

امتحان نهاية الفصل الدراسي الأول
للعام الدراسي 2018 / 2019 م

الجزء الأول

45

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

(1) أوجد مجال الدالة $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 2x + 1}$

a) $(-\infty, 1)$

b) $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$

c) $(-\infty, \infty)$

d) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ ✓

(2) أوجد القيمة الدقيقة للتعبير $\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ ، إن وجدت .

a) $\frac{\pi}{6}$

b) غير موجودة

c) $-\frac{\pi}{6}$ ✓

d) $-\frac{\pi}{3}$

(3) إذا كانت $g(x) = \sqrt{x+6}$ و $f(x) = x-4$ ، أوجد $(g \circ f)(7)$.

a) $(g \circ f)(7) = 3$ ✓

b) $(g \circ f)(7) = \sqrt{13} - 4$

c) $(g \circ f)(7) = \sqrt{5}$

d) $(g \circ f)(7) = \sqrt{3} + 6$

(4) أوجد قيمة $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{|x-2|}$ إذا وجدت .

a) 0

b) -1

c) -2

d) غير موجودة ✓

(5) أوجد قيمة $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3 - \sqrt{x+9}}$ إذا وجدت .

a) -6 ✓

b) 0

c) $\frac{1}{3}$

d) غير موجودة

(6) أوجد $\lim_{x \rightarrow \infty} \cot^{-1} x$

a) 1

b) 0 ✓

c) $\frac{-\pi}{2}$

d) ∞

(7) حدد الفترات التي تكون عندها الدالة $f(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 2x}}$ متصلة .

a) $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ ✓

b) $(-\infty, -1] \cup [2, \infty)$

c) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

d) $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

(8) أوجد قيمة النهاية $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h}$ إذا وجدت .

a) 8

b) 12 ✓

c) 4

d) غير موجودة

(9) إذا كانت $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2$ ، أوجد $f''' \left(\frac{1}{6} \right)$

a) $f''' \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{55}{54}$

b) $f''' \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{19}{3}$

c) $f''' \left(\frac{1}{6} \right) = 4$ ✓

d) $f''' \left(\frac{1}{6} \right) = 10$

(10) أوجد مشتقة الدالة $f(x) = \tanh x^2$

a) $f'(x) = \operatorname{sech}^2 x$

✓ b) $f'(x) = 2x \operatorname{sech}^2 x^2$

c) $f'(x) = 2x \operatorname{sech} x^2$

d) $f'(x) = -2x \operatorname{sech} x^2$

(11) أوجد مشتقة الدالة $f(x) = \cos^{-1}(2x)$

a) $f'(x) = \frac{2 \sin(2x)}{\cos^2(x-2)}$

b) $f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1+4x^2}}$

c) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

✓ d) $f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}$

(12) على فرض أن الدالة $f(x) = x^3 + 5x + 6$ لها دالة عكسية $g(x)$ ، أوجد $g'(x)$

a) $g'(x) = \frac{1}{[g(x)]^3 + 6}$

b) $g'(x) = \frac{1}{3[g(x)]^2}$

c) $g'(x) = \frac{1}{3[g(x)]^2 + 5[g(x)]}$

d) $g'(x) = \frac{1}{3[g(x)]^2 + 5}$ ✓

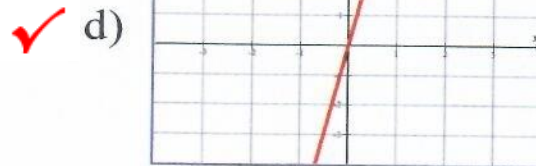
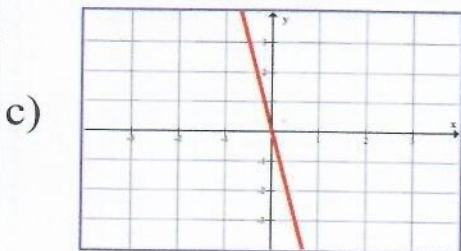
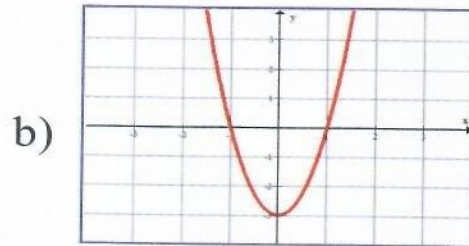
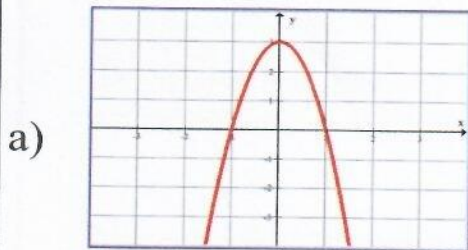
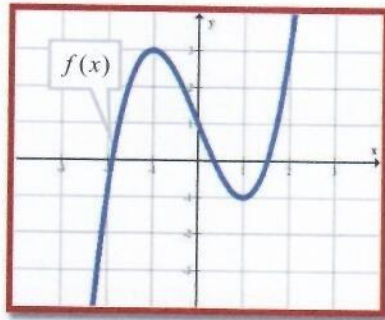
(13) أوجد جميع القيم التي يكون عندها المماس للمنحنى $y = x^3 - 6x^2 + 1$ أفقياً.

- a) $x = 0, x = 4$ ✓
 b) $x = -4, x = 0, x = 4$
 c) $x = -4, x = 0$
 d) $x = -1, x = 0, x = 1$

(14) حدد الفترة التي تحقق الدالة $f(x) = x^2 - x + 1$ فيها نظرية رول وأوجد قيمة c .

- a) $[-1, 1], c = \frac{1}{2}$
 b) $[0, 1], c = \frac{1}{2}$
 c) $[-2, 2], c = 0$ ✓
 d) $[0, 1], c = 2$

(15) استخدم التمثيل البياني للدالة f وحدد التمثيل البياني لـ f'' .



يجب كتابة خطوات الحل التفصيلية للمفردات الاختيارية كافة.

(16) أوجد الدالة الأسية $f(x) = ae^{bx}$ التي تمر بالنقطتين $(1, 2)$ و $(2, 6)$ حيث $a \neq 0$ و $b > 0$.

$$f(1) = 2 \Rightarrow 2 = ae^b \rightarrow (1)$$

$$f(2) = 6 \Rightarrow 6 = ae^{2b} \rightarrow (2)$$

بقسمة (2) على (1)

$$\frac{ae^{2b}}{ae^b} = \frac{6}{2} \Rightarrow e^b = 3 \Rightarrow b = \ln 3$$

$$2 = ae^{\ln 3} \Rightarrow 2 = 3a \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \frac{2}{3} e^{x \ln 3}$$

(17) أوجد كافة حلول المعادلة $\sin x - \cos(2x) = 0$.

$$\sin x - (1 - 2 \sin^2 x) = 0$$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$(2 \sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$(2 \sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(\sin x + 1) = 0$$

$$\sin x = -1$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

(18) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - 3x - 2}$ ، إذا وجدت.

$$\frac{x^3 - 8}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(2x+1)}$$

$$\frac{x^2 + 2x + 4}{2x + 1} = \frac{2^2 + 2(2) + 4}{2(2) + 1} = \frac{12}{5}$$

(19) إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} a(\tan^{-1} x + 2) & , x < 0 \\ b \cos \left(x + \frac{1}{3} \right) \pi & , 0 \leq x \leq 3 \\ \ln(x-2) + x^2 + 1 & , x > 3 \end{cases}$$

أوجد قيم a و b التي تجعل الدالة f متصلة .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} b \cos \left(3 + \frac{1}{3} \right) \pi = -\frac{1}{2}b$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (\ln 3 - 2) + 3^2 + 1 = 10$$

$$-\frac{1}{2}b = 10 \quad \Rightarrow \quad b = -20$$

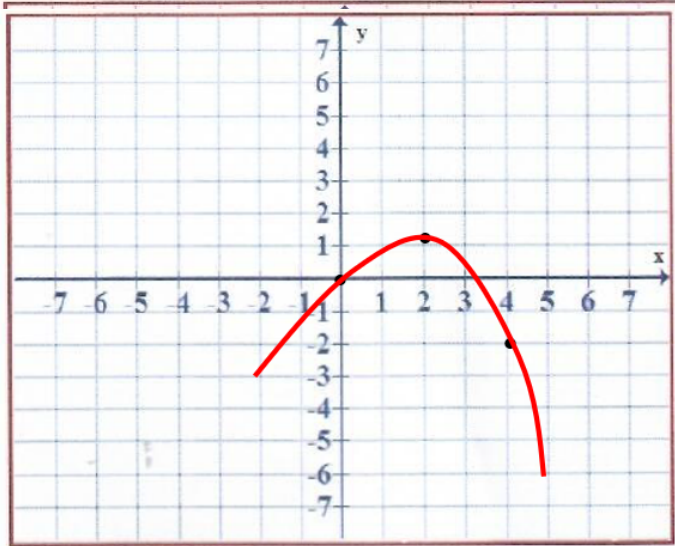
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -20 \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) = -10$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a(0 + 2) = 2a$$

$$2a = -10 \quad \Rightarrow \quad a = -5$$

(20) ارسم تمثيلاً بيانياً لدالة بالخواص التالية:

$$f'(4) = -3, f'(2) = 0, f'(0) = 1, f(4) = -2, f(2) = 1, f(0) = 0$$



(21) أوجد الاشتقاق الضمني $y'(x)$ إذا كانت $xy^2 + 5x = (2y + 1)^3$.

$$y^2 + 2xy y' + 5 = 3(2y + 1)^2 \cdot 2y'$$

$$y^2 + 5 = 6(2y + 1)^2 \cdot y' - 2xy y'$$

$$y^2 + 5 = y' [6(2y + 1)^2 - 2xy]$$

$$\frac{y^2 + 5}{[6(2y + 1)^2 - 2xy]} = y'$$

(22) أوجد مشتقة $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x^3+1}}}{2x}$

$$f'(x) = \frac{\cancel{2x} \left(\frac{3x^2}{\cancel{2\sqrt{x^3+1}}} \right) e^{\sqrt{x^3+1}} - 2e^{\sqrt{x^3+1}}}{(2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{3x^3 e^{\sqrt{x^3+1}}}{\sqrt{x^3+1}} - \frac{2e^{\sqrt{x^3+1}} (\sqrt{x^3+1})}{\sqrt{x^3+1}}}{(2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^3 e^{\sqrt{x^3+1}} - 2e^{\sqrt{x^3+1}} (\sqrt{x^3+1})}{(2x)^2 \sqrt{x^3+1}}$$

(23) استخدم تفاضل اللوغاريتم لإيجاد مشتقة الدالة $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}$

$$h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}$$

$$\ln h(x) = \ln \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}$$

$$\ln h(x) = x^2 \ln \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = 2x \ln \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$h'(x) = h(x) \left[2x \ln \left(\frac{1}{3}\right) \right]$$

$$h'(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} \left[2x \ln \left(\frac{1}{3}\right) \right]$$

(24) يهتز زنبرك معلق من السقف إلى أعلى وإلى أسفل. وقد حدد موقعه الرأسي في الزمن $0 \leq t \leq \pi$ باستخدام

$$f(t) = 4 \cos(2t) . \text{ أوجد موقع الزنبرك عندما يكون لديه سرعة متجهة قيمتها صفر.}$$



$$f(t) = 4 \cos 2t$$

$$f'(t) = -4(2) \sin 2t$$

$$f'(t) = -8 \sin 2t$$

$$2t = k\pi$$

حيث k عدد صحيح

$$t = k \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

$$f\left(k \left(\frac{\pi}{2} \right)\right) = 4 \cos 2 \left(k \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) = \pm 4$$

BONUS

(25) (a) إذا كان $f'(x) < 0$ لكل قيم x ، أثبت أن $f(x)$ هي دالة متناقصة؛ أي أنه إذا كان $a < b$ فإن $f(a) > f(b)$.

نفرض أن $a < b$ ، f تكون قابلة للاشتقاق على (a, b) و متصلة على الفترة $[a, b]$

لذلك تكون قابلة للاشتقاق لكل قيم x وهذا يعني أن $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

اذن $f(b) - f(a) = f'(c) \times (b - a)$ تكون سالبة

اذن $f(a) > f(b)$

(b) بين أن $f(x) = 3 - x + e^{-x}$ دالة متناقصة.

$$f(x) = 3 - x + e^{-x}$$

$$f'(x) = -1 - e^{-x}$$

$$f'(x) = -\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$$

بالتالي تكون الدالة متناقصة

انتهت الأسئلة
بالتوفيق والنجاح