KhateebAcademy.com

Alpha Education Center

الإمارات THE EMIRATES

الصف الثاني عشر متقدم

2025/2024

الوحدة الرابعة

تطبيقات التفاضل

4-1 التقريبات الخطية وطريقة نيوتن

4-2 الصيغ غير المعرفة وقاعدة لوبتال

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

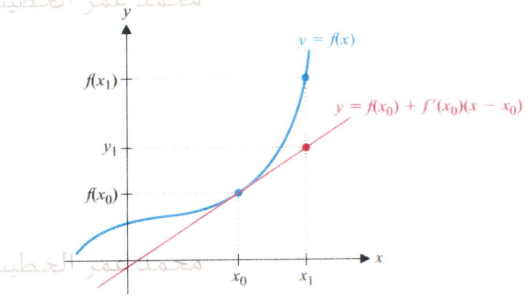
قواعد الاشتقاق (مراجعة من الفصل الأول)

#	الدالة	المشتقة	#	الدالة	المشتقة
1	c	0	15	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
2	x^n	nx^{n-1}	16	$\log_a(f)$	$\frac{f'}{f\times\ln a}$
3	$f\pm g$	$f'\pm g'$	17	$\sin x$	$\cos x$
4	$c\times f$	$c\times f'$	18	$\cos x$	$-\sin x$
5	$f\times g$	$f\times g'+g\times f'$	19	$\tan x$	$\sec^2 x$
6	$\frac{f}{g}$	$\frac{g\times f'-f\times g'}{g^2}$	20	$\cot x$	$-\csc^2 x$
7	$\frac{c}{g}$	$\frac{-c\times g'}{g^2}$	21	$\sec x$	$\sec x\tan x$
8	$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	22	$\csc x$	$-\csc x\cot x$
9	$(f)^n$	$n(f)^{n-1}\times f'$	23	$\sin^{-1}x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10	$(f\circ g)(x)$	$f'(g(x))\times g'(x)$	24	$\cos^{-1}x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
11	$y=f(u)$ $u=g(x)$	$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$	25	$\tan^{-1}x$	$\frac{1}{1+x^2}$
12	$g=f^{-1}(x)$	$\frac{1}{f'(g(x))}$	26	$\cot^{-1}x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
13	a^f	$a^f\times f'\times\ln a$	27	$\sec^{-1}x$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
14	e^f	$e^f\times f'$	28	$\csc^{-1}x$	$\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

التقريبات الخطية

من اهم تطبيقات التفاضل اننا نستطيع تقريب اي دالة قابلة للاشتقاق بدالة خطية عند نقطة معينة وهذا ما يسمى بالتقريب الخطي للدالة.

التقريب الخطي (المماس) للدالة $f(x)$ **عند** $x = x_0$



هو الدالة

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

اي ان عند $x = x_0$ فان $L(x)$ تساوي $f(x)$

(1) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x) = \tan^{-1} x$ **عند** $x = 0$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$= f(0) + f'(0)(x - 0)$$
$$= 0 + 1\,(x)$$
$$= x$$

$\therefore f(x) \approx L(x)$ عند $x = 0$

$f(x) = \tan^{-1} x$

$f(0) = \tan^{-1} 0 = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

$f'(0) = 1$

---

(2) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x) = 1 + \sin 2x$ **عند** $x = 0$

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x - 0)$$
$$= 1 + 2x$$

$f(x) = 1 + \sin 2x$

$f(0) = 1$

$f'(x) = 2\cos 2x$

$f'(0) = 2$

(1) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x)=\sqrt{2x+25}$ عند $x=0$ ثم اوجد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{27}$

$f(x)=\sqrt{2x+25}$

$f(0)=5$

$f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+25}}$

$f'(0)=1/5$

$L(x)=f(0)+f'(0)(x-0)$

$=5+\frac{1}{5}x$

$f(x)=\sqrt{27}$ نوجد

$\sqrt{2x+25}=\sqrt{27}$

$2x+25=27 \rightarrow x=1$

$\sqrt{27} \simeq L(1)=5+\frac{1}{5}(1)$

$=5.2$

$f(1)$

---

(2) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x)=\frac{2}{x}$ عند $x=1$ ثم اوجد قيمة تقريبية $\frac{2}{0.98}$

$f(x)=\frac{2}{x}$

$f(1)=2$

$f'(x)=\frac{-2}{x^2}$

$f'(1)=-2$

$L(x)=f(1)+f'(1)(x-1)$

$=2+(-2)(x-1)$

$=4-2x$

$f(x)=\frac{2}{0.98}$

$\frac{2}{x}=\frac{2}{0.98}$

$x=0.98$.

$\frac{2}{0.98} \simeq L(0.98)=4-2(0.98)$

$=2.04$

---

(3) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x)=e^{2x}$ عند $x=0$ ثم اوجد قيمة تقريبية للعدد $e^{0.02}$

$f(0)=1$

$f'(x)=e^{2x}\cdot 2$

$f'(0)=2$

$L(x)=f(0)+f'(0)(x-0)$

$=1+2x$

$f(x)=e^{0.02}$

$e^{2x}=e^{0.02}$

$2x=0.02$

$x=0.01$.

$e^{0.02} \simeq L(0.01)=1+2(0.01)$

$=1.02$

(1) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x)=\sin x$ عند $x=\pi$ ثم اوجد قيمة تقريبية للعدد $\sin 3$

$L(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi)$

$= 0 + (-1)(x-\pi)$

$= \pi - x$.

$\sin 3 \simeq L(3) = \pi - 3$

$= 0.14$

$f(\pi) = \sin \pi = 0$

$f'(x) = \cos x$

$f'(\pi) = -1$

$f(x) = \sin 3$

$\sin x = \sin 3$

$x = 3$.وبالتالي

---

(2) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x)=(x+1)^{1/3}$ عند $x=0$ ثم اوجد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt[3]{1.2}$

$L(x) = f(0) + f'(0)(x-0)$

$= 1 + \frac{1}{3}x$

$\sqrt[3]{1.2} \simeq L(0.2)$

$= 1 + \frac{1}{3}(0.2)$

$= \frac{16}{15}$

$= 1.0\overline{6}$

$f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}$

$f'(0) = 1/3$

$f(x) = \sqrt[3]{1.2}$

$(x+1)^{1/3} = (1.2)^{1/3}$

$x + 1 = 1.2$

$x = 0.2$

وعلى فرض اننا نريد ايجاد تقريب للدالة $f(x)$ عند $x=x_1$ مع العلم اننا نعرف قيمة الدالة عند $x=x_0$ فاننا نستخدم التقريب الخطي .

يمكن ايجاد التقريب الخطي للدالة ثم ايجاد القيمة التقريبية للدالة عند القيمة المعطاه

$$f(x_1) \approx y_1 = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x \quad , \quad \Delta x = x_1 - x_0$$

x_0 هو عدد نستطيع ايجاد صورتة في الدالة وقريب من x_1

(1) اوجد التقريب الخطي للعدد $\sqrt[3]{28}$

نفرض دالة تناسب المطلوب

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

و نفرض $x_0 = 27$

$f(27) = \sqrt[3]{27} = 3$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$

$f'(27) = \frac{1}{27}$

$L(x) = f(27) + f'(27)(x-27)$

$= 3 + \frac{1}{27}(x-27)$

$x_1 = 28$

$L(28) \simeq 3 + \frac{1}{27}(28-27)$

$= \frac{82}{27} = 3.037$

---

(2) اوجد التقريب الخطي للعدد $(2.1)^5$

$f(x) = x^5$, $x_0 = 2$

$f(2) = 32$

$f'(x) = 5x^4$

$f'(2) = 80$

$L(x) = f(2) + f'(2)(x-2)$

$= 32 + 80(x-2)$

$x_1 = 2.1$

$L(2.1) = 32 + 80(2.1-2)$

$= 40$

---

(3) اوجد التقريب الخطي للعدد $\ln(1.1)$

$f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$

$f(1) = 0$

$f'(x) = 1/x$

$f'(1) = 1$

$L(x) = f(1) + f'(1)(x-1)$

$= 0 + 1(x-1)$

$= x - 1$

$x_1 = 1.1$

$L(1.1) = 1.1 - 1 = 0.1$

(1) اوجد التقريب الخطي للعدد $\sin 29^\circ$

$f(x)=\sin x \;,\; x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = 1/2$

$f'(x) = \cos x$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$L(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

يجب التحويل الى الراديان ...

$x_1 = 29^\circ = 29\cdot\frac{\pi}{180}$

$L(29^\circ) = L\left(29\,\frac{\pi}{180}\right)$

$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{29}{180}\pi - \pi\right) = 0.48$

---

(2) اوجد التقريب الخطي للعدد $\cos 1$

$f(x) = \cos x$

$x_0 = \frac{\pi}{3}$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = -\sin x$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

π	$\rightarrow$ 3.14
بالقسمة على 3	
$\frac{\pi}{3}$	$\leftarrow$ 1

$L(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$= \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$x_1 = 1$ راديان

$L(1) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{\pi}{3}\right)$

$= 0.54$

---

(3) اوجد التقريب الخطي لطول ضلع مكعب حجمة 70 **متر مكعب**

الحجم 70 فيكون طول ضلع المكعب $\sqrt[3]{70}$

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

$x_0 = 64$

$f(64) = \sqrt[3]{64} = 4$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$

$f'(64) = \frac{1}{48}$

$L(x) = f(64) + f'(64)(x-64)$

$= 4 + \frac{1}{48}(x-64)$

$L(70) = 4 + \frac{1}{48}(70-64)$

$= 4.125$

(1) قدرت شركة ، كمية مبيعاتها اليومية $f(x)$ من العصير
حسب درجة حرارة الجو x (بالدرجة المئوية) حسب البيانات التالية
قدر كمية المبيعات عند درجة الحرارة 50° باستخدام التقريب الخطي

x	25	30	35
$f(x)$	800	1200	1700

قاعدة الدالة $f(x)$ غير معلومة لكن $x_0 = 35$

$L(x) = f(35) + f'(35)(x-35)$

$= 1700 + 100(x-35)$

$f(35) = 1700$

$f'(35) = m$

$= \frac{1700-1200}{35-30}$

$= 100$

$f(50) \simeq L(50) = 1700 + 100(50-35)$

$= 3200$

---

(2) قدرت شركة ، كمية مبيعاتها السنوية $f(x)$ من الاجهزة بالالاف
حسب سعر الجهاز x بالدرهم
قدر كمية المبيعات عند السعر 32 درهم باستخدام التقريب الخطي

x	20	30	40
$f(x)$	18	14	12

$L(x) = f(30) + f'(30)(x-30)$

$= 14 + (-0.2)(x-30)$

$= 14 - 0.2x + 6$

$= 20 - 0.2x$

$x_0 = 30$

$f(30) = 14$

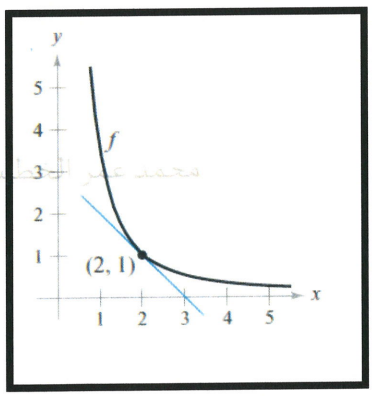
$f'(30) = \frac{12-14}{40-30}$

$= -0.2$

$f(32) \simeq L(32) = 20 - 0.2(32) = 13.6$ جهاز

---

(3) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$
لتقدير $f(2.1)$



$L(x) = f(2) + f'(2)(x-2)$

$= 1 + (-1)(x-2)$

$= 3 - x$

$f(2.1) \simeq L(2.1) = 3 - 2.1$

$= 0.9$

$x_0 = 2$

$f(2) = 1$

$f'(2) = m$

$= -3/3$

$= -1$

طريقة نيوتن

تستخدم طريقة نيوتن لتقريب اصفار الدالة

يمكن استخدام القانون

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0,1,2,...$$

حيث x_0 هو التخمين الأول لصفر الدالة f وصورتة قريبة من الصفر[اي ان $f(x_0)$ قريبة من الصفر]

و x_1 هو التقريب الأول لصفر الدالة و x_2 هو التقريب الثاني لصفر الدالة وهكذا...

ملاحظة: تفشل طريقة نيوتن في تقريب صفر الدالة عندما يكون $f'(x_0) = 0$ او $f'(x_1) = 0$ ...

(1) اوجد التقريب الثاني لصفر الدالة $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ باستخدام طريقة نيوتن معتبراً $x_0 = 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$= 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{-1}{-2} = 1/2$$

$f(1) = -1$

$f'(x) = 4x^3 - 6x$

$f'(1) = -2$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{f(1/2)}{f'(1/2)} = \frac{1}{2} - \frac{5/16}{-5/2} = \frac{5}{8}$$

$f(1/2) = 5/16$

$f'(1/2) = -5/2$

---

(2) اوجد التقريب الأول لصفر الدالة $f(x) = \cos x - x$ باستخدام طريقة نيوتن معتبراً $x_0 = 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$= 0 - \frac{f(0)}{f'(0)}$$

$$= 0 - \frac{1}{-1} = 1$$

$f(0) = \cos 0 = 1$

$f'(x) = -\sin x - 1$

$f'(0) = -1$

(1) اوجد التقريب الأول لصفر الدالة $f(x)=e^x+x$ باستخدام طريقة نيوتن معتبراً $x_0=0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$= 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = -1/2$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x + 1$$

$$f'(0) = 2$$

---

(2) اوجد التقريب الأول لصفر الدالة $f(x)=x^5-x+1$ باستخدام طريقة نيوتن

لاحظ ان x_0 غير معلومة لذلك نبحث عن عددين متتالين صورهم مختلفة بالاشارة من الآلة الحاسبة

$f(-2)=-29$, $f(-1)=1$

نلاحظ ان صورة -1 اقرب الى الصفر من صورة -2

لذلك نختار التخمين $x_0=-1$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$= -1 - \frac{1}{4}$$

$$= -1.25$$

$$f(-1) = 1$$

$$f'(x) = 5x^4 - 1$$

$$f'(-1) = 4$$

---

(3) اوجد التقريب الأول لحل المعادلة $2x^5-x^2+1=0$ باستخدام طريقة نيوتن

نفرض الدالة $f(x) = 2x^5 - x^2 + 1$

نختار عددين متتالين صورهم مختلفة وهما -1 ، 0

$f(0) = 1$, $f(-1) = -2$

نختار $x_0 = -1$ ولا يجوز اختيار $x_0 = 0$ لأن $f'(0) = 0$

رغم انها اقرب

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$= -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = -\frac{5}{6}$$

$$f(-1) = -2$$

$$f'(x) = 10x^4 - 2x$$

$$f'(-1) = 12$$

(1) استخدم طريقة نيوتن لتقريب العدد $\sqrt[5]{35}$

نفرض دالة تناسب المطلوب ونفرض تخمين مناسب

نفرض

$x = \sqrt[5]{35}$

$x^5 = 35$

$x^5 - 35 = 0$

لدالة $f(x) = x^5 - 35$ $(x_0 = 2)$

$f(2) = -3$

$f'(x) = 5x^4$

$f'(2) = 80$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$= 2 - \frac{f(2)}{f'(2)}$$

$$= 2 - \frac{-3}{80}$$

$$= 2.0375$$

---

(2) اكتب الحد العام لتقريب صفر الدالة $f(x) = x^2 - x - 1$ **بطريقة نيوتن**

$f(x) = x^2 - x - 1$

$f(x_n) = x_n^2 - x_n - 1$

$f'(x) = 2x - 1$

$f'(x_n) = 2x_n - 1$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{x_n^2 - x_n - 1}{2x_n - 1}$$

$$= \frac{x_n(2x_n - 1) - (x_n^2 - x_n - 1)}{2x_n - 1}$$

$$= \frac{2x_n^2 - x_n - x_n^2 + x_n + 1}{2x_n - 1} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n - 1}$$

$x_0 = 1$

---

(3) اكمل الجدول التالي لايجاد تقريب العدد $\sqrt{27}$

الطريقة	الدالة	x_0
التقريب الخطي	$f(x) = \sqrt{x}$	25
طريقة نيوتن	$f(x) = x^2 - 27$	5

$\sqrt{27} = x$

$27 = x^2$

$x^2 - 27 = 0$

قاعدة لوبيتال

اذا كانت f, g دوال قابلة للاشتقاق في جوار النقطة c حيث $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ او $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$

فان

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$ (اشتق)

يوجد 5 كميات اخرى غير معرفة يمكن تحولها الى كميات غير معرفة على الشكل $\frac{0}{0}$ او $\frac{\infty}{\infty}$

واستخدام قاعدة لوبيتال لايجاد النهاية وهي

$\infty-\infty$

$0\times\infty$

0^0 , ∞^0 , 1^∞

يجب تحويل هذه الكميات الى شكل القسمة $\frac{0}{0}$ او $\frac{\infty}{\infty}$

اوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

الصيغة $\frac{0}{0}$

(1) $\lim_{x\to1}\frac{x^{10}-1}{x-1}$ $\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{10x^9}{1}=10(1)^9=10$

---

(2) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{0}{1}=0$

---

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\cos x+2x-1}{\sin 2x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x+2}{2\cos 2x}=\frac{2}{2}=1$

اوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^{3x}-1}$ $\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{3e^{3x}} = \frac{1}{3}$

---

(2) $\lim_{x\to \pi}\frac{e^{\sin x}-1}{x-\pi}$ $\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to \pi}\frac{e^{\sin x}\cdot\cos x}{1} = e^{0}\cos\pi = -1$

---

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{\sin^{-1}x}$ $\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 1$

---

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}$ $\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2\cos x}$

$= -\frac{1}{2}$

---

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)}$ $\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\tan x)\sec^2 x}{\sec^2(\sin x)\cos x} = \frac{1}{1} = 1$

---

(6) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$ $\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1} = 1$

---

(7) $\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 2x}{\sin x}$ $\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to \pi}\frac{2\cos 2x}{\cos x} = \frac{2}{-1} = -2$

---

(8) $\lim_{x\to 0}\frac{1-3^x}{1-5^x}$ $\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-3^x\ln 3}{-5^x\ln 5} = \frac{\ln 3}{\ln 5} = \log_5 3$

اوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{e^x-1}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{e^x}=\dfrac{0}{1}=0$

---

(2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{\ln x^2}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x}{2x/x^2}=\lim\limits_{x\to -1}x^2=1$

---

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{10-x}-3}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1/2\sqrt{5-x}}{-1/2\sqrt{10-x}}=\dfrac{-1/2}{-1/3}=\dfrac{3}{2}$

---

(4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x+\sin x}{-2\sin 2x}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

---

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{6x}=-\dfrac{1}{6}$

---

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2\sin 2x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{4\cos 2x}=\dfrac{1}{2}$

---

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{\ln\cos x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x}{\frac{-\sin x}{\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x}{-\tan x}=-10$

---

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}\cdot\dfrac{\tan x}{x}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$.

اوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

الصيغة $\frac{\infty}{\infty}$

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+4x}{1-2x^5}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ $= \lim_{x\to\infty}\frac{5x^4+4}{-10x^4}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{20x^3}{-40x^3} = \frac{20}{-40} = -1/2$

---

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{6x}{e^x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x} = 0$

---

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2} = 0$

---

(4) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\ln(x+1)}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1/x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1} = 1$

---

(5) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{7^x}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{(e^2)^x}{7^x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^2}{7}\right)^x = \infty$

ملاحظة

$\frac{e^2}{7} > 1$

اوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

(1) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\cot x}$ $\left(\dfrac{-\infty}{\infty}\right)$

$= \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{-\csc^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{-1}{x\csc^2 x} = \lim_{x\to 0^+} -\dfrac{\sin^2 x}{x}$

$= \lim_{x\to 0^+} -\dfrac{\sin x}{x} \cdot \sin x = (-1)\cdot(0) = 0$

---

(2) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{1/x}{1/2\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{x} \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{2/2\sqrt{x}}{1}$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

---

(3) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{160x^{-0.4}+90}{20x^{-0.4}+10}$

يجب التخلص من الاسس السالبة

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{160}{x^{0.4}} + 90}{\frac{20}{x^{0.4}} + 10} = \dfrac{0+90}{0+10} = \dfrac{90}{10}$

بدون لوبتال.

اوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

الصيغة $0 \times \infty$

ملاحظة

يجب تحويل الدالة

من صورة الضرب

الى صورة القسمة

(1) $\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x}$ $(\infty \cdot 0)$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{1/x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\cos\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})}{-1/x^2}$

$= \lim_{x\to\infty} \cos\frac{1}{x} = \cos 0 = 1$

---

(2) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln x$ $(0 \cdot \infty)$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$.

---

(3) $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}$ $(\infty \cdot 0)$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

اوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

(1) $\lim_{x\to\infty} x(1-e^{\frac{1}{x}})$ $(\infty \cdot 0)$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{1-e^{1/x}}{1/x}$ $(\frac{0}{0})$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{1/x}(-1/x^2)}{-1/x^2}$

$= \lim_{x\to\infty} -e^{1/x} = -e^0 = -1$

---

(2) $\lim_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$ $(\infty \cdot 0)$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{1/x}$ $(\frac{0}{0})$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1/x^2}{1+1/x}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+1/x} = \frac{1}{1+0} = 1$

---

(3) $\lim_{x\to 0^+} \tan x \ln x$ $(0 \cdot -\infty)$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}$ $(\frac{-\infty}{\infty})$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\csc^2 x}$

$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin x}{x}\sin x = (-1)(0) = 0$

اوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

الصيغ الأسية $0^0 , \infty^0 , 1^\infty$

ملاحظة

يجب تحويل الدالة من الصورة **الاسية** الى صورة **ضرب** **ثم قسمة**

(1) $\lim_{x\to 1^+}(x)^{\frac{1}{x-1}}$ (1^∞)

نفرض ان $y = x^{\frac{1}{x-1}}$ ونأخذ Ln للطرفين

$y = x^{\frac{1}{x-1}}$

$\ln y = \ln x^{\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{x-1}\ln x = \frac{\ln x}{x-1}$

$\lim_{x\to 1^+} \ln y = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1/x}{1} = 1$

$\lim_{x\to 1^+} \ln y = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} y = e^1 \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}} = e$

ملاحظة

$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x = e^a$

(2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ (1^∞)

$y = (1+\frac{1}{x})^x$

$\ln y = \ln(1+\frac{1}{x})^x = x\ln(1+\frac{1}{x}) = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{1/x}$

$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln 1+\frac{1}{x}}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1/x^2}{1+1/x}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$

$\lim_{x\to\infty} \ln y = 1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = e \Rightarrow \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

---

(3) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+1}{x-1})^x$ (1^∞)

نقسم كل من البسط والمقام على x

$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^x = \frac{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x}{\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x}$

$= \frac{e}{e^{-1}} = e^2$

اوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

ملاحظة

$$\lim_{x\to 0^+}(1+bx)^{\frac{1}{x}} = e^b$$

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+2x)^{\frac{3}{x}}$ (1^∞)

$y = (1+2x)^{3/x}$

$\ln y = \ln(1+2x)^{3/x} = \frac{3}{x}\ln(1+2x) = \frac{3\ln(1+2x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3\ln(1+2x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3\cdot\frac{2}{1+2x}}{1} = 6$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y = 6 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} y = e^6 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}(1+2x)^{\frac{3}{x}} = e^6$

---

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x)^x$ (0^0)

$y = x^x$

$\ln y = \ln x^x = x\ln x = \frac{\ln x}{1/x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} y = e^0 = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$

---

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^x$ (0^0)

$\ln y = \ln(\sin x)^x = x\ln\sin x = \frac{\ln\sin x}{1/x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{x^2\cos x}{\sin x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{x}{\sin x}\cdot x\cos x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} y = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^x = 1$

اوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

(1) $\lim_{x\to 0^+} x^{1/\ln x}$ (0^0)

$$\ln y = \ln x^{1/\ln x} = \frac{1}{\ln x}\ln x = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} y = e^1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^{1/\ln x} = e^1$$

---

(2) $\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x})^x$ (∞^0)

$$\ln y = \ln(\tfrac{1}{x})^x = x \ln \tfrac{1}{x} = \frac{\ln 1/x}{1/x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln 1/x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1/x^2}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} y = e^0 = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} (\tfrac{1}{x})^x = 1$$

---

(3) $\lim_{x\to\infty} (x+1)^{\frac{2}{x}}$ (∞^0)

$$\ln y = \ln(x+1)^{\frac{2}{x}} = \frac{2}{x}\ln(x+1) = \frac{2\ln x+1}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x+1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2/x+1}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = e^0 = 1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} (x+1)^{\frac{2}{x}} = 1$$

اوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

الصيغة $\infty - \infty$

(1) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}$ $(\infty - \infty)$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x(x+1) - 2}{(x-1)(x+1)}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x+1}{2x} = \dfrac{3}{2}$

---

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$ $(\infty - \infty)$ $\times \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ مرافق

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ تحول

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2}+x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{|x|+x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{2x}$

$= \dfrac{1}{2}$

---

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln(x+3) - \ln x]$ $(\infty - \infty)$

$= \lim\limits_{x\to\infty} x \ln\left(\dfrac{x+3}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln 1 + \frac{3}{x}}{1/x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3/x^2}{\frac{1+3/x}{-1/x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{1+\frac{3}{x}} = 3$

اوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

(1) $\lim_{x\to 0^+}(\cot x - \frac{1}{x})$ $(\infty-\infty)$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}$ $(\frac{0}{0})$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x\cos x}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x}$ $(\frac{0}{0})$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-(\sin x + x\cos x)}{\cos x + \cos x - x\sin x}$

$= \frac{0}{2}$

$= 0$

---

(2) $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x})$ $(\infty-\infty)$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \ln(x+1)}{x\ln(x+1)}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{\ln(x+1) + x\cdot\frac{1}{x+1}}$ $(\frac{0}{0})$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1/(x+1)^2}{\frac{1}{x+1} + \frac{x+1-x}{(x+1)^2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

---

(3) $\lim_{x\to\infty}(\ln x - x)$ $(\infty-\infty)$

خطوة

$x = \ln e^x$

$= \lim_{x\to\infty}(\ln x - \ln e^x)$

$= \lim_{x\to\infty} \ln \frac{x}{e^x} = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = \ln 0^+ = -\infty$

صيغ اخرى

(1) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x}$ $\left(\frac{0}{-\infty}\right)$

$= \lim_{x\to 0^+} x \cdot \frac{1}{\ln x} = 0 \cdot (0) = 0$

---

(2) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$ $\left(\frac{-\infty}{0}\right)$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln x} \ln(\ln x) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$

---

(3) $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$ (0^{∞})

$\ln y = \ln x^{1/x} = \frac{1}{x} \ln x$

$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \ln x = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} \ln y = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} y = e^{-\infty} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^{1/x} = 0$

---

(4) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x} - \ln x}{\sqrt{x}}$ $\left(\frac{\infty - \infty}{\infty}\right)$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$= \lim_{x\to\infty} 1 - \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$= 1 - \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/2\sqrt{x}}$

$= 1 - \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = 1 - \lim_{x\to\infty} \frac{2/2\sqrt{x}}{1} = 1 - 0 = 1$

اي من النهايات التالية يمكن ايجادها بدون قاعدة لوبتال وايها نستخدم قاعدة لوبتال مباشرة وايها تحتاج تحويل الى صورة مكافئة ثم نستخدم قاعدة لوبتال

(1) $\lim_{x\to\infty}(\ln x + x) = \infty + \infty = \infty$ لا تحتاج لوبتال صيغة معرفة

---

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\tan^{-1}x} = \frac{\infty}{\pi/2} = \infty$ لا تحتاج لوبتال صيغة معرفة

---

(3) $\lim_{x\to0^+}\frac{x^{-2}}{\ln x} = \lim_{x\to0^+}\frac{1/x^2}{\ln x}\ \left(\frac{\infty}{-\infty}\right)$ تحتاج لوبتال

---

(4) $\lim_{x\to\infty} x\sin(\frac{1}{x})\ (\infty\cdot0) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin 1/x}{1/x}$ تحتاج لا تحويل الى شكل القسمة ثم لوبتال

---

(5) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-1}{1-x^3}\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ لوبتال مباشر

---

(6) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x\ (1^\infty)$ تحتاج الى تحويل ثم لوبتال

---

(7) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x^2}{e^{\frac{x}{3}}}\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ لوبتال مباشر

---

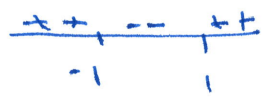
(8) $\lim_{x\to\infty}(\ln x)^x = \infty^\infty = \infty$ لا تحتاج الى لوبتال

---

(9) $\lim_{x\to-1^+}\frac{\cos^{-1}x}{x^2-1} = \frac{\pi}{0^-} = -\infty$ لا تحتاج لوبتال

او غير موجود

اشارة المقام x^2-1



إنتهت الوحدة الرابعة بحمد الله ... واعتذر للجميع عن أي تقصير أو خطأ.

اجابات لدرس الأول

الوحدة الرابعة.

① $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$= f(0) + f'(0)(x-0)$

$= 2 + \frac{1}{4}(x-0)$

$= 2 + \frac{1}{4}x.$ (D)

$f(x) = \sqrt{x+4}$

$f(0) = 2$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$

$f'(0) = \frac{1}{4}$

---

② $L(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi)$

$= 0 + -1(x-\pi)$

$= \pi - x$ (A)

$f(x) = \sin x$

$f(\pi) = \sin\pi = 0$

$f'(x) = \cos x$

$f'(\pi) = -1$

---

③ $L(x) = f(64) + f'(64)(x-64)$

$= 4 + \frac{1}{48}(x-64)$

$x_1 = 67.$

$L(67) = 4 + \frac{1}{48}(67-64)$

$= \frac{65}{16}$ (A)

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}.$

$x_0 = 64$

$f(64) = 4$

$f'(4) = \frac{1}{3}x^{-2/3}.$

$f'(64) = \frac{1}{48}$

---

④ $L(x) = f(2) + f'(2)(x-2)$

$= 1 + 4(x-2)$

$= 4x - 7.$

$f(1.9) \approx L(1.9) = 4(1.9) - 7 = 0.6$ (A)

تابع الإجابات أسئلة الجزء الأول

الموضوع الرابع

⑤ $L(t) = f(20) + f'(20)(t-20)$

$= 18 + \frac{2}{10}(t-20)$

$L(23) = 18 + \frac{2}{10}(23-20)$

$= 18.6$ (B)

$f(t) = ??$

$t_0 = 20$

$f(20) = 18$

$f'(20) \approx m$

$= \frac{20-18}{30-20}$

$= 2/10$

---

⑥ $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$= 0 - \frac{f(0)}{f'(0)}$

$= -\frac{1}{-2}$

$= 1/2$ (B)

$f(x) = e^{-x} - x$

$f(0) = 1 - 0$

$f'(x) = e^{-x}(-1) - 1$

$f'(0) = 2$

---

⑦

$x = \sqrt[3]{30}$

$x^3 = 30$

$x^3 - 30.$

$f(x) = x^3 - 30$ (C)

---

⑧ $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$= 1 - \frac{-3}{2} = 3/2$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

$= 3/2 - \frac{f(3/2)}{f'(3/2)}$

$= 3/2 - \frac{1/4}{3} = \frac{17}{12}$ (A)

$x = \sqrt{2}$

$x^2 = 2$

$x^2 - 2 = 0$

$f(x) = x^2 - 2$, $x_0 = 1$

$f(1) = -1$

$f'(x) = 2x$

$f'(1) = 2x$

$f(3/2) = 1/4$

$f'(3/4) = 3$

تابع اجابات اسئلة الجزء الأول

الموضوع الرابعة.

(9) يجب ان لا تكون مشتقة الدالة عند $x=0$

يساوي صفر

(D) $f(x) = x^3 - 2x + 1$

---

(10) $f(x) = \cos x$.

$x_0 = \frac{2\pi}{3} = \frac{2(3.14)}{3} = 2.09$.

(D)

---

(11) $f(x) = e^x - x$.

$f'(x) = e^x - 1$.

$f'(x_n) = e^{x_n} - 1$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

$$= x_n - \frac{e^{x_n} - x_n}{e^{x_n} - 1}$$

$$= \frac{x_n(e^{x_n} - 1) - (e^{x_n} - x_n)}{e^{x_n} - 1}$$

$$= \frac{x_n e^{x_n} - x_n - e^{x_n} + x_n}{e^{x_n} - 1} = \frac{e^{x_n}(x_n - 1)}{e^{x_n} - 1}.$$ (A)

---

(12) $f(x) = x^5 + 4x^3 - 1 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 + 12x^2$.

$f(0) = -1$
$f(1) = 4$ } بينهما جذر.

الأفضل ان تكون $x_0 = 0$ لان صورتها اقرب للصفر

(B) $x_0 = 1$ لذلك نختار $f'(0) = 0$ لكون

تابع اجابات اسئلة الدرس الأول

الوحدة الرابعة.

(13) $L(x) = 4x + 1$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right) \approx L\left(\frac{1}{2}\right) + L'\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\right) + 1 + 4$$

$$= 7 \qquad \text{(c)}$$

اجابات اسئلة الدرس الثاني

الوحدة السابعة .

① (D) $0 \cdot \infty$.

---

② $\lim_{x \to 0} \frac{\tan^{-1} x}{\sin^{-1} x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 1$ (B)

---

③ $\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x} \left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2 \sin 2x} \left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{4 \cos 2x} = \frac{2}{4} = 1/2$ (C)

---

④ $\lim \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{10-x} - 3} \left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim \frac{-1/2\sqrt{5-x}}{-1/2\sqrt{10-x}} = \frac{-1/2}{-1/3} = 3/2$ (D)

---

⑤ $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - \cos x}{x} \left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x} + \sin x}{1}$

$= 2$ (D)

تابع اجابات البرس الثاني

الوحدة الرابعة.

(6) $\lim_{t\to 0} \frac{\sin 2t}{e^{3t}-1}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$\lim_{t\to 0} \frac{2\cos 2t}{3e^{3t}} = \frac{2}{3}$ (A)

---

(7) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1} x}{x^2+3x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1/\sqrt{1-x^2}}{2x+3} = 1/3$ (D)

---

(8) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin x} = 2$ (D)

---

(9) $\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos \pi x}{1-x+\ln x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x\to 1} \frac{-\pi \sin \pi x}{-1+\frac{1}{x}}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x\to 1} \frac{-\pi^2 \cos \pi x}{-1/x^2} = \frac{-\pi^2(-1)}{-1} = -\pi^2$ (A)

---

(10) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ تحل السؤال بأكثر من طريقة.

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1/x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1} = 1$ (B)

تابع اجابات اسئلة الدرس الثاني

الموضوع الرابعة.

(11) $\lim_{x\to 0^+} \tan x \ln x \quad (0 \cdot -\infty)$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\csc^2 x}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/\sin^2 x}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\sin x \cos x}{1} = 0$ (A)

---

(12) $\lim_{x\to \infty} x \ln\left(1+\frac{3}{x}\right) \quad (\infty \cdot 0)$

$= \lim_{x\to \infty} \frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{1/x}$

$= \lim_{x\to \infty} \frac{-\frac{3/x^2}{1+\frac{3}{x}}}{-1/x^2} = \lim_{x\to \infty} \frac{3}{1+\frac{3}{x}} = 3$ (C)

---

(13) $\lim_{x\to \infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) \times \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$= \lim_{x\to \infty} x \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$= \lim_{x\to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ ÷ أكبر

$= \lim_{x\to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}+x}$

$= \lim_{x\to \infty} \frac{x}{x+x} = 1/2$ (C)

أو $\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x}$

$= \lim_{x\to \infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}$

$= \lim_{x\to \infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}} = 1$

(14) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 - x} = \lim \frac{1}{x} + \frac{1}{x(x-1)}$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 1 + 1}{x(x-1)}$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x(x-1)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x-1} = -1.$ (A)

---

(15) $\lim_{x \to 1^+} \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x-1}$

$= \lim \frac{2}{(x-1)(x+1)} - \frac{x}{x-1} = \lim \frac{2 - x(x+1)}{(x-1)(x+1)}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{2 - x^2 - x}{x^2 - 1}.$

$= \lim_{x \to 1} \frac{-2x - 1}{2x} = \frac{-3}{2}.$ (B)

---

(16) $\lim (e^x + x)^{1/x}.$

نوضح $y = (e^x + x)^{1/x}.$

$\ln y = \ln (e^x + x)^{1/x} = \frac{1}{x} \ln (e^x + x) = \frac{\ln (e^x + x)}{x}.$

$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln (e^x + x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{e^x + 1}{e^x + x}}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$

$\Rightarrow \lim (e^x + x)^{1/x} = e^1.$ (C)

$\lim (e^x + x)^{1/x} \to 1$
حيث $= e.$

تابع اجابات استه الدرس الثاني

لوحة السؤال

(17) $\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2x}$

$= \lim \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x}\right]^2 = \left(e^{-1}\right)^2 = e^{-2}$ (D)

---

(18) $\lim_{x \to 0^+} (1+2x)^{3/x}$

$y = (1+2x)^{3/x}$

$\ln y = \ln (1+2x)^{3/x} = \frac{3}{x} \ln(1+2x) = \frac{3\ln(1+2x)}{x}$

$\lim \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{3\ln(1+2x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 \cdot \frac{2}{1+2x}}{1} = 6.$

$\lim y = \lim (1+2x)^{3/x} = e^6$ (C)

---

(19) $\lim_{x \to 0^+} (\sin x)^x$

$y = (\sin x)^x$

$\ln y = \ln (\sin x)^x = x \ln \sin x = \frac{\ln \sin x}{1/x}$

$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \sin x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-1/x^2}$

$= \lim_{x \to 0^+} -x^2 \frac{\cos x}{\sin x}$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-x}{\sin x} \cdot x \cos x = 0.$

$\Rightarrow \lim y = e^0 = 1$ (B)

تابع اجابات اسئلة الجزء الثاني — الوحدة الرابعة

(20) $\lim_{x\to 4} 8(x-4)^{x-4}$ (0^0) $= 8 \lim_{x\to 4} (x-4)^{x-4}$.

نفرض $y = (x-4)^{x-4}$.

$$\ln y = \ln (x-4)^{x-4} = (x-4)\ln(x-4) = \frac{\ln(x-4)}{1/x-4}$$

$$\lim_{x\to 4^+} \ln y = \lim_{x\to 4^+} \frac{\ln(x-4)}{1/x-4} \quad \left(\frac{-\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim \frac{1/x-4}{-1/(x-4)^2} = -\lim_{x\to 4^+} (x-4) = 0$$

$$\lim \ln y = 0 \Rightarrow \lim y = e^0 = 1.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 4^+} (x-4)^{x-4} = 1$$

$$\lim 8(x-4)^{x-4} = 8 \quad (c)$$

---

(21) $\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x}$

$y = x^{\ln x}$.

$\ln y = \ln x^{\ln x} = (\ln x)(\ln x) = (\ln x)^2$.

$\lim_{x\to 0^+} (\ln x)^2 = \infty$.

$\lim y = e^{\infty} = \infty$ (c)

تابع اجابات استكمالية الثاني

الوحدة الرابعة.

(22) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}}\right]^x$ تبسيط بالمقام كل x.

$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right]^x$

$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{e}{e^{-1}} = e^2$ (C)

---

(23) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$ تمرين (B)

---

(24) $\lim_{x\to\infty}\left(1+5e^x\right)^{1/x}$

$y = \left(1+5e^x\right)^{1/x}$

$\ln y = \ln\left(1+5e^x\right)^{1/x} = \frac{1}{x}\ln\left(1+5e^x\right) = \frac{\ln(1+5e^x)}{x}$

$\lim \ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+5e^x)}{x}$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5e^x}{1+5e^x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{5e^x}{5e^x} = 1$

$\lim y = e^1 = e.$ (B)

(25) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{k\,x^{k-1}}{e^x} = 0.$$ (A)

لانه مشتقة البسط تنتهي ومشتقة المقام مكررة.

---

(26) $$\lim_{x\to 2} \frac{g^2(x)-9}{x-2}, \quad g(2)=3$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{g^2(x)-g^2(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} \cdot g(x)+g(2)$$

$$= g'(2)\cdot (g(2)+g(2))$$

$$= 2\,(3+3) = 12$$ (C)

---

(27) $$\lim_{x\to 1} \frac{x\,f(2x)-f(2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1\cdot f(2x)+x\,f'(2x)\cdot 2}{1}$$

$$= f(2)+2f'(2)$$

$$= 5+2(-1) = 3$$ (A)

تابع اجابات اسئلة الدرس الثاني

الموضوع الرابعة.

(28) $$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - x}{2x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - 1}{4x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{4} = -1/4$$ (D)