# نصار التفوق

## عمل / أ . أحمد نصار

**((مذكره مجانية ... المرجع: الكتاب المدرسى وكراسة التمارين وزارة التربية والتعليم الكويتية ))**

**تجميع لأصعب أفكار المسائل فى الكتاب والكراسة**

**الاختبار الفاينال 8 مسائل مقالى**

**الوحدة الأولى (التكامل):**

**3 مسائل مقالى.**

**الوحدة الثانية (تطبيقات التكامل):**

**2 مسائل مقالى.**

**الوحدة الثالثة (القطوع):**

**2 مسائل مقالى.**

**الوحدة الرابعة (الأحصاء):**

**1 سؤال مقالى.**

**مسائل الموضوعى من كراسه التمارين بنفس الارقام**

**(1)**

$$\int x^5\sqrt{3+x^2}\,dx$$

الحل:

$$u=3+x^2 \Rightarrow du=2xdx \Rightarrow \frac{du}{2}=xdx$$

$$\int x^5\sqrt{3+x^2}\,dx=\int \sqrt{3+x^2}\,(x^4)(xdx)$$

$$u=3+x^2 \Rightarrow x^2=u-3 \Rightarrow x^4=(u-3)^2$$

$$\int x^5\sqrt{3+x^2}\,dx=\int \sqrt{3+x^2}\,(x^4)(xdx)$$

$$=\int \sqrt{u}\,(u-3)^2\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}(u^2-6u+9)du=\frac{1}{2}\int\left(u^{\frac{5}{2}}-6u^{\frac{3}{2}}+9u^{\frac{1}{2}}\right)du$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}-\frac{6u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{9u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C\right)=\frac{1}{7}u^{\frac{7}{2}}-\frac{6}{5}u^{\frac{5}{2}}+3u^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{7}(3+x^2)^{\frac{7}{2}}-\frac{6}{5}(3+x^2)^{\frac{5}{2}}+3(3+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

**(2)**

$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x)\sqrt{1+\cot x}}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1+\cot x}} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}\, dx$$

$$= \int (1+\cot x)^{-1/2} \cdot \csc^2 x\, dx$$

نفرض أن

$$u = 1+\cot x$$

$$du = -\csc^2 x\, dx$$

$$\therefore -\int (1+\cot x)^{-1/2} \cdot -\csc^2 x\, dx$$

بالتعويض

$$= -\int u^{-1/2}\, du$$

$$= -\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= -2\sqrt{u} + c$$

$$= -2\sqrt{1+\cot x} + c$$

**(3)**

أوجد: $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$

الحل

$u = \frac{1}{x}$

$du = -\frac{1}{x^2} dx$

$-du = \frac{1}{x^2} dx$

$I = \int e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} dx$

$= -\int e^{u} \cdot du$

$= -e^{u} + C = -e^{\frac{1}{x}} + C$

**(4)**

$$\int (2\tan x - \csc^2 x)\, dx$$

$$\int tanx\, dx = \int \frac{sin\, x}{cos\, x} dx$$

$u = \cos x$

$du = -\sin x\, dx$

$$= -\int \frac{du}{u}$$

$$= -\,ln\,|u| + C$$

$$= -\,ln\,|\ cos\ x\ | + C$$

$$\therefore \mathrm{I} = -2\ln|\cos x| + \cot x + C$$

**(5)**

أوجد: $\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

حلل المقام $x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1) = x\,(x-1)^2$

اصفار المقام $\boxed{0}$ $\boxed{1}$ مكرر

| المقامات | الأصفار |
|---|---|
| $x$ | $0$ |
| $x-1$ | $1$ |
| $(x-1)^2$ | $1$ |

بالضرب في $x(x-1)^2$

$$\frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$4x^2-4x+1 = A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$$

التعويض بأصفار المقام

بالتعويض في 1 بـ $x=0$

$$1 = A(0-1)^2+\cancel{B(0)}+\cancel{C(0)}$$

A= 1

بالتعويض في 1 بـ $x=1$

$$4(1)^2-4(1)+1 = \cancel{A(0)}+\cancel{B(0)}+C(1)$$

C = 1

$x$ قيمة اختيارية لا تساوي أصفار المقام و $A, C$ من الحل

بالتعويض في 1 بـ $x=2,\ A=1,\ C=1$

$$4(2)^2-4(2)+1 = (1)(2-1)^2+B(2)(2-1)+(1)(2)$$

B = 3

تابع الحل

أوجد: $\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

A = 1

B = 3

C = 1

$$\frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x}+\frac{3}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\int\frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2}dx = \int\frac{1}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}dx$$

$$= \int\frac{1}{x}dx+\int\frac{3}{x-1}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx =$$

$$= \ln|x| + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1}+C$$

## (6)

حلل المقام

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2}\,dx$$

$$x^3+4x^2 = x^2(x+4)$$

اصفار المقام: 0 مكرر ، $-4$

الأصفار: $0$ ، $0$ ، $-4$

المقامات: $x$ ، $x^2$ ، $x+4$

بالضرب في $x^2(x+4)$

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+4}$$

$$x^2+1 = Ax(x+4) + B(x+4) + Cx^2$$

التعويض بأصفار المقام

بالتعويض في 1 بـ $x=0$

$$0^2+1 = \cancel{A(0)} + B(0+4) \cancel{+C(0)} \qquad B = \frac{1}{4}$$

بالتعويض في 1 بـ $x=-4$

$$(-4)^2+1 = \cancel{A(0)} \cancel{+B(0)} + C(-4)^2 \qquad C = \frac{17}{16}$$

$x$ قيمة اختيارية لا تساوي أصفار المقام و $B, C$ من الحل

بالتعويض في 1 بـ $x=1\,,\, B=\frac{1}{4}\,,\, C=\frac{17}{16}$

$$(1)^2+1 = A(1)(1+4) + \frac{1}{4}(1+4) + \frac{17}{16}(1)^2 \qquad A = \frac{-1}{16}$$

تابع الحل

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+4}$$

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)} = \frac{\frac{-1}{16}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{17}{16}}{x+4}$$

$A = \frac{-1}{16}$

$B = \frac{1}{4}$

$C = \frac{17}{16}$

$$\int \frac{x^2+1}{x(x+4)^2}\,dx = \int \frac{\frac{-1}{16}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{17}{16}}{x+4}\,dx =$$

$$= \int \frac{\frac{-1}{16}}{x}\,dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x^2}\,dx + \int \frac{\frac{17}{16}}{x+4}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{4x} + \frac{17}{16}\ln|x+4| + C$$

## (7)

**بأستخدام القسمه المطولة:**

## A)

$$\frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2} = 1 + \frac{9x-7}{(x-3)^2}$$

$$\frac{9x-7}{(x-3)^2} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{(x-3)^2}$$

$$9x-7 = A_1(x-3) + A_2$$

عوّض عن $x$ بـ 3 $\therefore \quad A_2 = 20$

عوّض عن $A_2$ بـ 20 ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة $A_1$.

$$\therefore \quad A_1 = 9$$

$$\frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2} = 1 + \frac{9}{x-3} + \frac{20}{(x-3)^2}$$

$$\int \frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}dx = x + 9\ln|x-3| - \frac{20}{x-3} + C$$

---

## B)

$$\frac{2x^2+x+3}{x^2-1} = 2 + \frac{x+5}{x^2-1}$$

$$\frac{x+5}{x^2-1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1}$$

$$x+5 = A_1(x+1) + A_2(x-1)$$

عوّض عن $x$ بـ 1 $\therefore \quad A_1 = 3$

عوّض عن $x$ بـ $-1$ $\therefore \quad A_2 = -2$

$$\frac{2x^2+x+3}{x^2-1} = 2 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{2x^2+x+3}{x^2-1}dx = \int \left(2 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$= 2x + 3\ln|x-1| - 2\ln|x+1| + C$$

**(8)**

$$\int (4x-1)\ln x \ dx$$

الحل :

$u = \ln x \qquad dv = (4x-1)dx$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = 2x^2 - x = x(2x-1)$

$$\int u\,dv = u.v - \int v\,du$$

$$\int (4x-1)\ln x \ dx$$

$$= x(2x-1)\ln x - \int \frac{1}{x} .x(2x-1)dx$$

$$= x(2x-1)\ln x - \int (2x-1)dx$$

$$= x(2x-1)\ln x - (x^2 - x) + c$$

$$= x(2x-1)\ln x - x^2 + x + c$$

**(9)**

$$\int x\sin(5x)dx$$

$u = x \qquad dv = \sin(5x)dx$

$du = dx \qquad v = \frac{-\cos(5x)}{5}$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x\sin(5x)dx$$

$$= \frac{-1}{5}x\cos(5x) - \int \frac{-\cos(5x)}{5}dx$$

$$= \frac{-1}{5}x\cos(5x) + \frac{1}{5}\int \cos(5x)\,dx$$

$$= \frac{-1}{5}x\cos(5x) + \frac{1}{5}\left(\frac{\sin(5x)}{5}\right) + c$$

$$= \frac{-1}{5}x\cos(5x) + \frac{1}{25}(\sin(5x)) + c$$

**(10)**

أوجد: $\int x^2 \ln x^2 \, dx$

الحل

$$I = \int 2x^2 . \ln x \, dx$$

$u = \ln x \qquad dv = 2x^2 \, dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad \int \quad V = \frac{2}{3} x^3$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$I = \ln x . \frac{2}{3}x^3 - \int \frac{2}{3} x^{\cancel{3}\,2} . \frac{1}{\cancel{x}} dx$$

$$I = \frac{2}{3}x^3 . \ln x - \frac{2}{3} \int x^2 dx$$

$$I = \frac{2}{3}x^3 . \ln x - \frac{2}{3} . \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$I = \frac{2}{3}x^3 . \ln x - \frac{2}{9} x^3 + C$$

# (11)

$$\int x^2 e^{2x-3} dx$$

$u = x^2 \qquad dv = e^{2x-3} dx$

$du = 2x dx \qquad v = \frac{1}{2} e^{2x-3}$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x^2 e^{2x-3} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x-3}$$

$$- \int x e^{2x-3} dx \ldots\ldots\ldots (1)$$

نستخدم قاعدة التجزيء مرة أخرى لإيجاد تكامل

$$\int x e^{2x-3} dx$$

$u = x \qquad dv = e^{2x-3} dx$

$du = dx \qquad v = \frac{1}{2} e^{2x-3}$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x e^{2x-3} dx = \frac{1}{2} x e^{2x-3} - \frac{1}{2} \int e^{2x-3} dx$$

$$= \frac{1}{2} x e^{2x-3} - \frac{1}{4} e^{2x-3} + c \qquad (2)$$

من $(2)$ ، $(1)$ نحصل على

$$\therefore \int x^2 e^{2x-3} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x-3} - \frac{1}{2} x e^{2x-3} + \frac{1}{4} e^{2x-3} + c$$

$$= \left( \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) e^{2x-3} + c$$

**(12)**

$$\boxed{\int_{-2}^{3} (x|x|+3)\,dx}$$

$$= \int_{-2}^{0} (x|x|+3)\ dx + \int_{0}^{3} (x|x|+3)\ dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (-x^2+3)dx\ +\ \int_{0}^{3} (x^2+3)dx$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} + 3x\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{+x^3}{3} + 3x\right]_{0}^{3}$$

$$= -\left[\frac{8}{3} - 6\right] + [9+9-0]$$

$$= \frac{10}{3} + 18 = \frac{64}{3} = 21,3333$$

**(13)**

$$\boxed{\int_1^e \frac{\ln^6 x}{x}\,dx}$$

$$\int_1^e \frac{\ln^6 x}{x}\quad dx = \int_1^e \frac{(\ln\ x)^6}{x}\ dx$$

$$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}\ dx$$

$$x \xrightarrow{=} e \qquad u \xrightarrow{=\ln e} 1$$

$$x \xrightarrow{=} 1 \qquad u \xrightarrow{=\ln 1} 0$$

$$\int_0^1 u^6\ du$$

$$\left[\frac{u^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{7}$$

**(14)**

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \overset{u}{x}\ \overset{dv}{sec^2x\ dx} =$$

نحل كتكامل غير محدد بالتجزيء
ثم وضع حدود التكامل بعد الحصول على الحل النهائي

نفرض أن

تفاضل | تكامل
$u = x$ | $dv = sec^2x\ dx$
$du = dx$ | $v = tan\, x$

$$\int u\, dv = u\ v - \int v\, du$$

$$\int x\ sec^2x\ dx = x\tan x - \int \tan x\, dx$$

$$= x\tan x + ln|cos x| + C$$

$$\int tanx\, dx = \int \frac{sinx}{cosx} dx$$

$u = cosx$

$du = -sinx\, dx$

$-du = sinx\, dx$

$$\int tanx\, dx = \int -\frac{1}{u} du$$

$$= -ln|u| + C$$

$$= -ln|cosx| + C$$

---

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\ sec^2x\ dx = [xtanx + ln|cosx|]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left[\frac{\pi}{4}tan\frac{\pi}{4} + ln\left|cos\frac{\pi}{4}\right|\right] - [(0)tan(0) + ln|cos(0)|]$$

$$= \left[\frac{\pi}{4}(1) + ln\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\right] - [\cancel{(0)}(0) + \cancel{ln}|1|] = \frac{\pi}{4} + ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**(15)**

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات في الفترة المبينة.

$f(x) = \cos x \quad , \quad [0 , \pi]$

**الحل :**

**نلاحظ أنه في الفترة** $[0, \pi]$

**تنقسم المنطقة المطلوبة إلى منطقتين حيث** $f(x) = 0$ **عند** $x = \frac{\pi}{2}$

**فتكون المساحة المطلوبة كما يلي :**

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx \right|$$

$$= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos x)dx \right|$$

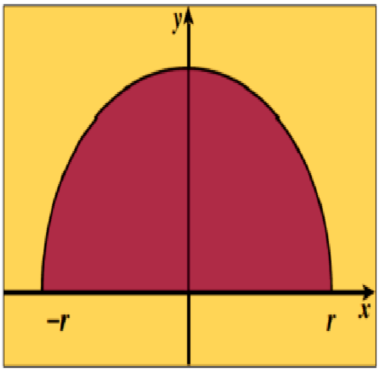
$$= \left| [sinx]_0^{\frac{\pi}{2}} \right| + \left| (sinx)_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right|$$

$$= \left| \left[\sin(\frac{\pi}{2})\right] - [\sin(0)] \right| + \left| [\sin(\pi)] - \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \right| = 2 \quad square \;\; units$$

**(16)**

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة

حول محور السينات والمحددة بنصف الدائرة $y=\sqrt{r^2-x^2}$



شكل توضيحي

**الحل :**

$$y=\sqrt{r^2-x^2}$$

تمثل معادلة نصف دائرة مركزها $(0,0)$ و طول نصف قطرها $r$

المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات هو كرة

$$V=\pi\int_{-r}^{r} y^2 dx=\pi\int_{-r}^{r}(\sqrt{r^2-x^2})^2 dx$$

$$=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx$$

$$=\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r}$$

$$=\pi\left(\left[r^2(r)-\frac{1}{3}(r)^3\right]-\left[r^2(-r)-\frac{1}{3}(-r)^3\right]\right)$$

$$=\frac{4}{3}\pi r^3 \text{ cubic units}$$

## (17)

اوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بين منحنيي الدالتين

$f(x)=\frac{x^2}{2}+1 \quad , \quad g(x)=\frac{x}{2}+2$

الحل : نوجد نقاط التقاطع

$$f(x)=g(x)$$

$$\frac{x^2}{2}+1=\frac{x}{2}+2$$

$$\frac{x^2}{2}+1-\frac{x}{2}-2=0$$

$$\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-1=0$$

$$x=2 \quad , \qquad x=-1$$

نأخذ نقطة اختيارية في الفترة $(-1,2)$ و لتكن $x=0$

$$f(0)=\frac{(0)^2}{2}+1=1$$

$$g(0)=\frac{(0)}{2}+2=2$$

$$g(x)\ge f(x)\ge o \quad \forall\, x\in[-1,2]$$

$$V=\pi\int_{-1}^{2}((g(x))^2-(f(x))^2)dx=\pi\int_{-1}^{2}((\frac{x}{2}+2)^2-(\frac{x^2}{2}+1)^2)dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{2}(\left(\frac{x^2}{4}+2x+4\right)-\left(\frac{x^4}{4}+x^2+1\right))dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{2}(\frac{x^2}{4}+2x+4-\frac{x^4}{4}-x^2-1)dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{2}(-\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{4}+2x+3)dx$$

$$=\pi\left[-\frac{x^5}{20}-\frac{x^3}{4}+x^2+3x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\pi(\left[-\frac{32}{20}-2+4+6\right]-\left[\frac{1}{20}+\frac{1}{4}+1-3\right])$$

$$=\frac{81}{10}\pi \text{ cubic units}$$

**(18)**

## حاله خاصة :

تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x=-1$ إلى $x=2$ ويتقاطعا عند النقطة $x=\frac{1}{2}$..

$$V=\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}[(-x+3)^2-(x+2)^2]dx+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}[(x+2)^2-(-x+3)^2]dx=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(5-10x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(-5+10x)dx$$

$$=[5x-5x^2]_{-1}^{\frac{1}{2}}+[-5x+5x^2]_{\frac{1}{2}}^{2}=\ 22.5\text{ unit cub}$$

**(19)**

أوجد طول القوس من منحنى الدالة $f$ :

$f(x) = 5 + 2\sqrt{x^3}$ في الفترة $\left[0 , \frac{1}{3}\right]$

**الحل :**

$$f(x) = 5 + 2x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + 9x}\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} (1 + 9x)^{\frac{1}{2}}\ dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^{\frac{1}{3}} 9\ (1 + 9x)^{\frac{1}{2}}\ dx$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}(1 + 9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{2}{3}\left[(4)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\therefore L = \frac{14}{27}\ (\text{وحدة طول})$$

**(20)**

إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة $f$ عند أي نقطة عليه $(x , y)$ هو $2x - 1$

فأوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة $B(1 , 0)$

الحل : ميل العمودي $= \dfrac{-1}{f'(x)}$ $\quad f'(x) \neq 0$

$$\frac{-1}{f'(x)} = 2x - 1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2x - 1}$$

$$f(x) = \int \frac{-1}{2x - 1} dx$$

$$= \frac{-1}{2} ln\,|2x - 1| + C$$

لإيجاد قيمة الثابت $C$ نعوض بالنقطة $B(1,0)$ في المعادلة السابقة فنجد :

$$0 = \frac{-1}{2} ln\,|2(1) - 1| + C$$

$$C = 0$$

معادلة منحنى الدالة $f$ المطلوب هو :

$$f(x) = \frac{-1}{2} ln\,|2x - 1|$$

**(21)**

حل المعادلة التفاضلية:

**a)** $$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x}\Rightarrow\int\frac{dy}{y}=2\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y|=2\ln|x|+C$$

$$y=\pm e^{2\ln|x|+C}$$

$$y=ke^{2\ln|x|}\quad,\quad k=\pm e^{C}$$

**b)** $y'=-2y$ إذا كان $y=3$ عند $x=0$

كتابة المعادلة على الصورة: $y'=ay$

$$y=ke^{ax}$$

$$y=ke^{-2x}$$

$$3=ke^{0}$$
$$k=3$$

ومنه:

$$y=3e^{-2x}$$

## (22)

أوجد البؤرة و الدليل لقطع مكافئ ، ثم إرسم شكلا تقريبا لهذا القطع في كل مما يلي :

المعادلة : $y = \frac{x^2}{4}$

**الحل**

نضع المعادلة على الصورة $x^2 = 4y$

المعادلة في الصورة $x^2 = 4py$

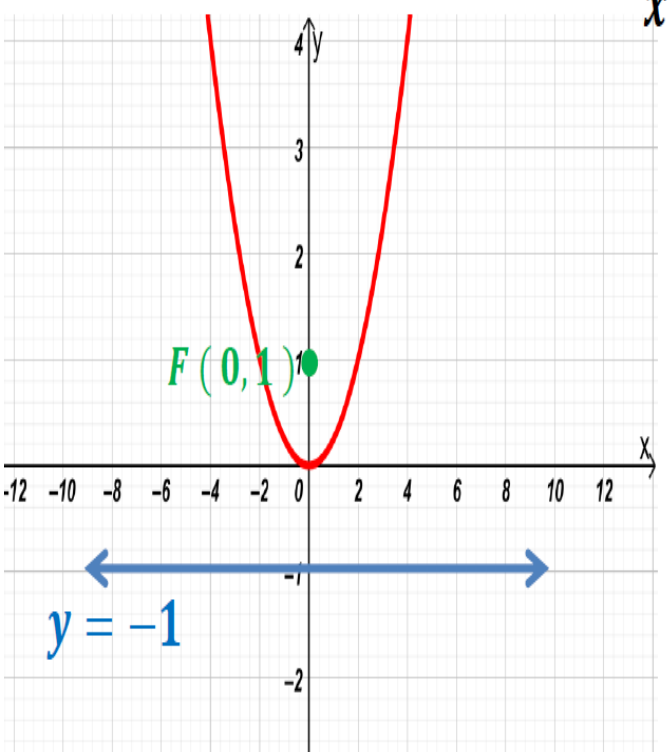
محور التماثل هو محور الصادات

$\therefore\ 4p = 4 \Rightarrow p = 1$

$\therefore$ البؤرة $F(0,p) = F(0,1)$

معادلة الدليل :

$y = -p \Rightarrow y = -1$



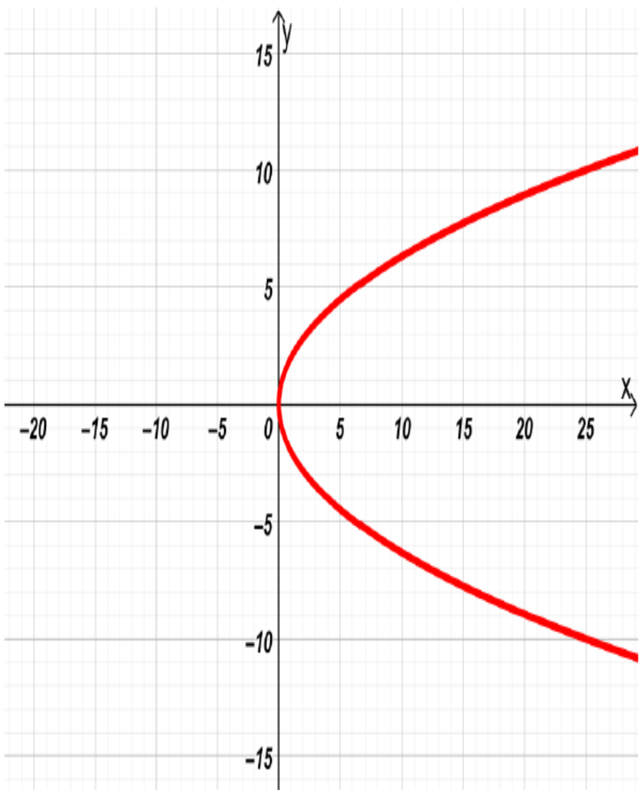
**(23)**

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و يمر بالنقطة $A(1,2)$
و خط تماثله $x\text{-}axis$

**الحل**

رأس القطع المكافئ نقطة الأصل ، و خط تماثله $x\text{-}axis$

المعادلة في الصورة $y^2 = 4px$




القطع المكافئ يمر بالنقطة $A(1,2)$

تحقق المعادلة أي أن :

$$(2)^2 = 4p(1)$$

$$\therefore \ 4 = 4p \ \Rightarrow p = 1$$

المعادلة هي : $y^2 = 4(1)x$

$$y^2 = 4x$$

**(24)**

**اكتب معادلة القطع الناقص الذي فيه:**

$V_1F_1 + V_1F_2 = 10$، حيث إنّ $V_1$ هو نقطة على القطع الناقص، $F_2$ و $F_1$ هما البؤرتين، علمًا أنّ $F_1(3,0)$، $F_2(-3,0)$.

**الحل:** تقع البؤرتان على محور السينات فتكون المعادلة علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ وتكون $c=3$

$$V_1F_1 + V_2F_2 = 10 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow a^2 = 25$$

$$C^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 9 = 25 - b^2 \Rightarrow b^2 = 16$$

:.معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

**(25)**

أوجد معادلة القطع الزائد الذي أحد رأسيه $\left(0\,,\frac{5}{4}\right)$ ويمر بالنقطة $\left(-\sqrt{3}\,,-\frac{5}{2}\right)$

$\because \left(0 , \frac{5}{4}\right)$ رأس القطع $\therefore$ رأس القطع على محور الصادات

$$a = \frac{5}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{25}{16}$$

ومعادلة القطع من الشكل $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ، بالتعويض

$$\frac{16y^2}{25} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$\because \left(-\sqrt{3} , -\frac{5}{2}\right) \in$ للقطع

$$\therefore \frac{16 \times \frac{25}{4}}{25} - \frac{3}{b^2} = 1 \Rightarrow 4 - 1 = \frac{3}{b^2} \Rightarrow b^2 = 1$$

$\therefore$ معادلة القطع الزائد $\frac{16y^2}{25} - \frac{x^2}{1} = 1$

## (26)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وإحدى بؤرتيه $F(0,\sqrt{34})$ ومعادلة أحد خطيه المقاربين هي: $y=\frac{3}{5}x$

الحل:

$\because$ إحدى البورتين $F(0,\sqrt{34})$

$\therefore$ المحور القاطع ينطبق على محور الصادات ومعادلته: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

$\because\ c^2=a^2+b^2$

$\therefore\ 34=a^2+b^2 \qquad (1)$

معادلة المقارب: $y=\frac{a}{b}x$ حيث من المعطى $y=\frac{3}{5}x$

$\therefore\ \frac{3}{5}=\frac{a}{b}$

$\therefore\ a=\frac{3b}{5}$

بالتعويض في المعادلة $(1)$: $34=\left(\frac{3b}{5}\right)^2+b^2$

$34=\frac{9b^2}{25}+b^2$

$850=9b^2+25b^2$

$b^2=\frac{850}{34}$

$b^2=25 \qquad \Longrightarrow \quad b=5$

لإيجاد قيمة $a$ نستخدم: $a=\frac{3b}{5}$

$a=\frac{3\times 5}{5}=3$

ومعادلة القطع الزائد هي: $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{25}=1$

**(27)**

أوجد الاختلاف المركزي للقطع الذي معادلته

$$x^2 - 25y^2 = 1$$

الحل :

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{25}} = 1$$

بالمقارنة قطع زائد معادلته: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$a^2 = 1 \quad \rightarrow a = 1$$

$$b^2 = \frac{1}{25} \quad \rightarrow b = \frac{1}{5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 1 + \frac{1}{25}$$

$$c^2 = \frac{26}{25}$$

$$c = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

الاختلاف المركزي : $e = \frac{c}{a}$

$$e = \frac{\frac{\sqrt{26}}{5}}{1}$$

$$e = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

**(28)**

أوجد طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي اختلافه المركزي $\left(e = \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ وطول محوره الأصغر 4 وحدات.

الحل:

$$\because \quad e = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \quad \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

أي:

$$c = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

طول المحور الأصغر 4 أي

$$2b = 4$$

$$b = 2$$

في القطع الناقص:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$\frac{5a^2}{9} = a^2 - 4$$

$$a^2 = 4 + \frac{5a^2}{9}$$

$$9a^2 = 36 + 5a^2$$

$$4a^2 = 36$$

$$a^2 = 9$$

$$a = 3$$

$$2a = 2(3) = 6$$

طول المحور الأكبر = 6 وحدات.