

المتتابعات والمتسلسلات الحسابية والهندسية



المقدمة:

يوجدُ الكثيرُ من القوانين والقواعد والنظريات التي يتبعُ لها علمُ الرياضيات، والمتتابعاتُ والمتسلسلات الحسابية والهندسية أحدُ هذه النظريات التي تشرحُ الترتيب المنطقي لمجموعةٍ من الأشياءِ التشابِهة وفقاً لقاعدةٍ مُعينة، ومن خلال موقع المرجع سندرجُ بحثاً شاملاً ومتكاملاً عن المتتابعات الحسابية والهندسية بشكل تسلسلي.

في بدايةِ بحثنا عن المتتابعات والمتسلسلات الحسابية والهندسية سنتحدثُ عن تعريفِ المتتابعة، وأنواعِها من المتتابعة الهندسية والحسابية بشكل مُفصل، مع ذكر الأمثلة والشروحاتِ المُختلفة عن ذلك، ثم سننتقلُ إلى كيفية إيجاد قاعدة المُتتابعاتِ عن طريق تحديدِ نوعِها، ثم تعريفُ المتسلسلات والشرح التفصيلي عنها.

تعريف المتتابعات

تُعرّف المتتابعة (بالإنجليزية: Sequence) أو المتتالية بأنها ترتيب مُعين لمجموعة من الأرقام التي تتبع لقاعدة مُحددة، وتُعامل المتتاليات على أنها دالة مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها، ومداها مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية، وعناصر المدى تُسمى بحدود المتتابعة، وإن كانت ن تمثل حدود المتتابعة فإن n تمثل الحد النوني للمتابعة، ويأتي مثالاً بسيطاً على توضيح معنى المتتابعة أو المتتالية: لو افترضنا وجود عدة صناديق مُتتالية وفي كُل صندوق مجموعة من الألعاب فإن ترتيب الصناديق يُسمى حدود المتتابعة فيما تُسمى الألعاب قيمة حدود المتتابعة.

أنواع المتتابعات

يوجدُ عدّة أنواعٍ من المتتابعات، بحيثُ يأتي أهمها على النحو الآتي:

المتتابعات الحسابية

تُعرّف المتتابعة الحسابية (بالإنجليزية: Arithmetic Sequences) على أنها المتتالية التي يكونُ الفرقُ بينَ كلِّ حدين من حدودها ثابت، ويرمزُ للفرق الثابت بين حدين المتتالية (د)، ويطلقُ على الحد الأول من حدود المتتالية أساسُ المتتالية ويرمزُ له بالرمز (ح)، ومن الأمثلة على المتتابعات الحسابية: 10، 12، 14، 16، 18، فالفرقُ هنا بينَ كلِّ حدين ثابت ويساوي 2، وتتبعُ المتتابعة الحسابية لقاعدة ثابتة وهي: $ح\ ن = ح\ (ن-1) + د$ حيثُ أنّ:

ن: هو العدد الذي يعبر عن ترتيب الحد المراد إيجاد قيمته.
ح ن: قيمة الحد.

ويمكنُ إيجاد مجموع حدود المتتابعة الحسابية حتى حد مُعيّن يُسمى (ن) من خلال القاعدة الآتية:

$$\text{المجموع} = (ن/2) \times (2 \times ح + (ن-1) \times د)$$

أمثلة على المتتابعات الحسابية

بعض الأمثلة التي توضح مفهوم المتتابعات الحسابية، ما يأتي:

المثال الأول: جد قاعدة المتتالية الآتية:

15، 19، 23، 27، 31، 35، 39،
الفرق بين كل حدين متتاليين في المتتابة يساوي 4 وهو قيمة (د)، أما الحد الأول فإن قيمته يساوي 15.

قاعدة المتتالية الحسابية: $ح\ ن = 15 +$

$$(ن-1) \times 4 = 15 + 4ن - 4$$

المثال الثاني: جد مجموع أول ثلاث حدود

في المتتالية الحسابية الآتية: 5، 7، 9، 11،

13، 15، 17، 19،

يتم إيجاد مجموع حدود المتتابة الحسابية

من خلال القاعدة الآتية:

$$\text{المجموع} = (ن/2) \times (2 \times ح + (ن-1) \times د)$$

مجموع أول ست حدود = $ن = 6$: $(6/2) \times$

$$(2 \times 5 + 5 \times 2)$$

$$\text{مجموع أول ست حدود} = 3 \times 20 =$$

المتتابعات الهندسية

تُعرّف المتتابعات الهندسية (بالإنجليزية: Geometric Sequences) بأنها المتتابعة التي تكون فيها النسبة بين كل حدين من حديها ثابت، ويُقصد بالنسبة ناتج القسمة بين كل حدين، وتتبع المتتابعات الهندسية لقاعدة مُعينة، بحيث يمكن قياس جميع المتتاليات عليها، وهذه القاعدة هي:

$$a_n = a_1 \times r^{(n-1)}$$

حيث أن:

أ: الحد الأول من حدود المتتابعة الهندسية،
ويعرف بأساس المتتابعة.
ر: النسبة الثابتة بين كل حدين من حدود المتتابعة الهندسية.
ويمكن إيجاد مجموع حدود المتتابعة الهندسية حتى حد مُعين يُسمى (ن) من خلال اتباع القواعد الآتية:

إذا كانت $r > 1$ فإن: المجموع $= \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$.

إذا كانت $r < 1$ فإن: المجموع $= \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$.

أمثلة على المتتابعات الهندسية:

المثال الأول: ما هي قاعدة المتتابعة الهندسية

الآتية: 3، 9، 18، 54، 162،

النسبة بين كل حدين متتاليين تساوي (ر = 3)

أ = قيمة الحد الأول في المتتابعة الهندسية = 3

قاعدة المتتابعة الهندسية: $ح ن = أ \times ر^{(ن-1)}$

$$ح ن = 3 \times 3^{(ن-1)}$$

المثال الثاني: ما هي قاعدة المتتابعة الهندسية

الآتية: 2، 4، 8، 16، 32، ...

النسبة بين كل حدين متتاليين تساوي (ر = 2)

أ = قيمة الحد الأول في المتتابعة الهندسية = 2

قاعدة المتتابعة الهندسية: $ح ن = أ \times ر^{(ن-1)}$

$$ح ن = 2 \times 2^{(ن-1)}$$

أنواع أخرى من المتتابعات

يوجد هنالك عدة أنواع من المتتابعات التي تتبع

لقواعد معينة ومختلفة، ولعل من أشهر أنواع

المتتابعات متتابعة فيبوناتشي والتي تتبع لقاعدة

عامة تنص على أن الحد التالي لحدين متتابعين

يساوي مجموعها، ولتسهيل فهم متتابعة

فيبوناتشي نستعين بالمثال الآتي: 2، 3، 5، 8،

13، 21، فهنا نجد أن $5=3+2$ (الحد التالي

للعدد 3)، $8=5+3$ (الحد التالي للعدد 5)،

$13=8+5$ (الحد التالي للعدد 8)، $21=13+8$ (الحد

التالي للعدد 13)، ويمكن اختصار القول في وضع

القاعدة العامة لمتتابعة فيبوناتشي:

$$ح ن = ح ن-1 + ح ن-2$$

إيجاد قاعدة المتتابعات

الخطوة الأولى لإيجاد قاعدة المتتابعات هي معرفة نوعها إن كانت متتابعة حسابية، أم متتابعة هندسية، أم متتابعة فيبوناتشي، إذ تتبع كلاً منها لقواعد محددة ذكرت في الأعلى، وفي حال لم تكن المتتابعة حسابية أو هندسية أو فيبوناتشي، فإنه يمكن معرفة قاعدة المتتابعة عن طريق التخمين، والقياس بالصواب والخطأ، فمثلاً في المتتالية الآتية: 1، 8، 27، 64، 125، 216، 343،، هنا الفرق بين الحدود ليس ثابت، والنسبة ليست ثابتة، والحد الثالث ليس مجموع حدين، وعند التخمين نجد أن كل حد هو مكعب لعدد معين بشكل متتالي، أي أن $ح\ 1 = 1^3 = 1$ ، وذلك لأن $1 = 1^3$ ، $8 = 2^3$ ، $27 = 3^3$ ، $64 = 4^3$ ، $125 = 5^3$ ، $216 = 6^3$ ، $343 = 7^3$ ، وبإيجاد قاعدة هذه المتتابعة يمكن معرفة بقية حدودها 1، 8، 27، 64، 125، 216، 343، 512، 729، 1000.

أمثلة متنوعة حول المتتابعات

تهدف الأمثلة التوضيحية التي ترسخ مفهوم المتتابعات وأنواعها لدى الطلبة، ومن الأمثلة المتنوعة حول المتتابعات ما يأتي:

المثال الأول: جد الحد العشرون في المتتابعة الآتية: 1، 4، 6، 8، 10، 12،؟
الخطوة الأولى: تحديد نوع المتتابعة، متتابعة حسابية، نظراً لأن الفرق بين كل حدين من حدودها ثابت $= 2 = د$

الخطوة الثانية: كتابة قاعدة المتتابعة: $ح\ ن = 1 + (ن-1) \times د$

$$ح\ ن = 1 + (ن-1) \times 2$$

$$ح\ 20 = 1 + 2 \times (20-1)$$

$$ح\ 20 = 1 + 2 \times 19$$

$$ح\ 20 = 1 + 38$$

$$ح\ 20 = 39$$

المثال الثاني: جد الحدود المفقودة في المتتابعة: 15، 625، 3125، 15625،
لإيجاد الحدود المفقودة لا بد من تحديد نوع المتتابعة ما إن حسابية أم هندسية أم فيبوناتشي

الخطوة الأولى: تحديد نوع المتتابعة، متتابعة هندسية، نظراً لأن الفرق بين الثلاث حدود ثابت $= 5 = ر$

الخطوة الثانية: إيجاد القاعدة العامة للمتتابعة الهندسية: $ح\ ن = أ \times ر^{(ن-1)}$

إيجاد الحد الثاني: $2 = 5 \times 5^{(1-1)}$

$$2 = 5 \times 5^0$$

$$2 = 5 \times 1$$

إيجاد الحد الثالث: $3 = 5 \times 5^{(1-3)}$

$$3 = 5 \times 5^{-2}$$

$$3 = 5 \times \frac{1}{5^2}$$

$$125 = 25 \times 5 = 125$$

المتتابعة: 5، 25، 125، 625، 3125، 15625، ...

المثال الثالث: ما هي قاعدة المتتابعة: 1، 2، 3، 4، 5، 6، ...
الخطوة الأولى: تحديد نوع المتتابعة، متتابعة حسابية، نظراً لأن الفرق بين كل حدين من حدودها ثابت $= 1 = د$

الخطوة الثانية: كتابة القاعدة العامة للمتتابعة الحسابية: $ح\ ن = 1 + (ن-1) \times د$

الخطوة الثالثة: تطبيق القاعدة العامة: $ح\ ن = 1 + (ن-1) \times 1 = 1 + ن - 1 = ن$

تطبيقات المتتابعات في الحياة

يوجدُ عدَّة استخدامات للمتاليات في الحياة اليومية، بحيثُ توفرُ الوقت وتُختصرُ الجهد وتسهلُ الجسبة، ومن التطبيقات:

- تستخدمُ المتتابعات في جدولة الديون المُتبقية على شخص ما.
- تستخدمُ المتتابعات في حساب الأقساط.
- تدخلُ المتتابعات في العديد من الأمور البنكية.
- تدخلُ المتتابعات في البناء الرياضي، والعديد من التطبيقات الرياضية.

تعريف المتسلسلات

تُعرَّف المتسلسلة أو السلسلة (بالإنجليزية: Series) بأنها مجموع لحدود المتتابعة، سواء أكانت هذه الحدود دوال أو أعداد، مثل المتكافئة الحسابية $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ ، أما المتسلسلة $1 + 3 + 5 + 7 + 9, \dots$ وتتبع المتسلسلات لقاعدة مُعينة وهي:

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

إشارة الجمع Σ
أو $r = 0$: تُعني الحد الأول في المتسلسلة $k = 0$
أو n : تُعني الحد النوني أو الحد الأخير في المتسلسلة
أو n : الحد العام للمتسلسلة a_k
أو n : يُعني مجموع حدود المتسلسلة s_n
ن : تُعني الحد النوني أو الحد الأخير في المتسلسلة.
أمثلة على المتسلسلات

من خلال الأمثلة التوضيحية يمكنُ التفريق بين مفهومي المتسلسلة والمتتالية، والتعرفُ على المتسلسلة بشكلٍ أدق، ومن الأمثلة:

المثال الأول: جد المتسلسلة المقابلة للمتتالية $1, 4, 9, 16, 25, \dots$ ثم جد مجموعها ؟
الخطوة الأولى: كتابة المتتالية بصورة مُتسلسلة عن طريق القاعدة العامة للمتسلسلة
الخطوة الثانية: إيجاد مجموع حدود المتتالية من خلال قاعدة المتسلسلة

$$r = 1 \text{ ف } r = 1^2 + 4^2 + 9^2 + 16^2 + 25^2 + \dots = 10$$

المثال الثاني: إذا كان $n = 2$ اكتب المتسلسلة المقابلة لها، ثم جد مجموع أول أربعة حدود منها ؟

الخطوة الأولى: إيجاد المتتالية من القاعدة $n = 2$ ، أي إيجاد حدودها بالتعويض، كالآتي:

$$2 = 1 + 2 \quad 1 = 1$$

$$5 = 1 + 2 + 2 = 2$$

$$10 = 1 + 2 + 3 = 3$$

$$17 = 1 + 2 + 4 = 4$$

المتتالية هي: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots$

الخطوة الثانية: كتابة المتتالية على صورة مُتسلسلة: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + \dots$ (متسلسلة غير منتهية)

الخطوة الثالثة: إيجاد مجموع أول أربع حدود من المتسلسلة: $n = 4$ ر $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$$34 = 17 + 10 + 5 + 2 = 4$$

خاتمة بحث عن المتتابعات والمتسلسلات الحسابية والهندسية

إلى هنا نكون قد وصلنا الى نهاية بحث علمي شامل وكامل عن المتتابعات والمتسلسلات الحسابية والهندسية، إذ تطرقنا في البداية إلى تعريف المتتاليات أو المتتابعات بحيث أنها ترتيب لمجموعة من الأعداد ضمن قاعدة معينة، ثم انتقلنا إلى أنواع المتتابعات والتي تُقسم إلى المتتابعات الحسابية ذات الفرق الثابت، والمتتابعة الهندسية ذات النسبة الثابتة، وأنواع أخرى مثل متتابعة فيبوناتشي الذي يكون الحد التالي لحدين عبارة عن محصلة مجموعها، مع تدعيم كل نوع بالأمثلة الشارحة والمفصلة، تباعاً إلى كيفية إيجاد قاعدة المتتابعات من خلال تحديد نوعها، ثم بعض الملاحظات الهامة حول المتتابعة، وتطبيقاتها في الحياة العملية من المعاملات البنكية وجداول الديون وغير ذلك مما يتطلب وقتاً، ثم انتقل الحديث تفصيلاً إلى المتسلسلات والتي هي عبارة عن مجموع لمتتالية حسابية أو هندسية أو أي كان نوعها، والمتسلسلة أو السلسلة أنواع كما المتتالية، وتتبع لقواعد جمع معينة، وقد دعمنا الحديث عنها بالعديد من الأمثلة المفصلة والملاحظات الهامة.



الطالبة :

