HOSSAMBAYOUMI199

الرياضيات

الصف العاشر

قوانين الفصل الدراسي الثاني

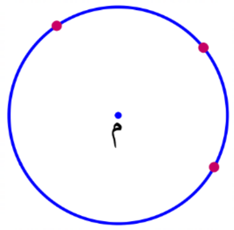
"لا تبحث عن الحل الأسرع ... بل عن الفهم الذي لا يُنسى"

اضغط هنا
للانضمام لجروب التيليجرام

إعداد: أ. حسام بيومي
رياضيات

نظرية (1)

كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.



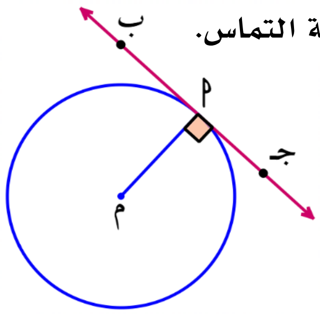
نظرية (2)

المماس عمودي على نصف قطر التماس.

إذا كان مستقيم مماسًا لدائرة فإنه يكون متعامدًا مع نصف القطر المار بنقطة التماس.

أي أن: $\overline{\text{م} \text{ؠ}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

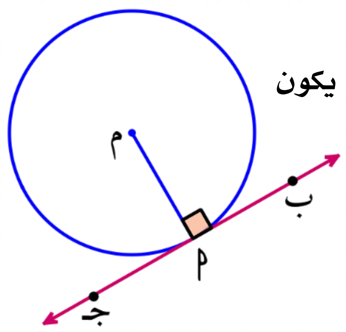
أي أن: إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ مماس للدائرة $\Leftarrow$ $\overline{\text{م} \text{ؠ}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$



نظرية (3)

المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماسًا لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

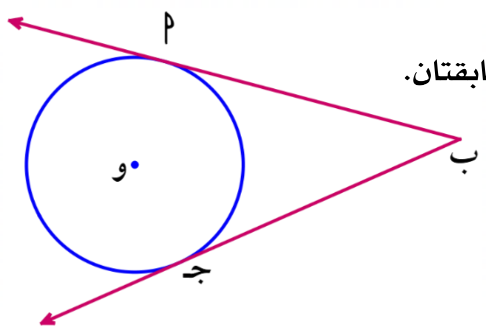
أي أن: إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}} \perp \overline{\text{ؠم}}$ $\Leftarrow$ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ مماس للدائرة



نظرية (4)

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

أي أن: $\overline{\text{ؠ ب}} \cong \overline{\text{جـ ب}}$



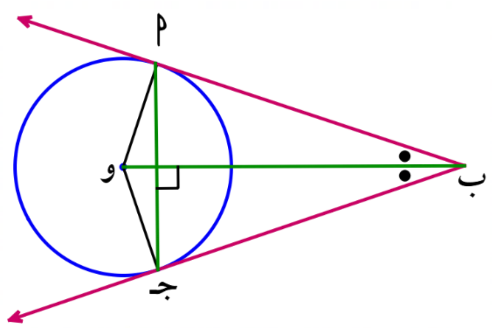
نتائج النظرية (4)

المثلث ؠ ب جـ متطابق الضلعين

$\overrightarrow{\text{ب و}}$ منصف الزاوية $\widehat{\text{ؠب جـ}}$

$\overrightarrow{\text{وب}}$ منصف الزاوية $\widehat{\text{ؠوجـ}}$

$\overline{\text{وب}} \perp \overline{\text{ؠجـ}}$

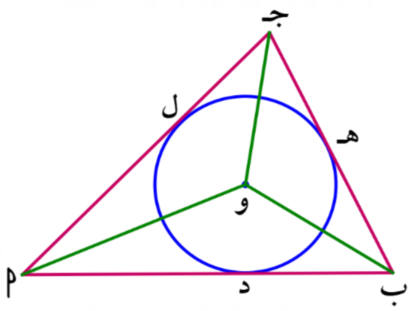


@HOSSAMBAYOUMI199

الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة)

هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.

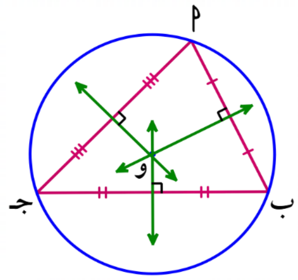
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث



الدائرة المحيطة لمثلث (الخارجة)

هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث



الأوتار والأقواس

نظرية (1)

في دائرة أو في دوائر متطابقة:

- للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.
- الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.
- للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة.

نظرية (2)

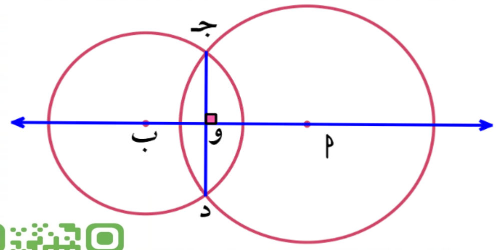
- الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.
- الأوتار على أبعاد متساوية من مركز الدائرة تكون متطابقة.

نظرية (3)

- القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلاً من قوسيه.
- القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) في دائرة يكون عموديًا على هذا الوتر.
- العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة.

نتيجة

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًا على الوتر المشترك بينهما وينصفه.



الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

نظرية (1)

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة.

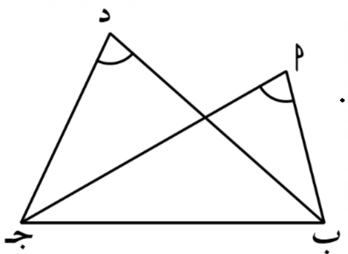
نظرية (2)

في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

نتائج

- كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.
- كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.
- كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة) تكون زواياه المتقابلة متكاملة.
- في الشكل إذا تطابقت الزاويتان $\hat{أ}$ ، $\hat{د}$ المرسومتان على القاعدة $\overline{ب جـ}$

وفي جهة واحدة منها. كان الشكل أ ب جـ د رباعيًا دائريًا



نظرية (3)

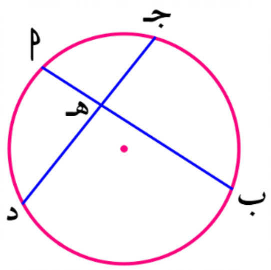
- قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.
- قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

الأوتار المتقاطعة ، المماس

نظرية (1)

إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزئي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزئي الوتر الآخر.

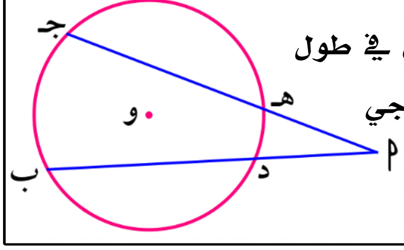
أي أن: هـ ب × هـ أ = هـ جـ × هـ د



نتيجة (1)

إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي

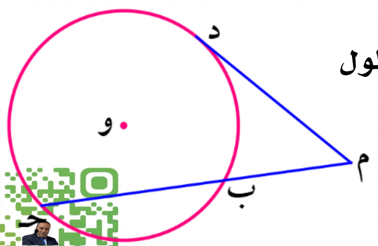
أي أن: أهـ × أجـ = أد × أب



نتيجة (2)

إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.

أي أن: $(م د)^{٢}$ = م ب × م جـ



ضرب المصفوفات

المصفوفة $\underline{أ}$ هي مصفوفة من الرتبة م × ن والمصفوفة $\underline{ب}$ هي من الرتبة ن × ر ، عندئذٍ مصفوفة الضرب

$\underline{أ} \times \underline{ب}$ هي مصفوفة من الرتبة م × ر

$$\underset{م \times ن}{\underline{أ}} \times \underset{ن \times ر}{\underline{ب}} = \underset{م \times ر}{\underline{جـ}}$$

متساويان

تكون مصفوفة الضرب معرّفة إذا كان أعمدة الأولى يساوي عدد صفوف الثانية

النظير الضربي

إذا كانت $\underline{أ}$ ، $\underline{س}$ مصفوفتين مربعتين من الرتبة نفسها بحيث يكون $\underline{أ} \times \underline{س} = \underline{و}$ ، فإن $\underline{س}$

هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ}$ ويرمز إليها بالرمز $\underline{أ}^{-١}$

إذاً $\boxed{\underline{أ} \times \underline{أ}^{-١} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{أ} = \underline{و}}$

محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية

ترتبط كل مصفوفة مربعة بعدد حقيقي يسمى محدد المصفوفة

محدد المصفوفة المربعة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ب & جـ \\ د & هـ \end{bmatrix}$ هو $|\underline{أ}| =$ ب هـ − د جـ

ملاحظة: تسمى المصفوفة التي محددها يساوي الصفر بالمصفوفة المنفردة

بفرض أن $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ب & جـ \\ د & هـ \end{bmatrix}$ إذا كان $|\underline{أ}| =$ ب هـ − د جـ $\neq$ ٠ فإن $\underline{أ}$ لها نظير ضربي $\underline{أ}^{-١}$

$$\boxed{\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{|\underline{أ}|}\begin{bmatrix} هـ & -جـ \\ -د & ب \end{bmatrix}}$$

ملاحظة: ليس لكل المصفوفات المربعة نظير ضربي(معكوسات)

ملاحظة: المصفوفة التي محددها يساوي الصفر ليس لها نظير ضربي

يمكن للمعادلة المصفوفية أن تمثل أي نظام معادلات.

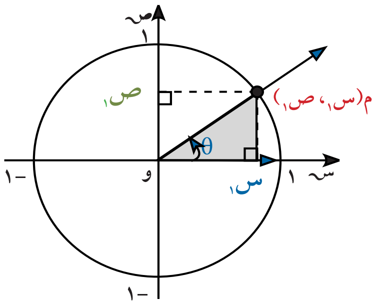
نظام المعادلات	المعادلة المصفوفية
$\begin{cases} س + ٢ص = ٥ \\ ٣س + ٥ص = ١٤ \end{cases}$	$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ١٤ \end{bmatrix}$

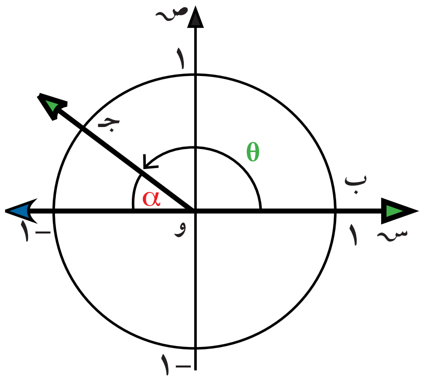
النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ

بفرض أن زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ، يقطع ضلعها النهائي دائرة الوحدة في النقطة م (س١، ص١).

$$\text{جتا } \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{س}}{١} = \text{س}$$

$$\text{جا } \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ص}}{١} = \text{ص}$$

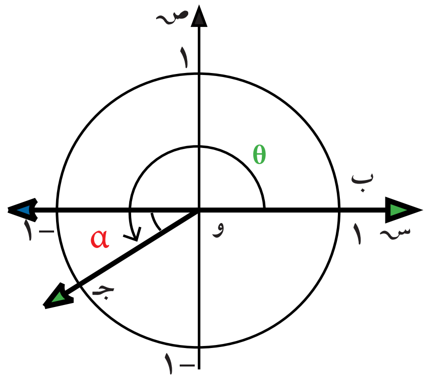




عندما θ تقع في الربع الثاني

$\alpha^{\circ} = ١٨٠^{\circ} - \theta^{\circ}$

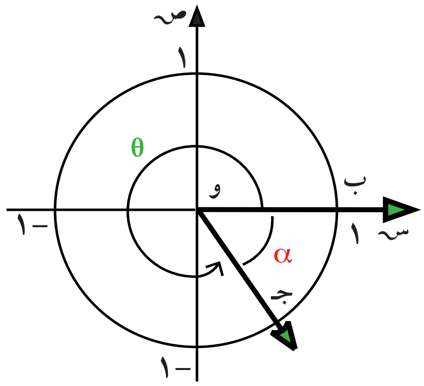
$\alpha^{ء} = \pi - \theta^{ء}$



عندما θ تقع في الربع الثالث

$\alpha^{\circ} = \theta^{\circ} - ١٨٠^{\circ}$

$\alpha^{ء} = \theta^{ء} - \pi$



عندما θ تقع في الربع الرابع

$\alpha^{\circ} = ٣٦٠^{\circ} - \theta^{\circ}$

$\alpha^{ء} = ٢\pi - \theta^{ء}$

قانون:

جتا(−θ) = جتا θ

جا(−θ) = −جا θ

وبالتالي ظا(−θ) = −ظا θ بشرط أن يكون ظا θ معرّف.

قانون:

جتا(π + θ) = −جتا θ

جا(π + θ) = −جا θ

وبالتالي ظا(π + θ) = ظا θ شرط أن يكون ظا θ معرّفًا.

قانون:

جتا(π − θ) = −جتا θ

جا(π − θ) = جا θ

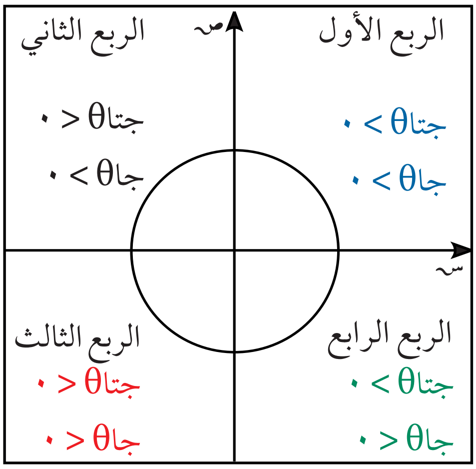
وبالتالي ظا(π − θ) = −ظا θ شرط أن يكون ظا θ معرّفًا.

قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جتا θ

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جا θ

ظا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = ظتا θ شرط أن يكون ظتا θ معرّفًا.



حل المعادلة: جتا س = جتاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = $-\theta$ + ٢ك π (ك $\in$ ص)

لاحظ أن جيب تمام الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع.

حل المعادلة جا س = جاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = ($\pi - \theta$) + ٢ك π ، (ك $\in$ ص)

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني.

حل المعادلة ظا س = ظاθ هو س = θ + ك π، (ك $\in$ ص)

لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث.

جا^2 θ + جتا^2 θ = ١ تسمى متطابقة فيثاغورث

١ + ظا^2 θ = قا^2 θ ، ١ + ظتا^2 θ = قتا^2 θ

المسافة بين نقطتين

قانون:

المسافة بين أي نقطتين أ(س$_1$ ، ص$_1$) ، ب(س$_2$ ، ص$_2$) تساوي $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

نقطة المنتصف

قانون:

إذا كانت أ(س$_1$ ، ص$_1$) ، ب(س$_2$ ، ص$_2$) فإن إحداثيات نقطة المنتصف هي م (س ، ص) حيث

$$س = \frac{س_1 + س_2}{٢} \quad ، \quad ص = \frac{ص_1 + ص_2}{٢}$$

١- التقسيم من الداخل

قانون:

إذا كانت $\overline{أب}$ قطعة مستقيمة بحيث أ(س$_1$ ، ص$_1$) ، ب(س$_2$ ، ص$_2$) ويراد تقسيمها من جهة أ بنسبة م:ن من الداخل وكانت نقطة التقسيم جـ (س ، ص) فإن:

$$س = \frac{م\,س_2 + ن\,س_1}{م + ن} \quad ، \quad ص = \frac{م\,ص_2 + ن\,ص_1}{م + ن}$$

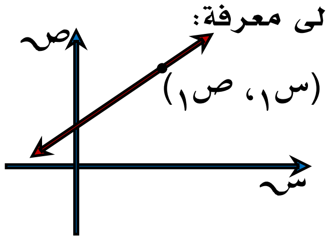
قانون:

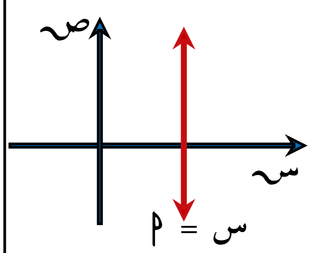
$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} \quad ، \quad س_2 - س_1 \neq ٠$$

ملاحظة:

1 لكتابة معادلة خط مستقيم ليس رأسيًا نحن بحاجة إلى معرفة:

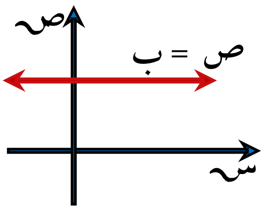
- الميل
- نقطة من نقاط المستقيم ولتكن $(س_١، ص_١)$





تكون معادلة المستقيم: $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

2 معادلة المستقيم الرأسي هي س = أ (وهذا المستقيم ليس له ميل)



3 معادلة المستقيم الأفقي هي ص = ب (ميل هذا المستقيم = صفر)

لأي مستقيمين غير رأسيين ومتوازيين الميل نفسه.

إذا كان المستقيمان متعامدين وليس أحدهما رأسيًا، فناتج ضرب ميليهما يساوي −١.

الصورة العامة لمعادلة مستقيم هي: أ س + ب ص + جـ = ٠ ، أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠

البعد بين نقطة و مستقيم

إذا كانت معادلة الخط المستقيم على الصورة ل: أ س + ب ص + جـ = ٠ ، فإن البعد ف بين النقطة د$(س_١ ، ص_١)$ والمستقيم ل تعطى بالصيغة: $ف = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة:

$$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$$

وتسمى هذه الصورة القياسية لمعادلة بمعلومية المركز م(د ، هـ) وطول نصف القطر نق.

إذا كان نق طول نصف القطر الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ، فإن معادلتها على الصورة:

$$س^٢ + ص^٢ = نق^٢$$

الصورة العامة لمعادلة الدائرة

$س^٢ + ص^٢ + ل س + ك ص + ب = ٠$ ، حيث ل ، ك ، ب ثوابت

وتسمى الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها $(-\frac{ل}{٢} ، -\frac{ك}{٢})$

طول نصف قطرها $نق = \frac{١}{٢}\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ٤ب}$ حيث $ل^٢ + ك^٢ - ٤ب > ٠$