

No:

Date: حساب النهايات (2 و 3) درس

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 3x + 1) \quad \text{م 87} \quad \textcircled{1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + \lim_{x \rightarrow 0} 3x + \lim_{x \rightarrow 0} 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x + 3 \lim_{x \rightarrow 0} x + 1 \quad \text{حسب نظريات الدرس}$$

$$= 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 = 1 \quad \leftarrow \text{(نعوض } x \text{ بـ } 0 \text{ مباشرة)}$$

$$\text{م 87} \quad \textcircled{2}$$

بتوضيف النظريات الواردة في الدرس
(و تقول الى الحاصل مباشر)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{2(2)+1} = \sqrt[3]{5} \approx 1.7099$$

$$\approx 1.8$$

الآن بـ 1.8

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos^{-1}(x^2) \quad \text{م 87} \quad \textcircled{3}$$

$$= \cos^{-1}(0^2) = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-5}{x^2+4} \quad \text{م 87} \quad \textcircled{4}$$

$$= \frac{2-5}{(2)^2+4} = -\frac{3}{8}$$

$$\frac{3^2-3-5}{3-3} = \frac{0}{0} \quad \text{الحدود غير معرف}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} \quad \textcircled{5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} (x+2) = 3+2 = 5$$

$$\text{م 87} \quad \textcircled{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+x-2}{x^2-3x+2}$$

$$= \frac{1+1-2}{1^2-3(1)+2} = \frac{0}{0} \quad \text{غير معرف}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{1+2}{1-2} = -3$$

$$\text{م 87} \quad \textcircled{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-4}$$

$$= \frac{2^2-2-2}{2^2-4} = \frac{0}{0} \quad \text{غير معرف}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2+1}{2+2} = \frac{3}{4}$$

No:

Date:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2x - 3}$$

تمرين (8) ص 87

$$= \frac{(1)^3 - 1}{(1)^2 + 2(1) - 3} = \frac{0}{0} \text{ غير معين}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+3)(x-1)}$$

• كمال
• مختصر
• تم تفحص

$$= \frac{(1)^2 + (1) + 1}{1+3} = \frac{3}{4}$$

تذكر: $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$
 $A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$
 تحليل مجموع مكعبين

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x}$$

تمرين و ص 87

$$= \frac{\sin 0}{\tan 0} = \frac{0}{0} \text{ غير معين}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)}{(\frac{\sin x}{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x) (\cos x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x) = \cos 0 = 1$$

تذكر:
 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

(نفس التمرين 17 ص 77)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$= \frac{0}{0}$$

غير معين

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) \times \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$= 1 \times \frac{1}{\cos 0} = 1 \times 1 = 1$$

تذكر:
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{-2x+1}}{x^2 + x}$$

تمرين (11) ص 87

$$= \frac{0 \times (e^{-2(0)+1})}{(0)^2 + 0} = \frac{0}{0} \text{ لو عوضنا غير معين}$$

بإخراج عامل مشترك في المقام $\Rightarrow$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^{-2x+1}}{x(x+1)}$$

تم تفحص بعد الاختصار:

$$= \frac{e^{-2(0)+1}}{0+1} = e \approx 2.718$$

لنعوضنا مباشرة في غير صفون $(0)^2 \cdot \csc 0 = \frac{0}{0}$

نستخدم

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \times \frac{1}{\sin x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\frac{\sin x}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\frac{\sin x}{x})^2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

$$= \frac{\sqrt{0+4} - 2}{0} = \frac{0}{0} \text{ غير صفون}$$

نقوم بإزالة نظام (تنسيب) البسط وذلك بجذب البسط وإلغاء الجرافة ببسط

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2) x (\sqrt{x+4} + 2)}{x (\sqrt{x+4} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4})^2 - (2)^2}{x (\sqrt{x+4} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+4-4}{x (\sqrt{x+4} + 2)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0+4} + 2} = \frac{1}{4}$$

نستخدم فرق مربعين

$$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$$

• مختصر
• تم الغرض

تمرين (14) ص 87 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3 - \sqrt{x+9}}$ لنعوضنا مباشرة في غير صفون $\frac{0}{0}$ غير صفون

نقوم بإزالة نظام (تنسيب) الجاهل بجذب كل من البسط والجاهل بموافق الجاهل

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot x (3 + \sqrt{x+9})}{(3 - \sqrt{x+9}) x (3 + \sqrt{x+9})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x (3 + \sqrt{x+9})}{(3)^2 - (\sqrt{x+9})^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x (3 + \sqrt{x+9})}{9 - (x+9)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x (3 + \sqrt{x+9})}{9 - x - 9}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(3 + \sqrt{x+9})}{-1}$$

$$= -12$$

غرض :
 $x=0$

No:

Date:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

مَرْئِي (15) ص 87

المقويض المباشر $x=1$ $\frac{0}{0}$ غير معين، نقوم بإعطاء المقام

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)x(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)x(\sqrt{x}+1)} \leftarrow \text{يصبح المقام فرقاً مربعين}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2 - (1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = \sqrt{1}+1 = 2$$

تذكر كيف فرقنا معين

$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3-64}{x-4}$$

مَرْئِي (16) ص 87

المقويض المباشر $x=4$ يعطي $\frac{0}{0}$ غير معين

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{(x-4)}$$

• نحل
• نختصر
• ثم نفوض

$$= 4^2 + 4(4) + 16 = 48$$

مَرْئِي (17) ص 87

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$$

نوجد المقامات (هنا المقام الثاني فرق مربعين)

$$= \frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)x(x+1)} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$

يؤول المطلوب إلى : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} - \frac{2}{|x|}$$

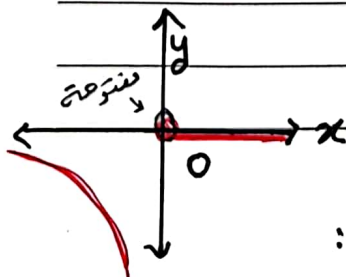
مَرْئِي (18) ص 87

$$x > 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x} \right) = 0$$

$$x < 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{-x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x} \right) = -\infty$$

النهاية غير موجودة
⇒



لاحظ الرسم البياني المجاور للدالة (ناحية نهاية الحل البياني):

No:

Date:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{1 - e^x}$$

مَرْنِي (19) ص 87

المقودض يعطي $\frac{0}{0}$ غير معين
 • تحليل
 • تفكير
 • تم نقوض

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x)(1 + e^x)}{(1 - e^x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + e^x) = 1 + e^0 = 2$$

$$e^{2x} = (e^x)^2$$

$$1 - e^{2x} = 1^2 - (e^x)^2$$

حزق مربيين

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin|x|}{x}$$

مَرْنِي (20) ص 87

المقودض الملبس

يعطي غير معرف نريد حاليه $x > 0$ و $x < 0$

$$|x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

$$x > 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$x < 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{-x} = 1$$

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin|x|}{x} \text{ غير موجود}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ مطلوب } f(x) = \begin{cases} 2x & : x < 2 \\ x^2 & : x \geq 2 \end{cases}$$

مَرْنِي (21) ص 87

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2) = (2)^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x) = 2(2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

مساويان

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ مطلوب } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : x \leq -1 \\ 3x + 1 & : x > -1 \end{cases}$$

مَرْنِي (22) ص 87

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (3x + 1) = 3(-1) + 1 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 1) = (-1)^2 + 1 = 2$$

غير متساويين

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ غير موجود}$$

No:

Date:

مَرِين (23) ص 87

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ مطلوب } f(x) = \begin{cases} 2x+1 & : x < -1 \\ 3 & : -1 \leq x \leq +1 \\ 2x+1 & : x > +1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x+1) = 2(-1)+1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (3) = 3$$

غير متساويتين
 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ غير موجود

مَرِين (24) ص 87

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ مطلوب } f(x) \text{ الدالة } f(x) \text{ للمَرِين (23) ص 87}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+1) = 2(1)+1 = 3$$

متساويتان
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ موجود

مَرِين (25) ص 87

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} \text{ المقووضا المباشرة يعطي } \frac{0}{0} \text{ غير صفر } \rightarrow \text{ نختصر } \rightarrow \text{ ثم نفحص}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(2+h) \times h] [(2+h)+2]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[h] [h+4]}{h} = 0+4 = 0$$

المسطرة فرق مربعين:
 (ممكن فاء الزبوع والمحدود المتشابهة)

مَرِين (26) ص 87

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h} \text{ المقووضا المباشرة } h=0 \text{ يعطي } \frac{0}{0} \text{ غير صفر}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(1+h) \times h] [(1+h)^2 + (1+h) \times 1 + 1^2]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[h] [(1+h)^2 + 1 + h + 1]}{h}$$

$$= (1+0)^2 + 1 + 1 = 3$$

المسطرة فرق مكعبين

$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$$

(ممكن بفك التكعب في المسطر - ثم جمع الحدود المتشابهة)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1^3 + 3(1)^2h + 3(1)h^2 + 1 - 1}{h}$$

No:

Date:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 4}$$

تمرين (27) م. 87

بالعقودين المباشر $x=2$ يعطي $\frac{0}{0}$ غير معين

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad \text{تذكر!}$$

$$Z = x^2 - 4 \quad \text{لذلك نفتر من}$$

$$x=2 \Rightarrow Z = 2^2 - 4 = 0$$

وعندما $x \rightarrow 2$ يكون $Z \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = \lim_{Z \rightarrow 0} \frac{\sin Z}{Z} = 1 \quad \text{نعوض من:}$$

تمرين (28) م. 87

العقودين المباشر يعطي $\frac{0}{0}$ غير معين

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{5x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{5x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{5 \cos x} \right) \quad \text{نعيد توزيع الحدين:}$$

$$= 1 \times \frac{1}{5 \cos 0} = 1 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} \quad \text{تمرين (29) م. 87}$$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
f(x)	0.0054	5×10^{-5}	-8×10^{-7}	غير معرف	-8×10^{-7}	-5×10^{-5}	-0.005

$f(x) \rightarrow 0 \quad \quad \quad 0 \leftarrow f(x)$

دليل عددي
الآلة حاسبة

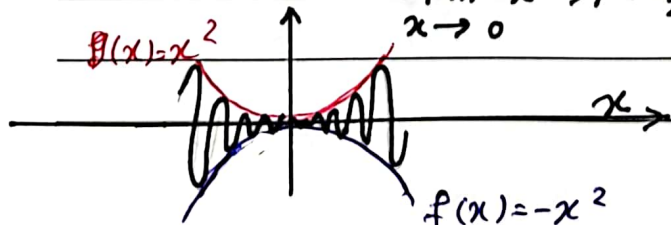
باستخدام نظرية الضغط: $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ $\Rightarrow -x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$ $x^2 > 0$

$$f(x) = -x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq g(x) = x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -0^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 \quad \text{من نظرية الضغط يكون:}$$



بإثبات باستخدام برنامج الرسم

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sec\left(\frac{1}{x}\right)$$

لا يمكن استحداث نظرية السطيرة هنا

لأن الدالة $\sec\left(\frac{1}{x}\right)$ (دالة القاطع) ليست بين -1 و +1

مثل دالة $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ التي هي بين -1 و +1

و يصعب التحقق البياني لوجود عدد غير منته من المقاربات العددية

للدالة $\sec\left(\frac{1}{x}\right)$ وهي تقترب من 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\sqrt{x} \cos^2\left(\frac{1}{x}\right)] = 0 \quad \text{أثبت: ص 87 تمرين (31)}$$

نعلم $-1 \leq \cos x \leq +1$ ولو ربعا: $0 \leq \cos^2 x \leq 1$

وبملاحظة $\sqrt{x}$ موجب فموجب الأضرب به:

$$0 \times \sqrt{x} \leq \sqrt{x} \cos^2 x \leq 1 \times \sqrt{x}$$

$$0 \leq \sqrt{x} \cos^2 x \leq \sqrt{x} \quad (x > 0)$$

$\Downarrow$

$$f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$\Downarrow$

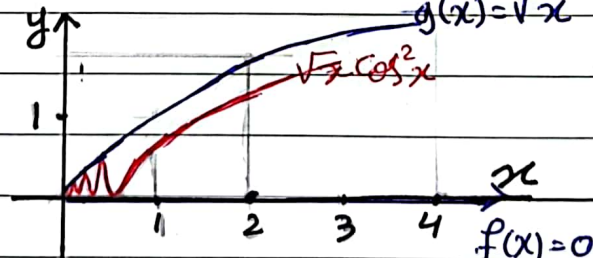
$$g(x) = \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \sqrt{0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cos^2 x = 0$$

حسب نظرية السطيرة يكون:

بالرسم البياني:



$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) = 0 \quad \text{أثبت: مطلوب: ص 87 تمرين (32)}$$

بالاستخدام نظرية السطيرة

$$|f(x)| \leq M \Rightarrow -M \leq f(x) \leq +M \quad (\text{منعوضا مطلقا})$$

لوضربنا الأضرب $x^2 > 0$

$$x^2 \cdot (-M) \leq x^2 f(x) \leq x^2 \cdot M$$

$$-x^2 M \leq x^2 f(x) \leq x^2 M$$

$\Downarrow$

$$f(x) = -x^2 M$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$\Downarrow$

$$g(x) = x^2 M$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) = 0 \quad \text{حسب نظرية السطيرة:}$$

No:

Date:

أوجد السرعة اللحظية

مركز (33) ص 87

$$f(t) = t^2 + 2 \quad \text{عند } a = 2 \text{ : حيث } a = 2$$

تعرف السرعة اللحظية عند a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(2+h)^2 + 2] - [(2)^2 + 2]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2^2 + 4h + h^2 + 2] - [6]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4+h)}{h} = 4 + 0 = 4$$

مركز (34) ص 87 $f(t) = t^2 + 2$ مطلوب السرعة اللحظية عند $a = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(0+h)^2 + 2] - [0^2 + 2]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$$

مركز (35) ص 87 $f(t) = t^3$ مطلوب السرعة اللحظية عند $a = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(0+h)^3] - [0^3]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 = 0^2 = 0$$

مركز (36) ص 87 $f(t) = t^3$ مطلوب السرعة اللحظية عند $a = 1$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(1+h)^3] - (1)^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1^3 + 3(1^2)(h) + 3(1)(h)^2 + h^3 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3 + 3h + h^2)}{h} = 3 + 3(0) + 0^2 = 3$$

نفس التكيب

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

No:

(Date:)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

مَرَبِّي (37) ص 87

لو هذرننا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$
 حيث $\sqrt{x^2} = x$ لأن $x > 0$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مَرَبِّي (38) ص 87 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
 مخصص :

لو ربنا : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = (1)^2$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = 1$$

نشر $(\sin x)^2 = 1 - \cos^2 x$

مَرَبِّي (39) ص 87 : $f(x) = \begin{cases} g(x) : x < a \\ h(x) : x > a \end{cases}$
 مخصص :

نوصي : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = g(a)$
 (نفوض $x = a$ حيث $g(x)$ كثير حدود)

مخصص : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = h(a)$
 (نفوض $x = a$ حيث $h(x)$ كثير حدود)

مَرَبِّي (40) ص 87 : $f(x) = \begin{cases} g(x) : x < a \\ c : x = a \\ h(x) : x > a \end{cases}$
 كيف نجد $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ؟

نوجد $g(a)$ ثم نوجد $h(a)$ فإذا كانتا متساويتين
 فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجودة ، وإلا فالنهاية غير موجودة

مَرَبِّي (41) ص 87 : $a) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 1) = 2^2 - 3(2) + 1 = 1$
 نظرية 3.2

$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^2+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x-2)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x - \lim_{x \rightarrow 0} 2}{\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + \lim_{x \rightarrow 0} 1} = \frac{0-2}{0+1} = -2$

(i) نظرية 3.1 (ص 80)
 (ii) نظرية 3.2 (ص 82)
 نظرية 3.2 (ص 82)

تمرين (42) ص 87 $\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1) \sin x]$ اذكر خطوات ونظريات هذا التمرين

$$= \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \cdot \lim_{x \rightarrow -1} \sin x \quad \text{نظرية 3.1}$$

$$= (-1+1) \sin(-1) = 0 \quad \text{نظرية 3.2 / 3.4}$$

$$[b] \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x e^x}{\tan x}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} e^x}{\lim_{x \rightarrow 1} \tan x}$$

نظرية 3.2

ثم نظرية 3.4

$$= \frac{1 \times e^1}{\tan 1} \approx 1.745$$

تمرين (43) ص 87 بافتراض $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -3$ و $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$

$$(43) \lim_{x \rightarrow a} [2f(x) - 3g(x)] = 2 \lim_{x \rightarrow a} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$= 2(2) - 3(-3) = 13 \quad (\text{بموجب المعطيات})$$

$$(44) \lim_{x \rightarrow a} [3f(x) \cdot g(x)]$$

$$= 3 \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 3(2)(-3) = -18$$

$$(45) \lim_{x \rightarrow a} \frac{[f(x)]^2}{g(x)} = \frac{[\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^2}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{(2)^2}{-3} = -\frac{4}{3}$$

$$(46) \lim_{h \rightarrow a} \frac{2f(x) \cdot h(x)}{f(x) + h(x)} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} h(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} h(x)}$$

$$= \frac{2(2) \cdot (0)}{2 + 0} = \frac{0}{2} = 0$$

تمرين (47) ص 88 $p(x) = x^2 - 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} p(p(p(x))) = \lim_{x \rightarrow 0} p(p(x^2 - 1)) = \lim_{x \rightarrow 0} p((x^2 - 1)^2 - 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} p(x^4 - 2x^2 + 1 - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} p(x^4 - 2x^2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} [(x^4 - 2x^2)^2 - 1] = [(0^4 - 2(0)^2)^2 - 1] = -1$$

No:

Date: 20/10/2019

$$\lim_{x \rightarrow 0} p(3 + 2p(x - p(x)))$$

تمرين (49) ص 89

$$= \lim_{x \rightarrow 0} p(3 + 2p(x - (x^2 - 1)))$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} p(3 + 2p(x - x^2 + 1))$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} p[3 + 2((x - x^2 + 1)^2 - 1)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} p[3 + 2(x - x^2 + 1)^2 - 2] = \lim_{x \rightarrow 0} p(2(x - x^2 + 1)^2 + 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} [2(x - x^2 + 1)^2 + 1]^2 - 1$$

$$= [2(0 - 0^2 + 1)^2 + 1]^2 - 1$$

$$= [2(+1)^2 + 1]^2 - 1 = [9]^2 - 1 = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

تمرين (49) الأخطاء في كتابة:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2}$$

لا يمكن ضرب بسط المقام
بها

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$$

قسمة اثنى عشرين لا تعطي مضروب كل مضروب

لا تعطي مضروب آخرها

$$= 0 \cdot \infty = 0$$

كأن بالصدفة 0

بدلاً من ذلك هو غير صحيح

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \frac{0}{0} = 1 \text{ الأخطاء في كتابة: } 1 = \frac{0}{0}$$

مرئى (50) ص 89 حاصل القسمة ليس قسمة النهايات

إذا كان المقام = 0 الكسر غير محدد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin 2x}{2x}$$

الصواب لكل:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2x \frac{\sin 2x}{2x} = 2x \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \times 1 = 2$$

No:

Date:

مَرَبِي (51) م 88 مثال :

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ لا يوجد}$$

$$g(x) = -\frac{1}{x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \text{ لا يوجد}$$

$$\text{بيننا } \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 \text{ موجودة}$$

مَرَبِي (52) م 88

$$f(x) = x \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ موجودة}$$

$$g(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \text{ لا يوجد}$$

$$\text{بيننا } \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \text{ موجودة}$$

مَرَبِي (53) م 88 المصطلح :

$$\text{لذا : } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ موجودة} \quad \text{وإذا : } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ غير موجودة}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) \text{ غير موجودة}$$

الإجابة : نعم لن تكون $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ موجودة

$$\text{فلو وجدنا : } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) - \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ يكون}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) - \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ تكون موجودة}$$

وهذا بنا في صيغة الـ $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ غير موجودة

$$\text{مَرَبِي (54) إذا : } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ غير موجودة} \quad \text{هل : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} \text{ غير موجودة ؟}$$

$$\text{هذا خطأ مثلاً } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ غير موجودة : } f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\text{بيننا (موجوده) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

No:

Date:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

تمرین (55) ص 88

x	0	0.001	0.01	0.1	1
$(1+x)^{\frac{1}{x}}$		2.7169	2.7048	2.5937	2

$$2.718 \approx e \leftarrow f(x) \quad \text{وبالآلة: } e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$$

تمرین (56) ص 88

	$x \rightarrow 0^-$			$x \rightarrow 0$	$0^+ \leftarrow x$		
x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$e^{\frac{1}{x}}$	4.5×10^{-5}	3.7×10^{-44}				2.6×10^4	22026
$f(x)$	$\rightarrow 0$				$\rightarrow +\infty$		$f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{غير موجود}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-x^2}$$

تمرین (57) ص 88

x	0	$0^+ \leftarrow x$	$x \rightarrow 0^+$	
		0.001	0.01	0.1
x^{-x^2}		1.000006	1.0004	1.0232
		$1 \leftarrow f(x)$		

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-x^2} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x}$$

تمرین (58) ص 88

x	0	$0^+ \leftarrow x$	0.01	0.1	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x}$	88 م (5)
$x^{\ln x}$		5.2×10^{-20}	1.623×10^{-6}	200.7		(+∞) غير موجود
$P(x)$ فکر بلوئنا						

(+) غير موجود

تکبر بلاشاه

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

تمرین (59)

	$x \rightarrow 0^-$				$x \rightarrow 0^+$		
x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$\tan^{-1}(\frac{1}{x})$	-1.47	-1.56	-1.569		1.569	1.56	1.47
			$\Downarrow \sim -\frac{\pi}{2}$			$\Downarrow \sim \frac{\pi}{2}$	

النهاية غير موجود

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left| \frac{1}{x} \right|$$

تمرین (60)

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$\ln \left \frac{1}{x} \right $	2.302	4.605	6.907		6.907	4.605	2.302
$f(x)$	$\rightarrow +\infty$				$\rightarrow +\infty$		

النهاية غير موجود

مَرْنِي (61) ص 88 اثبت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ $\Rightarrow$ $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^3 = L^3$ أولاً

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^3 = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \cdot L \cdot L = L^3$$

ثانياً $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^4 = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \cdot L \cdot L \cdot L = L^4$

مَرْنِي (62) ص 88 استقراء الاستقراء لإثبات $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = L^n$: صحيح موجب

لاحظنا في الترتيبين السابقين صحة ذلك عندما تكونت خطوات للتأني

لو فرضنا: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^k = L^k$ صحيحة فكل هي صحيحة عند $k+1$ ؟

سيكون: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{k+1}$

$$= \lim_{x \rightarrow a} ([f(x)]^k \cdot f(x))$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

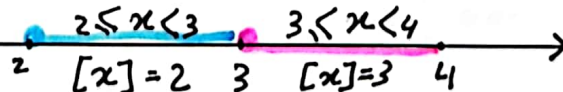
$$= [L]^k \cdot L = L^{k+1}$$

فكل ما علينا إثباته هو صحة n عدد صحيح

استقراء الاستقراء
صحيحة عند $n=1$
فرضنا صحيحة عند k
نثبت أنها صحيحة عند $k+1$

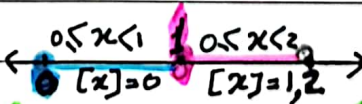
مَرْنِي (63) ص 88 مطلوب توصيف $\lim_{x \rightarrow 3} [x]$ غير موجودة

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} [x] = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} [x] = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} [x] \text{ غير موجودة}$$

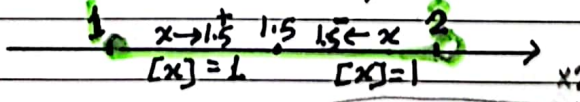


مَرْنِي (64) ص 88

[a] $\lim_{x \rightarrow 1} [x]$ غير موجودة



[b] $\lim_{x \rightarrow 1.5} [x] = 1$



[c] $\lim_{x \rightarrow 1.5} [2x]$ غير موجودة $\rightarrow 1 < x < 1.5 \Rightarrow (x \rightarrow 1.5^-) \Rightarrow 2 < 2x < 3 \Rightarrow [2x] = 2$
 $\rightarrow 1.5 < x < 2 \Rightarrow (x \rightarrow 1.5^+) \Rightarrow 3 < 2x < 4 \Rightarrow [2x] = 3$

[d] $\lim_{x \rightarrow 1} (x - [x])$ غير موجودة $\rightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} = 1 - 0 = 1$
 $\rightarrow 1 < x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} = 1 - 1 = 0$

No:

Date:

$$T(x) = \begin{cases} 0.14x & ; 0 \leq x < 10000 \\ 1500 + 0.12x & ; 10000 \leq x \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (0.14x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 10000^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 10000^-} (0.14x) = 0.14(10000) = 1400$$

$$\lim_{x \rightarrow 10000^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 10000^+} (1500 + 0.12x) = 1500 + 0.12(10000) = 3600$$

مختلفتان

عن وجود $\lim_{x \rightarrow 10000} f(x)$ يكون

* قرب الصفر واقعياً صفر

* التغير البسيط في الدخ (أقل من 10000 بقليل) : 1400
 بينما (أكبر من 10000 بقليل) : 3600
 أي بالقرب من 10000 يغير هذا شيئاً

$$T(x) = \begin{cases} a + 0.12x & ; x \leq 20000 \\ b + 0.16(x - 20000) & ; x > 20000 \end{cases}$$

مطلوب a, b بحيث: $\lim_{x \rightarrow 20000} T(x) = 0$ وحيث $T(x) \geq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 20000^+} T(x) = 0 \Rightarrow a + 0.12(0) = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 20000^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 20000^-} (0 + 0.12x) = 0.12 \times 20000 = 2400$$

$$\lim_{x \rightarrow 20000^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 20000^+} (b + 0.16(x - 20000))$$

$$= b + 0.16(20000 - 20000) = b$$

أي يجب أن تكون $b : 24000$

حتى لا تكون هناك قفزة كبيرة في الضرائب عند 20000 (معدل وبعد)