أ)} = \frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}}$

مثال (١)

في لعبة «رمي حجري نرد منتظمين ومتمايزين» والتجربة هي ملاحظة الوجه العلوي لكل من الحجرين

أ ممّ يتألف كل ناتج؟ اكتب فضاء العينة. وما عدد النواتج الممكنة؟

ب مثل فضاء العينة بيانيًّا.

جـ ما احتمال الحدث أ: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ٤»؟

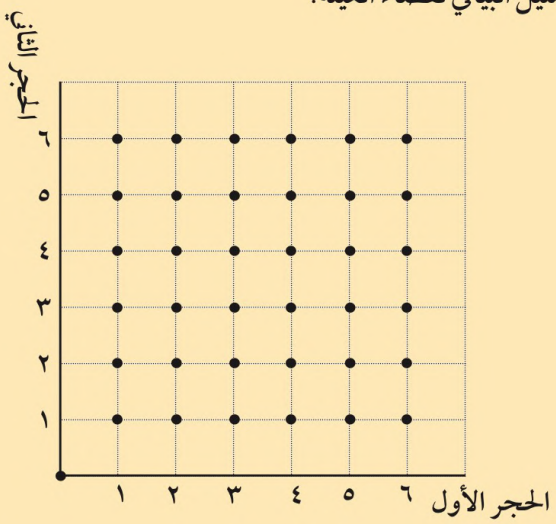
الحل:

أ يتألف كل ناتج من زوج مرتب (م، ن) حيث ١ ≤ م ≤ ٦، ١ ≤ ن ≤ ٦. م، ن ∈ ص+.

ف = {(١، ١)، (١، ٢)، ... ، (١، ٦)،
(٢، ١)، (٢، ٢)، ... ، (٢، ٦)،
⋮
(٦، ١)، (٦، ٢)، ... ، (٦، ٦)}

وبتطبيق مبدأ العد، عدد النواتج هو ٦ × ٦ = ٣٦ ناتجًا. وكل هذه النواتج لها فرصة الظهور نفسها.

ب التمثيل البياني لفضاء العينة.



جـ يتألف الحدث أ من ثلاثة نواتج: {(١، ٣)، (٣، ١)، (٢، ٢)}.

$$\text{ل (أ)} = \frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{٣}{٣٦} = \frac{١}{١٢}$$

حاول أن تحل

١ في المثال (١): أ ما احتمال الحدث «ب»: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ٧»؟

ب ما احتمال الحدث «جـ»: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ١٣»؟

جـ ما احتمال الحدث «د»: «ظهور عددين أحدهما مربعًا للآخر»؟

ولأن أي حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة، فإن عدد النواتج في حدث ما يكون دائمًا أصغر من أو يساوي عدد نواتج فضاء العينة. لذلك فإن احتمال وقوع حدث ما ، هو عدد ينتمي إلى الفترة [٠ ، ١].

خواص الاحتمال لحدث ما

ليكن أ حدث في فضاء عينة ف منته وغير خالٍ فإن:

١ ٠ ≤ ل(أ) ≤ ١

٢ إذا كان أ = { } إذًا ل(أ) = ٠ ويسمى أ حدثًا مستحيلًا.

٣ إذا كان أ = ف إذًا ل(أ) = ١ ويسمى أ حدثًا مؤكدًا.

٤ مجموع احتمالات جميع النواتج في فضاء العينة يساوي ١ .

معلومة مفيدة:

فضاء العينة، في تجربة رمي حجري نرد منتظمين ومتمايزين هو نفسه فضاء العينة في تجربة رمي حجر نرد مرتين متتاليتين.

مثال (٢)

في تجربة رمي حجري نرد متمايزين معًا وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما، الحدث أ هو «مجموع العددين الظاهرين هو ١٣» . فما احتمال وقوع الحدث أ؟

الحل:

نعلم أن عدد النواتج الممكنة هو ٣٦

وبما أن أكبر عدد هو ٦ في كل حجر فإن المجموع ١٣ لا يمكن أن يحصل

بالتالي فإن عدد النواتج في الحدث أ هو صفر إذًا ل(أ) = $\frac{٠}{٣٦}$ = ٠

وهذا الحدث هو حدث مستحيل.

ملاحظة:

إذا لم يذكر نوع حجر النرد فهذا يعني أنه منتظم.

حاول أن تحل

٢ في تجربة رمي حجري نرد متمايزين معًا وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما، كان الحدث ب «الحصول على مجموع أصغر من ١٣»، فما احتمال وقوع الحدث ب؟

العمليات على الأحداث واحتمالاتها:

تقاطع حدثين أ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ ، ب في آن معًا ويرمز إليه بـ أ ∩ ب.

اتحاد حدثين أ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ أو ب ويرمز إليه بـ أ ∪ ب.

الحدثان أ، ب هما متنافيان (Incompatible) إذا لم يشتركا في أي عنصر أي أ ∩ ب = ∅.

متمم الحدث أ هو $\overline{أ}$ (complement) الذي يتألف من كل النواتج الموجودة في فضاء العينة وغير الموجودة في أ.

قاعدة الاحتمال لاتحاد حدثين:

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

ومنها ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

قاعدة الاحتمال لمتمم الحدث أ:

ل($\overline{أ}$) = ١ − ل(أ)

قاعدة الاحتمال لحدثين متنافيين:

إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف فإن ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب).

مثال (٥)

إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان:

ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٤ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٤ ، أوجد كلًّا من:

١ ل(أ ∪ ب) ٢ ل($\overline{أ}$)

الحل:

١ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٠,٧ + ٠,٤ − ٠,٤ = ٠,٧ .

٢ ل($\overline{أ}$) = ١ − ل(أ)

= ١ − ٠,٧ = ٠,٣

حاول أن تحل

٥ إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة، وكان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٦ أوجد كلًّا من:

أ ل(أ ∩ ب)

ب ل($\overline{ب}$)

مثال (٦)

إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان:

ل($\bar{أ}$) = ٠,٢ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٩ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٤ ، أوجد ل($\overline{ب}$)، ل($\overline{أ ∩ ب}$).

الحل:

∵ ل($\bar{أ}$) = ١ − ل(أ)

∴ ل(أ) = ١ − ل($\bar{أ}$) = ١ − ٠,٢ = ٠,٨

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

٠,٩ = ٠,٨ + ل(ب) − ٠,٤

ل(ب) = ٠,٩ − ٠,٨ + ٠,٤

= ٠,٥

ل($\overline{ب}$) = ١ − ل(ب)

= ١ − ٠,٥ = ٠,٥

ل($\overline{أ ∩ ب}$) = ١ − ل(أ ∩ ب) = ١ − ٠,٤ = ٠,٦

حاول أن تحل

٦ إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة، وكان ل(أ) = ٠,٥ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢

أوجد ل($\overline{أ ∪ ب}$).

حاول أن تحل

٧ في فضاء عينة ف لدينا حدثان أ ، ب متنافيان حيث ل(أ) = ٠,٤ ، ل(ب) = ٠,٥ .

أ احسب ل(أ ∪ ب).

ب احسب ل($\overline{\text{أ ∪ ب}}$).

الأحداث المستقلة Independent Events

يكون الحدثان مستقلين إذا كان وقوع (أو عدم وقوع) أحدهما لا يؤثر على وقوع (أو عدم وقوع) الآخر. فمثلًا، في تجربة عشوائية عند رمي عملة معدنية مرتين وملاحظة الوجه العلوي فإن الحدث «ظهور صورة في الرمية الأولى» لا يؤثر على وقوع الحدث «ظهور صورة في الرمية الثانية»، لأن أي من الرميتين لا تؤثر على الأخرى بأي طريقة، ولذلك **فالحدثان مستقلان**.

إذا كنا نعلم الاحتمالات الفردية لحدثين مستقلين فإنه يمكننا إيجاد احتمال وقوع الحدثين معًا باستخدام القاعدة التالية:

قاعدة الضرب للأحداث المستقلة Multiplication principle of Independent Events

إذا كان أ، ب حدثان مستقلان فإن احتمال وقوع الحدثين معًا هو:

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)

حاول أن تحل

٨ في تجربة عشوائية عند رمي قطعة نقود ثلاث مرات وملاحظة الوجه العلوي.

ما احتمال أن يكون الناتج (ص، ك، ص)؟

الاحتمال المشروط Conditional Probability

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الوجه العلوي له فإن فضاء العينة ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}.

ليكن الحدث أ (ظهور عدد أكبر من ٣) فإن أ = {٤، ٥، ٦} ويكون ل(أ) = $\frac{ن(أ)}{ن(ف)} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

وليكن الحدث ب (ظهور عدد زوجي) فيكون ب = {٢، ٤، ٦}

ل(ب) = $\frac{ن(ب)}{ن(ف)} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

لنسأل الآن: إذا علمنا أن الحدث أ قد وقع، فما هو احتمال وقوع الحدث ب بشرط وقوع الحدث أ. بمعنى آخر ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي بشرط أن يكون أكبر من ٣؟

نلاحظ أن الشرط المعطى يجعل فضاء العينة الجديد هو أ = {٤، ٥، ٦} وللحصول على عدد زوجي أكبر من ٣ نوجد:

ب ∩ أ = {٤، ٦}

وبالتالي احتمال الحصول على عدد زوجي بشرط أن يكون أكبر من ٣ هو $\frac{٢}{٣}$

احتمال وقوع الحدث ب بشرط وقوع الحدث أ يسمى بالاحتمال المشروط (الشرطي) ويُكتب ل(ب|أ) ويُقرأ احتمال الحدث ب بشرط أ. ويمكن إيجاد ل(ب|أ) باستخدام القاعدة التالية:

قاعدة الاحتمال المشروط

إذا كان وقوع الحدث ب مشروطًا بوقوع الحدث أ فإن:

ل(ب|أ) = $\frac{ل(أ ∩ ب)}{ل(أ)}$ حيث ل (أ) ≠ ٠

وكذلك ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب|أ)

مثال (١٠)

في تجربة عشوائية أ، ب حدثان حيث ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٢ .

أوجد احتمال كل من الأحداث التالية: أ ل (ب| أ) ب ل (أ|ب)

الحل:

أ ل(ب| أ) = $\frac{ل(أ ∩ ب)}{ل(أ)} = \frac{٠,٢}{٠,٣} = \frac{٢}{٣}$.

ب ل(أ|ب) = $\frac{ل(أ ∩ ب)}{ل(ب)} = \frac{٠,٢}{٠,٦} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

مثال (١١)

رمى جاسم حجر نرد منتظم ولاحظ الوجه العلوي له.

نسمي الحدث ب: «الحصول على عدد أكبر من أو يساوي ٥»، الحدث أ: «الحصول على عدد فردي».

احسب ل(ب|أ) (احتمال ظهور عدد أكبر من أو يساوي ٥ بشرط أن يكون عددًا فرديًّا)

الحل:

ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} ن (ف) = ٦

أ = {١، ٣، ٥} ن (أ) = ٣

ب = {٥، ٦} ن (ب) = ٢

أ ∩ ب = {٥} ن (ب ∩ أ) = ١

$$ل(أ) = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$$

$$ل(أ \cap ب) = \frac{١}{٦}$$

$$ل(ب|أ) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)} = \frac{\frac{١}{٦}}{\frac{١}{٢}} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}.$$

حاول أن تحل

١١ في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم، إذا كان الحدث ب «الحصول على عدد زوجي»، والحدث أ «الحصول على عدد أولي». فاحسب ل(ب|أ).

- **الشجرة البيانية**: إذا كان عدد الإمكانيات صغيرًا بما يكفي، فإن الشجرة البيانية يمكن أن تساعد في تنظيم مهمة العد.
- **التباديل**: عندما يكون الترتيب مهمًّا ومعتمداً يسمى بالتباديل، عامة عدد تباديل من الأشياء هو ن! (مضروب ن).
- **قانون التباديل**: إذا كان ن، ر عددان صحيحان غير سالبين بحيث ر ≤ ن، فإن عدد التباديل المكوّن من أشياء عددها ر والمأخوذة من بين ن من الأشياء هو: $^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$
- **التوافيق**: عندما تريد إيجاد عدد المجموعات الجزئية والمكوّن كل منها من ر عنصر، والتي يمكن اختيارها من مجموعة مكوّنة من ن عنصر دون اعتماد النظر عن الترتيب فنحن نحسب التوافيق.
- **قانون التوافيق**: إذا كان ن، ر عددان صحيحان غير سالبين، حيث ر ≤ ن فإن عدد التوافيق المكوّنة كل منها من ر من الأشياء والمختارة من بين ن من العناصر في الوقت نفسه هو: $^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{ر!(ن - ر)!}$.

- احتمال الحدث أ هو: $ل(أ) = \frac{\text{عدد النواتج في الحدث أ}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$

- خواص الاحتمال لحدث ما:

ليكن أ حدث في فضاء عينة منته وغير خالٍ ف فإن:

- ٠ ≤ ل(أ) ≤ ١
- إذا كان أ = { } فإن ل(أ) = ٠، أ يسمى الحدث المستحيل.
- إذا كان أ = ف فإن ل(أ) = ١، أ يسمى الحدث المؤكد.
- مجموع احتمالات النواتج في فضاء العينة يساوي ١ .
- تقاطع حدثين أ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ وفي ب في آن معًا ويرمز إليه بـ أ ∩ ب.
- اتحاد حدثين أ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ أو في ب ويرمز إليه بـ أ ∪ ب.
- الحدثان أ، ب هما متنافيان إذا لم يكن لديهما ناتج مشترك أي أ ∩ ب = ∅.
- متمم حدث أ يرمز إليه بـ $\bar{أ}$ وهو الحدث الذي يتألف من كل النواتج الموجودة في فضاء العينة وغير موجودة في أ.
- الأحداث المستقلة: يكون حدثان مستقلان إذا كان حدوث أحدهما ليس له تأثير على احتمال حدوث الآخر.
- قاعدة الضرب للأحداث المستقلة:

إذا كان أ، ب حدثان مستقلان فإن احتمال وقوع الحدثين معًا هو: ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)

- **الحدث التابع**: يكون الحدث تابعًا عندما يتأثر ظهور هذا الحدث بحدث سابق.
- الاحتمال المشروط:

ليكن لدينا حدثين أ، ب ونفترض أن ل(أ) ≠ ٠ .

احتمال وقوع الحدث ب بشرط وقوع الحدث أ يسمى الاحتمال المشروط ويكتب ل(ب|أ) ويقرأ «احتمال الحدث ب بشرط أ».

- قاعدة الاحتمال المشروط:

إذا كان وقوع الحدث ب مشروطًا بوقوع الحدث أ (ل(أ) ≠ ٠)

$ل(ب|أ) = \frac{ل(أ ∩ ب)}{ل(أ)}$ ، ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب | أ) .

تمرَّنْ ١٠-٥

الاحتمال المشروط

Conditional Pobability

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمارين (١-٣)، عند رمي حجر نرد أحمر اللون وحجر نرد أخضر اللون معًا وملاحظة الوجه العلوي. فما النواتج الممكنة لهذا الحدث؟ وما احتمال وقوع كل حدث مما يلي؟

(١) مجموع العددين الظاهرين ٩.

_____

(٢) مجموع العددين الظاهرين هو عدد زوجي.

_____

_____

(٣) العدد الظاهر على الحجر الأحمر أكبر من العدد الظاهر على الحجر الأخضر.

_____

_____

في التمارين (١٠-١٣)، ما احتمال أن يحقق رمز عدد عشوائي مكوّن من رقمين من ١ إلى ٩ الشروط التالية؟

(١٠) رقمان عشوائيان. الأول فردي والثاني من مضاعفات العدد ٤.

_____

(١١) رقمان عشوائيان. الأول زوجي والثاني فردي.

_____

(١٢) رقمان عشوائيان. كلا الرقمين أصغر من ٧.

_____

(١٣) رقمان عشوائيان. الرقم الثاني هو الرقم الأول نفسه.

_____

(١٤) **تأجير السيارات**: لدى شركة لتأجير السيارات ٢٥ سيارة للإيجار، ٢٠ منها من الحجم الكبير و٥ سيارات من الحجم المتوسط. إذا تم اختيار سيارتين بشكل عشوائي للإيجار لمدة يوم واحد، فما احتمال أن تكون السيارتان من الحجم الكبير؟

(١٦) إذا كان أ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٤ . أوجد كلًّا من:

(أ) ل(أ ∪ ب) =

(ب) ل($\bar{أ}$) =

(جـ) ل(أ ∩ ب) =

(١٧) ليكن: ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٧ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٨ . احسب:

(أ) ل(أ ∩ ب). =

(ب) ل(أ|ب).=

(جـ) ل(ب|أ).=

(١٨) ليكن أ، ب حدثان مستقلان في فضاء عينة ف حيث ل(أ) = ٠,٥ ، ل(ب) = ٠,٥ .

احسب: ل(ب|أ).

في التمارين (١٩-٢١)، اختر الإجابة الصحيحة.

(١٩) إذا كان أ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٥

فإن ل(أ ∪ ب) =

(أ) ٠,٥ (ب) ٠,٧ (جـ) ٠,٨ (د) ٠,٦

(٢٠) إذا كان أ، ب حدثين في فضاء العينة وكان ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٥ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٨

فإن ل(أ ∩ ب) =

(أ) ٠,٢ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٦ (د) ١,٢

(٢١) إذا كان أ، ب حدثين مستقلين في فضاء العينة وكان ل(أ) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٤

فإن ل(أ|ب) =

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٢ (د) ١

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١-٣)، عند رمي حجر نرد أحمر اللون وحجر نرد أخضر اللون معًا وملاحظة الوجه العلوي لهما.
فما النواتج الممكنة لهذا الحدث؟ وما احتمال ونوع كل حدث في ما يلي؟

(١) مجموع العددين الظاهرين أصغر من ١٠.

(٢) العددان الظاهران عددان فرديان.

(٣) العددان الظاهران عددان زوجيان.

(٥) ما احتمال اختيار رقمًا عشوائيًا واحدًا من ١ إلى ٩ يحقق الشرطين التاليين:

رقم أولي أو من مضاعفات الرقم ٦.

(١١) ليكن أ، ب حدثان مستقلان في فضاء عينة ف حيث ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٧ .

احسب:

(أ) ل(أ ∩ ب)

(ب) ل(ب|أ)

(جـ) ل(أ ∪ ب)

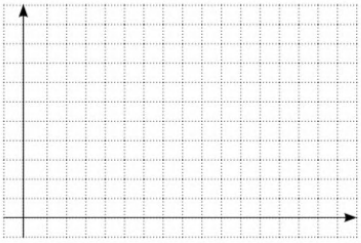
(د) ل(أ|ب)

(أ) أكمل الجدول بإضافة مراكز الفئات والتكرار المتجمع الصاعد.

الفئة (العمر)	الرجال	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	مركز الفئة
٢٠-	٤٥٠٠			
٣٠-	٤٨٠			
٤٠-	٣٧٠			
٥٠-	٢٩٠			
٦٠-	١٨٠			
٧٠-	١١٠			
٨٠-	٣٠			

(ب) أوجد المتوسط الحسابي لأعمار الرجال.

(جـ) أوجد الوسيط لأعمار الرجال مستخدمًا منحنى التكرار المتجمع الصاعد.



(د) أوجد المنوال لأعمار الرجال باستخدام المدرج التكراري.

(٢) جاءت درجات أحمد السنة الماضية في اختبار مادة العلوم حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة كما يلي:

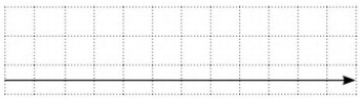
١٧، ١٠، ١٥، ١٢، ١٣، ٩، ١٦، ٨، ١٤، ١٦.

(أ) أوجد المتوسط الحسابي لهذه الدرجات $\bar{س}$.

(ب) أوجد مجمل الأعداد الخمسة لهذه الدرجات.

(جـ) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين.

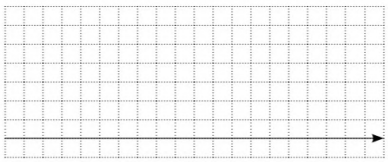
ماذا تلاحظ؟



(د) أوجد الانحراف المعياري لهذه الدرجات ع.

(٣) إذا كانت درجات أحد الطلاب في اختبارات مادة الرياضيات على مدار السنة حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة كما يلي: ٧، ١٠، ١٢، ٩، ١٤، ١٦، ١٥، ٨، ١٧.

(أ) أوجد مجمل الأعداد الخمسة لقيم هذه الدرجات.

(ب) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين لتمثيل قيم هذه الدرجات.

ماذا تلاحظ؟