

الحماسات وطول المقنن 2-1

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

نموذج: (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) على الخط العام بالنقطتين

ميد المقامع للدالة $M_{sec} \leftarrow$  $\rightarrow$ عدد من النقاط

خطوات الحل

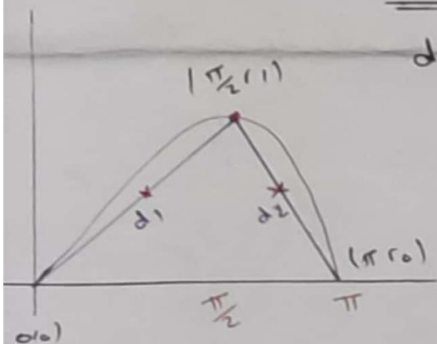
- ① إيراد y بالقيوف
- ② الجدول
- ③ التقويم

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \square$$

مثال 1: أوجد ميد المقامع للدالة $f(x) = x^2 + 1$ عند $x=1$ النقطة $(1, 2)$

x_1, y_1 -0.01 $(1, 2)$ $+0.01$							
x	0	0.9	0.99	1	1.01	1.01	2
$f(x) \rightarrow y$	1	1.81	1.980	2	2.021	2.21	5
(x, y)							
m_{sec}	$\frac{-2}{-1}$	1.9	1.99		2.01	"	"

مثال 2: أوجد ميد المقامع للدالة $f(x) = \sin x$ at $x=0$



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

المسافة بينه نقطتين

أوجد القيمة التقريبية لطول القوس

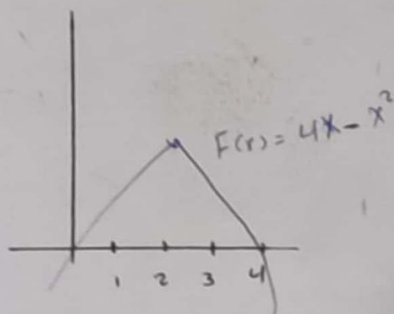
$$y = \sin x \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$L = d_1 + d_2 + \dots$$

ملحظة: كلما زادت عدد النقاط أصبحت القيمة التقريبية دقيقة
 $\leftarrow$ عدد النقاط $= 1 + \text{عدد القطع } (n)$

Ex 1: أوجد القيمة التقريبية لطول القوس باستخدام ثلاث نقاط
 ملحظة: $n=3 \leftarrow$ ثلاث قطع مستقيمة $\leftarrow$ يوجد 4 نقاط

$$f(x) = 4x - x^2 \quad (4, 0) \quad [0, 3]$$



② قدر طول القوس في المعنى $y = \sqrt{x+1}$ من الفترة

$[0, 3]$ متقسما 3 قطع مستقيمة $n=3$ والقوس $\rightarrow$

$$n=3 \quad [-1, 2] \quad y = x^2 + 2 \quad (4)$$

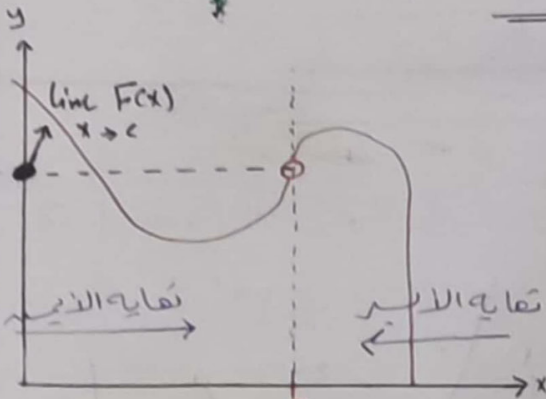
$$n=2 \quad [-1, 1] \quad f(x) = x^3 + 2 \quad (5)$$

Exame

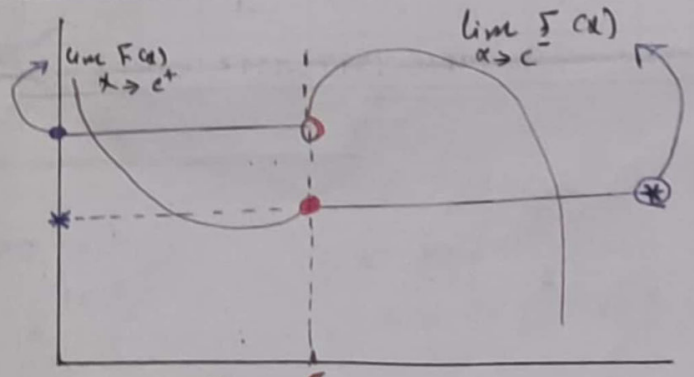
مفهوم النهايات 2-2

مفهوم النهايات : تكون النهايات موجودة إذا كانه و إذا كانه فقط

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad \longrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$



النهايات موجودة {نقطة واحدة}



النهايات غير موجودة {النقطة نقطة}

أدوية

① $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
f(x)	3.9	3.99	3.999		4.001	4.01	4.1

4

تقريب من 4

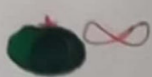
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 \quad \longrightarrow \quad \text{موجوده}$$

② $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5}{x - 2}$

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
f(x)	13.9	103.99	1003.99		-995.99	-95.99	-5.9

$+\infty$

$-\infty$



لنلاحظ عند التقارب أعداد كبيرة تقارب النهايات الى

③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$$

قانون هـ

④ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 1}$

(H.W)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$⑤ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+1|}{x^2-1}$$

$$\rightarrow |x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -(x+1) & x < -1 \end{cases}$$

$$x+1=0$$

$$x = -1$$

	$-(x+1)/x^2-1$				$x+1/x^2-1$		
x	-1.1	-1.01	-1.001	-1	-0.999	-0.99	-0.9
F(x)	0.475	0.4975	0.4997	-	-0.5002	-0.5025	-0.525

0.5

-0.5

غير موجود

ألف

Example:

④ استخدم الرسم البياني لإيجاد

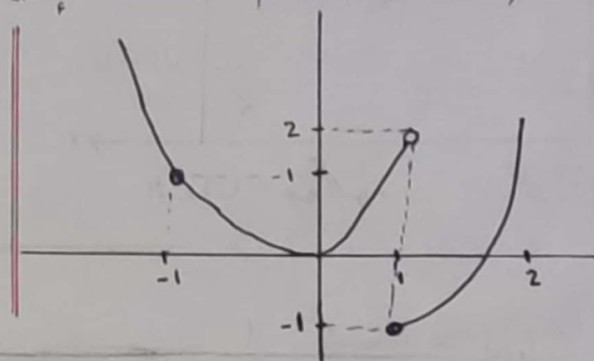
$$① \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) =$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 1} F(x) =$$

$$② \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) =$$

$$④ F(1) =$$

$$⑤ \lim_{x \rightarrow -1} F(x) =$$

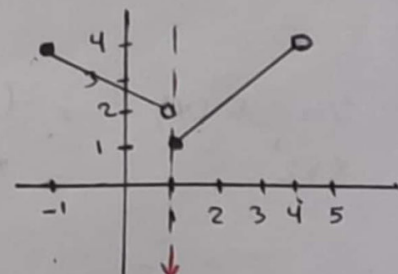


$$① \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) =$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 1} F(x) =$$

$$② \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) =$$

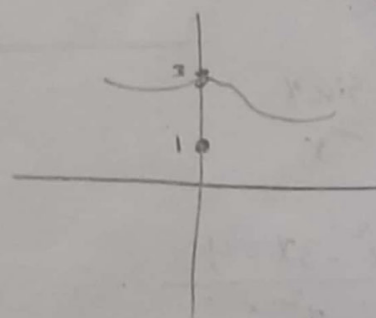
$$④ F(1) =$$



→ إذا تقاطع المنحنى مع المحاور في أكثر من نقطة في النهاية غير موجودة

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 1$$

$$F(0) = 0$$



حاج الفایز

خطوات الحل

① العقود المباشرة

② التمهيد

مثال أوجبه النفايات إليه وصيته

مقاييس الحل

① $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6} \right] \rightarrow$ التحليل

② $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x^3 - 8}{x^2 - 5x + 6} \right] \rightarrow$ الطريق

مثل إشارة القوس

مكة المكرمة

الشارح
3

کر

$\sqrt[3]{\text{الاول}}$ $\left(\begin{array}{c} \text{الاول} \\ \text{الثاني} \end{array} \right)$ $\left(\begin{array}{c} \text{الاول} \\ \text{الثاني} \end{array} \right)$ $\left(\begin{array}{c} \text{الاول} \\ \text{الثاني} \end{array} \right)$

③ $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{(3+h)^3 - 27}{3h} \right]$ ← التحليل ذات الحدين

(4) $\lim_{x \rightarrow 4} \left[\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \right]$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x} \right]$ توحيد المقام

⑤ $\left[\frac{x - 3}{2 - \sqrt{x+1}} \right]$ المراقبه

(7) $\lim_{x \rightarrow -3} \left[\frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 9}{x^2 + x - 6} \right]$ عامل مشترك

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - e^{2x}}{e^x - 1} \right]$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad e^{2x} = [e^x]^2$$

9) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{x^2 - 1}{|x - 1|} \right]$

$x < 1$ $x > 1$

①

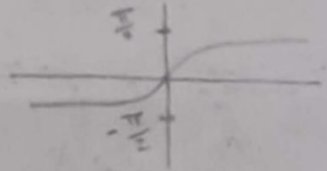
$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow a} \ln x = \ln a \quad (a > 0)$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow a} \tan^{-1} x = \tan^{-1} a \quad (-\infty < a < \infty)$$



$$\textcircled{6} \lim_{x \rightarrow a} \cos^{-1} x = \cos^{-1} a \quad (-1 < a < 1)$$

$$\textcircled{7} \lim_{x \rightarrow a} \sin^{-1} x = \sin^{-1} a \quad (-1 < a < 1)$$

E.X

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

← (مباشر) →

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin F(x)}{F(x)} = 1$$

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \sin^{-1} \left[\frac{x+1}{2} \right] \rightarrow \text{مباشر}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} [x \cot x]$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \right] \rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 4} \right] = 1$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \left[\frac{\sin(x^2 - 3)}{x - \sqrt{3}} \right]$$

$$\textcircled{6} \lim_{x \rightarrow -1} F(x) \quad \begin{cases} x^2 + 1 & x < -1 \\ 3x + 1 & x \geq -1 \end{cases}$$

← (مباشر) →

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = 2$$

~ 1.33

$$A - \lim_{x \rightarrow a} [2F(x) - 3g(x)]$$

$$\textcircled{B} \lim_{x \rightarrow a} [3F(x)g(x)]$$

$$\textcircled{C} \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)^2}{g(x)}$$

$$\textcircled{D} \lim_{x \rightarrow a} \frac{2F(x)g(x)}{F(x) + g(x)}$$

$$a \in \mathbb{R} \text{ (c.r.d.)} \cdot \text{نقطة } c \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

نقطة التوقف

Ex

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} [x^2 \cos \frac{1}{x}]$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

$$\textcircled{2} \xrightarrow{\text{Ex}} \sin x + x \leq f(x) \leq (x^2 + 2x) \quad (x \neq 0) : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$\textcircled{3} |g(x) - 5| \leq 3(x-4)^2$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sin x}{x + \cos x} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\textcircled{1} \sin f(x)$$

$$\textcircled{2} \cos f(x)$$

$$\textcircled{3} \tan^{-1} f(x)$$

$$\textcircled{4} e^{f(x)}$$

$$\text{المجال} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, \infty)$$

$$\textcircled{5} \sqrt{f(x)} \quad \text{المجال} \rightarrow f(x) \geq 0$$

$$\textcircled{6} \ln f(x) \quad \text{المجال} \rightarrow f(x) > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{7} \sin^{-1} f(x) \\ \textcircled{8} \cos^{-1} f(x) \end{array} \right\} \text{المجال} \rightarrow -1 < f(x) < 1$$

الارتباط: الدالة f المكونة على الفترة المفتوحة $x=a$ تكون متصلة عندما

م 90

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

المتصال

الارتباط: يكون للدالة قيمة $f(a)$ تكون من المجال $x=a$

مثال 1: حدد متصلة الارتباط للدالة $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1}$ وعند $x=1$ تكون متصلة على $\mathbb{R}$
 التقدير 4-2 م 92

مثال 2: حدد متصلة الارتباط $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

مثال 3: $f(x) = \ln(x-3)$

نتيجة 4.2 م 96

حدد النقاط التي تكون فيها f متصلة

1) $f(x) = \sin^{-1}(x+2)$

تمرير موجة $f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x^2-2x}}$

2) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} + e^x}{x^2-2}$

4) $f(x) = \ln \sin x$

5) $f(x) = (x-1)^{3/2}$

1) أوجد قيم a و b بحيث تكون الدالة المعطاة متصلة لجميع قيم x

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & , x < 2 \\ x^3 - cx & , x \geq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

4) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ متصلة عند $x=4$

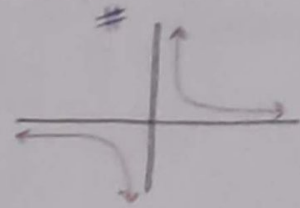
2) أوجد $f(4)$ لكي تكون الدالة

$$f(x) = \begin{cases} ae^x + 1 & , x < 0 \\ \sin^{-1}(x/2) & , 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2x + b & , x > 2 \end{cases}$$

3) أوجد قيم a و b

النهايات التي تتضمن اللانهاية وظهور التقارب

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ ،
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ ،



ملاحظة

الدولة

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01	0.1
$\frac{1}{x}$	-10	-100	-1000	-10000		10000	1000	100	10

② لا يوجد تقارب $\rightarrow \infty$ ، كمية غير محدودة $\leftarrow \frac{L}{0} = \infty$

③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty$ ،
 الدخول بأما رقم $\rightarrow$ عدد في البداية

E.x : ① $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-5)^3} \rightarrow$ مقدار ثابت $\Rightarrow \pm \infty$
 صفر

② $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{(x-3)(x+2)}$

④ لا حظ : المقدار غير قابل للتبسيط

① الدوال الكسرية

النهايات عند اللانهاية

الحالة الأولى

إذا كانت الدالة $\frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}$ ، درجة البسط ، درجة المقام $\rightarrow$ $\lim_{x \rightarrow \infty} = 0$

معادلة خط التقارب الأفقي = $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = y = 0$

ملاحظة : متطابقة الخلل في الجداء والنهاية في قسم البسط والمقام على أكبر قوى x

E.x : ① $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ، لاحظ الرقم # $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ مهم

② $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2-4}$

$\frac{L}{\infty} = 0$

③ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - x^2 - x - 1}$

③ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x}$

ملاحظة مباشرة

⑦

⑤

③

①

①

①

النهاية التي تنفسها الى نهاية وقطوع التقارب

الحالة الثانية: درجة البسط = درجة المقام $\rightarrow$ معادلة الحد الرئيسي للبسط
معادلة الحد الرئيسي للمقام

يوجد خط تقارب أفقي معدله $y =$ معادلة الخط

أوجد $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2}{3+x|x|} = 22a$ (2)

أوجد $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^4 - (a-3)x^5 + 8x}{7-5x^4} = -2$ (3)

أوجد $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2-1}}{3-6x}$ (1)

أوجد $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-1}}{3-6x}$ (2)

أوجد $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16x-5} - 3x^2}{15x^2 - 7x}$ (3)

الحالة الثالثة: درجة البسط < درجة المقام $\rightarrow$ النهاية ∞ أو $-\infty$

إذا كان الفرق بين درجة البسط ودرجة المقام $= 1$ $\rightarrow$ يوجد خط تقارب مائل
نوجد معادلته باستخدام القسمة الطويلة $\rightarrow$ القسمة الطويلة (X) (X) (X)

أوجد $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+2x-1}{x^2-4x}$ (1)

أوجد $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{x+4}$ (2)

أوجد $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-2}{3x+3}$ (3)

أوجد $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3-3}{5x^2+1}$ (4)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$

لتقديمه أم مقدر بؤبؤ العين لحد الحيوانات موقع من $F(x)$ حيثما يكونه x هو كثافته الفوق على بؤبؤ العين إذا كانت $F(x) = \frac{160x^{-0.4} + 90}{4x^{-0.4} + 15}$ أوجد مقدر بؤبؤ العين (a) الحد الأدنى (b) الحد الأقصى

الزاوية θ بين العين واللب
العوض المباشر في

$$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$$

① $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\tan^{-1} x)$

② $\lim_{x \rightarrow \infty} \sec^{-1}\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$
(مقلوب الزاوية) $\cos^{-1}$

أوجد دالة تربيعية $q(x)$ حيث يكون $\frac{x^2-4}{q(x)}$ له خط تقارب أفقي $y=1$ وخط تقارب رأسي $x=1$

② $y = \lim_{x \rightarrow a} y = a$ خط تقارب أفقي في $y = \lim_{x \rightarrow a} y = a$ خط تقارب رأسي في $x = a$ من أمثلة المقام

④ $q(x) = -2(x-3)^2$

أوجد دالة تربيعية $q(x)$ حيث $F(x) = \frac{x^2-4}{q(x)}$ له خط تقارب أفقي واحد $y=2$ وثنائية من خطوط التقارب $x = \pm 3$

① المقدمه له طول حيوان صغير عند الولادة $F(x) = \frac{300}{1+q(0.01^x)}$ مباشر $\lim_{x \rightarrow 0} \rightarrow$ ما طول الحيوان عند الولادة

② $\lim_{x \rightarrow \infty} \rightarrow$ ما الطول النهائي للحيوان

$0 < x < \infty$
 $1 < x < \infty$ كسر

$2^{-\infty} = 0$ $2^{\infty} = \infty$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{عدد البنية} \end{array} \right\}$

أوجد دالة تربيعية $F(x) = \frac{x-4}{q(x)}$ له ثنائية من خطوط التقارب الأفقية $y = \pm 1$ ولها خط تقارب رأسي

$F(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-1}}$