

اختبر نفسك (6)
Check yourself (6)

Mathematics الرياضيات

الصف الثاني عشر متقدم

الفصل الثالث

2024-2023

Lesson 7-2 (Integration by parts)

according to the previous exam

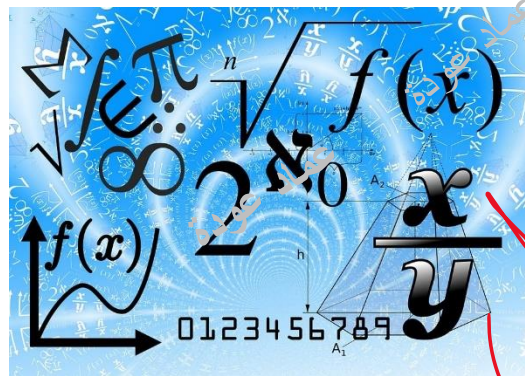
مراجعة الدرس الثاني (التكامل بالأجزاء)

من الوحدة السابعة اعتمادا على

الاختبارات السابقة

الأستاذ عماد عودة

عماد عودة



اسم الطالب: -



الأستاذ عماد عودة

<https://t.me/+v1n4wuNV2B83NDA0>

<http://www.youtube.com/@imaths2022>

س1: - اوجد التكامل

$\int x e^{2x} dx$
 (+) x $\swarrow$ $\frac{1}{2} e^{2x}$
 (-) 1 $\searrow$ $\frac{1}{4} e^{2x}$
 $= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$

- a) $\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} + c$
- b) $\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} + c$
- c) $\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c$
- d) $\frac{1}{2} x^2 e^x - \frac{1}{4} e^x + c$

س2: - اوجد التكامل

$$\int_1^2 x e^x dx$$

- | | |
|----|-----------|
| a) | 1 |
| b) | $e^2 + 1$ |
| c) | $e^2 - 1$ |

بالإشارة ومن ثم نبحث عن قيمة التكامل

$$\int_1^2 x e^x dx = 7.389$$

d) $e^2 = 7.389$

س3: - اوجد التكامل

$$\int \ln(2x) dx$$

- a) $x \ln 2x - \int dx + c$
- b) $\frac{\ln 2x}{x} - \int dx + c$
- c) $2x \ln x - \int dx + c$
- d) $x \ln 2x - x^2 + c$

$$\begin{aligned} u &= \ln 2x \\ dy &= \frac{2}{2x} dx \\ dy &= \frac{1}{x} dx \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\int dx = \int dv \\ &x = v \end{aligned}$$

Q4: - Evaluate

س4: - اوجد التكامل

$$\int_1^{10} \ln 2x \, dx$$

- a) $10 \ln 20 - \ln 2 - 9$
 b) $10 \ln 10 - 9$
 c) $10(\ln 20 - \ln 2) - 9$
 d) $10 \ln 20 - \ln 2 + 9$

يمكن بالادلة من ثم اتحاد القوية الخطابة

لو من المبرر السابق

$$\int_1^{10} \ln 2x \, dx = x \ln 2x \Big|_1^{10} - \int_1^{10} dx$$

$$= [10 \ln 20 - 1 \ln 2] - (10 - 1)$$

$$= 10 \ln 20 - \ln 2 - 9$$

Q5: - Evaluate

س5: - اوجد التكامل

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

- a) $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c$
 b) $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} x^3 + c$
 c) $\frac{x^3}{3} \ln x + \frac{1}{9} x^3 + c$
 d) $\frac{x^3}{3} \ln x + \frac{1}{3} x^3 + c$

بالتدريج

لو من المبرر السابق

حسب

$$u = \ln x \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad dx = x \, du$$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \int x^2 \cdot x \, du = \int x^3 \, du$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c$$

Q6: - Evaluate

س6: - اوجد التكامل

$$\int_0^{\pi} 2x \cos x \, dx$$

- a) $(2x \sin x - 2 \cos x) \Big|_0^{\pi}$
 b) $2x \sin x - \int_0^{\pi} 2 \sin x \, dx$
 c) $(2x \sin x - 2x \cos x) \Big|_0^{\pi}$
 d) $2x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2 \cos x \, dx$

بالتدريج

لو من المبرر السابق

او بالمجدول

كاس

اشتق

2x

cos x

2

sin x

0

-cos x

$$= 2x \sin x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2 \cos x \, dx$$

Q7: - Evaluate

س7: - اوجد التكامل

$$\int_0^{\pi} 2x \sin x$$

- a) -4
- b) 4
- c) 2π**
- d) 0

2π

عماد عودة

عماد عودة

Q8: - Evaluate

س8: - اوجد التكامل

$$\int \tan^{-1} x \, dx$$

- a) $x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$
- b) $x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$**
- c) $\frac{x^2 \tan^{-1} x - x + \tan^{-1} x}{2} + c$
- d) $x \cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + c$

$$u = \tan^{-1} x \quad \int dx = \int dv$$

$$du = \frac{1}{1+x^2} dx \quad x = dv$$

$$= x + \tan^{-1}(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= x + \tan^{-1}(x) - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c$$

Q9: - Evaluate

س9: - اوجد التكامل

$$\int x \sec^2 x \, dx$$

- a) $x \cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + c$
- b) $-x \cot x + \ln(\sin x) + c$
- c) $-x \cos x + \sin x + c$
- d) $x \tan x + \ln(\cos x) + c$**

$$u = x \quad \int \sec^2 x \, dx = \int dv$$

$$du = dx \quad \tan x = v$$

$$= x \tan x - \int \tan x \, dx$$

$$= x \tan x + \ln|\cos x| + c$$

عماد عودة

الأستاذ عماد عودة

<https://t.me/+v1n4wuNV2B83NDA0>

<http://www.youtube.com/@imaths2022>

Q10: - Evaluate

س10: - اوجد التكامل

$$\int (x+7)e^{2x} dx$$

a) $\frac{1}{2}(x+7)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + c$

b) $-\frac{1}{2}(x+7)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$

c) $\frac{1}{2}(x+7)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$

d) $-\frac{1}{2}(x+7)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + c$

بالجواب
عماد عودة كامل
استخدم
⊕ $x+7$
⊖ 1
⊖ 0
 $e^{2x} dx = dx$
 $\frac{1}{2}e^{2x}$
 $\frac{1}{4}e^{2x}$
 $= \frac{1}{2}(x+7)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$

Q11: - Evaluate

س11: - اوجد التكامل

$$\int x \sin 2x dx$$

a) $-x \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + c$

b) $\frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$

c) $-\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$

d) $\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$

بالجواب
عماد عودة كامل
استخدم
⊕ x
⊖ 1
⊖ 0
 $\sin 2x$
 $-\cos 2x$
 $-\sin 2x$
 $= -\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$

Q12: - Evaluate

س12: - اوجد التكامل

$$\int x \sin x \cos x dx$$

a) $-\frac{x \cos(2x)}{4} + \frac{\sin(2x)}{8} + c$

b) $-\frac{x \cos(x)}{2} + \frac{\sin(x)}{4} + c$

c) $\frac{x \sin(2x)}{4} + \frac{\cos(2x)}{8} + c$

d) $-\frac{x \cos(2x)}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + c$

خارج الحيز استخدم المتطابقات المثلثية
عماد عودة
 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
 $\frac{1}{2} \sin 2x = \sin x \cos x$
نعيد كتابة السؤا
 $\Rightarrow \int x \sin x \cos x dx = \int x (\frac{1}{2} \sin 2x) dx$
 $= \int \frac{1}{2} x \sin 2x$
⊕ $\frac{1}{2}x$
⊖ $\frac{1}{2}$
⊖ 0
 $\sin 2x$
 $-\frac{1}{2} \cos 2x$
 $-\frac{1}{4} \sin 2x$
 $= -\frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + c$
الأستاذ عماد عودة

Q13: - Evaluate

س13: - اوجد التكامل

$$\int 3xe^{-x} dx$$

- a) $-3e^{-x}(x-1) + c$
 b) $3e^{-x}(x+1) + c$
 c) $-3e^{-x}(x+1) + c$
 d) $3e^x(x-1) + c$

بالجدول

$(+)$	$3x$	e^{-x}
$(-)$	3	$-e^{-x}$
(0)	0	e^{-x}

$$= -3xe^{-x} - 3e^{-x} + c$$

$$= -3e^{-x}[x+1] + c$$

Q14: - Evaluate

س14: - اوجد التكامل

$$\int e^{\sqrt{x}} dx$$

- a) $2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c$
 b) $2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + 2e^{\sqrt{x}} + c$
 c) $2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^x + c$
 d) $\frac{2}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} + c$

اولاً بالتعويض

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow dx = 2u du$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int 2u e^u du$$

الدين بالجدول

$(+)$	$2u$	e^u
$(-)$	2	e^u
(0)	0	e^u

$$= 2ue^u - 2e^u + c$$

$$= 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c$$

Q15: - Evaluate

س15: - اوجد التكامل

$$\int \cos \sqrt{x} dx$$

- a) $2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} - 2\cos \sqrt{x} + c$
 b) $2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2\cos \sqrt{x} + c$
 c) $2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - 2\sin \sqrt{x} + c$
 d) $-2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x} + c$

بالتعويض اولاً

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow 2u du = dx$$

$$\int \cos \sqrt{x} dx = \int 2u \cos u du$$

الجدول

$(+)$	$2u$	$\cos u$
$(-)$	2	$\sin u$
(0)	0	$-\cos u$

$$= 2u \sin u + 2\cos u = 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2\cos \sqrt{x} + c$$

س16: - اعتمد على المعلومات التالية

Q16: - Suppose f is a function for which f' and f'' exist. You are given that

$$f(0) = 1 \quad f'(0) = 5, f(2) = 3 \quad f'(2) = 7$$

find the value of

اوجد قيمة التكامل

$$\int_0^2 3x f''(x) dx =$$

- a) 36
- b) 32
- c) 28
- d) 24

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \textcircled{+} 3x \\ \textcircled{-} 3 \\ 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f''(x) \\ f'(x) \\ f(x) \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} = 3x f'(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 3 f'(x) dx \\ = 3x f'(x) \Big|_0^2 - 3 f(x) \Big|_0^2 \\ = [3(2)f'(2) - 0] - 3[f(2) - f(0)] \\ = (6)(7) - 3[3 - 1] = 42 - 6 = 36 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Q17: - If

س17: -

$$\int x^2 \cos 3x dx = f(x) - \frac{2}{3} \int x \sin 3x dx$$

Then

فان

$$f(x) =$$

a) $\frac{2}{3} x \sin(3x)$

b) $\frac{1}{3} x^2 \sin(3x)$

c) $\frac{2}{3} x \cos(3x)$

d) $\frac{1}{3} x \sin(3x) - \frac{2}{3} \cos 3x$

$$\begin{aligned} u = x^2 & \rightarrow 3x = dv \\ du = 2x & \rightarrow \frac{1}{3} \sin 3x = v \\ & = \frac{1}{3} x^2 \sin 3x - \frac{2}{3} \int x \sin 3x dx \\ & \therefore f(x) = \frac{1}{3} x^2 \sin 3x \end{aligned}$$

Q18: - if

س18: - إذا كان

$$\int \sin^{-1} x \, dx = x \sin^{-1} x + \int f(x) \, dx$$

Then

فان

a) $-x\sqrt{1-x^2}$

b) $x\sqrt{1-x^2}$

c) $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

d) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) =$
 $u = \sin^{-1} x$
 $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
 $x = v$
 $= x \sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Q19: - if

س19: - إذا كان

$$\int \cos^{-1} x \, dx = x \cos^{-1} x + \int f(x) \, dx, \text{ then } f(x) =$$

Then

فان

a) $-x\sqrt{1-x^2}$

b) $x\sqrt{1-x^2}$

c) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

d) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) =$
 $u = \cos^{-1} x$
 $du = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
 $x = v$
 $= x \cos^{-1} x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Q20: - Find

س20: - اوجد

$$\int f(x) \cos(nx) \, dx =$$

a) $\frac{1}{n} f(x) \sin(nx) - \frac{1}{n} \int f'(x) \sin(nx) \, dx$

b) $\frac{1}{n} f(x) \cos(nx) - \frac{1}{n} \int f'(x) \cos(nx) \, dx$

c) $n f(x) \cos(nx) + \frac{1}{n} \int f'(x) \sin(nx) \, dx$

d) $n f(x) \sin(nx) - \frac{1}{n} \int f'(x) \cos(nx) \, dx$

$u = f(x)$
 $du = f'(x) dx$
 $\int \cos(nx) \, dx = \frac{1}{n} \sin(nx)$
 $= \frac{1}{n} f(x) \sin(nx) - \frac{1}{n} \int f'(x) \sin(nx) \, dx$

Q21: - Use the table

س21: - اعتمد على الجدول التالي

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	-2	3	4	-1
3	2	-1	-3	5

If

إذا كان

$$\int_1^3 f(x)g'(x)dx = 8$$

then

فان

$$\int_1^3 f'(x)g(x)dx =$$

- a) -4
- b) -1
- c) 5
- d) 8

Handwritten solution:

$$u = g(x) \quad \int f'(x) dx = \int du$$

$$du = g'(x) dx \quad \rightarrow \quad f(x) = v$$

$$\Rightarrow \int_1^3 g(x) f'(x) dx = \int_1^3 v du$$

$$= (g(3)f(3) - g(1)f(1)) - 8$$

$$= (-1)(2) - (3)(-2) - 8 = -2 + 6 - 8 = -4$$

Q22: - Find the value of k

س22: - اوجد قيمة k

$$\int \cos^5 x dx = \frac{1}{a} \cos^b x \sin x + \frac{b}{a} \int \cos^c x dx$$

- a) $a = 5, b = 4, c = 3$
- b) $a = 4, b = 3, c = 2$
- c) $a = 3, b = 4, c = 5$
- d) $a = 5, b = 4, c = 5$

Q23: - Evaluate the integral

س32: - أوجد قيمة التكامل

$$\int \sin \sqrt{x} \, dx$$

$$\int \sin \sqrt{x} \, dx \quad u = \sqrt{x} \quad du = \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$$

$$2\sqrt{x} \, du = dx \longrightarrow 2u \, du = dx$$

نبدأ بالتعويض أولاً
We start with substitution

$$\int \sin u \, 2u \, du$$

$$w = 2u \quad \int \sin u \, du = \int dv$$

$$dw = 2du \quad -\cos u = v$$

نكمل بالأجزاء then by parts

او بالجدول

+	2u	$\int \sin u \, du$
-	2	$-\cos u$
	0	$-\sin u$

$$\int \sin u \, 2u \, du = -2u \cos u - \int -2 \cos u \, du$$

$$\int \sin u \, 2u \, du = -2u \cos u + 2 \sin u + c$$

$$= -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + c$$

Q24: - Evaluate the integral

س24: - أوجد قيمة التكامل

$$\int (\ln x)^2 \, dx$$

$$u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} \, dx \quad x \, du = dx$$

نبدأ بالتعويض أولاً
We start with substitution.

$$\int (\ln x)^2 \, dx = \int u^2 x \, du$$

$$u = \ln x \quad x = e^u$$

$$\int (\ln x)^2 \, dx = \int u^2 e^u \, du$$

نكمل بالأجزاء then by parts

او بالجدول

+	u^2	$\int e^u \, du$
-	2u	e^u
+	2	e^u
	0	e^u

$$\int (\ln x)^2 \, dx = \int u^2 e^u \, du = u^2 e^u - 2u e^u + 2e^u + c$$

$$= (\ln x)^2 e^{\ln x} - 2 \ln x e^{\ln x} + 2e^{\ln x} + c$$

$$\int (\ln x)^2 \, dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + c$$

Q25: - Evaluate the integral

س25: - أوجد قيمة التكامل

$$\int \cos x \ln(\sin x) dx$$

نبدأ بالتعويض أولاً

We start with substitution

$$u = \sin x \quad du = \cos x \, dx \quad \frac{du}{\cos x} = dx$$

$$\int \cos x \ln(u) \frac{du}{\cos x} = \int \ln u \, du$$

$$\int \ln u \, du$$

نكمل بالأجزاء then by parts

$$w = \ln u \quad \int du = \int dv$$

$$dw = \frac{1}{u} du \quad u = v$$

$$\int \ln u \, du = u \ln u - \int u \frac{1}{u} du$$

$$\int \ln u \, du = u \ln u - \int 1 \, du$$

$$\int \ln u \, du = u \ln u - u + c = \sin x \ln(\sin x) - \sin x + c$$

$$\int \cos x \ln(\sin x) dx = \sin x \ln(\sin x) - \sin x + c$$

$$\int \sin(\ln x) dx$$

$$u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx \quad x du = dx$$

$$u = \ln x \longrightarrow x = e^u$$

$$\begin{aligned} \int \sin(\ln x) dx &= \int \sin u \cdot x du \\ &= \int \sin u \cdot e^u du \end{aligned}$$

نبدأ بالتعويض أولاً

We start with substitution

$$\int \sin u \cdot e^u du$$

$$w = e^u \quad \int \sin u du = \int dv$$

نكمل بالأجزاء then by parts

$$dw = e^u du \quad -\cos u = v$$

$$\int \sin u \cdot e^u du = -e^u \cos u + \int e^u \cos u du$$

الآن نعيد التكامل بالأجزاء مرة أخرى

$$\int e^u \cos u du$$

$$w = e^u \quad \int \cos u du = \int dv$$

$$dw = e^u du \quad \sin u = v$$

$$\int \sin u \cdot e^u du = -e^u \cos u + \left(e^u \sin u - \int e^u \sin u du \right)$$

$$\int \sin u \cdot e^u du = -e^u \cos u + e^u \sin u - \int e^u \sin u du$$

نلاحظ ان التكامل الأصلي كرر نفسه ننقله الى الطرف الاخر

$$2 \int \sin u \cdot e^u du = -e^u \cos u + e^u \sin u$$

$$\int \sin u \cdot e^u du = \frac{1}{2} (-e^u \cos u + e^u \sin u) + c$$

$$\int \sin(\ln x) dx = \frac{1}{2} (-e^{\ln x} \cos(\ln x) + e^{\ln x} \sin(\ln x)) + c$$

$$\int \sin(\ln x) dx = \frac{1}{2} (-x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)) + c$$

$$\int e^x \cos x \, dx$$

$$\int e^x \cos x \, dx$$

$$u = e^x \quad \int \cos x \, dx = \int dv$$

$$du = e^x dx \quad \sin x = v$$

$$\int e^x \cos x \, du = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$\int e^x \sin x \, dx$$

$$u = e^x \quad \int \sin x \, dx = \int dv$$

$$du = e^x dx \quad -\cos x = v$$

$$\int e^x \cos x \, du = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x - \int -e^x \cos x \, dx \right)$$

$$\int e^x \cos x \, du = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

نلاحظ ان التكامل الأصلي كرر نفسه ننقله الى الطرف الاخر

$$2 \int e^x \cos x \, du = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$\int e^x \cos x \, du = \frac{1}{2} (e^x \sin x + e^x \cos x) + c$$



Best washes

اطيب التمنيات

الأستاذ عماد عودة

<https://t.me/+v1n4wuNV2B83NDA0>

<http://www.youtube.com/@imaths2022>