

7-6 تحديد أنواع القطوع المخروطية

ورقة عمل الثاني عشر العام

في هذا الدرس سوف نتعلم:

1- كتابة معادلات القطوع المخروطية بالصيغة القياسية. 2- تحديد أنواع القطوع المخروطية من معادلاتها.

يمكن كتابة معادلة أي قطع مخروطي على الصورة العامة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، على أن لا تساوي A, B, C جميعها أصفاراً. ويمكن تحويل هذه الصورة إلى الصور القياسية باستعمال طريقة إكمال المربع إذا كانت $B = 0$.

الصيغ القياسية للقطوع المخروطية		
الصيغة القياسية للمعادلة		قطع مخروطي
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$		دائرة
محور رأسي	محور أفقي	
$y = a(x - h)^2 + k$	$x = a(y - k)^2 + h$	قطع مكافئ
$\frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	قطع ناقص
$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	قطع زائد

كتابة المعادلة العامة لقطع مخروطي على الصورة القياسية

اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. اذكر إن كان التمثيل البياني للمعادلة قطعاً مكافئاً أو دائرة أو قطعاً ناقصاً أو قطعاً زائداً. ثم مثل المعادلة بيانياً.

$$x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$$

$$x^2 - 6x + 4y^2 + 16y = 11$$

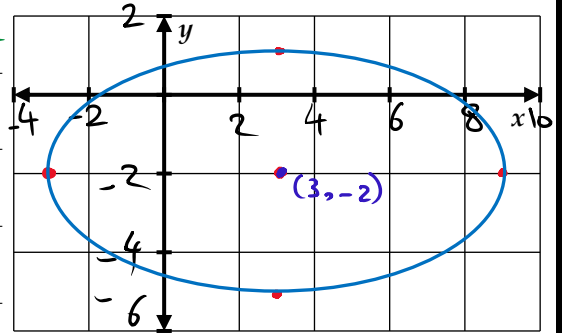
$$x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 4\left(y^2 + 4y + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right) = 11 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{4}{2}\right)^2$$

$$(x^2 - 6x + 9) + 4(y^2 + 4y + 4) = 11 + 9 + 16$$

$$(x - 3)^2 + 4(y + 2)^2 = 36$$

$$\frac{(x - 3)^2}{36} + \frac{(y + 2)^2}{\frac{1}{4}(36)} = 1 \Rightarrow \frac{(x - 3)^2}{36} + \frac{(y + 2)^2}{9} = 1$$

$$a = 6, b = 3 \quad \text{معادلة قطع ناقص، نقي مركزه (3, -2)}$$



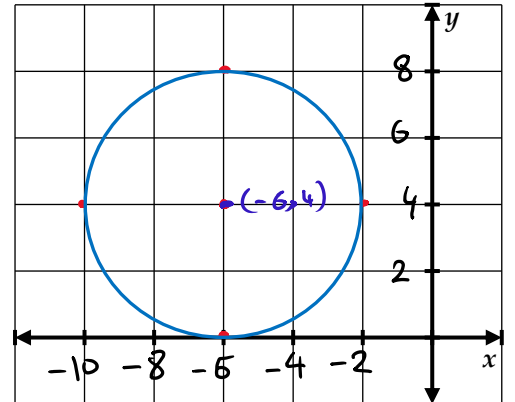
$$x^2 + y^2 + 12x - 8y + 36 = 0$$

$$\left(\frac{12}{2}\right)^2 = 36, \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$$

$$x^2 + 12x + 36 + y^2 - 8y + 16 = -36 + 36 + 16$$

$$(x + 6)^2 + (y - 4)^2 = 16 \Rightarrow \text{معادلة دائرة}$$

$$(r = \text{نصف القطر}) \quad (-6, 4) \text{ المركز}$$



اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. اذكر إن كان التمثيل البياني للمعادلة قطعاً مكافئاً أو دائرة أو قطعاً ناقصاً أو قطعاً زائداً. ثم مثل المعادلة بيانياً.

$$9y^2 - 16x^2 - 18y - 64x - 199 = 0 \quad \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$$

$$9y^2 - 18y - 16x^2 - 64x = 199 \quad \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$$

$$9(y^2 - 2y + 1) - 16(x^2 + 4x + 4) = 199 + 9(1) - 16(4)$$

$$9(y^2 - 1)^2 - 16(x + 2)^2 = 144$$

$$\frac{(y^2 - 1)^2}{\frac{1}{9}(144)} - \frac{(x + 2)^2}{\frac{1}{16}(144)} = 1$$

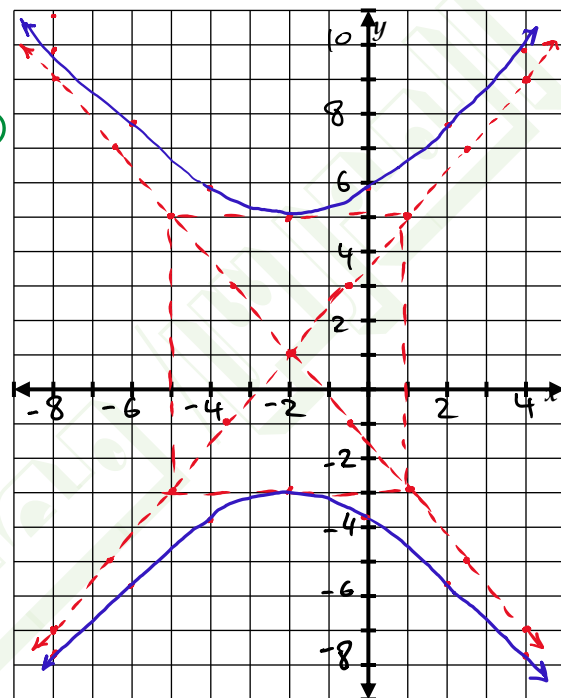
$$\frac{(y - 1)^2}{16} - \frac{(x + 2)^2}{9} = 1 \Rightarrow \text{قطع زائدي رأسي}$$

$$a = 4, b = 3, \text{ المركز} = (-2, 1)$$

$$(y - 1) = \pm \frac{4}{3}(x + 2) \quad \text{معادلة خطي (نقطة ب)}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3} + 1 \Rightarrow y_1 = \frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$$

$$\Rightarrow y_2 = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{3} + 1 \Rightarrow y_2 = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$$



$$6y^2 - 24y + 28 - x = 0 \quad \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$$

$$x = 6y^2 - 24y + 28$$

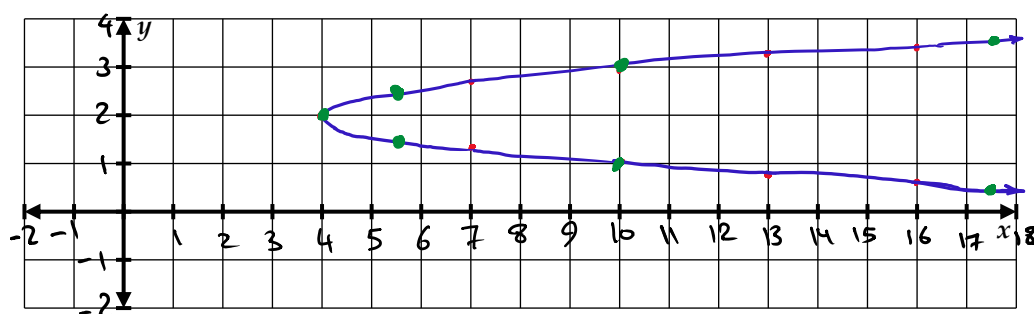
$$x = 6(y^2 - 4y + 4) + 28 - 6(4)$$

$$x = 6(y - 2)^2 + 4 \Rightarrow \text{قطع مكافئ أفقي}$$

فتحة جهة اليمين

$$\text{الرأس} = (4, 2)$$

x	17.5	10	5.5	4	5.5	10	17.5
y	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5



تحديد أنواع القطوع المخروطية يمكنك تحديد نوع القطع المخروطي دون أن تكتب المعادلة:
 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ على الصورة القياسية، وذلك باستعمال المميز $B^2 - 4AC$.

تصنيف القطوع المخروطية باستعمال المميز

مفهوم أساسي

نوع القطع المخروطي	المميز
قطع مكافئ	$B^2 - 4AC = 0$
قطع ناقص	$B^2 - 4AC < 0, A \neq C$ أو $B \neq 0$
دائرة	$B^2 - 4AC < 0, B = 0, A = C$
قطع زائد	$B^2 - 4AC > 0$

تحديد نوع القطع المخروطي من معادلته

بدون كتابة كل معادلة بالصيغة القياسية، اذكر إن كان التمثيل البياني لها قطعاً مكافئاً أو دائرة أو قطعاً ناقصاً أو قطعاً زائداً.

$$4x^2 + 6y^2 - 3x - 2y = 12$$

$$\text{المميز} = B^2 - 4AC$$

$$= 0 - 4(4)(6)$$

سالب =

لما دائرة أو قطع ناقص

ولكن لأن $A \neq C$ فإنه القطع قطع ناقص.

$$8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$$

$$\text{المميز} = B^2 - 4AC$$

$$= 0 - 4(8)(8)$$

سالب =

لما دائرة أو قطع ناقص

ولكن لأن $A = C$ ، $B = 0$ فإنه القطع دائرة.

$$16xy + 8x^2 + 8y^2 - 18x + 8y = 13$$

$$\text{المميز} = B^2 - 4AC$$

$$= 16 - 4(8)(8)$$

$$= 0$$

قطع مكافئ، ولكنه ليس رأس وليس أفقي

لأن $B \neq 0$

$$5xy - 3x^2 + 6y^2 + 12y = 18$$

$$\text{المميز} = B^2 - 4AC$$

$$= 5^2 - 4(-3)(6)$$

$$= 97 \text{ موجب}$$

قطع زائد ليس رأس وليس أفقي لأن $B \neq 0$

استخدام النماذج تشارك مقاتلة نفثة في عرض جوي. يمكن تمثيل مسار الطائرة خلال إحدى المناورات بقطع مخروطي معادلته $0 = 45600 - 31680x + 1000y + 24x^2$ ، حيث يتم تمثيل المسافات بالمتر.

a. حدد شكل المسار المنحني للطائرة النفثة. اكتب المعادلة بالصيغة القياسية.

b. إذا بدأت الطائرة النفثة مسارها لأعلى عند $x = 0$ ، فما المسافة الأفقية التي قطعتها الطائرة من بداية التسلق لنهاية الهبوط؟

c. ما أقصى ارتفاع للطائرة؟

a

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

$$= 0 - 4(24)(0)$$

$$= 0$$

قطع مكافئ رأسي

$$1000y = -24x^2 + 31680x + 45600 \quad \left(\frac{1320}{2}\right)^2 =$$

$$1000y = -24(x^2 - 1320x + 435600) + 45600 + 24(435600)$$

$$\Rightarrow y = \frac{-24}{1000}(x - 660)^2 + \frac{10500000}{1000} \Rightarrow y = -0.024(x - 660)^2 + 10500$$

b

$$\Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow -0.024(x - 660)^2 + 10500 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 660)^2 = \frac{10500}{-0.024}$$

$$\Rightarrow (x - 660)^2 = 437500 \Rightarrow x = \pm \sqrt{437500} + 660$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{437500} + 660 = 1321.44$$

$$x_2 = -\sqrt{437500} + 660 = -1.44$$

بدأ من مسافة x اتبع رأسي عن 1321.44 اتبع

← المسافة الأفقية من بداية التسلق إلى نهاية الهبوط = 1321.44 m

c

أقصى ارتفاع عن نقطة الرأس (660 , 10500)

← أقصى ارتفاع 10500 m

عن مسافة أفقية 660 m