مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL

Tuesday, February 6, 2024

الرياضيات للصف الثانى عشر

المستوى المتقدم

السنة الدراسية 2023 / 2024
الفصل الدراسى الثانى

+971566151988/

أ/ محمد طه

الوحدة 4
(تطبيقات الاشتقاق)

الدرس التاسع

اسم الدرس :

معدلات التغير فى الاقتصاد والعلوم

Tuesday, February 6, 2024

أهداف التعلم

- حل المشكلات الاقتصادية والعلمية فى القيم القصوى.

مفردات الدرس

- مجموع / هامش / متوسط التكلفة
- مرونة الطلب .
- التفاعل الكيميائى / نقطة التكافؤ
- الكثافة الخطية للكتلة .
- المواد المتجانسة / الأجسام الغير متجانسة
- النمو اللوجستى

Tuesday, February 6, 2024

مقدمة

المشتقة هى **معدل التغير اللحظى** للدالة .

أمثلة :

معدل التضخم :	مشتقة دالة التضخم
معدل الفائدة	مشتقة دالة الربح

فى الاقتصاد :

الهامش يشير إلى **المعدل** و هو **المشتقة** .

أمثلة :

التكلفة الحدية	معدل التغير فى التكلفة هو مشتقة دالة التكلفة
الربح الحدى	معدل التغير فى الربح هو مشتقة دالة الربح

دالة التكلفة الكلية لإنتاج x منتج $C(x)$ تؤثر الكثير من عوامل الإنتاج على التكلفة مما يتسبب فى أن تكلفة كل منتج تكون غير ثابتة .

Tuesday, February 6, 2024

تحليل التكلفة الحدية لمنتجات تجارية

مثال

9.1صفحة307

على فرض أن $C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$ هو إجمالي التكلفة (بالدولار) لشركة معينة تنتج x وحدة من منتجات معينة .
أوجد قيمة التكلفة الحدية عند $x = 100$ و قارنها بالتكلفة الفعلية لإنتاج 100 وحدة .

الحل

ملحوظة :التكلفة الحدية عند x=100 تعني معدل التغير في التكلفة عند المنتج رقم مئة

تكلفة الوحدة غير ثابتة

إجمالي التكلفة : $C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$

دالة التكلفة الحدية : (مشتقة دالة التكلفة) $C'(x) = 0.04x + 2$

التكلفة الحدية عند المنتج رقم $x = 100$: $C'(100) = 0.04(100) + 2 = 6$ دولارللوحدة

إجمالي التكلفة لإنتاج 100 وحدة .
إجمالي التكلفة لإنتاج 99 وحدة .

التكلفة الفعلية لإنتاج الوحدة رقم مئة = $C(100) - C(99)$

$$= 0.02(100)^2 + 2(100) + 4000 - (0.02(99)^2 - 2(99) - 4000)$$

$$= 200 + 200 + 4000 - 196.02 - 198 - 4000$$

$$= 5.98\ \$$$

وهذا قريب جدًا من التكلفة الحدية البالغة 6 $

التكلفة الحدية سهلة فى حسابها .

تحليل التكلفة الحدية لمنتجات تجارية

تمرين

Q1صفحة313

إذا كانت تكلفة تصنيع x وحدة هى $C(x) = x^3 + 20x^2 + 90x + 15$ is . أوجد دالة التكلفة الحدية و قارن بين التكلفة الحدية بمعدل $x = 50$ و التكلفة الفعلية لـ 50 منتجًا .

الحل

إجمالى التكلفة : $C(x) = x^3 + 20x^2 + 90x + 15$

دالة التكلفة الحدية : (مشتقة دالة التكلفة) $C'(x) = 3x^2 + 40x + 90$

التكلفة الحدية عند المنتج رقم $x = 50$: $C'(50) = 3(50)^2 + 40(50) + 90 = 9590$ دولارللوحدة

تكلفة الوحدة غير ثابتة

إجمالى التكلفة لإنتاج 50 وحدة

إجمالى التكلفة لإنتاج 49 وحدة

التكلفة الفعلية لإنتاج الوحدة رقم مئة = $C(50) - C(49)$

$$= (50)^3+20(50)^2+90(50) + 15 - ((49)^3 + 20(49)^2 + 90(49) + 15)$$

$$= 179515 - 170094$$

$$= 9421\ AED$$

وهذا قريب جدًا من التكلفة الحدية البالغة 9590 $ للوحدة.

التكلفة الحدية سهلة فى حسابها .

متوسط التكلفة

متوسط تكلفة الإنتاج للوحدة يساوى **التكلفة الكلية** للإنتاج مقسومًا على **عدد الوحدات** المنتجة .

متوسط التكلفة $= \frac{\text{إجمالى التكلفة}}{\text{عدد الوحدات}}$

متوسط التكلفة : $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$

شركات الإنتاج تريد أن تعرف مستوى الإنتاج الذى يكون عنده متوسط التكلفة صغيرًا .

و هذا يكون بإيجاد التفاضل لدالة متوسط التكلفة و إيجاد الأعداد الحرجة (عدد الوحدات) التى عندها يكون لدينا قيمة صغرى .

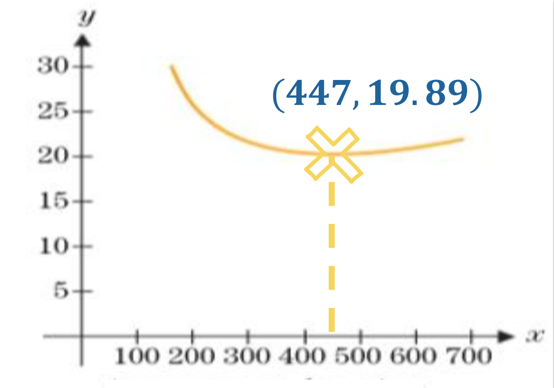
القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة لمنتجات تجارية

مثال

9.2صفحة307

على فرض أن $C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$ هو إجمالى التكلفة (بالدولار) لشركة معينة تنتج x وحدة من منتجات معينة .
فأوجد مستوى الإنتاج x الذى يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة .

الحل



دالة متوسط التكلفة

إجمالى التكلفة : $C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$

متوسط التكلفة : $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} \Rightarrow \overline{C}(x) = \frac{0.02x^2 + 2x + 4000}{x} = 0.02x + 2 + 4000\,x^{-1}$

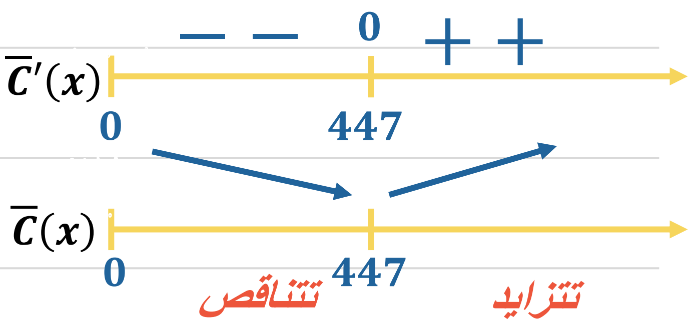
لإيجاد القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة فإننا نجد مشتقة دالة متوسط التكلفة و بهذا نبدأ بإيجاد أعداد حرجة

مشتقة دالة متوسط التكلفة : $\overline{C}'(x) = 0.02 - 4000\,x^{-2}$

الأعداد الحرجة : $\overline{C}'(x) = 0 \Rightarrow 0.02 - 4000\,x^{-2} = 0 \Rightarrow 0.02 = 4000\,x^{-2}$

$\Rightarrow x^2 = \frac{4000}{0.02} \Rightarrow x^2 = 200{,}000$

عدد الوحدات لا يكون سالبًا $\cancel{x \approx -447}$ أو $\boxed{x \approx 447}$



$\overline{C}'(x) < 0$ علي (0.447) $\overline{C}'(x) > 0$ علي $(447, \infty)$ $\overline{C}(447)$ قيمة صغرى مطلقة .

متوسط التكلفة له قيمة صغرى عند مستوى الإنتاج $x \approx 447$ وحدة .

Tuesday, February 6, 2024

القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة لمنتجات تجارية

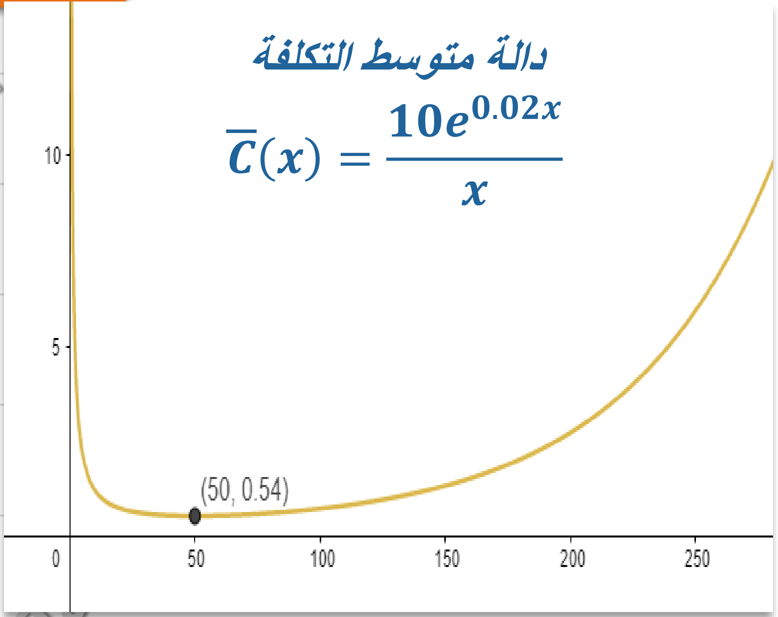
تمرين

Q9صفحة313

أوجد مستوى الإنتاج الذى يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة

$$C(x)=10e^{0.02x}$$

الحل



دالة متوسط التكلفة

$$\bar{C}(x)=\frac{10e^{0.02x}}{x}$$

إجمالى التكلفة : $C(x)=10e^{0.02x}$

متوسط التكلفة : $\bar{C}(x)=\frac{C(x)}{x} \Rightarrow \bar{C}(x)=\frac{10e^{0.02x}}{x}$

لإيجاد القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة فإننا نجد مشتقة دالة متوسط التكلفة وبهذا نبدأ بإيجاد أعداد حرجة

مشتقة متوسط التكلفة :

$$\bar{C}'(x)=\frac{0.02\left(10e^{0.02x}\right)(x)-10e^{0.02x}(1)}{x^2}$$

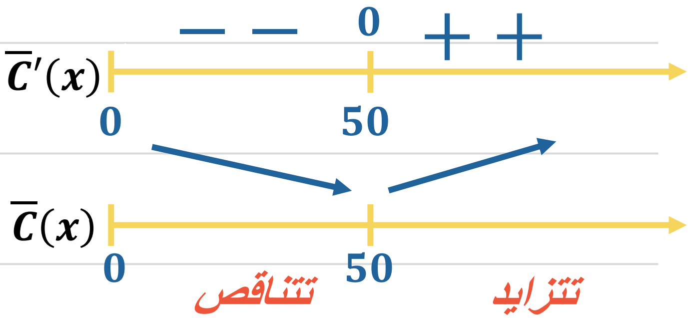
$$\bar{C}'(x)=\frac{0.2xe^{0.02x}-10e^{0.02x}}{x^2}$$

$$\bar{C}'(x)=\frac{e^{0.02x}(0.2x-10)}{x^2}$$

الأعداد الحرجة :

$\bar{C}'(x)=0 \Rightarrow \cancel{e^{0.02x}=0}$ أو $0.2x-10=0 \Rightarrow x=\frac{10}{0.2}$

$e^{0.02x}>0 \Rightarrow \boxed{x=50}$



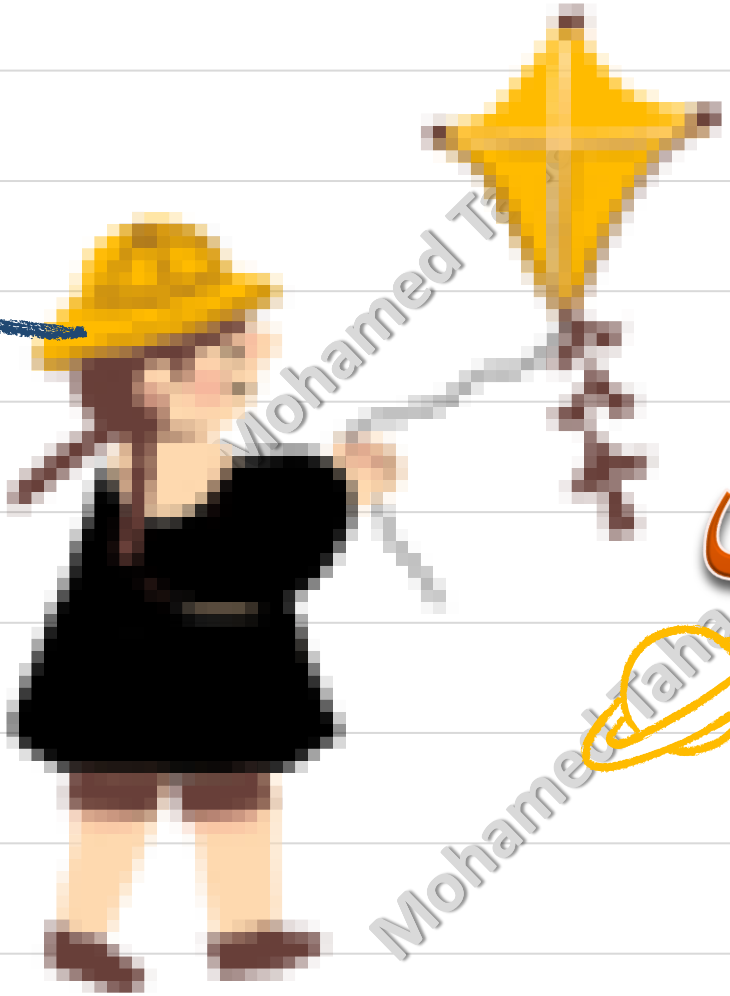
$\bar{C}'(x)<0$ علي (0.50)

$\bar{C}'(x)>0$ علي $(50,\infty)$

$\bar{C}(50)$ قيمة صغرى مطلقة .

متوسط التكلفة له قيمة صغرى عند مستوى الإنتاج $x=50$ وحدة .

Tuesday, February 6, 2024



الدرس الثانى

+971566151988/

أ/ محمد طه

أهداف التعلم

* حل المشكلات الاقتصادية و العلمية فى القيم القصوى.

Tuesday, February 6, 2024

مرونة الطلب

بشكل عام ، الزيادة فى الأسعار ستؤدى إلى انخفاض الطلب (الإيرادات). هذا ليس الحال دائمًا

المنتجات

- مرونة: الزيادة فى الأسعار يسبب تناقص الطلب و تناقص الإيرادات . مثال : الكماليات
- عدم مرونة: الزيادة فى الأسعار لا يؤثر فى الطلب و هذا يسبب زيادة الإيرادات . مثال : البترول

مرونة الطلب

استجابة (تغير) الطلب نتيجة للتغيرات الصغيرة فى السعر

المرونة فى الطلب عند سعر p : $E = \dfrac{\text{التغير النسبى فى الطلب}}{\text{التغير النسبى فى السعر}}$

المعطيات

الطلب : $x = f(p)$

السعر : p

مرونة الطلب

$$\boxed{E = \frac{p}{f(p)} f'(p)}$$

الأسعار التى يكون فيها $E < -1$ توجد مرونة فى الطلب أي أن الزيادة فى الأسعار تقلل الإيرادات .

الإيرادات تساوى عدد الوحدات المباعة مضروبًا فى سعر الوحدة .

$$\boxed{\text{الإيرادات} \quad R(p) = pf(p)}$$

Tuesday, February 6, 2024

إيجاد قيمة مرونة الطلب و التغير فى الإيرادات

مثال

9.3صفحة308

على فرض أن $f(p) = 400(20 - p)$ هو طلب منتج معين بسعر p (درهم) ، $p < 20$

a) أوجد مرونة الطلب .

b) أوجد مدى الأسعار التى تجعل $E < -1$ ، قارن مدى الأسعار هذا الذى تكون فيه الإيرادات دالة متناقصة لـ p

الحل

a)

الطلب (كدالة السعر p) :

$$f(p) = 400(20 - p)$$

$$f(p) = 8000 - 400p$$

$$f'(p) = -400$$

مرونة الطلب :

$$E = \frac{p}{f(p)} f'(p)$$

$$E = \frac{p}{\cancel{400}(20 - p)}(-\cancel{400})$$

$$E = -\frac{p}{20 - p}$$

$$E = \frac{p}{p - 20}$$

b) $E < -1$

$$\frac{p}{p - 20} < -1$$

$$(p - 20) \cdot \frac{p}{p - 20} < -1 \cdot (p - 20)$$

$$p > -(p - 20)$$

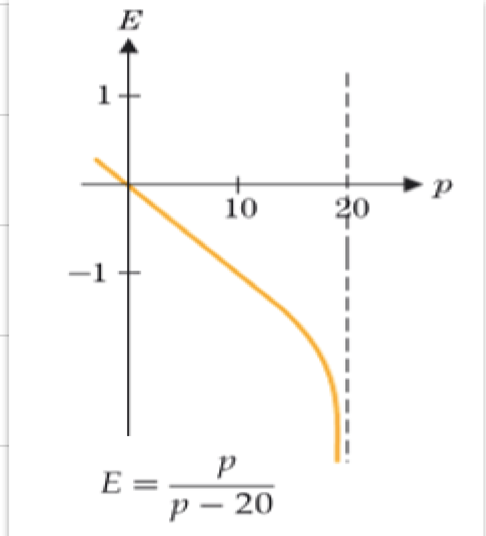
بما أن $p < 20$
$(p - 20) < 0$

$$p > -p + 20$$

$$2p > 20$$

$$p > 10 \Rightarrow \boxed{10 < p < 20}$$

مدى الأسعار التى تجعل $E < -1$



Tuesday, February 6, 2024

إيجاد قيمة مرونة الطلب و التغير فى الإيرادات

مثال

9.3صفحة 308

على فرض أن $f(p)=400(20-p)$ هو طلب منتج معين بسعر p (درهم) ، $p<20$
(a أوجد مرونة الطلب .
(b أوجد مدى الأسعار التى تجعل $E<-1$ ، قارن مدى الأسعار هذا الذى تكون فيه الإيرادات دالة متناقصة لـ p

الحل

الإيرادات : $R(p)=pf(p)$

$R(p)=P(8000-400p)$

$R(p)=8000p-400p^2$

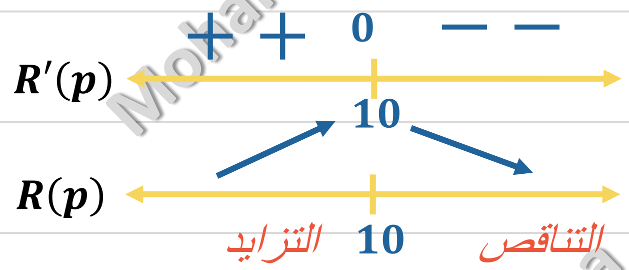
لتحليل الإيرادات ، نقوم بإيجاد التفاضل و إيجاد الأعداد الحرجة .

$R'(p)=8000-800p$

الأعداد الحرجة : $R'(p)=0$

$8000-800p=0$

$\boxed{p=10}$

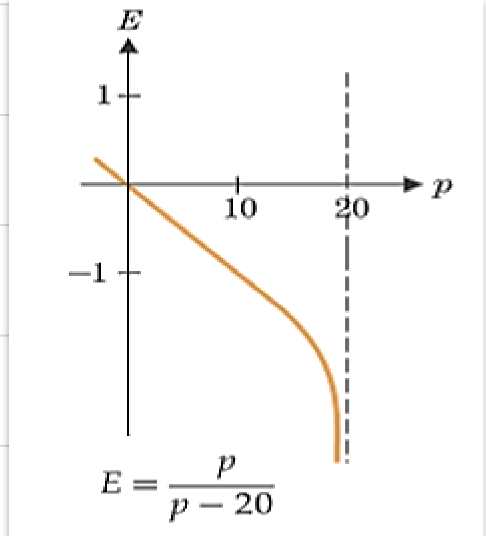


$p<10$ لـ $R'(p)>0$
$p>10$ لـ $R'(p)<0$
$R(10)$ قيمة عظمى مطلقة

الإيرادات تتناقص إذا تجاوز السعر 10

الأسعار فى حالة $E<-1$ ، يكون الطلب مرنًا

تبعًا للأسعار التى إذا تزايدت الأسعار فإن الإيرادات تتناقص .



إيجاد قيمة مرونة الطلب و التغير فى الإيرادات

تمرين

Q13صفحة313

على فرض أن الطلب :
$f(p) = 200(30 - p)$

a) أوجد مرونة الطلب .

b) أوجد مدى الأسعار الذى يكون فيه **الطلب مرنًا** $(E < -1)$.

الحل

a) الطلب : $f(p) = 200(30 - p)$

عندما يكون الطلب موجبًا $p < 30$

$$f(p) = 6000 - 200p$$

$$f'(p) = -200$$

المرونة فى الطلب : $E = \frac{p}{f(p)} f'(p)$

$$E = \frac{p}{\cancel{200}(30 - p)}(-\cancel{200})$$

$$E = -\frac{p}{30 - p}$$

$$E = \frac{p}{p - 30}$$

b) مرونة الطلب عند $E < -1$

$$E < -1$$

$$\frac{p}{p - 30} < -1$$

$$(p - 30) \cdot \frac{p}{p - 30} < -1 \cdot (p - 30)$$

بما أن $p < 30$
$(p - 30) < 0$

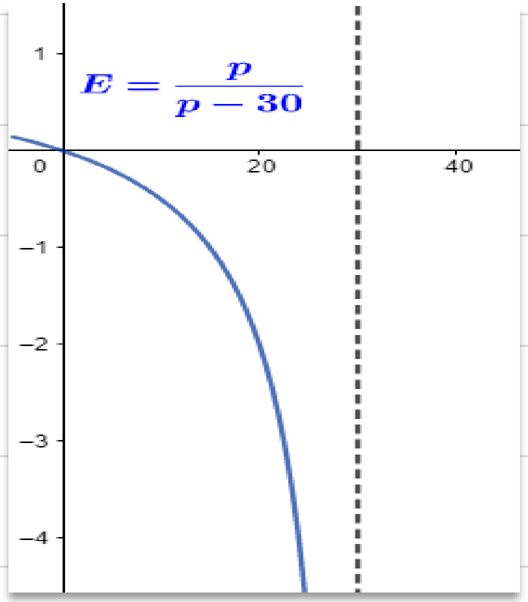
$$p > -(p - 30)$$

$$p > -p + 30$$

$$2p > 30$$

$$p > 15$$

مدى الأسعار التى تجعل الطلب مرنًا .



$15 < p < 30$

لتحليل الإيرادات شاهد الشريحة التالية

إيجاد قيمة مرونة الطلب و التغير فى الإيرادات

تمرين

313صفحةQ13

على فرض أن **الطلب** :

$$f(p) = 200(30 - p)$$

(a أوجد **مرونة الطلب** .

(b أوجد **مدى الأسعار** الذى يكون فيه **الطلب** **مرنًا** $(E < -1)$.

الحل

الإيرادات : $R(p) = pf(p)$

$$R(p) = P(6000 - 200p)$$

$$R(p) = 6000p - 200p^2$$

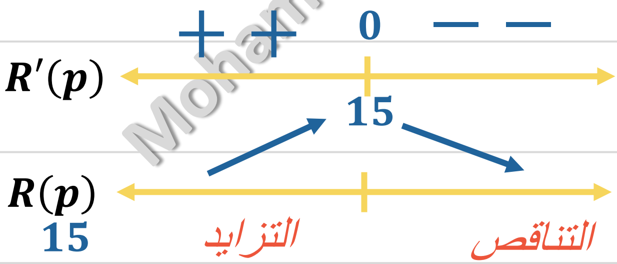
لتحليل الإيرادات ، نقوم بإيجاد التفاضل و إيجاد الأعداد الحرجة .

$$R'(p) = 6000 - 400p$$

الأعداد الحرجة : $R'(p) = 0$

$$6000 - 400p = 0$$

$$\boxed{p = 15}$$

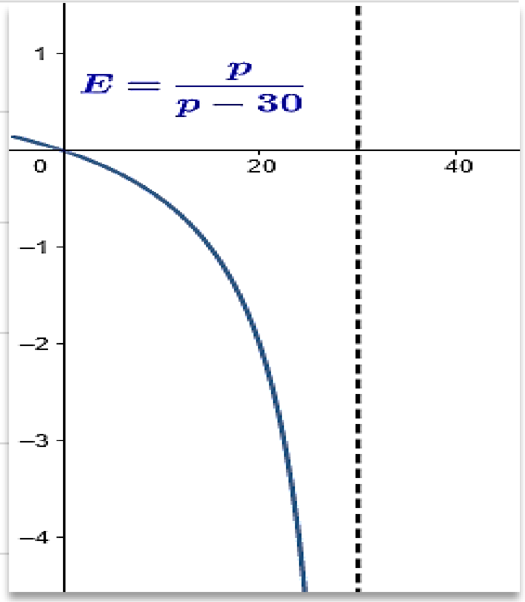


$R'(p) > 0$ لـ $p < 15$

$R'(p) < 0$ لـ $p > 15$

قيمة عظمى مطلقة $R(15)$

الإيرادات تتناقص إذا تجاوز السعر 15



الأسعار فى حالة $E < -1$ ، يكون الطلب مرنًا

إذا تزايدت الأسعار فإن الإيرادات تتناقص .

سرعة التفاعلات الكيميائية

ندرس فى الكيمياء : معدلات التفاعلات الكيميائية .

هذا يعطي للكيميائيين معلومات عن طبيعة الروابط والكميات الكيميائية للمواد المتفاعلة والمنتجات .

فى التفاعلات الكيميائية :

$$A + B \longrightarrow C$$

المواد المتفاعلة   المنتج

تركيز المنتج C هو : مول لكل لتر $[C(t)]$

(متوسط التغير فى تركيز المنتج C فى الفترة الزمنية $[t_1,t_2]$) معدل تقدم التفاعل الكيميائى

$$\frac{[C](t_2)-[C](t_1)}{t_2-t_1}$$

(المشتقة بالنسبة للزمن) معدل التفاعل اللحظى

$$\lim_{t\to t_1}\frac{[C](t_2)-[C](t_1)}{t_2-t_1}=\frac{d[C]}{dt}(t_1)$$

نمذجة سرعة التفاعل الكيميائى

مثال

9.4صفحة309

فى التفاعل الكيميائى ذاتى التحفيز تتشابه المواد المتفاعلة و المنتج . يستمر التفاعل حتى الوصول إلى مستوى التشبع . يعرف الكيميائيون من الأدلة التجريبية أن سرعة التفاعل تتناسب مع قيمة المنتج المعروض و الفرق بين مستوى التشبع و قيمة المنتج . إذا كان التركيز الأولى من المادة الكيميائية هو 0 و مستوى التشبع هو 1 (بما يناظر 100 %) فهذا يعنى أن التركيز $x(t)$ سرعة تفاعله.

$$x'(t) = rx(t)[1 - x(t)],$$

حيث $r > 0$ ثابت

أوجد تركيز المادة الكيميائية الذى تصل فيه سرعة تفاعلها $x'(t)$ إلى القيمة العظمى .

الحل

المعطيات :

التركيز الأولى

مستوى التشبع

تركيز المادة الكيميائية $x(t)$, $0 \le x(t) \le 1$

(مشتقة التركيز) سرعة التفاعل $x'(t)$

$x'(t) \propto x(t)$

$x'(t) \propto (1 - x(t))$

حيث $r > 0$ ثابت نسبيًا $x'(t) = rx(t)[1 - x(t)]$

المطلوب : أوجد $x(t)$ الذى تصل فيه $x'(t)$ إلى القيمة العظمى .

مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL

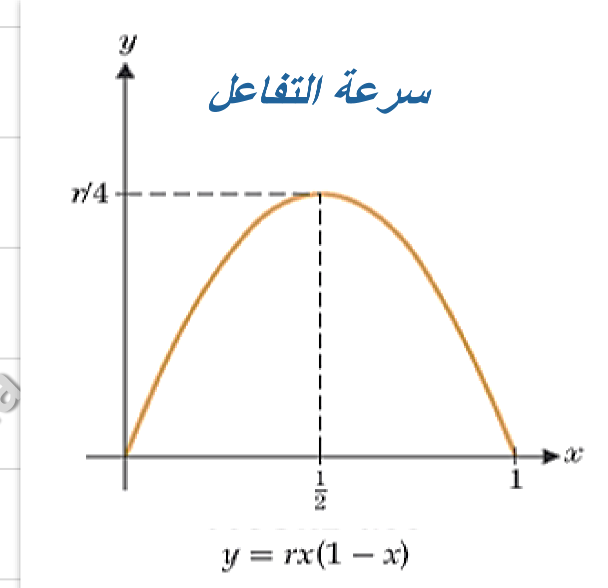
Tuesday, February 6, 2024

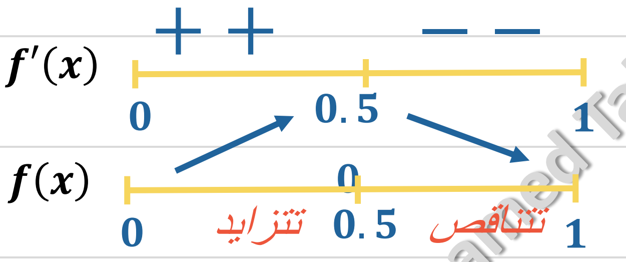
نمذجة سرعة التفاعل الكيميائى

مثال

9.4صفحة309

الحل





$(0,0.5)$ فى $f'(x) > 0$

$(0.5,1)$ فى $f'(x) < 0$

$f(0.5) = \frac{r}{4}.$ قيمة عظمى مطلقة

سرعة التفاعل الكيميائى له قيمة عظمى عندما يكون التركيز $x = 0.5$ و هو نصف مستوى التشبع $x = 1$

سرعة التفاعل

أعد الصياغة

$$x'(t) = rx(t)[1 - x(t)]$$

$$f(x) = rx[1 - x]$$

$$f(x) = rx - rx^2$$

لإيجاد القيمة العظمى سوف نقوم بإيجاد مشتقة سرعة التفاعل و إيجاد الأعداد الحرجة .

$$f'(x) = r - 2rx$$

$$f'(x) = r(1 - 2x)$$

الأعداد الحرجة :

$$f'(x) = 0$$

⇛ $r(1 - 2x) = 0$

$r > 0$ (ثابت)

$$1 - 2x = 0$$

$$\boxed{x = 0.5}$$

+971566151988/

أ/ محمد طه

Tuesday, February 6, 2024

تمثيل معدل التفاعل الكيميائي

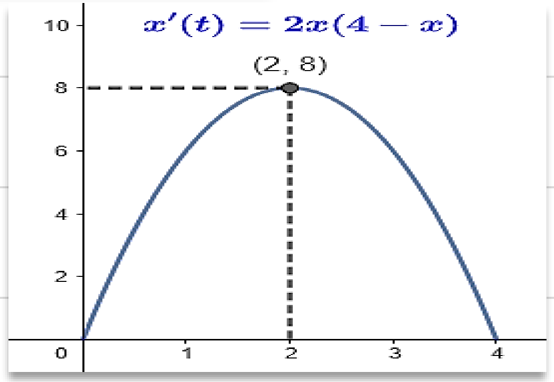
تمرين

Q19صفحة314

إذا كان سرعة التفاعل الكيميائى وفقًا للمعادلة : $x'(t) = 2x(t)[4 - x(t)]$

(a أوجد حدود التركيز x .(مجال دالة السرعة)

(b أوجد التركيز $x(t)$ الذى تصل فيه سرعة التفاعل إلى القيمة العظمى .



a)

الحل

ملحوظة: حدود دالة التركيز هي الحدود التي تراعي أن سرعة التفاعل يجب أن تكون أكبر من الصفر.

التركيز : $x(t)$

سرعة التفاعل :

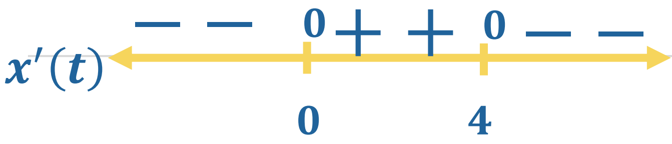
$x'(t) = 2x(t)[4 - x(t)]$

$x'(t) = 8x - 2x^2$

$x'(t) = 0$

$2x(4 - x) = 0$

$\boxed{x = 0}$ $\boxed{x = 4}$



$(0,4)$ فى $x'(t) > 0$

$(-\infty,0) \cup (4,\infty)$ فى $x'(t) < 0$

حدود التركيز $\boxed{x(t) = 4}$

b)

سرعة التفاعل : $x'(t) = 2x(t)[4 - x(t)]$

$f(x) = 8x - 2x^2$

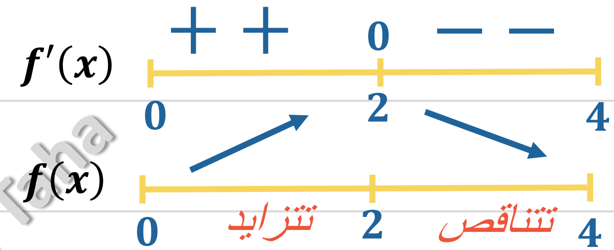
لإيجاد القيمة العظمى سوف نقوم بإيجاد مشتقة سرعة التفاعل وإيجاد الأعداد الحرجة .

$f'(x) = 8 - 4x$

الأعداد الحرجة : $f'(x) = 0$

$8 - 4x = 0$

$\boxed{x = 2}$



$(0,2)$ فى $f'(x) > 0$

$(2,4)$ فى $f'(x) < 0$

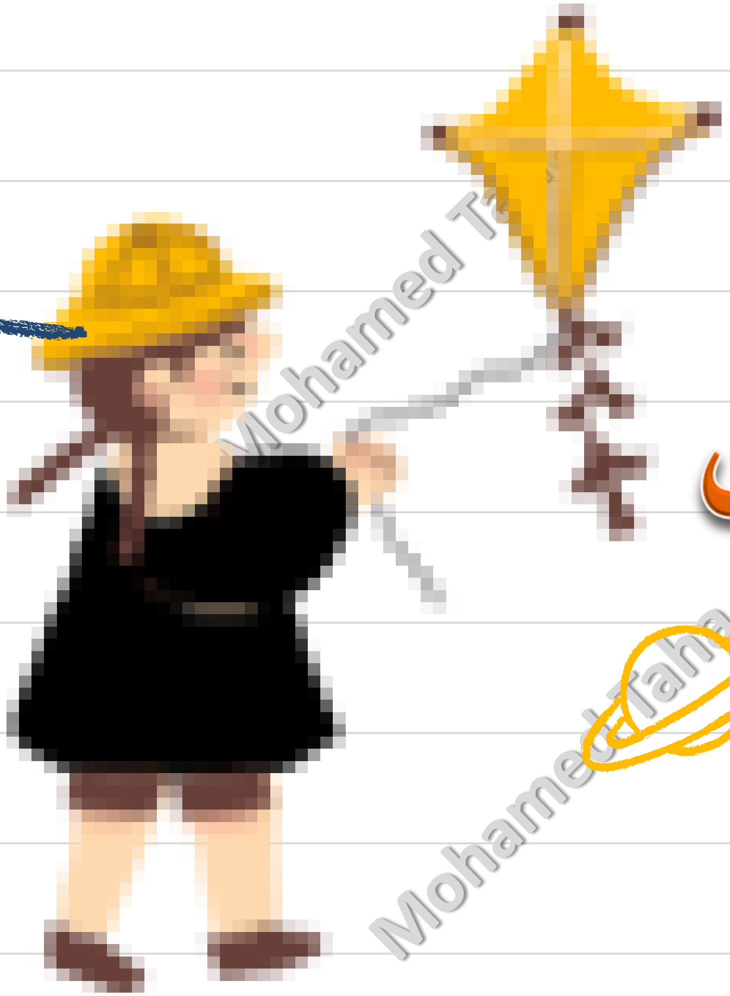
$f(2) = 8$ قيمة عظمى مطلقة

سرعة التفاعل الكيميائى له قيمة عظمى عندما يكون التركيز $x = 2$ و هو نصف مستوى التركيز $x = 4$.

+971566151988/

أ/ محمد طه

Tuesday, February 6, 2024



الدرس الثالث

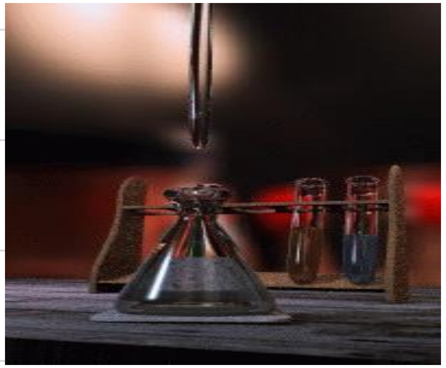
Tuesday, February 6, 2024

أهداف التعلم

* حل المشكلات الاقتصادية والعلمية فى القيم القصوى.

Tuesday, February 6, 2024

معايرة المنحنى



الحمض : الرقم الهيدروجينى < 7

القاعدة : الرقم الهيدروجينى > 7

قاعدة قوية + حمض ضعيف

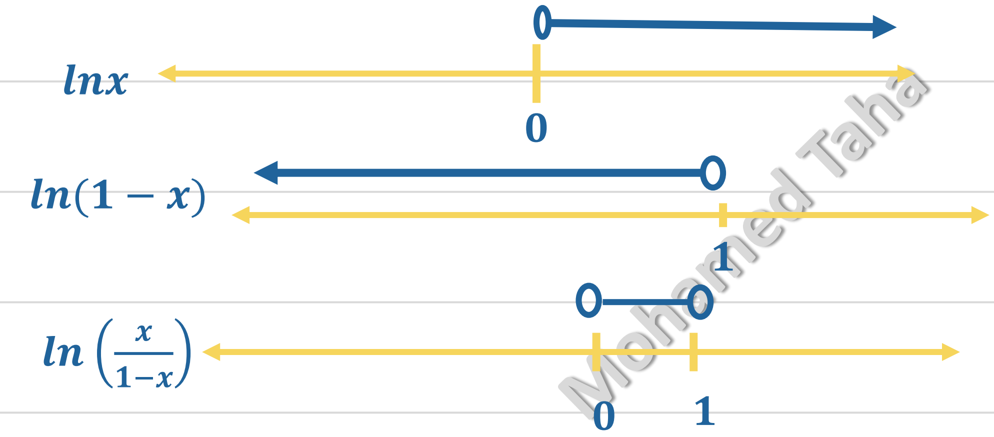
معايرة الحمض الضعيف و القاعدة القوية .

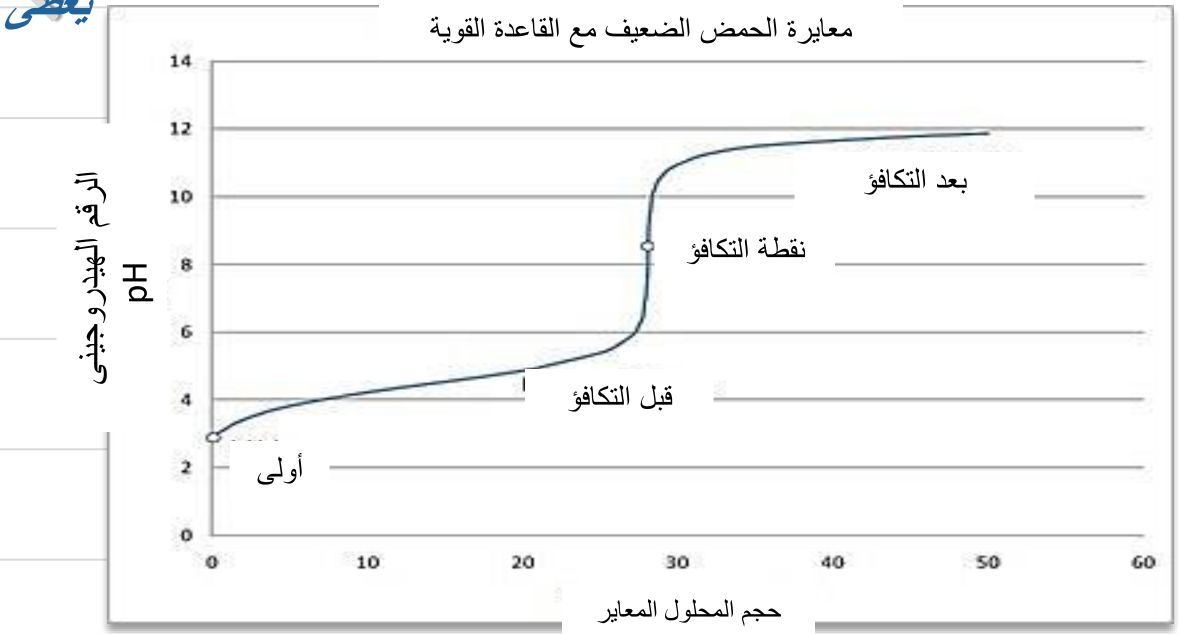
تضاف القاعدة القوية إلى الحمض الضعيف ببطء من خلال مراقبة لون الرقم الهيدروجينى إلى أن يصل إلى نقطة التكافؤ و التى تستخدم لحساب تركيز القاعدة .

يعطى الرقم الهيدروجينى pH بالدالة : c ثابت

$$p(x)=c+\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

$$p(x)=c+\ln x-\ln(1-x)$$





المجال : $0<x<1$

x : الحمض المحول = القاعدة المضافة

Tuesday, February 6, 2024

تحليل معايرة المنحنى

مثال

9.5صفحة310

أوجد قيمة x التي يكون فيها معدل تغير الرقم الهيدروجيني صغير جدًا . حدد النقطة المقابلة على منحنى المعايرة

الحل

لإيجاد القيمة الصغرى لدالة معدل تغير الرقم الهيدروجيني pH

نوجد مشتقة دالة معدل التغير g(x) و نوجد الأعداد الحرجة .

$$g(x) = \frac{1}{x-x^2} = (x - x^2)^{-1}$$

$$g'(x) = -1(1-2x)(x-x^2)^{-2}$$

$$g'(x) = \frac{2x-1}{(x-x^2)^2}$$

الأعداد الحرجة :

غير موجود $g'(x) \Rightarrow (x-x^2)^2 = 0$

$\Rightarrow x(1-x) = 0 \Rightarrow \cancel{x = 0 \;,\; x = 1}$

$\not\ni$ مجال $p(x)$

$\not\ni$ مجال $g(x)$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0$$

$$\boxed{x = 0.5}$$

يعطى الرقم الهيدروجيني pH بالدالة :

$$p(x) = c + ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

$$p(x) = c + lnx - ln(1-x) \qquad , 0 < x < 1$$

معدل تغير الرقم الهيدروجيني :

$$p'(x) = \frac{1}{x} - \frac{-1}{1-x}$$

بفرض أن $g(x) = p'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ و بالتبسيط

$$g(x) = \frac{1-x}{1-x}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\cdot\frac{x}{x}$$

$$g(x) = \frac{1-x}{x-x^2} + \frac{x}{x-x^2} \quad = \frac{1}{x-x^2}$$

Tuesday, February 6, 2024

تحليل معايرة المنحنى

مثال

9.5صفحة310

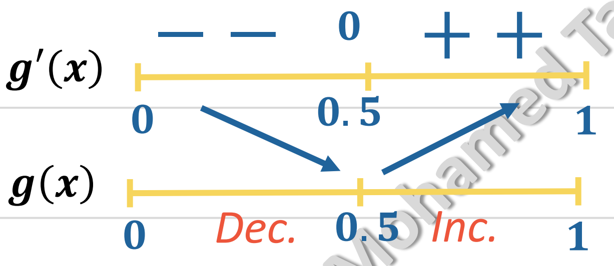
أوجد قيمة x التى يكون فيها **معدل تغير الرقم الهيدروجينى صغير جدًا** . حدد **النقطة المقابلة على منحنى المعايرة**

الحل

لاحظ أن $g'(x)$ هى المشتقة الثانية لدالة الرقم الهيدروجينى $p(x)$

$\mathbf{g'(x)}$ **يناظر** $\mathbf{p''(x)}$

و هذا يعنى أنه عند $x = 0.5$ (صفر المشتقة الثانية)
يوجد نقطة انعطاف فى منحنى دالة الرقم الهيدروجينى

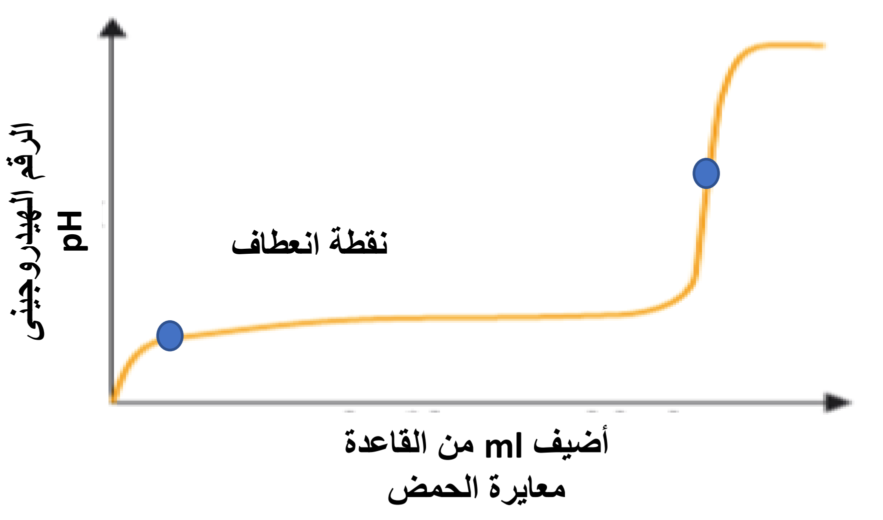


$g'(x) < 0$ فى $(0,0.5)$

$g'(x) > 0$ فى $(0.5,1)$

$g(0.5)$ قيمة صغرى مطلقة

معدل التغير فى الرقم الهيدروجينى pH و الذى يعطى بالدالة $g(x)$ له قيمة صغرى عند $x = 0.5.$



يوجد نقطة انعطاف أخرى فى المنحنى تناظر نقطة التكافؤ

تحليل معايرة المنحنى

تمرين

Q26صفحة314

فى معايرة الحمض الضعيف و القاعدة القوية ، يحدد الرقم الهيدروجينى من خلال $c+ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ حيث إن f هو جزء $(0<x<1)$ من الحمض المحول . ماذا يحدث لمعدل تغير الرقم الهيدروجينى x إذا اقتربت من 1 ؟

الحل

يعطى الرقم الهيدروجينى pH من خلال :

$$p(x)=c+ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

$$p(x)=c+lnx-ln(1-x) \qquad ,0<x<1$$

معدل تغير الرقم الهيدروجينى :

$$p'(x)=\frac{1}{x}-\frac{-1}{1-x}$$

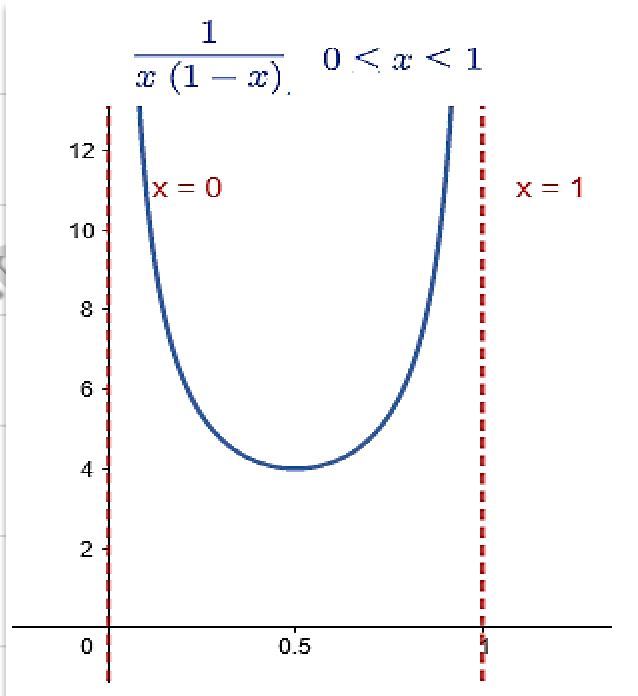
$$p'(x)=\frac{1-x}{1-x}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x}{x}$$

$$p'(x)=\frac{1-x}{x(1-x)}+\frac{x}{x(1-x)}=\frac{1}{x(1-x)}$$

$$p'(f)=\frac{1}{f(1-f)}$$

حيث $f\to1^-$

$$\lim_{f\to1^-}p'(f)=\lim_{f\to1^-}\frac{1}{f(1-f)}=\infty$$



Tuesday, February 6, 2024

كثافة الكتلة

كثافة الكتلة تتمثل فى كتلة (عدد الجزيئات) المادة بالنسبة للحيز من الفراغ الذى يشغله الكائن أو المادة .

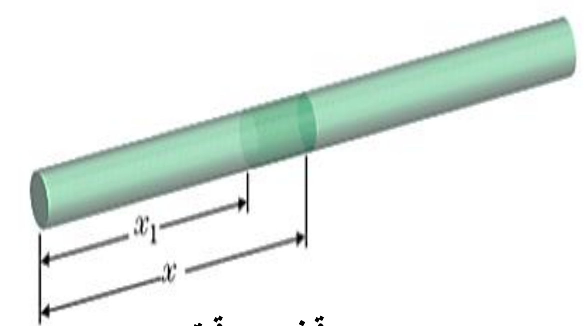
فى المواد المتجانسة (كتلة أى جزء من الجسم من حجم معين هى نفسها) و تكون كثافة الكتلة ثابتة .

$$\text{كثافة الكتلة} = \frac{\text{الكتلة}}{\text{الحجم}}$$

كثافة الكتلة للمواد المتجانسة

الكتلة لأول x متر من قضيب رقيق : $f(x)$ تقاس بـ **(kilograms)**

إجمالى الكتلة بين x و x_1 : $[f(x)-f(x_1)]$



قضيب رقيق

متوسط الكثافة : $\dfrac{[f(x)-f(x_1)]}{x-x_1}$

(كتلة لكل وحدة طول)

الكثافة الخطية : $\rho(x_1)=\lim\limits_{x\to x_1}\dfrac{[f(x)-f(x_1)]}{x-x_1}=f'(x_1)$ **(المشتقة)**

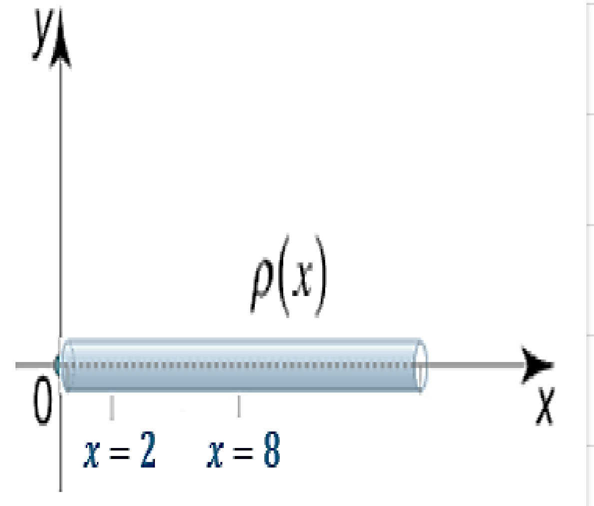
كثافة القضيب الرقيق

مثال

9.6صفحة311

على فرض أن الكتلة لأول x متر من القضيب الرقيق تعطى بالدالة $f(x)=\sqrt{2x}$. فاحسب الكثافة الخطية عند $x=2$ و عند $x=8$ ، و قارن الكثافتين عند النقطتين .

الحل



دالة الكثافة :

$$f(x)=\sqrt{2x}$$

الكتلة الخطية :

$$\rho(x)=f'(x)$$

مشتقة دالة الكتلة :

$$\rho(x)=f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x}}=\frac{1}{\sqrt{2x}}$$

عند $x=2$ $\Rightarrow$ $\rho(2)=f'(2)=\frac{1}{\sqrt{2(2)}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$

عند $x=8$ $\Rightarrow$ $\rho(8)=f'(8)=\frac{1}{\sqrt{2(8)}}=\frac{1}{\sqrt{16}}=\frac{1}{4}$

عند $x=2$
يكون القضيب أكثر كثافة منه
عند $x=8$

القضيب غير متجانس (كثافة الكتلة للقضيب ليست ثابتة)

كثافة القضيب الرقيق

تمرين

صفحة314 Q29, Q31

تُحدد الكتلة لأول x متر من القضيب الرقيق بالمعادلة $m(x)$ فى الفترة المحددة . أوجد الكثافة الكتلية الخطية للقضيب . استنادًا إلى ما استنتجته ، صف بإيجاز تركيب دوال القضيب .

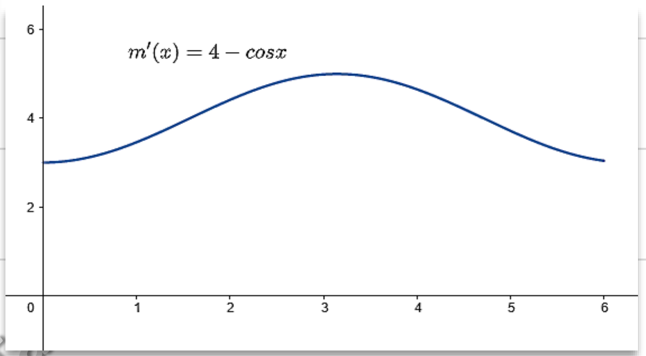
الحل

Q29 دالة الكتلة : $m(x) = 4x - sinx$ جرام لكل $0 \le x \le 6$

$m(x) = 4x - sinx$ جرام

دالة كثافة الكتلة الخطية : $\rho(x) = m'(x)$

$\Longrightarrow \rho(x) = m'(x) = 4 - cosx$ جرام لكل متر



القضيب غير متجانس (كثافة الكتلة ليست ثابتة)

من التمثيل البيانى ، القضيب أقل كثافة عند نهايتيه .

◆

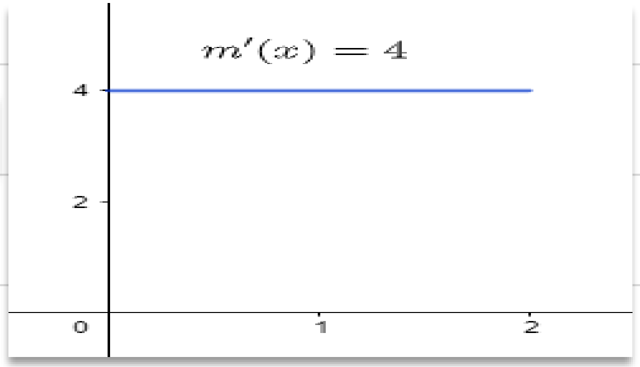
الحل

Q31 دالة الكتلة : $m(x) = 4x$ لكل جرام $0 \le x \le 2$

$m(x) = 4x$ جرام

دالة كثافة الكتلة الخطية : $\rho(x) = m'(x)$

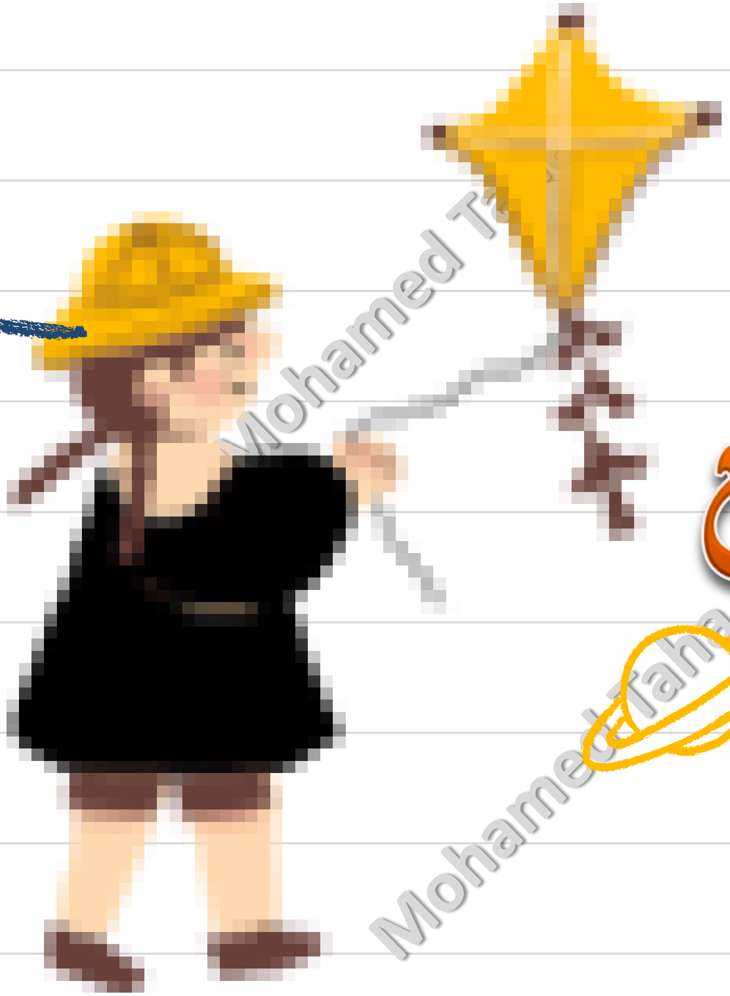
$\Longrightarrow \rho(x) = m'(x) = 4$ جرام لكل متر



القضيب متجانس (كثافة الكتلة ثابتة)

من التمثيل البيانى ، القضيب له نفس الكثافة فى الفترة المعطاة .

Tuesday, February 6, 2024



الدرس الرابع

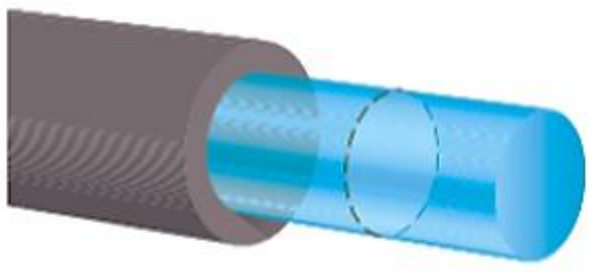
Tuesday, February 6, 2024

أهداف التعلم

* حل المشكلات الاقتصادية و العلمية فى القيم القصوى.

التيار الكهربائى فى السلك

التيار الكهربائى فى السلك – حيث تكون حاملات الشحنة عبارة عن إلكترونات – هو مقياس لكمية الشحنة التى تمر بأى نقطة من السلك لكل وحدة من الزمن .


سلك كهربائى

الشحنة الكهربائية فى السلك عند الزمن t : $Q(t)$ تقاس بـ (كولوم)

الشحنة الصافية التى تمر خلال مقطع عرضى من السلك فى فترة من الزمن $[t_1,t_2]$: $Q(t_2)-Q(t_1)$

متوسط التيار فى الفترة الزمنية $[t_1,t_2]$: $\dfrac{Q(t_2)-Q(t_1)}{t_2-t_1}$ (شحنة لكل وحدة زمن)

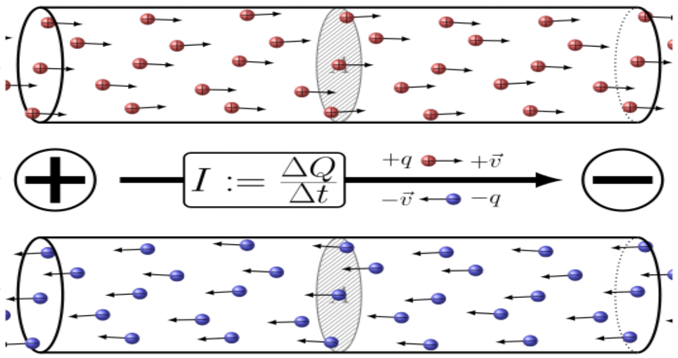
التيار اللحظى :

$$\lim_{t\to t_1}\frac{Q(t_2)-Q(t_1)}{t_2-t_1}=Q'(t_1)$$ (مشتقة الشحنة بالنسبة للزمن)

التيار اللحظى :

$$\boxed{I(t)=Q'(t)}$$

يقاس بـ (أمبير = كولوم لكل ثانية)



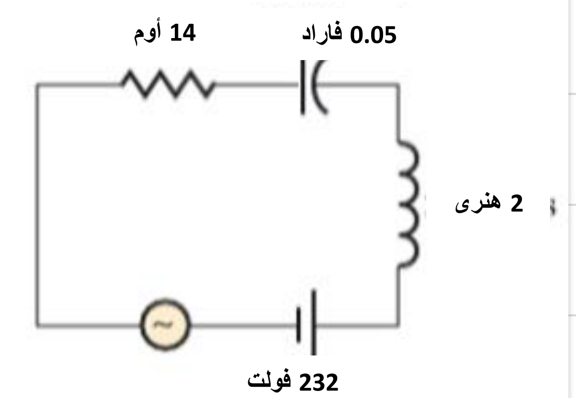
نمذجة التيار الكهربائى فى السلك

مثال

9.7 صفحة312

تتضمن الدائرة الكهربائية المعطاة **مقاوم 14 أوم** و **أداة و معايق 2 هنرى** و **مكثف 0.05 فاراد** و بطارية إمداد **232 فولت** من التيار المتردد المنمذج بالدالة المتذبذبة $323sin2t$ فأوجد **التيار** فى الدائرة عند أى t .

الحل



دارة كهربائية بسيطة

الشحنة فى الدائرة : كولوم $Q(t) = 10e^{-5t} + 2te^{-2t} + 3sin2t - 7cos2t$

باستخدام القوانين الكهربائية الأساسية

التيار الكهربائى اللحظى عند زمن t : $I(t) = Q'(t)$

$$I(t) = Q'(t) = -5(10)e^{-5t} + 2e^{-2t} - (2)2te^{-2t} + 3(2)cos2t + 7(2)sin2t$$

و بالتبسيط $I(t) = Q'(t) = -50e^{-5t} + 2e^{-2t} - 4te^{-2t} + 6cos2t + 14sin2t$

أمبير (كولوم لكل ثانية)

Tuesday, February 6, 2024

تقييم التيار الكهربائى فى دائرة

تمرين

Q33صفحة314

على فرض أن الشحنة فى الدائرة الكهربائية $Q(t)=e^{-2t}(cos3t-2sin3t)$. أوجد التيار .

الحل

الشحنة فى الدائرة : $Q(t)=e^{-2t}(cos3t-2sin3t)$ كولوم

التيار الكهربائى اللحظى عند زمن t : $I(t)=Q'(t)$

باستخدام قاعدة الضرب

⇨ $I(t)=Q'(t)=-2e^{-2t}(cos3t-2sin3t)+e^{-2t}(-3sin3t-2(3)cos3t)$

بأخذ e^{-2t} عامل مشترك

⇨ $I(t)=Q'(t)=-2e^{-2t}(cos3t-2sin3t)+e^{-2t}(-3sin3t-6cos3t)$

و بالتبسيط

⇨ $I(t)=Q'(t)=e^{-2t}(-2cos3t+4sin3t-3sin3t-6cos3t)$

⇨ $I(t)=Q'(t)=e^{-2t}(sin3t-8cos3t)$ أمبير (كولوم لكل ثانية)

Tuesday, February 6, 2024

معدل النمو السكانى

النمو اللوجستى هو النموذج الأساسى للنمو السكانى .

التعدادات السكانية التى أعطت نموذجًا دقيقًا بواسطة المعادلة اللوجستية مُقيدة بالحدية .

مثال : *نمو مستعمرة من البكتريا*

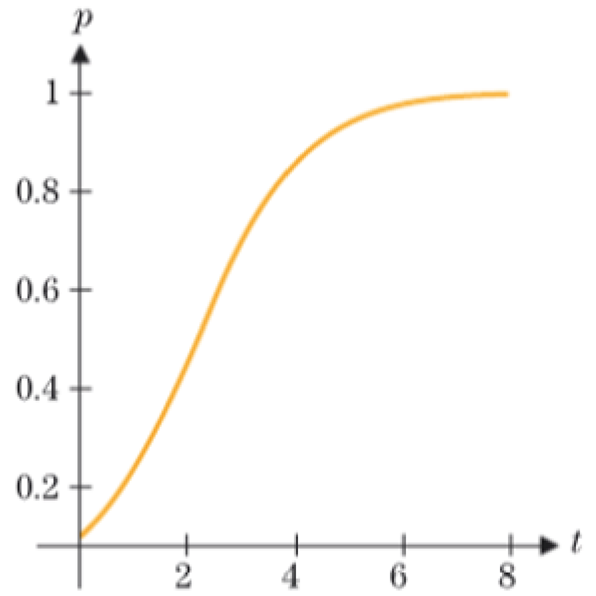
التعداد السكانى : $p(t)$

يُعطى فى صورة كسر اعتيادى للقيمة العظمى للتعداد السكانى .

معدل التغير فى التعداد السكانى :

$$\boxed{p'(t) = rp(t)[1 - p(t)]}$$

ثابت : r



النمو اللوجستى

$r = 1, \quad p(0) = 1$

معدل التغير فى التعداد السكانى يتناسب مع العدد الحالى للسكان $\underline{p(t)}$ و الفرق بين القيمة العظمى لعدد السكان و عدد السكان الحالى $\underline{(1 - p(t))}$.

إيجاد القيمة العظمى لمعدل النمو السكانى

مثال

9.8صفحة312

على فرض أن النمو السكانى يُعطى بالمعادلة $p'(t) = 2p(t)[1 - p(t)]$ (المعادلة اللوجستية باستخدام $r = 2$)
أوجد التعداد السكانى الذى يكون فيه معدل النمو هو القيمة العظمى . فسّر هذه النقطة بيانيًا .

الحل

التعداد السكانى : $p(t)$

معدل النمو السكانى :

$$p'(t) = 2p(t)[1 - p(t)]$$
$$f(p) = 2p(1 - p)$$
$$f(p) = 2p - 2p^2$$

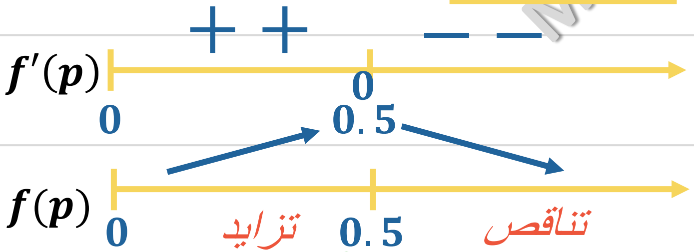
لإيجاد القيمة العظمى لـ $f(p)$ سوف نوجد المشتقة لـ $f(p)$ و نوجد الأعداد الحرجة .

$$f'(p) = 2 - 4p$$

الأعداد الحرجة :

⇨ $f'(p) = 0$

⇨ $2 - 4p = 0$ $\boxed{p = 0.5}$



$f'(p) > 0$ on $p < 0.5$

$f'(p) < 0$ on $p > 0.5$

$f(0.5)$ قيمة عظمى مطلقة

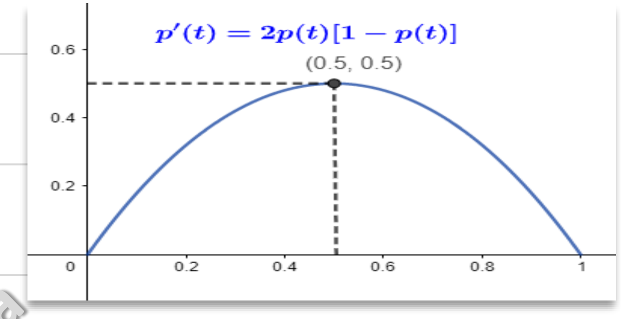
معدل النمو السكانى $f(p)$ له قيمة عظمى عند $p = 0.5$

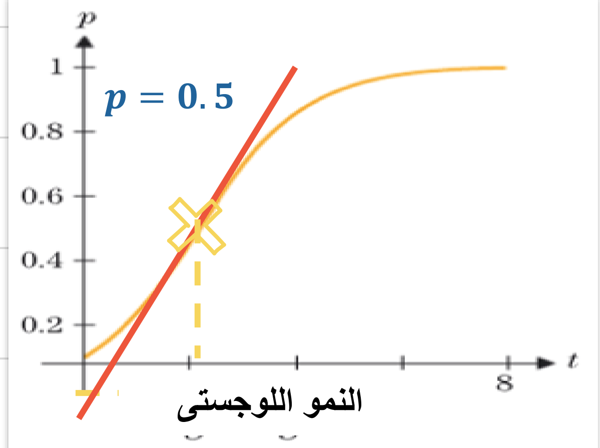
فى التمثيل البيانى للتعداد السكانى $p(t)$

الارتفاع $p = 0.5$ التمثيل البيانى للتعداد السكانى له ميل ذو قيمة عظمى .

و يوجد أيضًا نقطة انعطاف فى منحنى التعداد السكانى حيث أنها الحل لـ $f'(p) = 0$ و التى تناظر الحل لـ $p''(t) = 0$

عندما يتم تصميم نموذج التعداد السكانى باستخدام المعادلة اللوجستية . النمو يصل إلى نقطة انعطاف يتضاعف و سوف يتضاعف حجمه فى نهاية الأمر .





إيجاد القيمة العظمى لمعدل النمو السكانى

تمرين

315صفحةQ38

على فرض أن **النمو السكانى** وفقًا للمعادلة اللوجستية هو $p'(t) = 2p(t)[7 - 2p(t)]$.
أوجد **التعداد السكانى** الذى يصل فيه **معدل النمو إلى القيمة العظمى** .

الحل

التعداد السكانى : $p(t)$

معدل النمو السكانى :

$$p'(t) = 2p(t)[7 - 2p(t)]$$

$$f(p) = 2p(7 - 2p)$$

$$f(p) = 14p - 4p^2$$

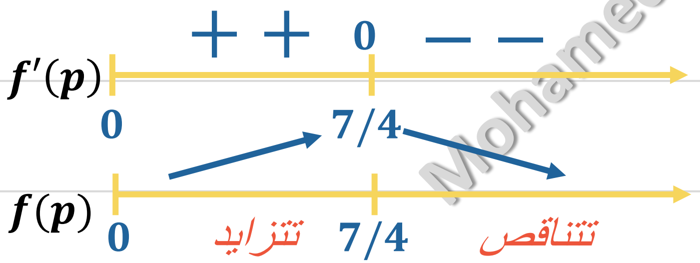
لإيجاد القيمة العظمى لـ $f(p)$ سوف نوجد المشتقة لـ $f(p)$ و نوجد الأعداد الحرجة .

$$f'(p) = 14 - 8p$$

الأعداد الحرجة : $\Rightarrow$ $f'(p) = 0$

$\Rightarrow$ $14 - 8p = 0$

$$\boxed{p = \frac{7}{4}}$$



$f'(p) > 0$ عند $p < \frac{7}{4}$

$f'(p) < 0$ عند $p > \frac{7}{4}$

$f\left(\frac{7}{4}\right)$ قيمة عظمى مطلقة

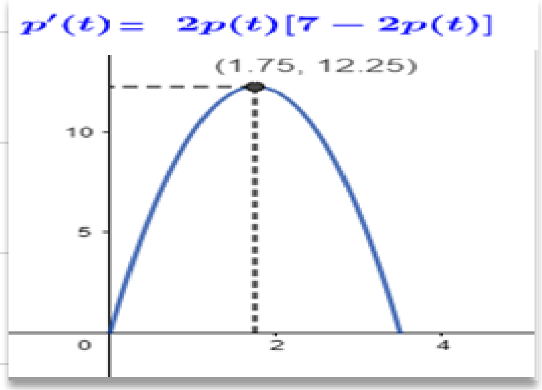
معدل النمو السكانى $f(p)$ له قيمة عظمى عند $p = \frac{7}{4}$

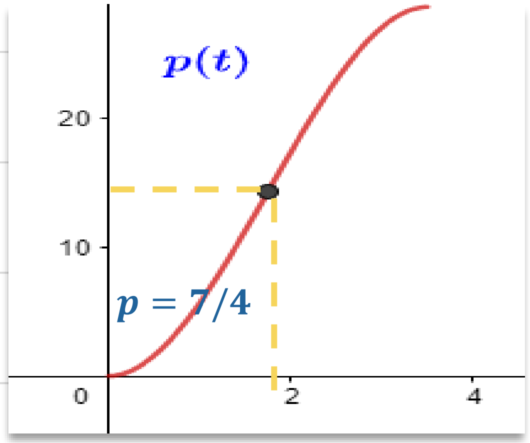
أو تستطيع استخدام المشتقة الثانية :

$$f''(p) = -8$$

$$f''\left(\frac{7}{4}\right) = -8 < 0$$

قيمة عظمى عند $p = \frac{7}{4}$





+971566151988/
أ/ محمد طه

Tuesday, February 6, 2024

الواجب المنزلي

صفحتى 313-314

تُحدد كتلة الأول x متر من القضيب الرقيق بالمعادلة $\mathrm{m}(x)$ فى الفترة المحددة *أوجد الكثافة الكتلية الخطية للقضيب . استنادًا إلى ما استنتجته ، صف بإيجاز تركيب دوال القضيب .*

.30 $m(x) = (x-1)^3 + 6x$ لكل جرام $0 \le x \le 2$

.34
على فرض أن الحنة فى الدارة الكهربائية $Q(t) = c' \ (3\cos 2t + \sin 2t)$ كولولو . أوجد التيار .

.37 على فرض أن النمو السكانى وفقًا للمعادلة اللوجستية هو :
$p'(t) = 4p(t)[5 - p(t)]$.
أوجد التعداد السكانى الذى يصل فيه معدل النمو إلى القيمة العظمى .

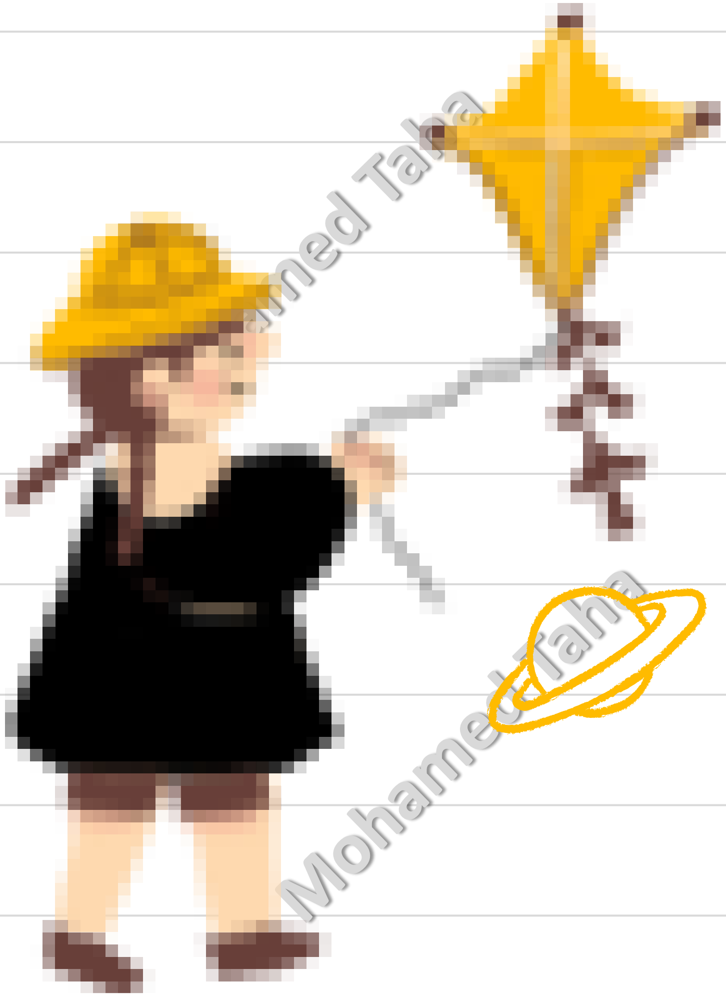
إذا كانت تكلفة تصنيع x منتج هى $c(x) = x^4 + 14\,x^2 + 60x + 35$
أوجد دالة التكلفة الحدية و قارن بين التكلفة الحدية عند $x = 50$ و التكلفة الفعلية لـ 50 منتجًا .

أوجد مستوى الإنتاج الذى يحقق القيمة العظمى لمتوسط التكلفة .
8. $c(x) = 0.2x^3 + 4x + 4000$

أوجد (a) مرونة الطلب و (b) مدى الأسعار الذى يكون فيه الطلب مرنًا $(E < -1)$
14. $f(p) = 200(20 - p)$

.20 إذا كان سرعة التفاعل الكيميائى وفقًا للمعادلة :
$x'(t) = 0.5x(t)[5 - x(t)]$
(a) أوجد التركيز $x(t)$ الذي تصل فيه سرعة التفاعل الي القيمة العظمى .
(b) أوجد حدود التركيز .

Tuesday, February 6, 2024



بالتوفيق للجميع