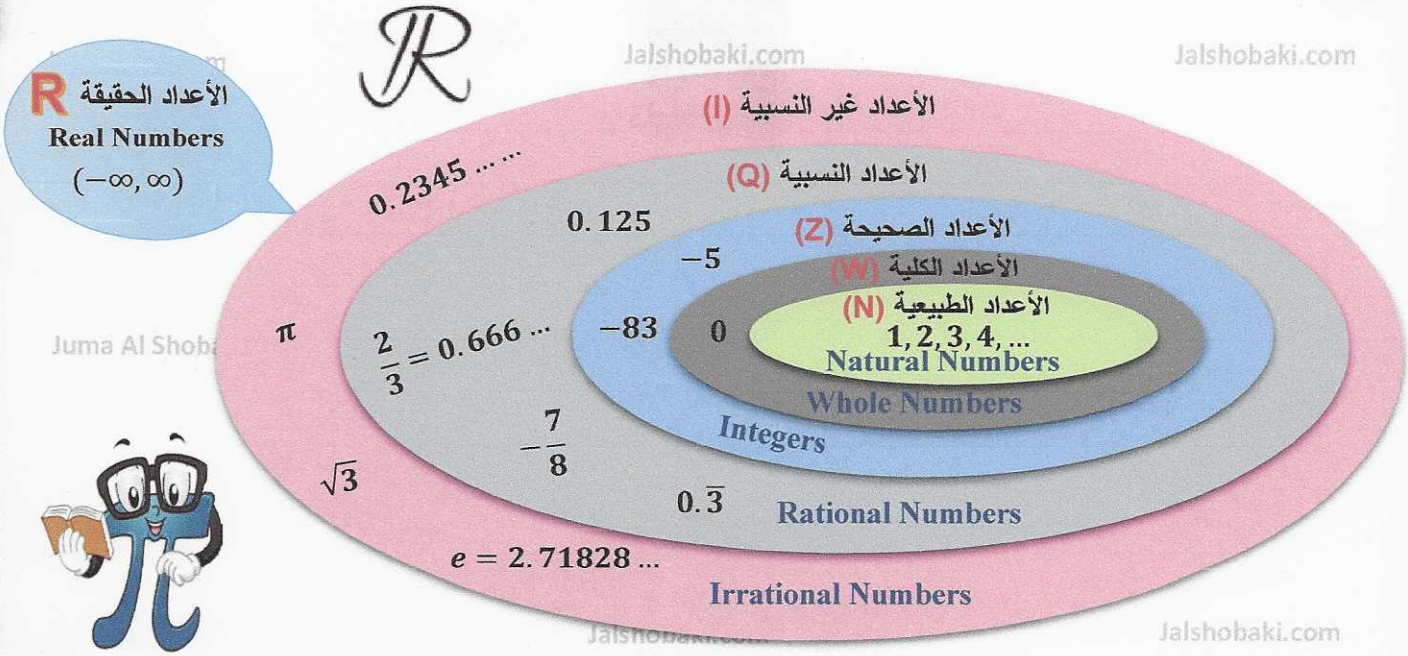
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Polynomials and Rational Functions

(1-1) كثيرات الحدود والدوال النسبية

1 مراجعة سريعة لنظام الأعداد الحقيقية R

- Quick review of the system of real numbers R

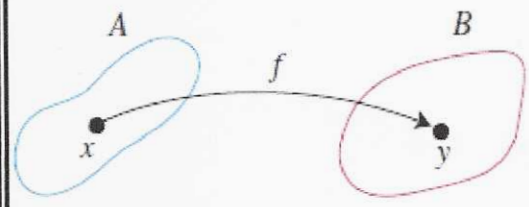


Inequalities المتباينات	Intervals الفترات	Set Notations الصفة المميزة للمجموعة
$a \le x \le b$ $2 \le x \le 3$	$[a, b]$ $[2, 3]$	$\{x \mid a \le x \le b, x \in R\}$ $\{x / 2 \le x \le 3, x \in R\}$
$a < x < b$ $1 < x < 4$	(a, b) $(1, 4)$	$\{x \mid a < x < b, x \in R\}$ $\{x / 1 < x < 4, x \in R\}$
$a < x \le b$ $5 < x \le 7$	$(a, b]$ $(5, 7]$	$\{x \mid a < x \le b, x \in R\}$ $\{x \mid 5 < x \le 7, x \in R\}$
$a \le x < b$ $-2 \le x < 2$	$[a, b)$ $[-2, 2)$	$\{x \mid a \le x < b, x \in R\}$ $\{x / -2 \le x < 2, x \in R\}$
$x \le a$ $x \le 2$	$(-\infty, a]$ $(-\infty, 2]$	$\{x \mid x \le a, x \in R\}$ $\{x / x \le 2, x \in R\}$
$x < a$ $x < 10$	$(-\infty, a)$ $(-\infty, 10)$	$\{x \mid x < a, x \in R\}$ $\{x \mid x < 10, x \in R\}$
$x \ge b$ $x \ge -3$	$[b, \infty)$ $[-3, \infty)$	$\{x \mid x \ge b, x \in R\}$ $\{x / x \ge -3, x \in R\}$
$x > b$ $x > -5$	(b, ∞) $(-5, \infty)$	$\{x \mid x > b, x \in R\}$ $\{x > -5, x \in R\}$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

2 مراجعة للدوال

- **Functions' Review**



➢ إنّ الدالة f هي قاعدة تربط بين العنصر الواحد بالضبط في مجموعة B مع كل عنصر x في مجموعة A وفي هذه الحالة، نكتب $y = f(x)$.

A function f is a rule that assigns *exactly one* element y in a set B to each element x in a set A. In this case, we write $y = f(x)$.

➢ تعرّف المجموعة A بمجال f وتعرّف مجموعة كل القيم $f(x)$ في B بمدى f ، ويكتب على أنّه $\{x \in A$ ، لكل $[y \mid y = f(x)]\}$

We call the set A the domain of f. The set of all values $f(x)$ in B is called the range of f, written $\{y \mid y = f(x)$, for some $x \in A\}$.

➢ جبرياً: ترتبط قيمة واحدة فقط لـ y مع قيمة محددة لـ x .

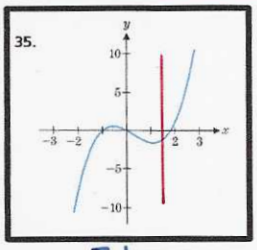
➢ بيانياً: إذا قطع أي مستقيم رأسي التمثيل البياني في أكثر من نقطة، فإنّ المنحنى ليس تمثيلاً بيانياً لدالة.

Only one y-value can correspond to a given value of x

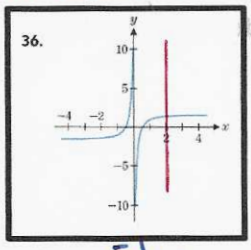
If any vertical line intersects the graph in more than one point, the curve is not the graph of a function.

س) استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان المنحنى تمثيل بياني لدالة؟

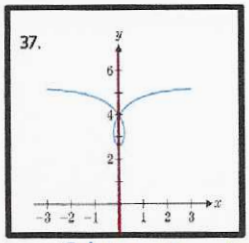
Use the vertical line test to determine whether the curve is the graph of a function ?



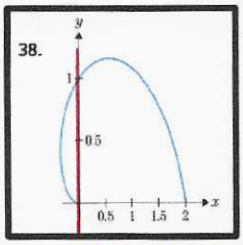
دالة



دالة



ليست دالة
تفشل عند x=0



ليست دالة
تفشل عند x=0

Function Types أنواع الدوال

1) دوال كثيرات الحدود: تعبير جبري يتألف من حد أو أكثر.

1) Polynomial Functions: An algebraic expression consisting of one or more terms.

كثيرة حدود ل (x) على الصورة: $c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots c_{n-1}x + c_n$

A polynomial for (x) that can be written in the form $c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots c_{n-1}x + c_n$

Where n is a non-negative integer — حيث n أعداد صحيحة غير سالبة $n \geq 0$

The coefficients belong to the set of real numbers R — المعاملات تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية R $c_0, c_1, \ldots c_n$

The domain of polynomial functions is the set of real numbers — مجال دوال كثيرات الحدود هو مجموعة الاعداد الحقيقية

Polynomial functions — كثيرات حدود $2x$, $x+4$, $-3y^2 - \frac{2}{9}x$, 4

Not polynomial functions — ليست كثيرات حدود $2xy^{-4}$, $\frac{3}{x+1}$, $\sqrt{x}$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Samples of polynomials

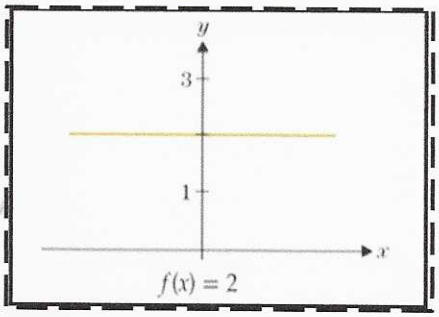
عينـــات من كثيـــرات الحـــدود

$f(x) = 2$

(polynomial of degree 0 or constant)

الـدالـــة الثـابتـــة

الدرجـة 0

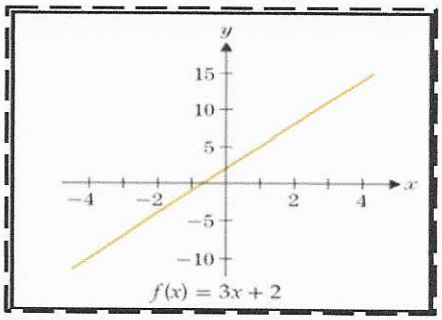


$f(x) = 3x + 2$

(polynomial of degree 1 or linear polynomial)

الـدالـــة الخطيـــة

الدرجـة 1

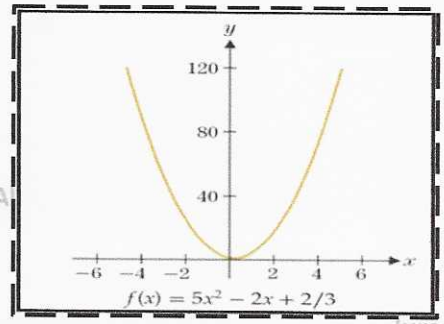


$f(x) = 5x^2 - 2x + \frac{2}{3}$

(polynomial of degree 2 or quadratic polynomial)

الـدالـــة التربيعيـــة

الدرجـة 2

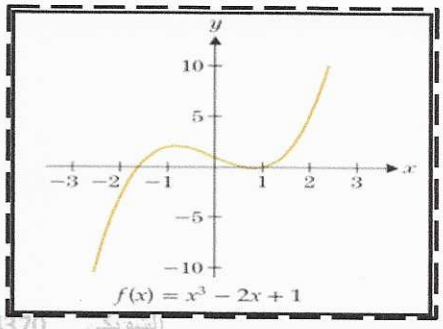


$f(x) = x^3 - 2x + 1$

(polynomial of degree 3 or cubic polynomial)

الـدالـــة التكعيبيـــة

الدرجـة 3

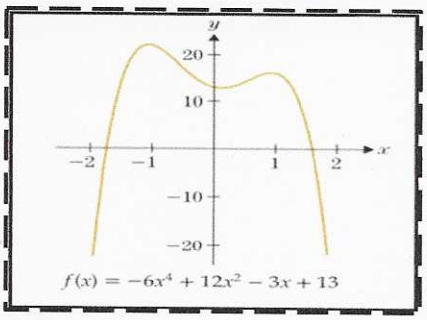


$f(x) = -6x^4 + 12x^3 - 3x + 13$

(polynomial of degree 4 or quartic polynomial)

الـدالـــة من الدرجـة الرابعـة

الدرجـة 4

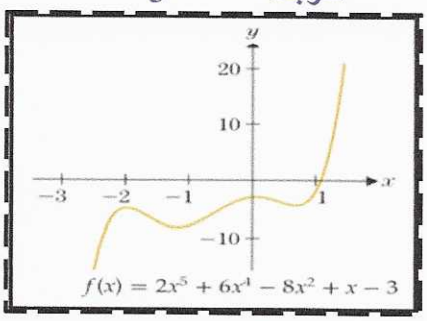


$f(x) = 2x^5 + 6x^4 - 8x^2 + x - 3$

(polynomial of degree 5 or quintic polynomial)

الـدالـــة من الدرجـة الخامســة

الدرجـة 5

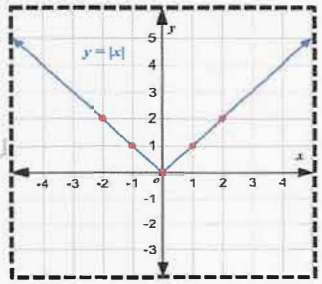


Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

2) Absolute Value Functions:

2) الدوال المطلقة:

$$y = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases} \quad \Leftarrow \quad y = |x|$$



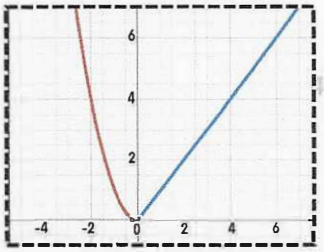
Its domain is the set of real numbers R R مجالها مجموعة الأعداد الحقيقية

Its range $[0, \infty)$ مداها $[0, \infty)$

3) Piecewise Functions:

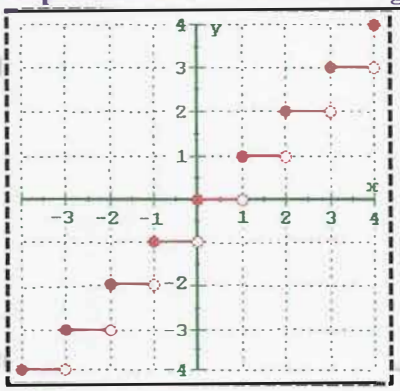
3) الدوال المتفرعة:

$$y = \begin{cases} x^2 & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$



4) Step Function or Greatest Integer Function: $y = [x]$

4) دالة صحيح (x) أو (أكبر عدد صحيح ل x):



Its domain is $\{x | x \in R\}$ $\{x | x \in R\}$ مجالها

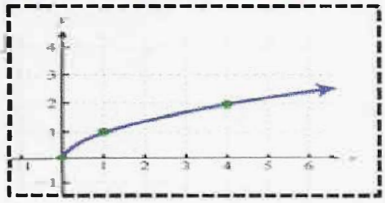
Its range is $\{y | y \in Z\}$, where Z are only integers مداها $\{y | y \in Z\}$ ، حيث Z هي الأعداد الصحيحة فقط

س) أعد تعريف $y = [x]$ ، $x \in [-2, 2]$ Redifine

$$f(x) = \begin{cases} -2 & , \quad -2 \leq x < -1 \\ -1 & , \quad -1 \leq x < 0 \\ 0 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 2 & , \quad x = 2 \end{cases}$$

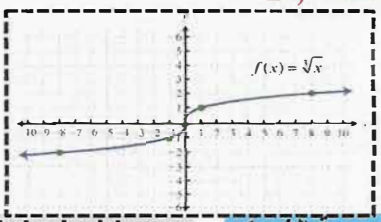
5) Radical Functions: Ex) Square Root Function $y = \sqrt{x}$

5) الدوال الجذرية: $y = \sqrt[n]{x} \Leftarrow n$ زوجي ، مثلاً



Its domain is $x \geq 0$ $x \geq 0$ مجالها

Ex) Cube Root Function $y = \sqrt[3]{x}$ $y = \sqrt[n]{x} \Leftarrow n$ فردي ، مثلاً



Its domain is the set of real numbers R R مجالها مجموعة الأعداد الحقيقية

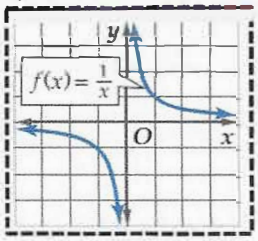
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

6) الدوال النسبية: وهي على الصورة $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ ، حيث $p(x)$, $q(x)$ كثيرات حدود

6) Rational Functions: It is in the form $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, where $p(x)$, $q(x)$ is a polynomial

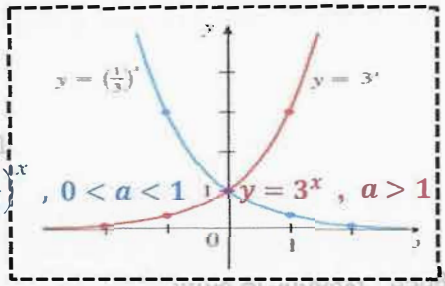
مجالها: أصفار المقام |R مثال: $y=\frac{1}{x}$

Its domain is $R|$ *Zeros of the denominator*



7) الدوال الأسية:

7) Exponential Functions:



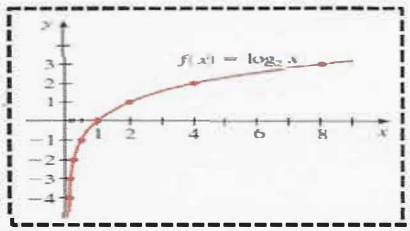
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $0<a<1$ $y=3^x$, $a>1$

على الصورة $y=e^x$

على الصورة $y=a^x$

8) الدوال اللوغاريتمية:

8) Logarithmic Functions:

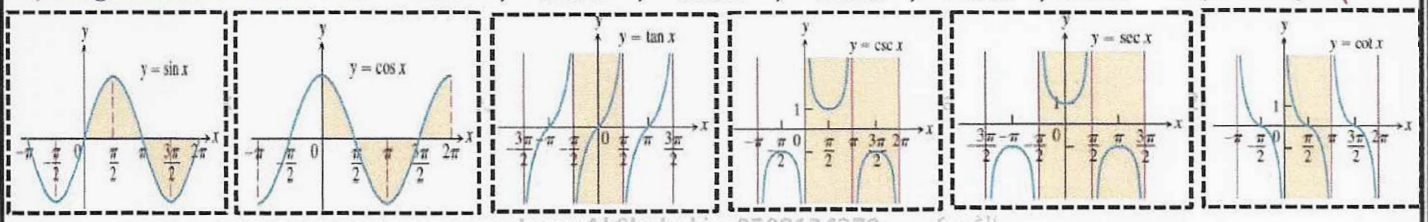


لكل $x>0$ ، $y=\log x$

لكل $x>0$ ، $y=\ln x$

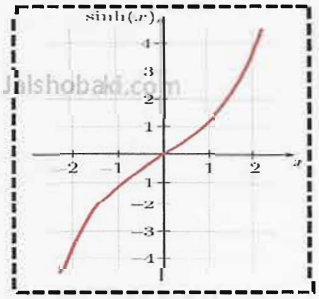
9) الدوال المثلثية: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\csc x$, $\sec x$, $\cot x$

9) Trigonometric Functions:

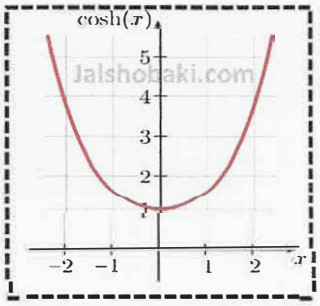


10) الدوال الزائدية (دوال القطع الزائد):

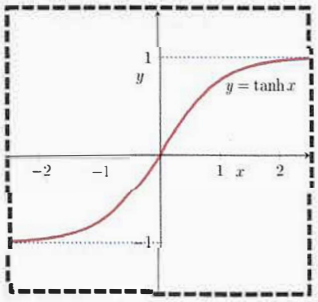
10) Hyperbolic Functions:



$y=\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$



$y=\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$



$y=\tanh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س) في الأسئلة التالية حدد ما إذا كانت الدالة كثيرة حدود، نسبية، أو كلاهما، أو غير ذلك؟

Identify the given function as polynomial, rational, both or neither?

1) $f(x) = x^3 - 4x + 1$

① دالة تكعيبة ← كثيرة حدود

② نسبية لأنه يمكن كتابتها على الصورة $\frac{x^3-4x+1}{1}$

كثيرة حدود / كثيرة حدود

2) $f(x) = \frac{x^3+4x-1}{x^4-1}$

① هي دالة نسبية (لأنها ناتج قسمة دالتين كثيرات حدود)

② ليست كثيرة حدود ؟ لأن كثيرات الحدود لا مقام لها أو أن المقام لا يتضمن متغيرات .

3) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

① دالة جذرية أي ليست كثيرة حدود .

② ليست نسبية أيضاً

3 أهم طرق التبسيط والاختصارات للتعابير الجبرية

- **Most Important Algebraic Expressions Simplifications**

1) Difference of squares	$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$	1) فرق بين مربعين
2) Difference of Cubes	$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$	2) فرق بين مكعبين
Sums of Cubes	$x^3 + a^3 = (x+a)(x^2-ax+a^2)$	مجموع مكعبين
3) Common Factor	$x^2 - ax = x(x-a)$	3) عامل مشترك
4) Square of a Sum and Difference	$(x+2)^2 =$ مربع الأول + 2(الأول)(الثاني) + مربع الثاني $= x^2 + 4x + 4$	4) فك القوس التربيعي
5) Factoring a 3-Terms Polynomial	$x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$	5) تحليل حدودية ثلاثية
6) Radical conjugate		6) مرافق الجذر

مثال على مرافق الجذر) $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

المرافق

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right) = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

① ⇐

② ونستطيع حل السؤال بدون مرافق ←

$$\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x})^2-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

③ طريقة أخرى أيضاً ←

نفرض $y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x$

$$\frac{y-1}{y^2-1} = \frac{y-1}{(y-1)(y+1)} = \frac{1}{y+1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

وهو المطلوب .

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

- **Inequalities**

4 المتباينات

1) Linear Inequality — 1) متباينة خطية

A) $-3x + 1 < 2$

$-3x < 1$ (÷ (-3))

$x > -\frac{1}{3}$

or $(-\frac{1}{3}, \infty)$

or $\{x \mid x > -\frac{1}{3}, x \in R\}$



ملاحظة:
عند ضرب أو قسمة (−) تقلب إشارة المتباينة

B) $4x + 1 > 3x - 4 \Rightarrow 4x - 3x > -4 - 1$

$x > -5$

or $(-5, \infty)$

2) Two-Sided Inequality — 2) متباينة خطية من جهتان

A) $-2 < 2x - 3 \leq 5$

$(+3) \Rightarrow 1 < 2x \leq 8$

$(\div 2) \Rightarrow \frac{1}{2} < x \leq 4$

or $(\frac{1}{2}, 4]$



B) $1 \leq 2 - 3x < 6$

$(-2) \Rightarrow -1 \leq -3x < 4$

$\div(-3) \Rightarrow \frac{1}{3} \geqslant x > -\frac{4}{3}$

$\therefore -\frac{4}{3} < x \leq \frac{1}{3}$

$(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}]$



3) Quadratic Inequality — 3) متباينة تربيعية

(+) تعين ≥ 0

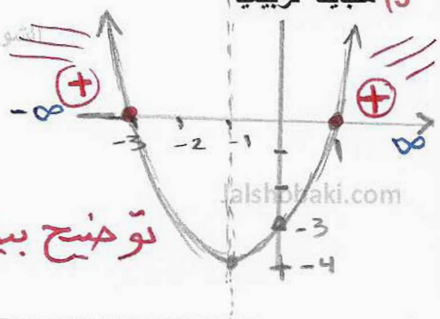
A) $x^2 + 2x - 3 \geq 0$

نحلل $(x-1)(x+3) \geq 0$

الأصفار: $x = 1$, $x = -3$

نفس معامل x^2 | عكس معامل x^2 | نفس معامل x^2

$(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$



توضيح بياني

B) $x^2 - 5x - 6 < 0$ (−) تعين < 0

$(x-6)(x+1) < 0$

الأصفار: $x = -1$, $x = 6$

نفس إشارة معامل x^2 | عكس إشارة معامل x^2 | نفس إشارة معامل x^2

$(-1, 6)$ or $-1 < x < 6$

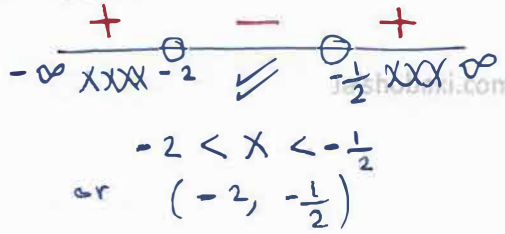
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

4) Inequality Involving a Fraction — 4) متباينة كسرية

A) $\frac{2x+1}{x+2} < 0$ ⇒ (−) المطلوب

أصفار البسط: $2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

أصفار المقام: $x+2=0 \Rightarrow x=-2$



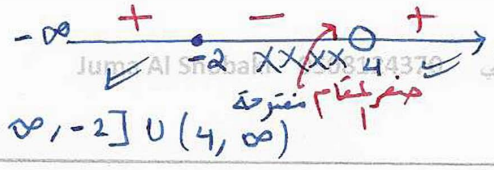
$-2 < x < -\frac{1}{2}$

or $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$

B) $\frac{x+2}{x-4} \geq 0$ ⇒ (+)

أصفار البسط: $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

أصفار المقام: $x-4=0 \Rightarrow x=4$



$(-\infty, -2] \cup (4, \infty)$

5) Radical Inequality — 5) متباينة جذرية

$$3 + \sqrt{5x - 10} \leq 8$$

A) $(-\infty, 7]$ B) $[2, \infty)$ C) $x < 7$ D) $[2, 7]$

$\sqrt{5x-10} \leq 5$

تربيع ⇒ $5x - 10 \leq 25$

$(\div 5)$ $5x \leq 35$

$x \leq 7$

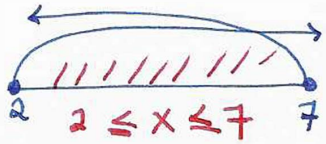
مجال الجذر كمو

$\sqrt{5x-10}$

$5x - 10 \geqslant 0$

$5x \geqslant 10$

$x \geqslant 2$



$2 \leq x \leq 7$

6) Inequality Containing an Absolute Value — 6) متباينة لقيمة مطلقة

A) $|x + 5| < 2$

① الحل حسب الخاصية ④

$-2 < x+5 < 2$

$-5 \quad -5 \quad -5$

$-7 < x < -3$

② ممكن الحل أيضاً

$x + 5 < 2 \Rightarrow x < -3$

$-(x+5) < 2 \Rightarrow x + 5 > -2 \Rightarrow x > -7$

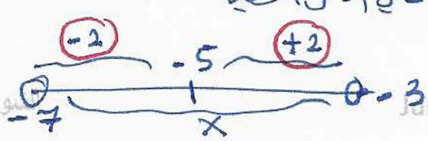
$\therefore -7 < x < -3$

③ ممكن الحل أيضاً

$|x+5| < 2$

⇓

$x = -5$ العضر لما داخل المطلق



$-7 < x < -3$

1. $\sqrt{x^2} = |x|$

   $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$
2. $|a| \geq 0$
3. $|x| = a \Rightarrow x = a, x = -a$
4. $|x| \leq a$, $-a \leq x \leq a$
5. $|x| \geq a$, $x \geq a$

   $x \leq -a$
6. $|x - a| = |a - x|$
7. $|a.b| = |a|.|b|$
8. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
9. $|a + b| \neq |a| + |b|$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

$|x| \geq a \Rightarrow x \geq a$ or $x \leq -a$

B) $|2x-4| \geq 2$

$2x-4 \geq 2$ (+4 +4) or $2x-4 \leq -2$ (+4 +4)

$2x \geq 6$ or $2x \leq 2$

$x \geq 3$ or $x \leq 1$



$(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$

C) $|x+3| < -1$ لماذا؟ $\{\emptyset\}$ ⇐ لا يوجد حل

الإجابة: لا يمكن أن تكون قيمة المطلق أقل من عدد سالب، لأنها دائماً موجبة

$|a| \geq 0$

D) $|x+3| < 0$ أيضاً لا يوجد حل، ولنفس السبب السابق

مهما عوضنا من قيم داخل المطلق، لا يمكن أن تكون القيمة أقل من صفر

E) $|x+4| > -1$ لكن هنا نقول نعم، لماذا؟ لأن ناتج تعويض أي عدد داخل المطلق يكون موجباً وهو أكبر من (-1)، إذن الحل هو $\mathbb{R}$

أي جميع الأعداد الحقيقية $(-\infty, \infty)$

• Geometry

5 الهندسة

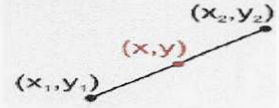
1- Distance Between Two Points

1- المسافة بين نقطتين

المسافة بين النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) $= D = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

2- Midpoint Between Two Points

2- منتصف المسافة بين نقطتين



منتصف المسافة بين النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) $= (x, y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

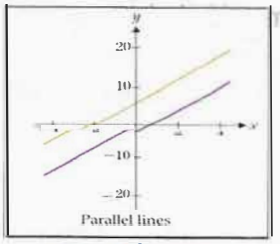
3- Slope

3- الميل

ميل الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) $= m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

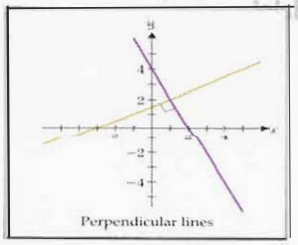
المستقيمات المتوازية

$m_1 = m_2$



المستقيمات المتعامدة

$m_1 \times m_2 = -1$



4- Finding the Equation of a Line

4- إيجاد معادلة المستقيم

معادلة المستقيم الذي ميله m ويمر بالنقطة (x_1, y_1) هي $y - y_1 = m(x - x_1)$

5- Finding the Points of Intersection of Two Functions

5- إيجاد نقاط التقاطع بين دالتين

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

$x_1, y_1 \quad x_2, y_2$

Find the distance between the two points $(2,5)$ $(-3,4)$? **س1) جد المسافة بين النقطتين $(-3,4)$ ، $(2,5)$ ؟**

$$D = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

$$D = \sqrt{[2-(-3)]^2 + (5-4)^2} = \sqrt{26}$$

Find the midpoint between the points $(2,5)$ $(-3,4)$? **س2) جد منتصف المسافة بين النقطتين $(-3,4)$ ، $(2,5)$ ؟**

$x_1, y_1 \quad x_2, y_2$

المنتصف $\Rightarrow \left(\frac{x_1+x_2}{2} , \frac{y_1+y_2}{2}\right) \Rightarrow \left(\frac{2+(-3)}{2} , \frac{5+4}{2}\right) \Rightarrow \left(\frac{-1}{2} , \frac{9}{2}\right)$

Determine if the points are colinear ? **$(3,1)$ $(4,4)$ $(5,8)$ س3) هل النقاط التالية على استقامة واحدة أم لا؟**

← على استقامة واحدة أي أن الميل بين أي نقطتان هو نفسه أي متساوي .

$(3,1) , (4,4)$ ، $(4,4) (5,8)$

$m_1 = \frac{4-1}{4-3} = 3$ $\quad m_2 = \frac{8-4}{5-4} = 4$ $\Rightarrow$ ليست على استقامة واحدة .

Determine if the points are colinear ? **$(2,1)$ $(0,2)$ $(4,0)$ س4) هل النقاط التالية على استقامة واحدة أم لا؟**

$(2,1) , (0,2)$ $\quad (0,2) , (4,0)$

$m_1 = \frac{2-1}{0-2} = -\frac{1}{2}$ ، $m_2 = \frac{0-2}{4-0} = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ على استقامة واحدة

$x+2y=1$, $2x+4y=3$ س5) هل هما متوازيان أم متعامدان ؟

Determine if the lines are Parallel or Perpendicular ? $x+2y=1$, $2x+4y=3$

$x+2y=1$

$2y = 1-x$

$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$

$m_1 = -\frac{1}{2}$

، $2x+4y=3$

$4y = 3-2x$

$y = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x$

$m_2 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow m_1 = m_2$

إذن متوازيان .

Find an equation of the line through the points $(1,2)$ $(3,6)$ **س6) جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين ؟**

لكتابة أي معادلة نحتاج إلى نقطة وميل .

وتكتب المعادلة على الصورة ← $y - y_1 = m(x-x_1)$

$y = m(x-x_1) + y_1$

$m = \frac{6-2}{3-1} = 2$ ، النقطة $(1,2)$ $\quad x_1 \quad y_1$

$y = 2(x-1)+2$

$y = 2x - 2 + 2$

$y = 2x$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س7) جد نقطة ثانية على المستقيم الذي ميله $m=2$ وتقع عليه النقطة $p(1,3)$ ، وجد معادلته؟

Find a second point on the line with slope $m=2$ on which point $p(1,3)$ is located, find its equation?

$m=2$ ، النقطة $(1,3)$

$\Rightarrow y=2(x-1)+3$

$y=2x-2+3$

$\boxed{y=2x+1}$ ثم نعوض أي نقاط قيم (x) في المعادلة $\Rightarrow$ $y=2x+1$

$x=2 \Rightarrow y=5 \Rightarrow (2,5)$ نقطة ثانية وهكذا ....

Jalshobaki.com

س8) جد معادلة المستقيم الذي يكون عمودياً على المستقيم $y=2(x+1)-2$ ، ويمر بالنقطة $(2,1)$ ؟

Find the equation of a line through the point $(2,1)$ and perpendicular to the line $y=2(x+1)-2$?

x_1, y_1

المستقيم الذي يكون عمودياً على $y=2(x+1)-2$ ميله يساوي $-\frac{1}{m}$

$\therefore y=2x+2-2$

$\boxed{y=2x}$

$m=\frac{2}{1}$ $\Rightarrow$ إذن ميل العمودي $=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow y=-\frac{1}{2}(x-2)+1$

$y=-\frac{1}{2}x+1+1$

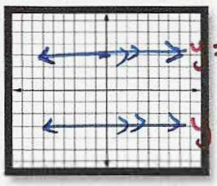
$\boxed{y=-\frac{1}{2}x+2}$

س9) جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(0,-1)$ ويكون: x_1, y_1

Find the equation of a line through the point $(0,-1)$ and:

A) Parallel to the line $y=1$?

A) موازي للمستقيم $y=1$ ؟ موازٍ للمستقيم أي له نفس الميل

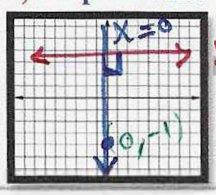


ميل المستقيم $y=1$ هو صفر (لأنه أفقي)

$\therefore m=0$ ، $(0,-1)$ النقطة $\Rightarrow y=0(x-0)-1 \Rightarrow \boxed{y=-1}$

B) Perpendicular to the line $y=1$?

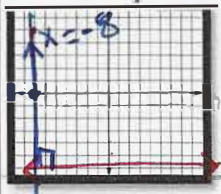
B) عمودي على المستقيم $y=1$ ؟



المستقيم $y=1$ له ميل يساوي صفر والمستقيم العمودي عليه ميله غير معرف $(\frac{-1}{0})$ إذا المعادلة هنا $x=0$ أي $x=c$ حيث c ثابت

س10) جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $p(-8,5)$ ، ويكون عمودياً على $y=-6$ ؟

Find the equation of a line through the point $p(-8,5)$ and perpendicular to $y=-6$?



عمودي على مستقيم أفقي $\Leftarrow$ ميله غير معرف

$x=c \Rightarrow$

$\boxed{x=-8}$

س11) حدد كل نقاط التقاطع بين الدالتين $y=x+5$ ، $y=x^2+2x+3$ ؟

Determine all the points of intersection between the two functions $y=x^2+2x+3$, $y=x+5$?

عند التقاطع فإن الدالة الأولى = الدالة الثانية $\Leftarrow$ $x^2+2x+3=x+5$

$x^2+x-2=0$

$(x-1)(x+2)=0$

$x=1$ ، $x=-2$

نعوض ثم x في أي معادلة $\Rightarrow$ $y=x+5$

$x=1 \Rightarrow y=6 \Rightarrow (1,6)$

$x=-2 \Rightarrow y=3 \Rightarrow (-2,3)$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

6 إيجاد مجال الدوال جبرياً

- **Finding the domain of functions algebraically**

Find the domain for the given functions?

في الاسئلة التالية جد المجال للدوال المعطاة؟

1) $f(x)=\sqrt{x-3}$

جذر دليله زوجي

$X-3\geq 0$

$X\geq 3$

$[3,\infty)$



2) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x-3}}$

$X-3>0$

$X>3$

$(3,\infty)$

الجذر في المقام



3) $f(x)=\sqrt{x+2}$

$X+2\geq 0 \Rightarrow X\geq -2$ ، $[-2,\infty)$

بصيغة الصفة المميزة $\Rightarrow \{X / X\geq -2, X\in R\}$



4) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$

الجذور التكعيبية (دليل فردي) مجالها R

أي ما من قيود على المجال $(-\infty,\infty)$

5) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-x-6}}{x-5}$

1) $X=5$ (صفر المقام) $\Rightarrow X\neq 5$ الدالة معرّفة لكل

2) $x^2-x-6\geq 0$ البسط دالة تربيعية مجالها كمو

$(X+2)(x-3)\geq 0$

(-2) (3)

أبسط وأسهل طريقة للحل كمو خط الأعداد ولتعويض في الفترات الجزئية

أصفار البسط (مغلقة)

أصفار المقام (مفتوحة)



$(-\infty,-2]\cup[3,5)\cup(5,\infty)$

لاحظ: لا تحتاج لأيجاد جدولين واحد للبسط وآخر للمقام وكل هذا التعقيد !!

6) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{9-x^2}}$

لاحظ في هذا السؤال أيضاً لو حاولنا إيجاد مجال البسط ثم مجال المقام فإن الموضوع سيصبح معقد جداً

مثال

$x^2-4\geq 0$

$x^2\geq 4 \Rightarrow |x|\geq 2$

مجال البسط $x\geq 2$ ، $x\leq -2$

$9-x^2>0$

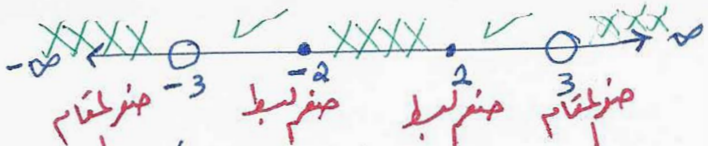
$-x^2>-9$

$x^2<9$

$|x|<3$

مجال المقام $-3<X<3$

كما كله ممكن الآستغناء عنه لجعل الأعداد التعويض



$(-3,-2]\cup[2,3)$

فقط ... !!!

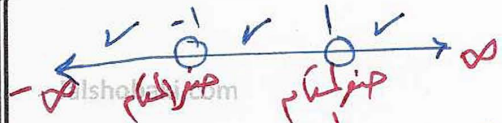
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

7) $f(x)=\frac{4}{x^2-1}$

1) المجال هنا هو $R/\{\pm1\}$ أي $(R/$ مجال المقام$)$

أو $\{x \mid x \neq \pm1, x \in R\}$

2) نفس الحل ملحقاً بـ ستخدام خط الأعداد



$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$

8) $f(x)=\frac{4x}{x^2+2x-6}$

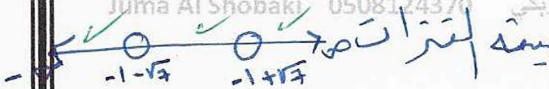
1) دالة نسبية مجالها هو $R/$ أصفار المقام

بالآلة $x^2+2x-6=0$

$\Rightarrow x_1=-1+\sqrt{7}$

$x_2=-1-\sqrt{7}$

أو بصيغة المقدمات



المجال $\{x \mid x \neq -1\pm\sqrt{7}, x \in R\}$

$(-\infty,-1-\sqrt{7})\cup(-1-\sqrt{7},-1+\sqrt{7})\cup(-1+\sqrt{7},\infty)$

9) $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}}{x^2-25}$ $\longrightarrow$ $x=-3$ (•) صفر البسط

$\longrightarrow$ $x=-5,5$ (○) صفر المقام



$[-3,5)\cup(5,\infty) \Rightarrow$ or $[-3,\infty)/\{5\}$

10) $f(x)=\frac{\sqrt{-x}}{\ln(x+5)}$

1) $\ln(1)=0 \Rightarrow x+5\neq1$

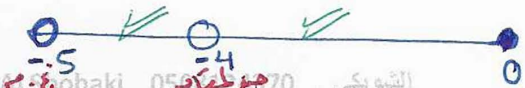
$x\neq-4$ صفر المقام

2) $\ln$ مجال $\Rightarrow x+5>0$

$x>-5$

3) $x=0$ صفر البسط

مجال البسط $x\leq0$



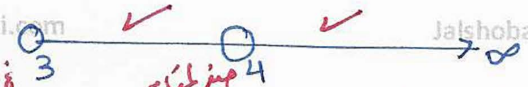
$(-5,-4)\cup(-4,0]$

11) $f(x)=\frac{x-3}{\ln(x-3)}$

1) $x-3>0 \Rightarrow x>3$ (مجال $\ln$)

2) $x-3\neq1 \Rightarrow x\neq4$ صفر المقام

3) R مجال البسط



$(3,4)\cup(4,\infty)$ or $(3,\infty)/\{4\}$

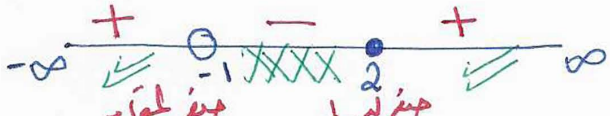
12) $f(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$ $\longrightarrow$ $x-2=0$

$x=2$ صفر البسط

1) $\frac{x-2}{x+1}\geq0 \Rightarrow (+)$ إشارة

2) $x=-1$

$\therefore x\neq-1$ صفر المقام



so $\Rightarrow (-\infty,-1)\cup[2,\infty)$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

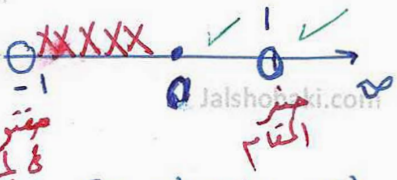
13) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-1}$

1) $x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -1$ مجال البسط

2) $\sqrt{x}-1\neq 0$

$\sqrt{x}\neq 1 \Rightarrow x\neq 1$ ($x=1$ صفر المقام)

3) $x\geq 0$ مجال الجذر في المقام



$[0,1)\cup(1,\infty)$

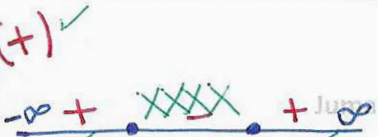
or $[0,\infty)/\{1\}$

14) $f(x)=\sqrt{x^2-x-12}$

$x^2-x-12\geq 0$

$(x+3)(x-4)\geq 0$

(-3) (4)



$(-\infty,-3]\cup[4,\infty)$

ملاحظة: في الدوال التربيعية الإشارة بين الجذرين مخالفة لإشارة x^2 ومشابهة عند الأطراف

15) $f(x)=\frac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x^2-2x}}$

1) مجال ln $\Rightarrow x^2-1>0$

$x^2>1$

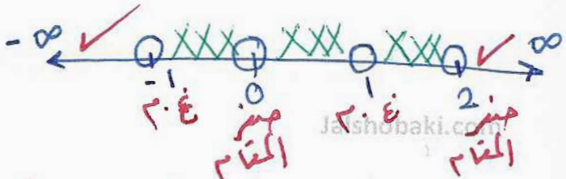
$|x|>1 \Rightarrow \boxed{x>1}, \boxed{x<-1}$

2) $x^2-2x>0$

$x(x-2)>0$

0 ≠ المقام $x\neq 0$

$x\neq 2$



$(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$

16) $f(x)=\frac{x^2+2}{[x]}$ ⟶ $x^2+2\neq 0$ R مجاله

$[x]$ R مجاله

R/ أصفار المقام

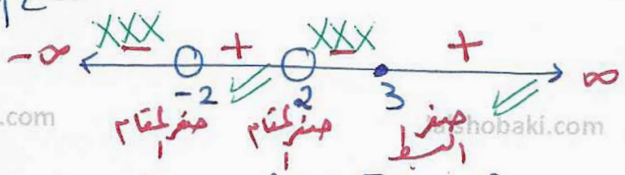
أوسع المجال هو

$[x]\neq 0 \Rightarrow$ لكل $x\in[0,1)$ إذن ⇒ المجال $R/\ x\in[0,1)$

17) $f(x)=\sqrt{\frac{x-3}{x^2-4}}$

$\frac{x-3}{x^2-4}\geq 0$ ⟶ (+) إشارة

نضع أصفار



$(-2,2)\cup[3,\infty)$

18) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ⟶ مجاله R

R/ أصفار المقام

أوسع المجال هو

$1-x^2\neq 0$

$x\neq -1,1$



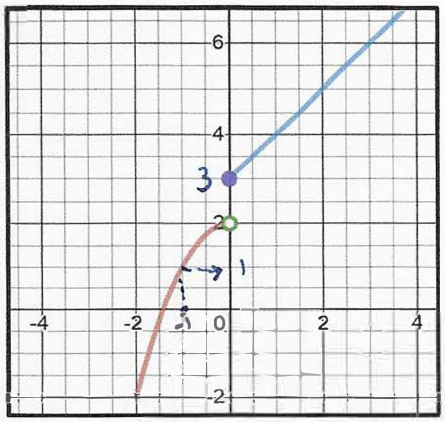
المجال $\Rightarrow (-1,1)$

Set notation $\{x/\ -1<x<1,\ x\in R\}$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

7 إيجاد المجال والمدى بيانياً (هندسياً) Finding Domain and Range Graphically (Geometrically)

س1) إذا كانت $f(x)=\begin{cases}2-x^2, & -2\le x<0\\ 3+x, & x\ge 0\end{cases}$ ، فجد ما يلي:



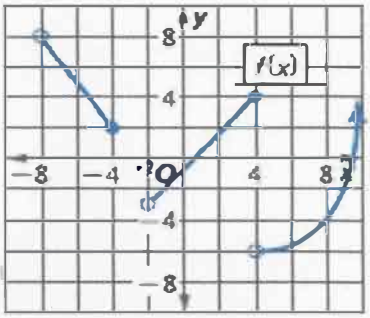
A) المجال (Domain) $[-2,\infty)$

B) $f(-1)=1$

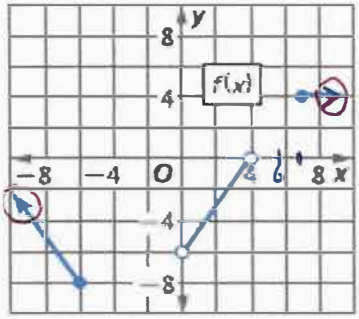
C) $f(0)=3$

س2)

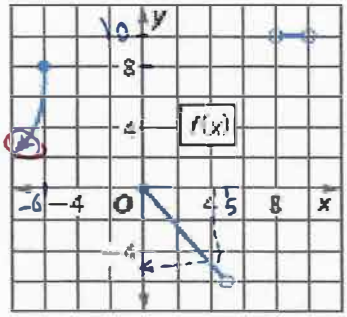
A



B



C



السؤال	Domain المجال $x\Rightarrow$	Range المدى $y\Rightarrow$	$F(4)$
A	$(-8,-4]\cup(-2,\infty)$	$(-6,\infty)$	$f(4)=4$
B	$(-\infty,-6]\cup(0,4)\cup[7,\infty)$	$[-8,\infty)$	غير معرّفة undefined
C	$(-\infty,-6]\cup[0,5)\cup(8,10)$	$(-\infty,8]\cup[10]$	-5

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Inverse Functions الدوال العكسية (1-2)

➢ يكون للدالة $f(x)$ دالة عكسية $f^{-1}(x)$ إذا حققت الشرطان التاليان:

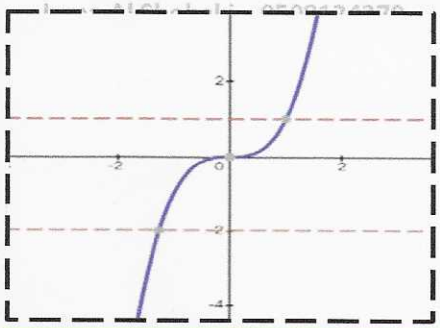
1) الدالة $f(x)$ هي دالة واحد لواحد (أي أنّ كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر) - نظرية 2.1 -

2) $f(g(x)) = x$ ، لكل قيم (x) تنتمي لمجال $g(x)$

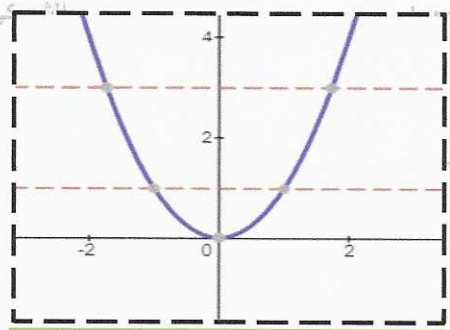
$g(f(x)) = x$ ، لكل قيم (x) تنتمي لمجال $f(x)$

- **The function $f(x)$ has an Inverse function $f^{-1}(x)$ If the following two conditions are met:**
  1) **It's one-to-one (every horizontal line intersects the curve of the function at one point at most)**
  2) $f(g(x)) = x$, $for\ all\ x \in domain\ of\ g(x)$

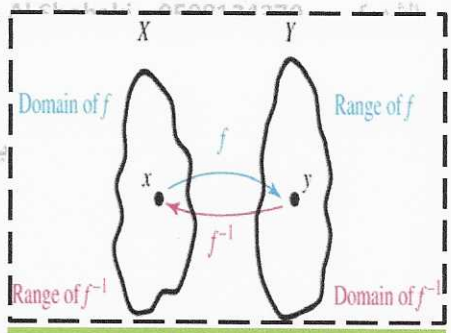
     $g(f(x)) = x$, $for\ all\ x \in domain\ of\ f(x)$



لا يفشل اختبار الخط الأفقي $\overset{\text{إذن}}{\Leftarrow}$ واحد لواحد



يفشل اختبار الخط الأفقي $\overset{\text{إذن}}{\Leftarrow}$ ليست واحد لواحد



للدالة $f(x)$ دالة عكسية $f^{-1}(x)$

➢ عندها فإنّ الرمز $f^{-1}(x)$ يعني دالة عكسية لـِ $f(x)$ ، ولكنه لا يعني $\frac{1}{f(x)}$ (أي مقلوب الدالة أو المعكوس الضربي لـِ $f(x)$)

حيث $\frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1}$ ، و $\overset{\text{إذن}}{\Leftarrow}$ $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$.

- **The symbol $f^{-1}(x)$ means the inverse of $f(x)$, but it does not mean $\frac{1}{f(x)}$ (The reciprocal of the function or the multiplicative inverse of $f(x)$), where $\frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1}$, and $\overset{so}{\Rightarrow}$ $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$**

✓ من خصائص الدوال العكسية:

1) مجال الدالة $f(x)$ = مدى الدالة $f^{-1}(x)$

ومدى الدالة $f(x)$ = مجال الدالة $f^{-1}(x)$ أي أنّه إذا كانت $f(a) = b$ ، فإنّ $f^{-1}(b) = a$

2) (لكل قيم (x) في مجال f) ، $f^{-1}(f(x)) = x$

(لكل قيم (x) في مجال f^{-1}) ، $f(f^{-1}(x)) = x$

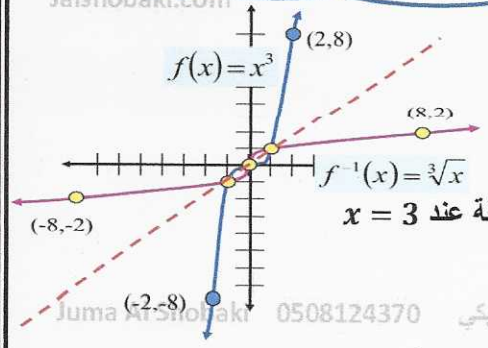
3) الرسم للدالة ومعكوسها متماثل حول $(y = x)$

4) إذا كانت (f) لا تقطع على سبيل المثال المستقيم $y = 3$ ، فإنّ $f^{-1}(x)$ ليست معرّفة عند $x = 3$

5) لنجد القيود على الدالة العكسية وجب أن نجد مدى الدالة الأصلية

6) لإيجاد نقطة التقاطع بين f ومعكوسها f^{-1} إن وجدت، فإنّنا نستطيع الحل كالآتي:

1) $f(x) = f^{-1}(x)$ 2) $f(x) = x$ 3) $f^{-1}(x) = x$



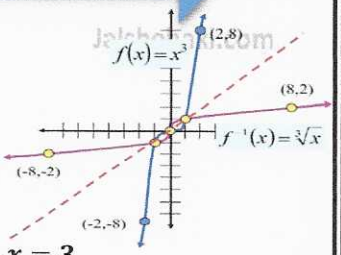
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

- **Properties of Inverse Functions:**

1) Domain of the function $f(x)$ = Range of the function $f^{-1}(x)$

Range of the function $f(x)$ = Domain of the function $f^{-1}(x)$

If $f(a) = b$, then $f^{-1}(b) = a$



2) (for all values of (x) in the domain of f) , $f^{-1}(f(x)) = x$

(for all values of (x) in the domain of f^{-1}) , $f(f^{-1}(x)) = x$

3) The graph of the function and its inverse is symmetric about $(y = x)$

4) If (f) does not intersect for example the line $y = 3$, then $f^{-1}(x)$ is not defined at $x = 3$

5) To find the constraints on the inverse function, we must find the range of the original function

6) To find the point of intersection between f and its inverse f^{-1} , if any, we can solve as follows:

1) $f(x) = f^{-1}(x)$ 2) $f(x) = x$ 3) $f^{-1}(x) = x$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

* ملاحظات:

لمعرفة ما إذا كانت الدالة واحد لواحد جبرياً نساوي الدالة بالصفر، فإذا كان لها أكثر من صفر فهي ليست واحد لواحد

إذا كانت (f) متصلة $[a, b]$ ، وكانت متزايدة أو متناقصة فإنّ لها دالة عكسية f^{-1}

الدوال الفردية متماثلة حول نقطة الأصل وهي دوال واحد لواحد

الدوال الفردية تحقّق $f(-x) = -f(x)$

الدوال الزوجية متماثلة حول (y) ، وهي ليست دوال واحد لواحد على R ، وقد يكون لها معكوس على فترة معينة

الدوال الزوجية تحقّق $f(-x) = f(x)$

إذا لم تكن الدالة متماثلة حول (y) أو حول نقطة الأصل فهي لا زوجية ولا فردية

- **Notes:**

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

To find out if the function is one to one algebraically we set the function to zero, if it has more than zero then it is not one to one

If (f) is continuous $[a, b]$, and it is increasing or decreasing, then it has an inverse function f^{-1}

The odd functions are symmetric about the origin and are one-to-one functions

Odd functions verify $f(-x) = -f(x)$

Even functions are symmetric about (y) , which are not one-to-one functions on R , and may have an inverse over a given interval

Even functions verify $f(-x) = f(x)$

If the function is not symmetric about (y) or about the origin then it is neither even nor odd

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Find the Inverse function of $f(x) = x^3 - 2$?

س1) جد معكوس الدالة $f(x) = x^3 - 2$ ؟

$y = x^3 - 2$

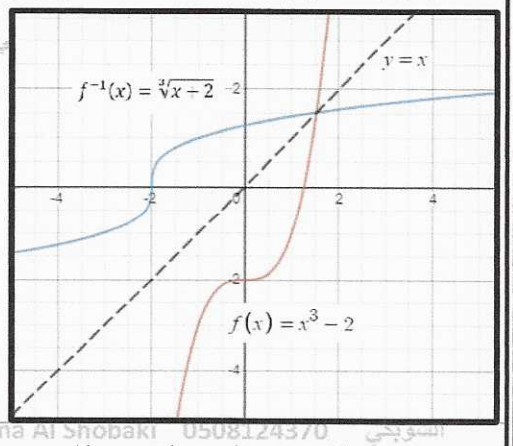
$x = y^3 - 2$ ← نبدل المتغيرات

$-y^3 = -2 - x$ ← نعمل بالسالب لـ y

$y^3 = x + 2$

$\sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{x+2} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x+2}$

$\therefore y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}$



Show that $g(f(x)) = x$ and $f(g(x)) = x$ for all x ?

س2) بين أنّ $g(f(x)) = x$ ، وأنّ $f(g(x)) = x$ لكل قيم x ؟

A) $f(x) = x^5$, $g(x) = x^{\frac{1}{5}}$

$f(g(x)) = f(x^{\frac{1}{5}}) = (x^{\frac{1}{5}})^5 = x$ ✓

$g(f(x)) = g(x^5) = (x^5)^{\frac{1}{5}} = x$ ✓

B) $f(x) = 2x^3 + 1$, $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$

$f(g(x)) = f(\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}) = 2(\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}})^3 + 1 = 2(\frac{x-1}{2}) + 1 = x - 1 + 1 = x$ ✓

$g(f(x)) = g(2x^3+1) = \sqrt[3]{\frac{2x^3+1-1}{2}} = \sqrt[3]{x^3} = x$ ✓

س3) حدّد ما إذا كان للدالة دالة عكسية (أي أنّها واحد لواحد)، ثم جد الدالة العكسية ومثّلها بيانياً؟

Determine whether the function has an Inverse (is one-to-one), If so, find the Inverse and graph it?

$f(x) = x^3 + 4$

$x = y^3 + 4$

$y^3 = x - 4$

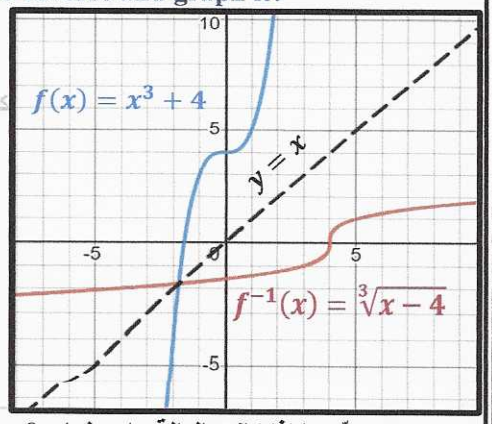
$y = \sqrt[3]{x-4}$

$\therefore y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-4}$

$x^3 + 4 = 0$

بالحاسبة ⇒ $x = -1.58$

لها صفر واحد فقط، إذن دالة واحد لواحد.



Determine whether the function is one-to-one?

س4) حدّد ما إذا كانت الدالة واحد لواحد؟

$f(x) = x^5 - 1$

$x^5 - 1 = 0 \Rightarrow x^5 = 1 \Rightarrow x = 1$

لها صفر واحد إذن دالة واحد لواحد.

يحل الطالب السؤال مباشرة باستخدام الحاسبة

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Determine whether the function is one-to-one?

س5) حدّد ما إذا كانت الدالة واحد لواحد؟

$f(x) = x^4 - 2x - 1$

نجد أصفار الدالة باستخدام الآلة الحاسبة

$x^4 - 2x - 1 = 0$

$x_1 = -0.4746$

$x_2 = 1.395$

$\Rightarrow$ حيث يعني ليست دالة واحد لواحد.

Jalshobaki.com

س6) حدّد ما إذا كانت الدالة واحد لواحد ثم جد الدالة العكسية وارسم بيانياً؟

Determine if the function is one-to-one then find the inverse function and graph?

$f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

ملاحظة هامة:

دالة الجذر التربيعي لها مجال مقيد، وبالتالي يجب أن نقيد مجال الدالة العكسية بمدى الدالة الجذرية الأصلية.

مجال f: $x^3 + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

مدى f: $y \geq 0$

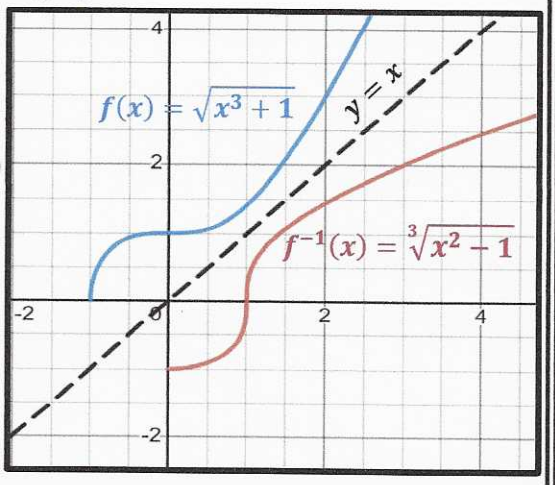
$y = \sqrt{x^3 + 1}$

$x = \sqrt{y^3 + 1} \Rightarrow x^2 = y^3 + 1$

$y^3 = x^2 - 1$

$\therefore y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ ، لكل $x \geq 0$

مجال $f^{-1}(x)$ هو نفس مدى f

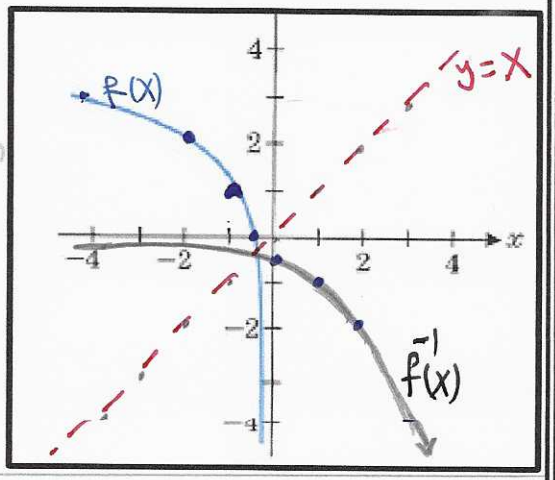


Use the given graph to graph the Inverse function?

س7) استخدم التمثيل البياني لتمثيل الدالة العكسية بيانياً؟

$f(x)$	$f^{-1}(x)$
$(-\frac{1}{2}, 0)$ (x, y)	$(0, -\frac{1}{2})$ (x, y)
$(-1, 1)$	$(1, -1)$
$(-2, 2)$	$(2, -2)$
$(-4, 3)$	$(3, -4)$

1. نرسم $y = x$
2. نلاحظ النقاط الموجودة على رسم f ونعكسها.
3. نصل النقاط على الرسم بسلاسة لرسم f^{-1}



Determine which function has an Inverse function ?

س8) حدّد الدالة التي يوجد لها دالة عكسية؟

A) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ ليست واحد لواحد

B) $f(x) = x^3 - 1$ واحد لواحد

C) $f(x) = -2$ ليست $y = -2$

D) $f(x) = x^2 - 9$ ليست

2017
2018

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س9) بافتراض أنّ للدالة دالة عكسية، جد قيم الدالة المحدّدة بدون الحل لإيجاد الدالة العكسية؟

Assume that the function has an Inverse, Without solving for the Inverse, find the indicated function values?

$f(x) = x^3 + 4x - 1$

A) $f^{-1}(-1) = 0$

كأننا نقول عند أي قيمة لـ x تكون $f(x) = -1$

إذن نساوي $f(x)$ بـ (-1) ⇐ $x^3 + 4x - 1 = -1$

إذن ⇐ $x = 0$

معنى ⇐ $f(0) = -1$, $f^{-1}(-1) = 0$

B) $f^{-1}(4) = 1$

$f(1) = 4$

$\therefore f^{-1}(4) = 1$

$f(x) = x^3 + 2x + 1$

A) $f^{-1}(1) = 0$

$f(0) = 1$, $f^{-1}(1) = 0$

أو $x^3 + 2x + 1 = 1$

$x^3 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

B) $f^{-1}(13) = 2$

$x^3 + 2x + 1 = 13 \Rightarrow x = 2$

$f(2) = 13$

$\therefore f^{-1}(13) = 2$

$f(x) = \sqrt{x^3 + 2x + 4}$

A) $f^{-1}(4) = 2$

$\sqrt{x^3 + 2x + 4} = 4$

$x^3 + 2x + 4 = 16 \Rightarrow x^3 + 2x - 12 = 0$

$x = 2$

$f(2) = 4$

$f^{-1}(4) = 2$

B) $f^{-1}(2) = 0$

$f(0) = 2$

$f^{-1}(2) = 0$

س10) افترض أنّ للدالة f دالة عكسية، اشرح سبب صحة العبارة التالية؟

Assume that f has an inverse function, explain why the following statement is true ?

A) إذا كان مدى الدالة f هو كل قيم $y > 0$ ، فإنّ مجال الدالة f^{-1} هو جميع قيم $x > 0$؟

If the range of the function f is all values of $y > 0$, then the domain of the function f^{-1} is all values of $x > 0$?

عبارة صحيحة، لأن مدى الدالة f هو مجال معكوسها (خواص الدوال العكسية)

B) إذا كان التمثيل البياني للدالة f يتضمن النقطة (a, b) ، فإنّ التمثيل البياني للدالة f^{-1} سيتضمن النقطة (b, a) ؟

If the graph of function f includes the point (a, b) , then the graph of f^{-1} includes the point (b, a) ?

عبارة صحيحة ، خواص التمثيل البياني للدوال العكسية $f(a) = b$ ، $f^{-1}(b) = a$

C) إذا كان التمثيل البياني للدالة f لا يقطع المستقيم $y = 3$ إذن $f^{-1}(x)$ ليست معرّفة عند $x = 3$ ؟

If the graph of the function f does not intersect the line $y = 3$ then $f^{-1}(x)$ is not defined at $x = 3$?

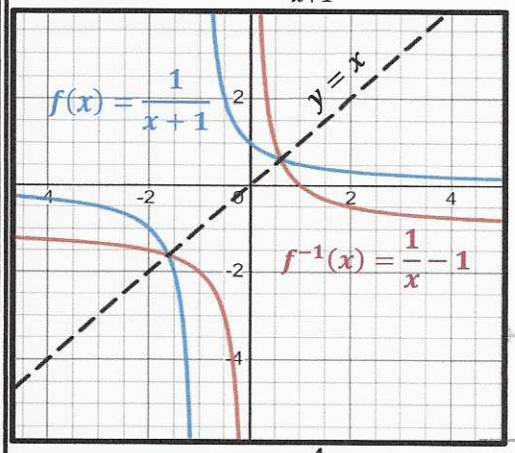
إذا لم يقطع المستقيم $y = 3$ منحنى الدالة f في أي نقطة فإن ما من x بحيث $f(x) = 3$ ، ما يعني أنها غير معرّفة عند $x = 3$.

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س11) باستخدام تمثيل بياني تقريبي، حدّد ما إذا كانت الدالة واحد لواحد، وفي حال كانت، مثّل الدالة المعكوسة؟

Using an approximate graph, determine whether the function is one-to-one and, if so, graph the inverse function?

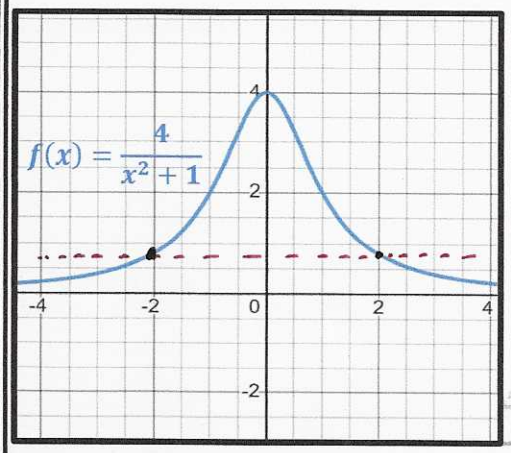
A) $f(x)=\frac{1}{x+1}$



x	-3	-2	-1	0	3
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	غير معرفة	1	$\frac{1}{4}$

1. نحدد بعض النقاط (x) ونجد قيمها ونختبرها بعد الرسم
2. نلاحظ من الجدول ومن الرسم البياني أيضاً أنها واحد لواحد.
3. نعكس النقاط ونرسم الدالة العكسية $f^{-1}(x)=\frac{1}{x}-1$

B) $f(x)=\frac{4}{x^2+1}$



1. لاحظ أن مقام دالة كثيرة لس لها أصفار
أي $x^2+1\neq 0$
2. متماثلة حول محور (y)
$f(2)=\frac{4}{5}$ يعني
$f(-2)=\frac{4}{5}$
مما يعني أن اختبار الخط الأفقي يقطع
ليست واحد لواحد.

الأسئلة التالية تتضمّن مفهوم وجود دالة عكسية ضمن مجال محدّد (مقيّد)

The following exercises involve inverse functions on restricted domains

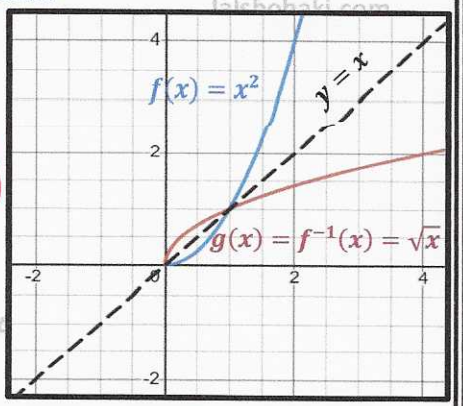
س12) وضّح أنّ $\begin{cases} f(x)=x^2 & , \ x\geq 0 \\ g(x)=\sqrt{x} & , \ x\geq 0 \end{cases}$ دالتان متعاكستان ومثّل كلتا الدالتين بيانياً؟

Show that $\begin{cases} f(x)=x^2 & , \ x\geq 0 \\ g(x)=\sqrt{x} & , \ x\geq 0 \end{cases}$ **are inverse functions. Graph both functions?**

$f(g(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2=x$

$g(f(x))=g(x^2)=\sqrt{x^2}=|x|=x \quad (x\geq 0)$ لأن $|x|<x$

إذن $f(x)$ و $g(x)$ دالتان متعاكستان عندما يكون كلاهما معرّف على $x\geq 0$



Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

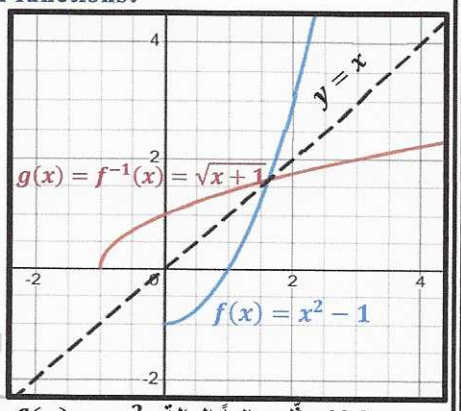
س13) وضّح أنّ $\begin{cases} f(x)=x^2-1 & , \ x\geq 0 \\ g(x)=\sqrt{x+1} & , \ x\geq -1 \end{cases}$ دالتان متعاكستان ومثّل كلتا الدالتين بيانياً؟

Show that $\begin{cases} f(x)=x^2-1 & , \ x\geq 0 \\ g(x)=\sqrt{x+1} & , \ x\geq -1 \end{cases}$ **are inverse functions. Graph both functions?**

$f(g(x)) = f\left(\sqrt{x+1}\right) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 1 = x+1-1 = x$

$g(f(x)) = g(x^2-1) = \sqrt{x^2-x+1} = |x| = x$ ($x \geq 0$ لأن f مجالها)

إذن دالتان متعاكستان



س14) مثّل بيانياً الدالة $f(x)=x^2$ من أجل $x \leq 0$ وتحقّق من أنّها دالة واحد لواحد، ثم جد معكوسها، ومثّل الدالتان بيانياً؟

Graph $f(x)=x^2$ **for** $x \leq 0$ **and verify that it is one-to-one. Find its inverse. Graph both functions?**

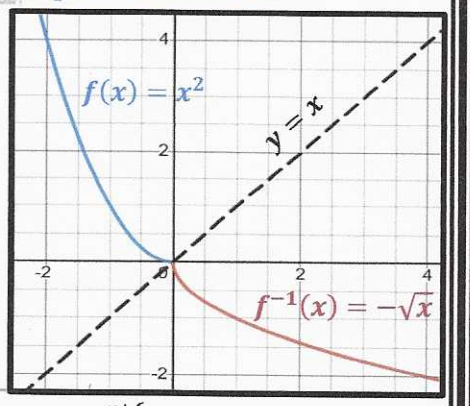
لاحظ أن دالة $f(x)=x^2$ على المجال المعطى $x \leq 0$ هي دالة واحد لواحد.

$y = x^2$

$x = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x} \Rightarrow \boxed{y = -\sqrt{x}}$ (لأن $x \leq 0$)

مجال $f^{-1}(x)$ هو مدى الدالة f إذن $y \geq 0$

$\therefore \ y = f^{-1}(x) = -\sqrt{x} \quad (x \geq 0)$



س15) إذا كانت الدالة $f(x)=\frac{x+6}{x}$ لها دالة عكسية $g(x)$ بحيث $g(x)=\frac{a}{x-1}$، فجد عندها قيمة الثابت a ؟

If the function $f(x)=\frac{x+6}{x}$ **has an inverse function** $g(x)$ **such that** $g(x)=\frac{a}{x-1}$, **then find the value of the constant a?**

$f(g(x)) = x$
$g(f(x)) = x$

بما أن $g(x)$ هي دالة عكسية لـ $f(x)$ إذن

نختار أحدها ونتحقق: لإيجاد قيمة الثابت a.

$g(f(x)) = g\left(\frac{x+6}{x}\right) = \frac{a}{\frac{x+6}{x} - \frac{1}{1}} = \frac{x}{1}$

$\therefore \ a = x\left(\frac{x+6}{x} - \frac{1}{1}\right)$

$a = x\left(\frac{x+6-x}{x}\right) \Rightarrow a = x+6-x$

$\therefore \boxed{a = 6}$

ونفس الإجابة طبعاً لو أخذ الطالب $f(g(x))$.

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س16) إذا تقاطع منحنى الدالة f مع منحنى الدالة f^{-1} في النقطة $\left(3-c, \frac{c}{2}\right)$ فإنّ c ؟

If the curve of the function f intersects the curve of the function f^{-1} at the point $\left(3-c, \frac{c}{2}\right)$, then c ?

$x \; , \; y$

← عند التقاطع نأن $y=x$

$3 - c = \frac{c}{2}$

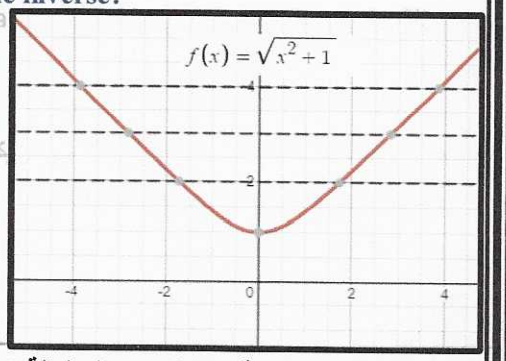
بالضرب (2) $\Rightarrow$ $6 - 2c = c$

$3c = 6$

$\boxed{c = 2}$

س17) حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ دالة واحد لواحد؟ ، إذا كانت كذلك فجد المعكوس؟

Determine whether the function has an inverse (is one-to-one)? If so, find the inverse?



← نختبر حالة لـ (x) موجبة ، ونفس الحالة لـ (x) سالبة

$f(1) = \sqrt{1^2+1} = \sqrt{2}$

$f(-1) = \sqrt{(-1)^2+1} = \sqrt{2}$

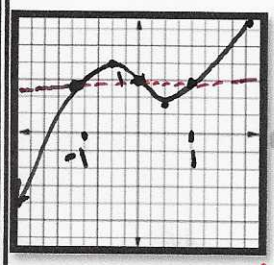
$\Rightarrow$ إذن ليست واحد لواحد

Jalshobaki.com

س18) جد جميع قيم k التي تجعل الدالة $f(x) = x^3 + kx + 1$ دالة واحد لواحد؟ إرشاد: استعن بالرسومات البيانية

Find all values of k such that $f(x) = x^3 + kx + 1$ is one-to-one? Hint: Use the graphs

① إذا كانت $k < 0$



① $k < 0^{(-)}$ عندما تكون

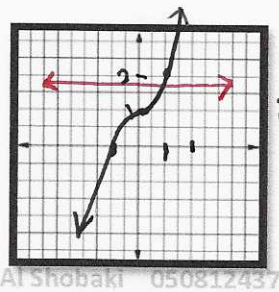
$f(x) = x^3 - x + 1$

$f(1) = 1$

$f(-1) = 1$

$\Rightarrow$ ليست واحد لواحد

② $k = 0$



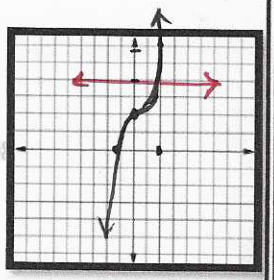
$k = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 + 1$

$x^3 + 1 = 0$

$x^3 = -1 \Rightarrow \boxed{x = -1}$

حل واحد فقط $\Rightarrow$ دالة واحد لواحد

③ $k > 0$



③ $k > 0^{(+)} \Rightarrow f(x) = x^3 + x + 1$

$x^3 + x + 1 = 0$

$x = -0.6$

حل واحد فقط $\Rightarrow$ دالة واحد لواحد

إذن دالة واحد لواحد لكل $k \geq 0$.

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

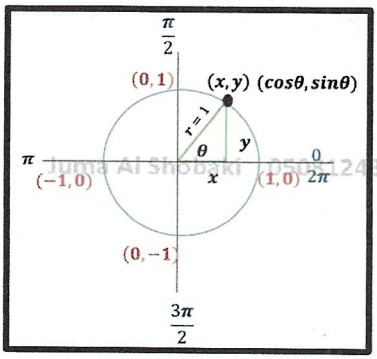
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

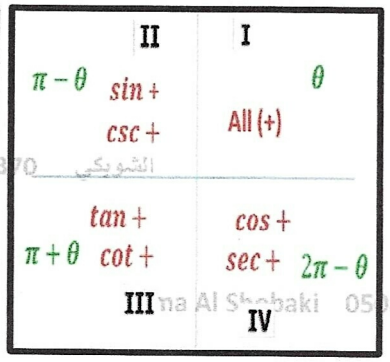
(1-3) الدوال المثلثية والدوال المثلثية العكسية

Trigonometric and Inverse Trigonometric Functions

➢ تكون الدالة f دورية ، وزمنها الدوري T ، إذا كان $f(x+T)=f(x)$ لكل قيم x بحيث يكون x و $x+T$ في مجال f وتكون أصغر قيمة $(T>0)$ لهذا العدد هي الزمن الدوري الأساسي

- The function f is periodic, and its period is T, if $f(x+T)=f(x)$ for all x values where x and $x+T$ are in the domain of f and the smallest value $(T>0)$ for this number is the fundamental period





➢ الرسم يمثل دائرة الوحدة $x^2+y^2=1$ و θ الزاوية مقاسة بعكس عقارب الساعة و تقاس بالراديان مالم يذكر غير ذلك

- The diagram represents the unit circle $x^2+y^2=1$ and θ the angle is measured counterclockwise and is measured in radians unless otherwise noted

➢ الدوال المثلثية الأساسية $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ ومقلوباتها $\csc x$, $\sec x$, $\cot x$

➢ للتحويل من راديان $\overset{\text{إلى}}{\Leftarrow}$ درجة $\Leftarrow$ (الزاوية بالراديان) $\times \frac{180^\circ}{\pi}$ مثال) $\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)=\frac{180^\circ}{3}=60^\circ$ Radians $\xrightarrow{\times\frac{180^\circ}{\pi}}$ Degrees

➢ للتحويل من درجة $\overset{\text{إلى}}{\Leftarrow}$ راديان $\Leftarrow$ (الزاوية بالدرجات) $\times \frac{\pi}{180^\circ}$ مثال) $(60^\circ)\times\left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)=\frac{\pi}{3}$ Degrees $\xrightarrow{\times\frac{\pi}{180^\circ}}$ Radians

➢ الدوال $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ دوال دورية ودورتها 2π ، حيث دائرة الوحدة $x^2+y^2=1$ تمثل معادلة دائرة نصف قطرها وحدة واحدة ، ومحيط الدائرة $c=2\pi r=2\pi(1)=2\pi$

- Functions $\sin\theta$, $\cos\theta$ are Periodic functions of 2π , where the unit circle $x^2+y^2=1$ represents the equation of a circle with radius one unit, and the circumference $c=2\pi r=2\pi(1)=2\pi$

- The circle is 360° , so $2\pi=360^\circ$

➢ الدائرة 360° درجة وعليه فإن $2\pi=360^\circ$

- The function $\tan\theta$ is periodic, and its period is π

➢ الدالة $\tan\theta$ دورية ، ودورتها π

➢ $\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta$, $\cos(\theta+2\pi)=\cos\theta$ لكل قيم θ ، تكون 2π هي أصغر زاوية تحقق النظرية $f(x+T)=f(x)$ ، ولهذا فهما دوال دورية والزمن الدوري لكل منها هو 2π

- $\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta$, $\cos(\theta+2\pi)=\cos\theta$ For all values of θ , 2π is the smallest angle that verifies the theorem $f(x+T)=f(x)$ so they are periodic functions and the period for each is 2π

العلاقة المشتركة بين الدوال المثلثية:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$

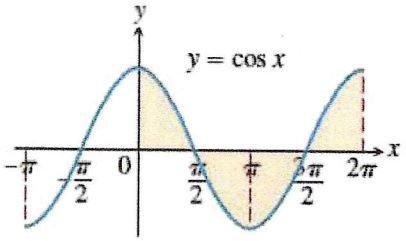
2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

3) $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$, $\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\tan x$

4) $\sec\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\csc x$, $\csc\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sec x$

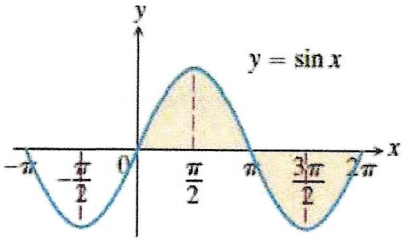
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

رسومات الدوال المثلثية ومعكوساتها، وأهم المتطابقات المثلثية المطلوب فهمها وحفظها



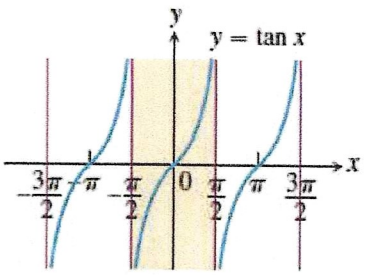
Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $-1 \le y \le 1$
Period: 2π

(a)



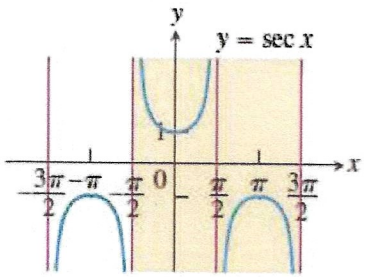
Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $-1 \le y \le 1$
Period: 2π

(b)



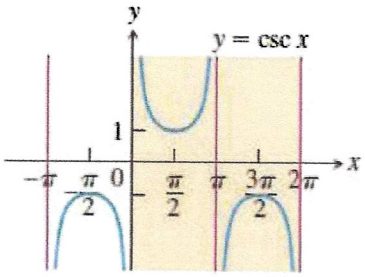
Domain: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Range: $-\infty < y < \infty$
Period: π

(c)



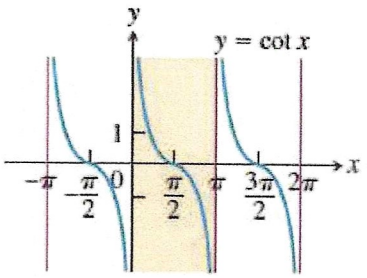
Domain: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Range: $y \le -1$ and $y \ge 1$
Period: 2π

(d)



Domain: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Range: $y \le -1$ and $y \ge 1$
Period: 2π

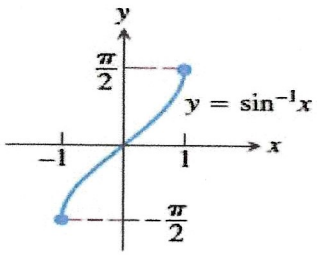
(e)



Domain: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Range: $-\infty < y < \infty$
Period: π

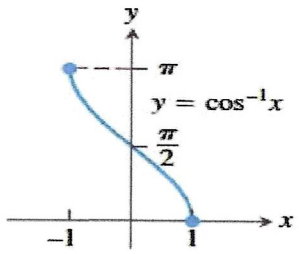
(f)

Domain: $-1 \le x \le 1$
Range: $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$



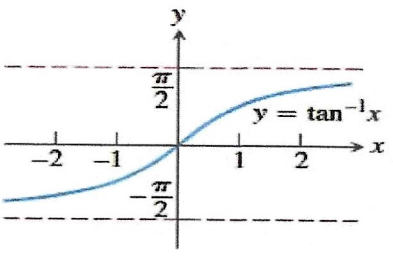
(a)

Domain: $-1 \le x \le 1$
Range: $0 \le y \le \pi$



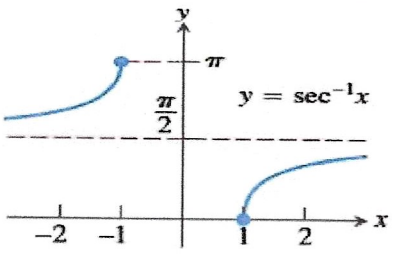
(b)

Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$



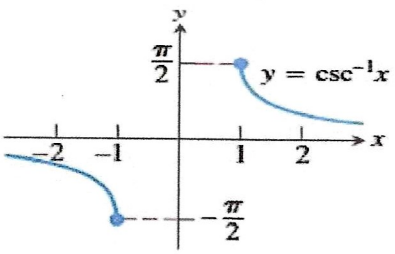
(c)

Domain: $x \le -1$ or $x \ge 1$
Range: $0 \le y \le \pi, y \neq \frac{\pi}{2}$



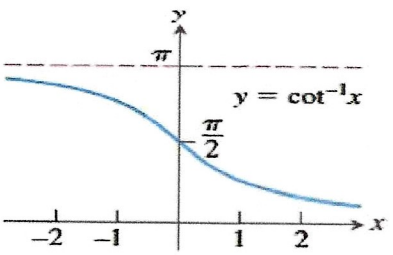
(d)

Domain: $x \le -1$ or $x \ge 1$
Range: $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}, y \neq 0$



(e)

Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $0 < y < \pi$



(f)

مهمة جداً وهي للحفظ لأنها تلزم في المرحلة الثانوية والجامعية أيضاً

متطابقات مثلثية مهمة جداً للحفظ تلزم في المرحلة الثانوية والجامعية

1. $\sin(x \mp y) = \sin x \cos y \mp \sin y \cos x$
2. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
3. $\cos(x \mp y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$
4. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
5. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$, $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
6. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$
7. $\sec^{-1}(x) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\csc^{-1}(x) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\cot^{-1}(x) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

السعة، الدورة، التكرار (التردّد)، إزاحة الطور، والإزاحة العمودية للدوال الجيبية $(sinx, cosx)$

Amplitude, Period, Frequency, Phase Shift, and Vertical Shift of $(sinx, cosx)$

$$y = a\ sin(bx + c) + d$$
$$y = a\ cos(bx + c) + d$$

السعة: $|a|$ الدورة: $\frac{2\pi}{|b|}$ التكرار: $\frac{|b|}{2\pi} = \frac{1}{\text{الدورة}}$ إزاحة الطور: $-\frac{c}{|b|}$ الإزاحة الرأسية (الخط المتوسط): d

Amplitude: $|a|$ **Period:** $\frac{2\pi}{|b|}$ **Frequency:** $\frac{1}{Period} = \frac{|b|}{2\pi}$ **Phase Shift:** $-\frac{c}{|b|}$ **Vertical Shift:** d

في الأسئلة التالية حدّد السعة، الدورة، التكرار، إزاحة الطور، والإزاحة الرأسية لكل ممّا يلي؟

Identify the amplitude, period, frequency, phase shift, and vertical shift?

1) $y = 2sin(2x + 2\pi) - 1$ (a, b, c, d)

1) السعة $= |2| = 2$

2) الدورة $= \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

3) التكرار $= \frac{1}{\text{الدورة}} = \frac{|b|}{2\pi} = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$

4) إزاحة الطور $= -\frac{c}{|b|} = -\frac{2\pi}{2} = -\pi$

5) إزاحة رأسية $= -1$

أي الأرقام بمقدار وحدة واحدة.

2) $f(x) = 3sin2x$

1) السعة $= |3| = 3$

2) الدورة $= \frac{2\pi}{2} = \pi$

3) التكرار $= \frac{1}{\pi}$

4) إزاحة أفقية: لا يوجد

5) إزاحة رأسية: لا يوجد

3) $f(x) = 3cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

1) السعة $= |3| = 3$

2) الدورة $= \frac{2\pi}{2} = \pi$

3) التكرار $= \frac{1}{\pi}$

4) إزاحة الطور: يمكن الحل على القانون وكذا أفضل ويمكن الحل بوضع المعادلة بالصورة القياسية واستخراج الإزاحة

$y = 3\cos 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

$\frac{\pi}{4}$ إزاحة لليمين بمقدار

5) إزاحة رأسية لأعلى وحدة واحدة

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Find all solutions of the given equation? في الأسئلة التالية جد كافة حلول المعادلة المعطاة فيما يلي؟

1) $2\sin x - 1 = 0$

$\frac{2}{2}\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ — الربع I، الربع II

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

II $= \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

بما أنّ المطلوب هو كافة الحلول ⇐ دالة $\sin x$ دورية ودورها 2π

$\therefore x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ ، حيث n أي عدد صحيح

2) $2\cos x - 1 = 0$

$\cos x = \frac{1}{2}$ — ① $\frac{\pi}{3}$ ، ④ $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$ or $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

كافة الحلول $\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$

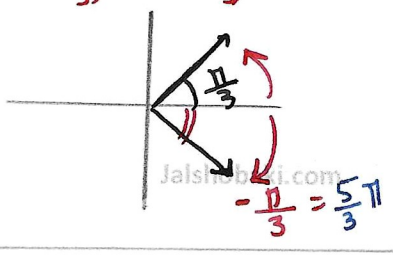
$x = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi$

أو $x = \frac{5}{3}\pi + 2n\pi$ ، حيث n أي عدد صحيح.

ملاحظة: دالة $\cos x$ دالة زوجية

$\cos(-x) = \cos x$

وبالتالي $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$



3) $\sin(2x) = 1$ ⇒ $\sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$

$\frac{2}{2}x = \frac{\pi}{2_2} + \frac{2n\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ ، $\forall n \in \mathbb{Z}$

حيث n هي أي عدد صحيح ....

لاحظ الزاوية $(2x)$ ولست (x) ⇐ إذن نقسم على (2)

4) $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ — ① $\frac{\pi}{4}$ ، ④ $\frac{7\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$

$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$

$x = -\frac{\pi}{4}$ أو $\left(\frac{7}{4}\pi\right) + 2n\pi$ ، حيث n أي عدد صحيح

5) $2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ — ① $\frac{\pi}{3}$ ، ② $\frac{2\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$

$x = \frac{2}{3}\pi + 2n\pi$ ، حيث n أي عدد صحيح

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
$= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x$
$= 1 - 2\sin^2 x$

6) $\sin x - \cos 2x = 0$

$\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$

$\sin x = \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ أو $\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$

$\sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$

7) $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$

$(\sin x - 1)(\sin x - 3) = 0$

$\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad ; \forall n \in Z$

$\sin x \neq 3$ مرفوض

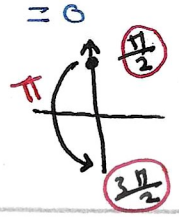
8) $\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$

$1 - \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\cos x(1 - \cos x) = 0$

1) $\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$



2) $1 - \cos x = 0$

$\cos x = 1$

$x = 0$
$x = 2\pi$
$\Rightarrow x = 2n\pi$

$; \forall n \in Z$



9) $\sin 2x - \cos x = 0 \quad , \quad [0, 360^\circ]$

$2\sin x \cos x - \cos x = 0$

$\cos x(2\sin x - 1) = 0$

1) $\cos x = 0$ ← $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$, $\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$

$\therefore x = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$
$x = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$

2) $2\sin x - 1 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$ ← $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$, $\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$

$\therefore x = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$
$x = \frac{5\pi}{6} = 150^\circ$

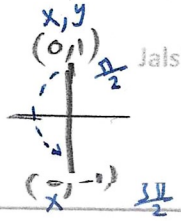
$x = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 270^\circ$

10) $\cos^2 x + \cos x = 0$

$\cos x(\cos x + 1) = 0$

1) $\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$



2) $\cos x + 1 = 0$

$\cos x = -1$

$x = \pi + 2n\pi \quad ; \forall n \in Z$



11) $\sin^2 x - \sin x = 0$

$\sin x(\sin x - 1) = 0$

1) $\sin x = 0$

$x = 0, \pi, 2\pi \Rightarrow x = n\pi$

2) $\sin x - 1 = 0$

$\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad ; \forall n \in Z$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

في الأسئلة التالية، حدّد ما إذا كانت الدالة دورية، وإذا كانت دورية، فجد الدورة (الأساسية الأصغر)؟

Determine whether the function is periodic, If it is periodic, find the smallest (fundamental) period?

1) $f(x) = cos2x + 3sin\,\pi x$

دورة $cos2x$ مقدارها $\frac{2\pi}{2} = \pi$ ، دورة $3sin\,\pi x$ مقدارها $\frac{2\pi}{\pi} = 2$

لو أخذنا مضاعفات كل دورة ⇐

$\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots$

$2, 4, 6, 8, \ldots$

لا يوجد مضاعفات مشتركة بين الدورتان ⇐ إذن ليست دورية .

(LCM)

2) $f(x) = sinx - cos\sqrt{2}x$

الدورة $= 2\pi$ ، $\frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi$

مضاعفات المشترك الأصغر (LCM)

$2\pi, 4\pi, \ldots$

$\sqrt{2}\pi, 2\sqrt{2}\pi, \ldots$

لا يوجد مضاعفات مشتركة ⇐ ليست دورية .

3) $f(x) = sin2x - cos5x$

$\frac{2\pi}{2} = \pi$ ، $\frac{2\pi}{5}$

$\pi, 2\pi$

$\frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi, \frac{8}{5}\pi, \frac{10}{5}\pi = 2\pi$

المضاعف المشترك الأصغر هو 2π ، إذن دورية والدورة الأساسية 2π .

4) $f(x) = cos3x - sin7x$

الدورة $\frac{2\pi}{3}$ ، $\frac{2}{7}\pi$

$\frac{2}{7}\pi, \frac{4}{7}\pi, \ldots, \frac{14}{7}\pi = 2\pi$

$\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{6}{3}\pi = 2\pi$

دورية ودورتها الأساسية 2π .

في الأسئلة التالية، استخدم مدى θ ، لتحديد قيمة الدالة المشار إليها؟

Use the range for θ to determine the indicated function value?

1) $sin\theta = \frac{1}{3}$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, جد $cos\theta$?

أي في الربع الأول

1)

$Cos^2\theta = 1 - sin^2\theta$

$Cos^2\theta = 1 - (\frac{1}{3})^2 = \frac{8}{9}$

$Cos\theta = \pm\frac{\sqrt{8}}{3}$

$Cos\theta = \frac{\sqrt{8}}{3}$ (لأن الربع الأول θ موجب)

$Cos\theta = 0.9428$

2) نستطيع الحل عن طريق المثلث



$Cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

2) $\sin\theta = \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$, جد $\tan\theta$? في الربع الثاني

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{0.5}{?}$

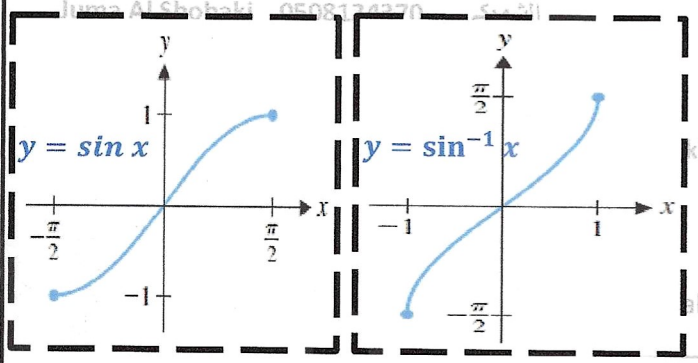
$\cos^2\theta = 1 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$

$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (في الربع الثاني $\cos\theta$ سالب)

$\Rightarrow \therefore \tan\theta = \frac{0.5}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Inverse Trigonometric Functions الدوال المثلثية المعكوسة



➢ لإيجاد معكوس الدوال المثلثية، وجب أولاً تقييد المجال للدوال بحيث تصبح واحد لواحد أولاً لنستطيع إيجاد معكوس لها على هذه الفترة

- To find the inverse of the trigonometric functions, the domain of the functions must first be restricted so that it becomes one-to-one first so that we can find its inverse over this interval

1 معكوس دالة $y = \sin x$

Note that if we restrict the domain $\frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ it is a one-to-one function, and its range is $[-1, 1] \Rightarrow -1 \le y \le 1$

لاحظ إذا قيّدنا المجال $\frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ تكون دالة واحد لواحد، ويكون مداها $-1 \le y \le 1 \Leftarrow [-1, 1]$

$y = \sin x$

$\downarrow$

$x = \sin y \Rightarrow \sin^{-1}(x) = \sin^{-1} \sin y$

$y = \sin^{-1}(x) \Rightarrow \forall\, x \in [-1, 1]$ لكل x ، $-1 \le x \le 1$

وعليه فإنّ $\sin(\sin^{-1} x) = x$, $\forall\, x \in [-1, 1]$

$\sin^{-1}(\sin x) = x$, $\forall\, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\sin^{-1} x$ بدلاً من $\arcsin x$ يطلق لفظ وتعبير



في الأسئلة التالية أوجد كل ممّا يلي؟

1) $\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}$ يمكن إيجادها بآلة الحاسبة مباشرة.

2) $\sin\left(\sin^{-1}(2)\right) =$ undefined غير معرّفة $(x \notin [-1, 1])$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

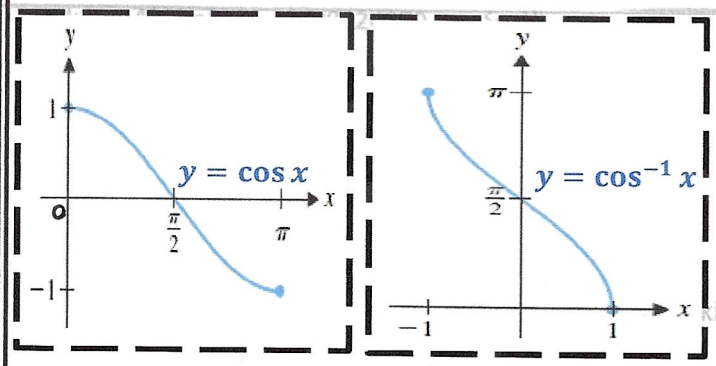
3) $sin^{-1}(-1) =$ دالة فردية $-\sin^{-1}(1) = -\frac{\pi}{2}$ وبآستخدام الآلة مباشرة .

4) $sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) =$ $-\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ ونحل بالآلة مباشرة

5) $sin^{-1}\left(sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$ $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ ونحل بالحاسبة مباشرة

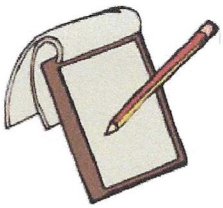
A) $\frac{2\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) غير معرّفة D) $\frac{\pi}{6}$

2 معكوس دالة $y = \cos x$



تكون دالة $y = cosx$ واحد لواحد في تقييد المجال من $[\,0\,,\pi\,]$

The function $y = cosx$ is one-to-one in the domain restriction from $[\,0\,,\pi\,]$



$y = cosx$

$\downarrow$

$x = cosy$

بالضرب في $cos^{-1} \Rightarrow cos^{-1}(x = cosy) \Rightarrow y = \cos^{-1} x$, $x \in [\,-1,1\,]$ مجاله هو مدى الدالة الرئيسية

وعليه فإنّ $cos(\cos^{-1} x) = x$ ، لكل قيم $x \in [\,-1,1\,]$

$\cos^{-1}(cosx) = x$ ، لكل قيم $x \in [\,0,\pi\,]$

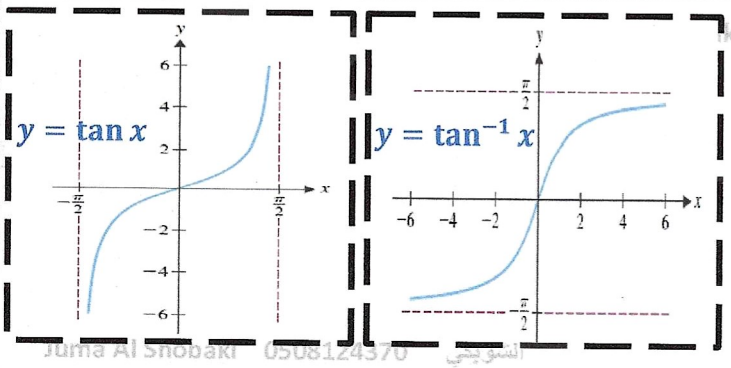
في الأسئلة التالية أوجد كل ممّا يلي؟

1) $\cos^{-1}(0) =$ $\frac{\pi}{2}$

2) $\cos^{-1}(1) =$ 0

بآستخدام الحاسبة مباشرة

3 معكوس دالة $y = \tan x$



نقيّد المجال $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ، ويكون المدى $(-\infty, \infty)$

$y = \tan x$

$\downarrow$

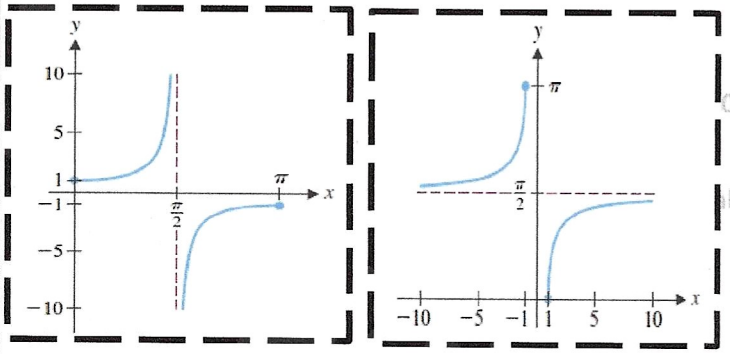
$(x = tany) \overset{\text{إذا وفقط}}{\Longleftrightarrow} -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

بالضرب في $tan^{-1} \Rightarrow tan^{-1}(x = tany)$

$\Rightarrow y = tan^{-1}x, \forall\, x \in (-\infty, \infty)$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

4 معكوس القاطع $y = \sec x$



نقيّد المجال ليكون دالة واحد لواحد

المجال: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

We restrict the domain to be a one-to-one function

Domain: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$y = \sec x$

↓

$x = \sec y \iff y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ إذا وفقط

المدى: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ ، وهو مجال الدالة العكسية $y = sec^{-1}x$

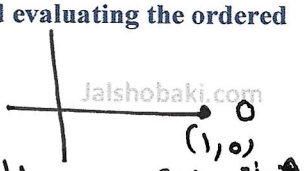
Range: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$**, which is the domain of the inverse function** $y = sec^{-1}x$

sec^{-1} بالضرب في $\Rightarrow sec^{-1}(x = secy) \Rightarrow y = sec^{-1}x, \forall\, x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

في الأسئلة التالية جد قيمة الدالة المعكوسة عبر رسم دائرة وحدة وتحديد الزاوية الصحيحة، وإيجاد قيمة الزوج المرتب على الدائرة؟

Evaluate the inverse function by sketching a unit circle, locating the correct angle and evaluating the ordered pair on the circle?

1) $tan^{-1}(0) = 0 \Rightarrow \theta = 0$



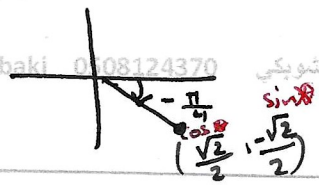
التفسير $\tan(\theta) = 0$

$\tan^{-1}(0) = 0$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{0}{1} = 0$

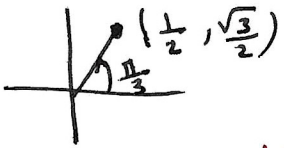
2) $tan^{-1}(-1) = -\tan^{-1}(1) = -\frac{\pi}{4}$ دالة فردية

$\theta = -\frac{\pi}{4}$



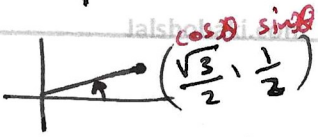
3) $sec^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\theta = \frac{\pi}{3}$



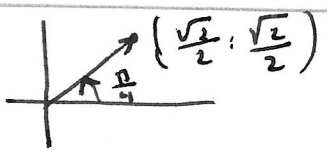
4) $csc^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\theta = \frac{\pi}{6}$

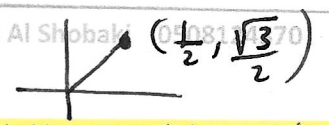


5) $cot^{-1}(1) =$

$\tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

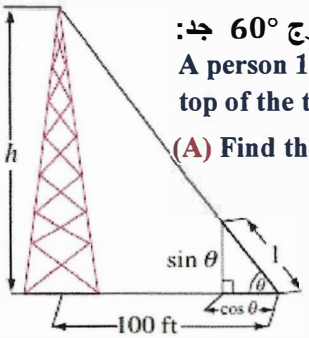


6) $tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$



Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Finding the Height of a Tower إيجاد ارتفاع برج



س1) يقف شخص على بعد $100\ ft$ من قاعدة برج ويكون قياس الزاوية عنده من الأرض إلى قمة البرج $60°$ جد:

A person 100 feet from the base of a tower measures an angle of 60° from the ground to the top of the tower. Find:

(A) Find the height of the tower ? A) ارتفاع البرج؟

$60° \xrightarrow{\text{راديان}} \frac{\pi}{3}$

$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{h}{100}$ (المقابل / المجاور) $\Rightarrow h = 100 \tan\frac{\pi}{3}$

$h = 173.2\ ft$

(B) What angle is measured if the person is 200 feet from the base? B) ما قياس الزاوية لو كان الشخص على بعد $200\ ft$ من القاعدة؟

$\tan\theta = \frac{h}{200} \xrightarrow{\tan^{-1}} \theta = \tan^{-1}\left(\frac{h}{200}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{173.2}{200}\right)$

$\theta = 0.713$ radian

$\theta = 41°$

تبسيط التعبيرات التي تحتوي على دوال مثلثية معكوسة

Simplifying Expressions Containing Inverse Trigonometric Functions

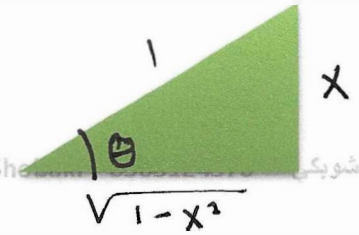
Use a triangle to simplify each expression? في الأسئلة التالية، استخدم مثلثاً لتحويل كل تعبير إلى أبسط صورة؟

1) $\cos(\sin^{-1}x)$

$\theta = \sin^{-1}x$

$\theta = \frac{x}{1}$ (مقابل / وتر)

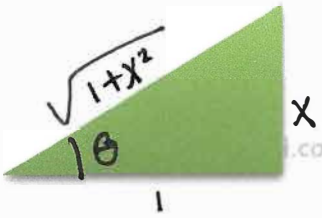
$\cos(\theta) = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \sqrt{1-x^2}$



2) $\cos(\tan^{-1}x)$

$\theta = \frac{x}{1}$ (مقابل / مجاور)

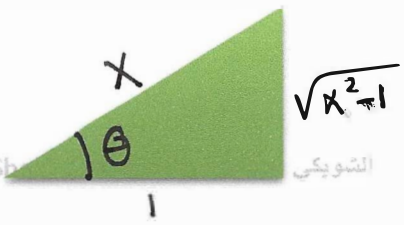
$\cos(\theta) = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$



3) $\tan(\sec^{-1}x)$

$\theta = \frac{x}{1} = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاور}}$

$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \sqrt{x^2-1}$

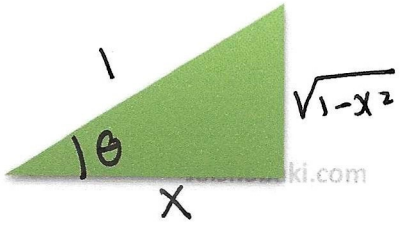


Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

4) $\cot(\cos^{-1}x)$

$\theta = \cos^{-1}x$ ← مجاور / وتر

$\cot\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

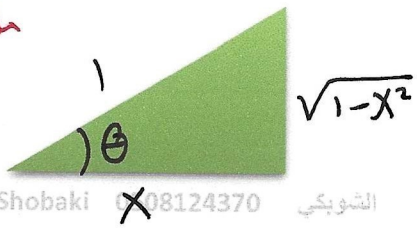


5) $\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

ملاحظة: يمكن الحل بالآلة مباشرة

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ← مجاور / وتر $= \frac{x}{1}$

$\sin(\theta) = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

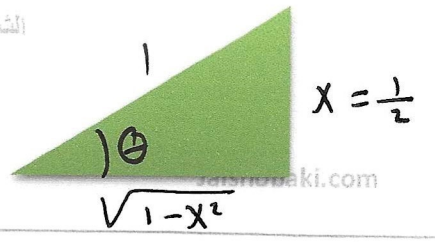


6) $\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

بالآلة مباشرة

$\theta = \frac{x}{1} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$

$\cos\theta = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



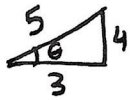
7) $\tan\left(\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$

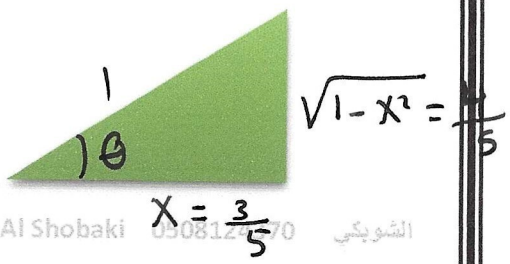
بالآلة مباشرة

$\theta = \frac{x}{1} = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$

$\tan\theta = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

أو





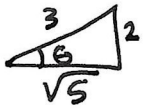
8) $\csc\left(\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)$

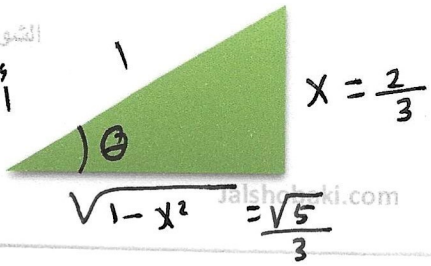
بالآلة مباشرة

$\theta = \frac{x}{1} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$

$\csc\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابل}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

أو



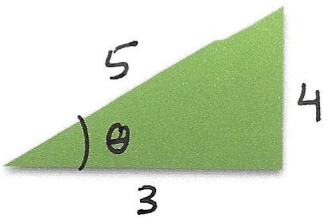


9) $\cos\left(2\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)$

$\Rightarrow \cos 2\theta$

$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}$



ونحل بالحاسبة مباشرة كما ذكرنا سابقاً.

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Exponential and Logarithmic Functions الدوال الأسية واللوغاريتمية (1-4)

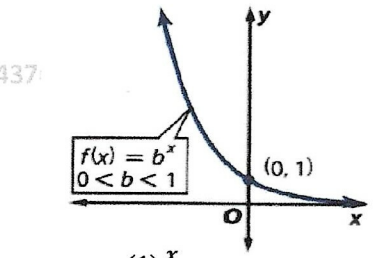
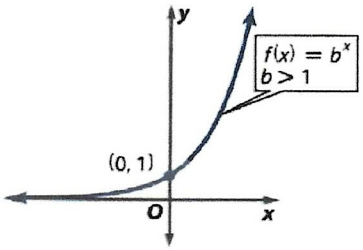
➢ **الدوال الأسية:** نوع من الدوال غير الجبرية وتقسم إلى نوعان طبقاً لنوع الأساس. وهي معرّفة ومتصلة على مجال الأعداد الحقيقية R

- **Exponential Functions:** A type of non-algebraic functions, which are divided into two types according to base type. They are defined and continuous for real numbers R.

1 الدوال الأسية العادية: أساسها العدد b ، $f(x)=b^x$

Exponential Functions: Base b , $f(x)=b^x$

حيث $x\in R$, $b\neq 1$, $b>0$ ، وبما أنّ $b>0$, $b\neq 1$ فلدينا منحنيان

$f(x)=b^x$, $0<b<1$	$f(x)=b^x$, $b>1$
التضاؤل الأسي $(Decay)$	النمو الأسي $(Growth)$
	
مثال $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$	مثال $f(x)=2^x$

2 الدوال الأسية الطبيعية: $f(x)=e^x$

Natural Exponential Functions: $f(x)=e^x$

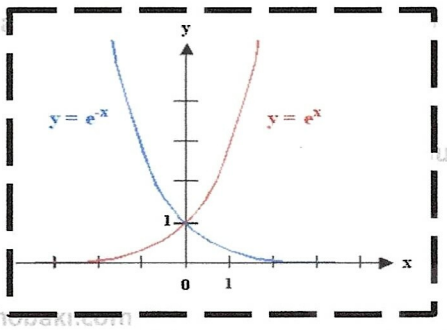
حيث $e\cong 2.71828$ (العدد النيبيري)

تعرّف e بالعلاقة:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a$$

Ex) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=e^2$

1) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x}\right)^x=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$



✓ **قانون تغيير الأساس للدوال الأسية** $b^x=e^{x\ln b}$ ، أي نعيد كتابة أي دالة أسية لها أساس $b>0$ ، كدالة أسية لها أساس e

- **The Change of Base Rule for Exponential Functions** $b^x=e^{x\ln b}$. **We rewrite any exponential function with a base $b>0$, as an exponential function with a base e**

Rewrite Exponentials as Exponentials with Base e ? س) أعد صياغة الدوال الأسية التالية كدوال أسية لها أساس e ؟

A) $3^x=e^{\ln(3)^x}\Rightarrow e^{x\ln 3}$

B) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)^x}\Rightarrow e^{x\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$ ويمكن أيضاً على الصورة $e^{x\ln(3)^{-1}}=e^{-x\ln 3}$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Exponential Functions' Properties and Rules — خواص الدوال الأسية وقوانينها

Exponential Functions' Properties — خواص الدوال الأسية

- مجالها هو R ، أي أنّها معرّفة لكل عدد حقيقي
* The domain is R , It is defined for every real number
- مداها هو $(0, \infty)$ ، أي لا تقبل كل القيم الحقيقية، ولكن $b^x > 0$
* The range is $(0, \infty)$, not all real values are accepted, but $b^x > 0$
- كل دالة أسية تمثّل دالة واحد لواحد، ولذلك فلها معكوس
* Every exponential function is a one-to-one function, so it has an inverse

Exponential Functions' Rules — قوانين الدوال الأسية

- إذا كان كل من x و y عدداً حقيقياً $\neq 0$ ، وكل من m, n عدداً حقيقياً، فإنّ:

1) $(x^n)^m = x^{mn}$
2) $(xy)^n = x^n y^n$
3) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$
4) $x^n . x^m = x^{m+n}$
5) $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$
6) $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$, $x \neq 0$
7) $x^0 = 1$

Fractional Exponential to Radicals and Vice Versa — الأسس الكسرية إلى جذور والعكس

- لأي أعداد صحيحة m, n و $(n \geq 2)$ فإنّ: $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$
✓ مثال) $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{x^1}$ ، $x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2} = \left(\sqrt[3]{x^1}\right)^2$

Radicals' Rules — بعض قوانين الجذور

1) $\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$
2) $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$
3) $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x \text{ , } n \text{ فردي} & \sqrt[3]{x^3} = x \\ |x| \text{ , } n \text{ زوجي} & \sqrt[2]{x^2} = |x| \Rightarrow x, -x \end{cases}$

Converting Expressions to Exponential Form — تحويل التعبيرات إلى شكل أسي

Convert expression into exponential form?

س) حوّل التعبير إلى شكل أسي؟

$(2^x . 2^{3+x})^2 = (2^{x+3+x})^2 = (2^{2x+3})^2$

$= 2^{2(2x+3)} = 2^{4x+6}$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

إيجاد دالة أسية على الصورة $f(x)=ae^{bx}$ حيث $a\neq 0\ ,\ b>0\ ,\ b\neq 1$

Finding an Exponential Function of the Form $f(x)=ae^{bx}$ where $a\neq 0\ ,\ b>0\ ,\ b\neq 1$

س1) جد دالة أسية بالصورة $f(x)=ae^{bx}$ باستخدام القيم المعطاة؟ $f(0)=2\ ,\ f(2)=6$ 47

Find a function of the form $f(x)=ae^{bx}$ with the given function values? $f(0)=2\ ,\ f(2)=6$

$y=ae^{bx}$

$2=ae^{0}\Rightarrow \boxed{a=2}$ ⇐ $f(0)=2$ ⇐ تحقق الشرط الأول

$6=2e^{2b}\Rightarrow 3=e^{2b}$ ⇐ $f(2)=6$ ⇐ نتحقق الشرط الثاني

بأخذ ln للطرفين $\Rightarrow \ln e^{2b}=\ln 3\Rightarrow 2b=\ln(3)\Rightarrow \boxed{b=\frac{\ln 3}{2}}$

$\therefore$ المعادلة $\Rightarrow y=2e^{\left(\frac{\ln 3}{2}\right)x}$ أو $\Rightarrow y=2e^{\ln 3\left(\frac{x}{2}\right)}$ أو $\Rightarrow y=2(3)^{\frac{x}{2}}$

س2) جد الدالة الأسية بالصورة $y=ae^{bx}$ التي تمر بالنقطتين $(2,2)$ و $(0,4)$ ؟

Find the function of the form $f(x)=ae^{bx}$ that passes through the points $(2,2)$ and $(0,4)$? 2020

$y=ae^{bx}$

1) $f(0)=4\Rightarrow 4=ae^{0}\Rightarrow \boxed{a=4}\Rightarrow y=4e^{bx}$

2) $f(2)=2\Rightarrow 2=4e^{2b}\Rightarrow \frac{1}{2}=e^{2b}\xrightarrow{\ln}\ln e^{2b}=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$2b=\ln\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow b=\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$ أو $\frac{-\ln 2}{2}$

المعادلة $\Rightarrow y=4e^{\left(\frac{-\ln 2}{2}\right)x}$

س3) أكتب دالة أسية بالصورة $f(x)=ae^{bx}$ باستخدام القيم $(1,2)\ ,\ (2,6)$ ؟

Write an exponential function of the form $f(x)=ae^{bx}$ using the values $(2,6)\ ,\ (1,2)$? 2018

$y=ae^{bx}$

1) $f(2)=6\Rightarrow 6=ae^{2b}$ .... (1)

2) $f(1)=2\Rightarrow 2=ae^{b}$ .... (2)

لاحظ هنا لا توجد نقطة معطاة عندما $x=0$!!!

3) نقسم المعادلة (1) على المعادلة (2)

$\frac{6}{2}=\frac{ae^{2b}}{ae^{b}}\Rightarrow 3=e^{b}\xrightarrow{\ln}\boxed{b=\ln 3}$

4) نعوض قيمة b لأحد المعادلتين $\Rightarrow 2=ae^{\ln 3}\Rightarrow 3a=2\Rightarrow \boxed{a=\frac{2}{3}}$

$\therefore$ المعادلة $\Rightarrow y=\frac{2}{3}e^{(\ln 3)x}$ وهو المطلوب.

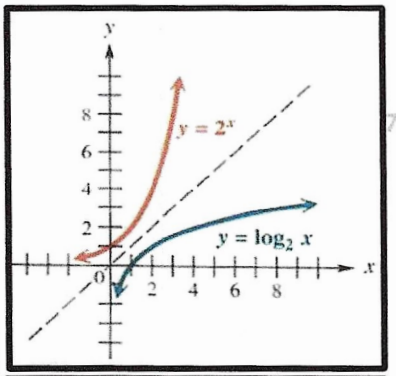
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Logarithmic Functions الدوال اللوغاريتمية

➢ **الدوال اللوغاريتمية:** هي الدوال العكسية للدوال الأسية $y = b^x$ ، $y = \log_b(x) \Leftrightarrow x = b^y$
حيث $\forall x \in (0,\infty)$ مجالها ، $\forall y \in R$ مداها ، حيث b هي الأساس

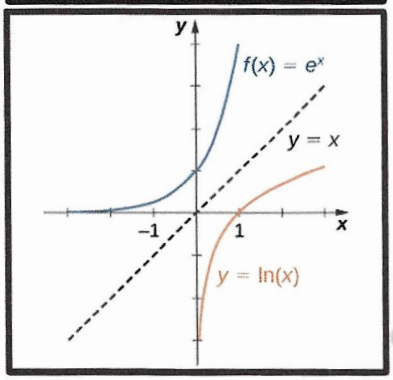
- **Logarithmic Functions:** They are the inverse functions of exponential functions $y = b^x$
$y = \log_b(x) \Leftrightarrow x = b^y$, where *Domain* $\forall x \in (0,\infty)$, *Range* $\forall y \in R$
Where b is the base

It is divided into two types according to the base type **وهي تقسم إلى نوعين طبقاً لنوع الأساس**



1) الدوال اللوغاريتمية العادية وتكتب على الصورة $y = \log_b x$ ، حيث أساسها $b = 10$
وتكتب عادةً $y = \log x$ بدون وضع الأساس ، وفي حال كان الأساس عدد غير ذلك فيجب وضع الأساس. على سبيل المثال $\log_2 x$ كما هو موضح في الشكل البياني.
وهي معكوس للدالة الأسية $y = b^x$

1) Logarithmic Functions are written in the form $y = \log_b x$, where its base is $b = 10$, and usually written $y = \log x$ without setting the base, and if the base is a number other than that, the base must be set. For example $\log_2 x$ as shown in the diagram. It is the inverse of the exponential function $y = b^x$



2) الدوال اللوغاريتمية الطبيعية وتكتب على الصورة $y = \ln x$ ، حيث أساسها دائماً هو العدد النيبيري e $(e \cong 2.71828)$
وهي معكوس للدالة الأسية $y = e^x$

2) Natural Logarithmic Functions are written in the form $y = \ln x$, where its base is always the Niberian number e $(e \cong 2.71828)$
It is the inverse of the exponential function $y = e^x$

خواص اللوغاريتمات: حيث $x, y > 0$ ، $b > 0$ ، $b \neq 1$

1) $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$
2) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
3) $\log_b(x)^y = y \log_b x$
4) $\log_b 1 = 0$
5) $\log_b b^x = x$
6) $b^{\log_b x} = x$
7) $\log_b x = y \Leftrightarrow x = b^y$
8) $\ln e = 1$
9) $\ln e^x = x$
10) $\ln_e x = y \Leftrightarrow x = e^y$
11) $e^{\ln x} = x$

12) $(-\infty, \infty) \Leftarrow R$ ومداها ، $x > 0$ مجالها $(0, \infty)$ ، أي أنّها ليست معرّفة إلا للأعداد الموجبة

Its domain is $(0, \infty)$. Logarithms defined only for positive numbers $x > 0$, and its range is R $(-\infty, \infty)$

13) قاعدة تغيير الأساس للدوال اللوغاريتمية $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$ ، حيث $x > 0$ ، $b > 0$ ، $b \neq 1$

The Change of Base Rule for Logarithmic Functions $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$, where $x > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Use the definition of logarithm to determine the value? **س1) استخدم تعريف اللوغاريتم لتحديد القيمة؟**

A) $\log_3 9 = 2$ B) $\log_4 \frac{1}{16} = -2$ C) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$ D) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$

Rewrite the Expression as a single logarithm? **س2) أكتب بصيغة لوغاريتم واحد؟**

A) $2\ln 4 - \ln 3 = \ln(4)^2 - \ln(3) = \ln(16) - \ln(3) = \ln\left(\frac{16}{3}\right)$

B) $\ln\frac{3}{4} + 4\ln 2 = \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln 2^4 = \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln(16) = \ln\left(\frac{3}{4}\cdot 16\right) = \ln(12)$

Simplify the expression using the rules of logarithms? **س3) بسّط التعبير باستخدام قواعد اللوغاريتمات؟**

$\ln\left(\frac{x^2y^6}{z^3}\right) = \ln x^2 + \ln y^6 - \ln z^3 = 2\ln x + 6\ln y - 3\ln z$

Solving Exponential and Logarithmic Equations حل المعادلات الأسية واللوغاريتمية

Solve the given equations? **في الأسئلة التالية حل المعادلات؟**

1) $e^{2x} = 2 \xrightarrow{\ln} \ln e^{2x} = \ln 2$

$2x = \ln(2) \Rightarrow x = \frac{\ln(2)}{2} = \frac{1}{2}\ln(2)$

2) $e^x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow e^x \neq 0$

$\therefore x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

3) $xe^{-2x} + 2e^{-2x} = 0$

$e^{-2x}(x+2) = 0 \quad , \quad e^{-2x} \neq 0$

$\therefore x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

4) $\frac{4\ln x}{4} = \frac{-8}{4} \Rightarrow \ln_e x = -2 \Rightarrow x = e^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{e^2}$

بشرط $x > 0$

5) $e^{2\ln x} = 4 \Rightarrow e^{\ln x^2} = 4$

بشرط $x > 0$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$\therefore \boxed{x = 2}$

$(x \neq -2)$ لأن مجال $\ln x$ هو $x > 0$

6) $\ln(x+6) = 4$

$\Rightarrow e^{\ln(x+6)} = e^4 \Rightarrow x + 6 = e^4 \Rightarrow \boxed{x = e^4 - 6}$

للعراقات

لا تنسى أنّ:

1) $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

حيث: x, y عددان حقيقيان، a عدد حقيقي موجب $a \neq 1$

2) $e^x \cdot e^x = e^{2x}$

3) $e^x \neq 0$

4) $\ln x = \ln y \Rightarrow x = y$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

7) $\ln x + \ln(x-1) = \ln 2$ — $x>0$, $x>1$

خاصية الجمع ⟹ $\ln(x(x-1)) = \ln(2)$

$x(x-1) = 2$

$x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$

$(x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -1$ (مرفوضة) ، $x = 2$

$\therefore \boxed{x = 2}$

8) $11e^x - 51 - 20e^{-x} = 0$

بالضرب في e^x ⟹ $11e^{2x} - 51e^x - 20 = 0$

$(11e^x + 4)(e^x - 5) = 0 \Rightarrow e^x = 5 \Rightarrow \boxed{x = \ln 5}$

$11e^x + 4 = 0 \Rightarrow e^x = -\frac{4}{11}$ مرفوضة طبعاً

$\therefore \boxed{x = \ln 5}$

Hyperbolic Functions الدوال الزائدية

➢ الدوال الزائدية: وهي بعض من التراكيب الخاصة للدوال الأسية

- **Hyperbolic Functions:** These are some of the special combinations of exponential functions

  - **Hyperbolic Sine Functions, denoted by** $\sinh x$ — $\sinh x$ ويرمز له بـ ، دوال الجيب الزائدي
  - **Hyperbolic Cosine Functions, denoted by** $\cosh x$ — $\cosh x$ ويرمز له بـ ، جيب التمام الزائدي

وقد وردت معنا في الدرس الأوّل من هذه الوحدة (يرجى مراجعة صفحة 5 (1 − 1))

✓ $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, مجالها ومداها R Domain and Range are R

✓ $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, مجالها R و مداها $[1,\infty)$ Domain is R , Range is $[1,\infty)$

✓ $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, مجالها R و مداها $(-1,1)$ Domain is R , Range is $(-1,1)$

✓ $\cosh(-x) = \cosh(x)$, even function دالة زوجية $\sinh(-x) = -\sinh x$, odd function دالة فردية

✓ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Find the value of each of the following? س1) جد قيمة كل ممّا يلي؟

A) $\sinh(0) = 0$

B) $\sinh(1) = 1.18$

C) $\sinh(-1) = -\sinh(1) = -1.18$

D) $\cosh(0) = 1$

E) $\cosh(1) = 1.54$

ملاحظة: تحل بالآلة الحاسبة بالضغط على (HYP) ومن ثم اختيار المطلوب وإيجاد النتيجة

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

52

Show that $cosh^2x - sinh^2x = 1$ for all x ? **س2) بيّن أنّ $cosh^2x - sinh^2x = 1$ لكل x ؟**

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\Rightarrow \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$

$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4}$

$= \frac{4}{4} = 1$ وهو المطلوب.

53

Find all solutions of $\sinh(x^2 - 1) = 0$? **س3) جد كل حلول $\sinh(x^2 - 1) = 0$ ؟**

نعلم أن $\sinh(0) = 0$ ←

إذن $x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

ويمكن إيجادها بالآلة أيضاً

$\sinh^{-1}(0) = 0$

54

Find all solutions of $\cosh(3x + 2) = 0$? **س4) جد كل حلول $\cosh(3x + 2) = 0$ ؟**

نعلم أن $\cosh(x) \neq 0$ ←

لأن مدى دالة $\cosh x$ هو $\cosh(x) \geq 1$ لكل x

وبالتالي ما من حلول.

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Transformations of Functions تحويلات الدوال (1-5)

➢ التحويلات الهندسية: 1) قياسية (لا تغيّر من الشكل) 2) غير قياسية (لا تحافظ على الشكل)

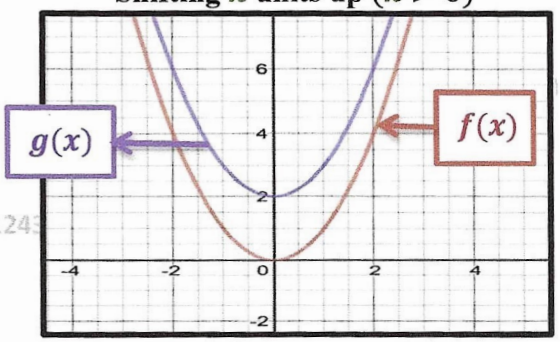
Geometric Transformations: 1) Standard (does not change shape) 2) Non-Standard (does not maintain shape)

1 التحويلات القياسية: أولاً: الإزاحة الأفقية والرأسية Vertical and Horizontal Translation

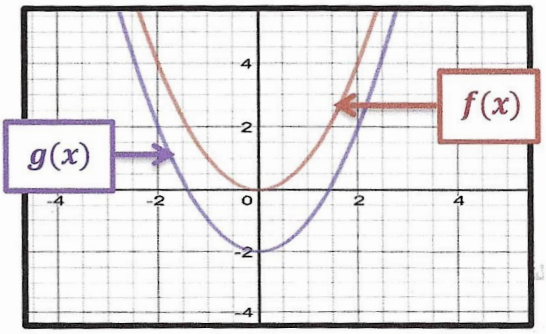
إزاحة رأسية (عمودية) (V. Trans)

$g(x) = f(x) + k$ إزاحة لأعلى بمقدار k

Shifting k units up $(k > 0)$



$g(x) = f(x) - k$ إزاحة لأسفل بمقدار k

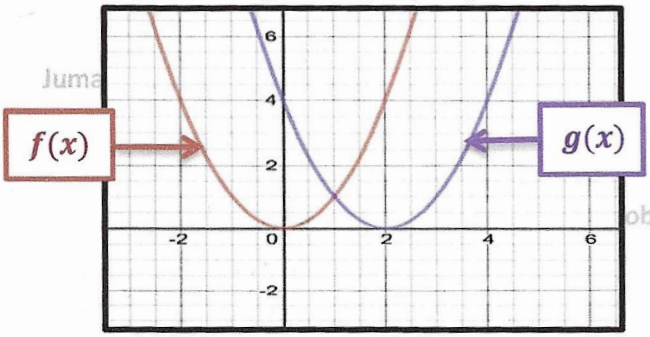


Shifting k units down $(k < 0)$

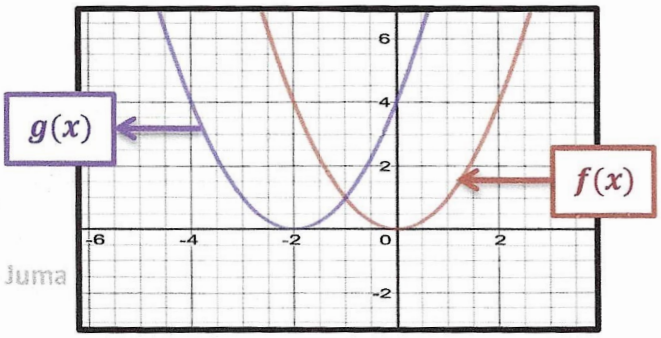
إزاحة أفقية (H. Trans)

$g(x) = f(x - h)$ إزاحة بمقدار (h) لليمين

Shifting h units right $(h < 0)$



$g(x) = f(x + h)$ إزاحة لليسار بمقدار (h)



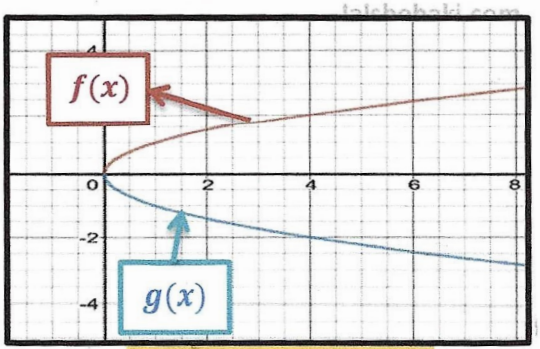
Shifting h units left $(h > 0)$

ثانياً: الانعكاس Reflection

➢ الانعكاس: صورة معكوسة للرسم البياني نسبة إلى خط معيّن

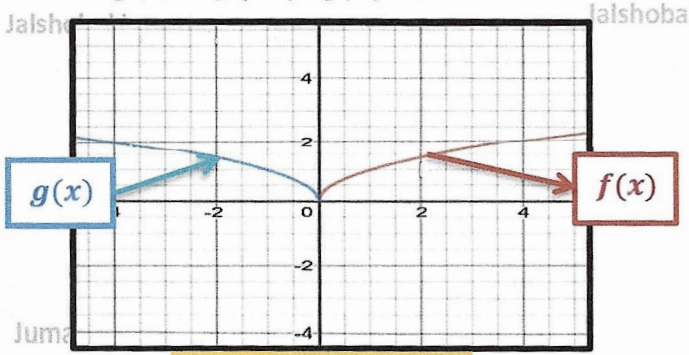
Reflection: A mirror image of a graph relative to a line

$g(x) = -f(x)$ حول المحور الأفقي (x)



Reflection in x-axis

$g(x) = f(-x)$ حول المحور الرأسي (y)



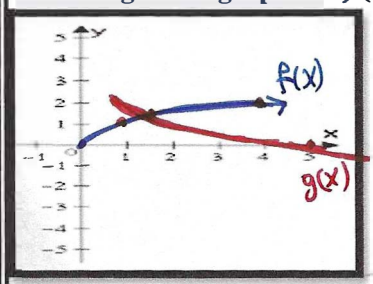
Reflection in y-axis

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س1) بالاعتماد على الرسم البياني لـ $f(x)=\sqrt{x}$ ، صف التحويلات الهندسية التي تمّت للحصول على دالة $g(x)$ ؟

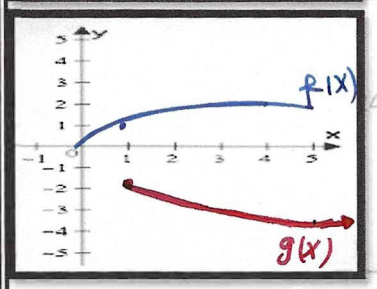
Referring to the graph of $f(x)=\sqrt{x}$, describe the geometric transformations made to obtain the function $g(x)$?

وارسم كلاً من $f(x)$ و $g(x)$ ؟



1) $g(x)=-\sqrt{x-1}+2$

① انعكاس على محور (X) .
② إزاحة لليمين وحدة واحدة .
③ إزاحة لأعلى وحدتان .



2) $g(x)=-(\sqrt{x-1}+2)$

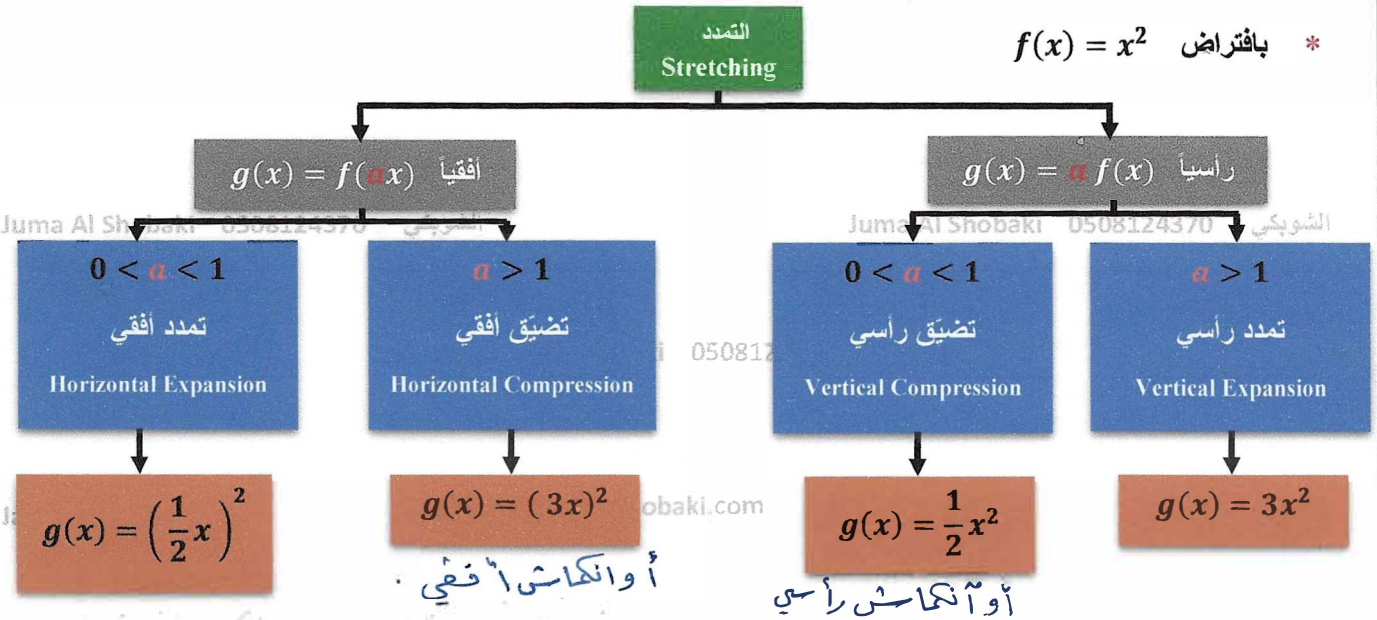
① إزاحة لليمين وحدة واحدة .
② إزاحة لأعلى وحدتان .
③ انعكاس على محور (X) .

2 التحويلات غير القياسية Non-Standard Transformations

- التمدد: رأسياً (مقياس رأسي) و أفقياً (مقياس أفقي)

✓ **Stretching: Vertically (Vertical Scale) and Horizontally (Horizontal Scale)**

* بافتراض $f(x)=x^2$



- بمعنى إذا كانت $a>1$ ، فهي إمّا تمدد رأسي أو تضيّق أفقي
- وإذا كانت $0<a<1$ ، فهي إمّا تضيّق رأسي أو تمدد أفقي

✓ **If $a>1$, It is either a vertical expansion or a horizontal compression**

✓ **If $0<a<1$, It is either a vertical compression or a horizontal expansion**

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س1) حدّد الدالة الرئيسية $f(x)$ للدالة $g(x)$ وصف علاقة الرسم البياني لكل دالة $g(x)$ و $f(x)$ وارسم الدالتان؟

Determine the original function $f(x)$ of the function $g(x)$, describe the graph of each function $g(x)$ and $f(x)$ and graph the two functions?

$g(x) = \frac{5}{x} + 3$

← الدالة الرئيسية $f(x) = \frac{1}{x}$

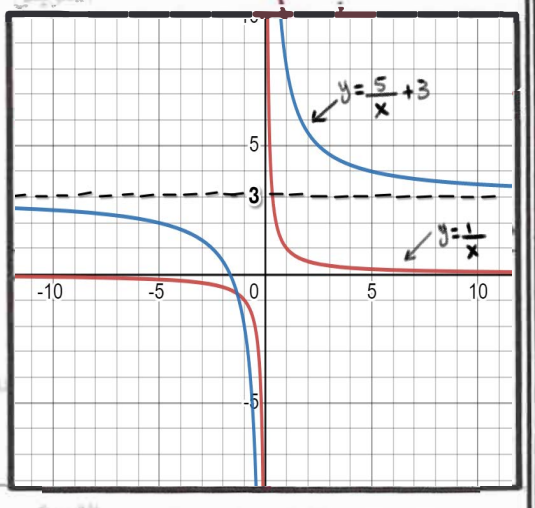
والتحويلات التي تمت للحصول على $g(x)$ هي :

$g(x) = 5\left(\frac{1}{x}\right) + 3$ ↑

توسع رأسي بمعدل 5 أي $a > 1$

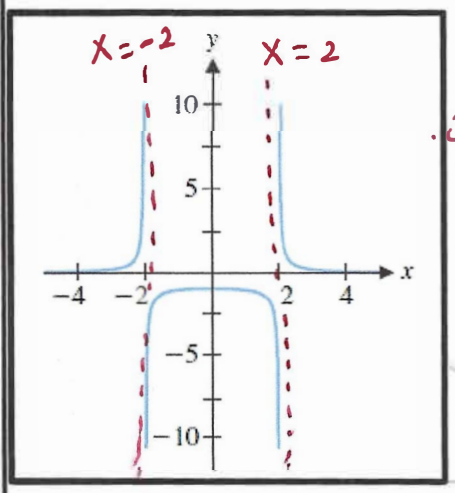
① أو ضرب بالمقياس الرأسي بـ 5

② إزاحة لأعلى 3 وحدات.



س2) استخدم التمثيل البياني ل $y = f(x)$ الموضّح في الشكل لتمثيل الدالة المشار إليها بيانياً؟

Use the graph of $y = f(x)$ given in the figure to graph the indicated function?



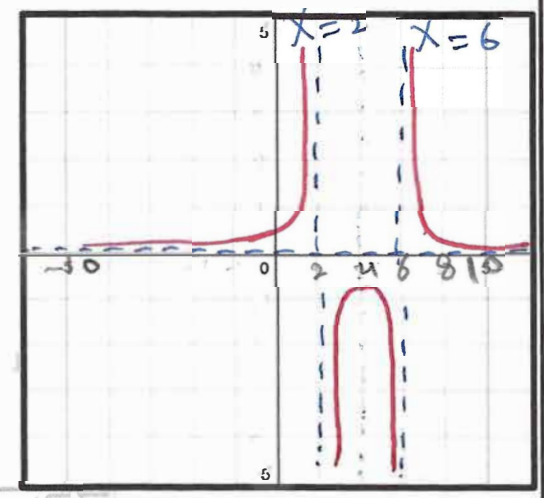
A) $f(x-4)$ →

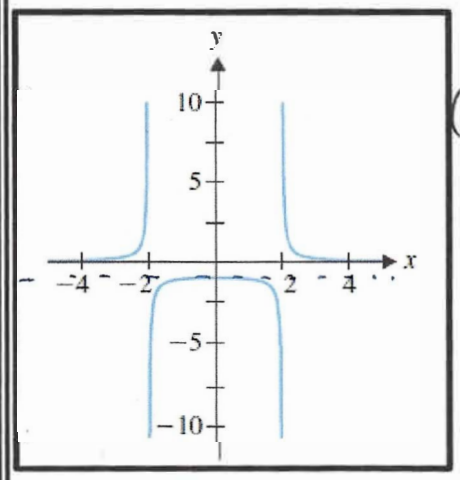
← إزاحة للمين 4 وحدات.

المقاربات الرأسية تصبح

$X = 2 + 4 = 6$

$X = -2 + 4 = 2$





B) $f(2x)$

← تضغط أفقي كعامل (2)

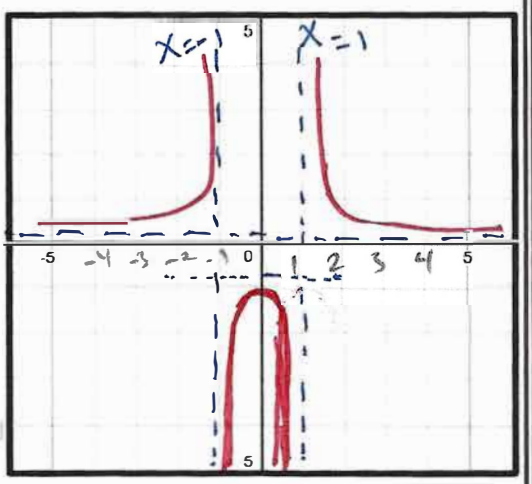
المقاربات الرأسية

$X = -2 \Rightarrow \frac{2X}{2} = \frac{-2}{2}$

تصبح $X = -1$

$X = 2 \Rightarrow 2X = 2$

تصبح $\Rightarrow X = 1$



Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س3) بإكمال المربع أذكر التحويلات التي تمّت على التمثيل البياني لـ $y = x^2$ إلى التمثيل البياني للدالة المعطاة؟

Complete the square and explain how to transform the graph of $y = x^2$ into the graph of the given function? 39

A) $f(x) = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 + 2x + (1)^2 - (1)^2 + 1$

$f(x) = (x+1)^2$ ← إزاحة لليسار وحدة واحدة

B) $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$f(x) = 3[x^2 - 2x] + 2 \Rightarrow 3[x^2 - 2x + (-1)^2 - (-1)^2] + 2 =$

$\Rightarrow 3[(x-1)^2 - 1] + 2 = 3(x-1)^2 - 3 + 2$

$= 3(x-1)^2 - 1$

تعدد 3 وحدات، إزاحة لليمين وحدة واحدة.
إزاحة لأسفل وحدة واحدة.

س4) قارن الدالة المعطاة بالتمثيل البياني لـ $y = x^2 - 1$ ؟

Compare the given function to the graph of $y = x^2 - 1$?

$f(x) = -2(x^2 - 1) = -2f(x)$ ($y = f(x)$)

① انعكاس على محور (X).
② تمدد رأسي معامل (2).

س5) قارن الدالة المعطاة بالتمثيل البياني لـ $y = (x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x$ ؟

Compare the given function to the graph of $y = (x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x$?

A) $f(x) = (-x)^2 - 2(-x)$

الدالة ⇐ $y = (x)^2 - 2(x)$

$f(-x) \Rightarrow (-x)^2 - 2(-x)$

إذن انعكاس على محور Y.

B) $f(x) = -(-x)^2 + 2(-x)$

انعكاس على محور X — انعكاس على محور Y

← انعكاس على محور X.
← انعكاس على محور Y.
أي دورة كاملة حول نقطة الأصل.

C) $f(x) = (-x+1)^2 + 2(-x+1)$

$f(x) = (x-1)^2 - 2(x-1)$ ← يضغط على محور f(x)

$(x)^2 - 2(x)$ ← إزاحة لليمين وحدة واحدة.

ملاحظة: $(-x+1)^2 = (x-1)^2$ لوجود القوة (2) ترسبقية.

D) $f(x) = (-3x)^2 - 2(-3x) - 3$

$\Leftrightarrow f(x) = (x)^2 - 2(x)$

انعكاس على محور Y — معامل (3) لأسفل (3) وحدات.
معامل لمتغير لا أفقي

س6) أذكر قاعدة تحويل التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ لـ $y = cf(x)$ بالنسبة لـ $c < 0$ ؟

State a rule for transforming the graph of $y = f(x)$ into the graph of $y = cf(x)$ for $c < 0$?

$y = f(x)$

$y = cf(x)$, $c < 0$ (−)

$y = -2f(x)$ ⇐ مثال توضيحي

(2) تمدد رأسي معامل
انعكاس على محور (X).

ما بعد انعكاس على محور (X).
ضرب المتغير الرأسي بمعامل $|c|$.

س7) أذكر قاعدة تحويل التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ لـ $y = f(cx)$ بالنسبة لـ $c < 0$ ؟

State a rule for transforming the graph of $y = f(x)$ into the graph of $y = f(cx)$ for $c < 0$?

$y = x$

$y = (-2x)$ مثال توضيحي

$y = f(x)$

$y = f(cx)$, $c < 0$ (−)

انعكاس على محور Y — انعكاس أفقي — $\frac{1}{2}(-2x) = -x$

ما بعد انعكاس على محور Y.
ضرب بمعامل المتغير الأفقي بـ $\frac{1}{|c|}$.

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

3 العمليّات على الدوال Combinations of Functions

- إذا كانت كل من f ، g دالتان لهما مجالان متقاطعان، فإذن وبعد دمج الدالتان سواء بالجمع، الطرح، الضرب، أو القسمة، تعرّفان كما يلي:

If f and g are functions with intersecting domains, then after combining the functions by addition, subtraction, multiplication, or division, they are defined as follows:

1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
2) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
3) $(f.g)(x) = f(x).g(x)$
4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$

- في كل دالة جديدة يتكوّن المجال من تلك القيم لـــ (x) المشتركة لمجالان f ، g

In each new function, the domain consists of those values of (x) common to two domains f, g

- ينحصر مجال دالة ناتج القسمة في استبعاد أي قيم تجعل المقام $= 0$

The quotient function domain is limited to exclude any values that make the denominator $= 0$

Find each function and its domain? جد كل دالة ومجالها؟

س1) بافتراض $f(x) = x^2 + 4x$ ، $g(x) = \sqrt{x+2}$ ، $h(x) = 3x - 5$

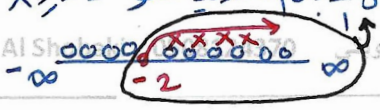
A) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f+g)(x) = x^2+4x+\sqrt{x+2}$

$f(x) = x^2+4x$ ، مجاله $R \Rightarrow (-\infty, \infty)$

$g(x) = \sqrt{x+2}$ ، مجاله ، $x \geq -2$

إذن المجال الجديد هو $x \geq -2$ ، $[-2, \infty)$



B) $\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{3x-5}{x^2+4x}$

المجال الجديد $\Rightarrow$ R / أصفار المقام

R / $\{-4, 0\}$

أصفار المقام:

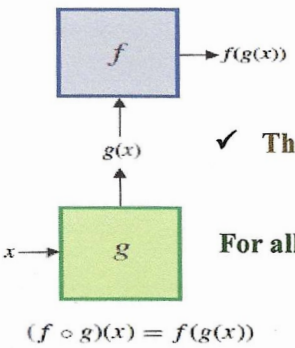
$x^2 + 4x$

$x(x+4) = 0$

$x = 0$

$x = -4$

4 تركيب الدوال Composition of Functions



- يحدّد تركيب الدوال f ، g المكتوب بالشكل $f \circ g$ عن طريق:

✓ The comosition of functions f and g, written $f \circ g$, is defined by:

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ لكل x ، حيث x هي مجال g و $g(x)$ هي مجال f ،

For all x, where x is the domain of g, and $g(x)$ is the domain of f, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

ملاحظة : $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

في الأسئلة التالية، أوجد التركيبات $f \circ g$ و $g \circ f$ ، وحدّد المجالات الخاصة بها؟

Find the composition $f \circ g$ and $g \circ f$ and identify their respective domain?

1) $f(x) = x + 1$, $g(x) = \sqrt{x-3}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-3}) = \sqrt{x-3} + 1$ ، المجال ، $x \geq 3$ ، $[3, \infty)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = \sqrt{x+1-3} = \sqrt{x-2}$ ، المجال ، $x \geq 2$ ، $[2, \infty)$

2) $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$

المجال R المجال $x > 0$

$(f \circ g)(x) = f(\ln x) = e^{\ln x} = \boxed{x}$ ، $\forall x > 0$ or $\{x / x > 0\}$ مجال $\ln x$

$(g \circ f)(x) = g(e^x) = \ln e^x = \boxed{x}$ ، $\forall x \in (-\infty, \infty)$ مجال e^x

3) $f(x) = \sqrt{1-x}$, $g(x) = \ln x$

المجال $x \leq 1$ $x > 0$

$(f \circ g)(x) = f(\ln x) = \sqrt{1 - \ln x}$ ، $1 - \ln x \geq 0 \Rightarrow -\ln x \geq -1 \Rightarrow \ln x \leq 1 \Rightarrow \boxed{x \leq e}$

$(g \circ f)(x) = g(\sqrt{1-x}) = \ln(\sqrt{1-x})$ المجال $\boxed{0 < x \leq e}$

$\sqrt{1-x} > 0 \Rightarrow 1 - x > 0 \Rightarrow \boxed{x < 1}$

في الأسئلة التالية، جد التركيبات $f(x)$ ، $g(x)$ ، وحدّد المجالات الخاصة بها؟

Find the composition $f(x)$, $g(x)$ and identify their respective domain?

4) $\sqrt{x^4 + 1}$ → $g(x) = x^4 + 1$, $f(x) = \sqrt{x}$

5) $\frac{1}{x^2+1}$ → $g(x) = x^2 + 1$, $f(x) = \frac{1}{x}$

6) $\sin^3 x = (\sin x)^3$ $g(x) = \sin x$, $f(x) = x^3$

7) e^{4x-2} → $g(x) = 4x - 2$, $f(x) = e^x$

في الأسئلة التالية، حدّد الدوال $f(x)$ ، $g(x)$ ، $h(x)$ بحيث تساوي الدالة المعطاة $[f \circ (g \circ h)](x)$ ؟

Identify functions $f(x)$, $g(x)$ and $h(x)$ such that the given function equals $[f \circ (g \circ h)](x)$?

8) $\sqrt[3]{\sin x + 2}$ → $h(x) = \sin x + 2$, $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \frac{3}{x}$

9) $[\tan^{-1}(3x + 1)]^2$ $h(x) = 3x + 1$, $g(x) = \tan^{-1}(x)$, $f(x) = x^2$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س10) جد قيمة كل ممّا يلي، إذا كانت $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ ، $g(x)=x^2-2$

Find the value of each of the following if $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$, $g(x)=x^2-2$

A) $(f\circ g)(2) = f(g(2)) = f(2) = \frac{1}{3}$

B) $(g\circ f)(2) = g(f(2)) = g(\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3})^2 - 2 = -\frac{17}{9}$

C) $(f\circ f)(2) = f(f(2)) = f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{(\frac{1}{3})^2-1} = -\frac{9}{8}$

س11) إذا كانت $f(x)=x+8$ ، $g(x)=x^2-6$ ، $h(x)=\sqrt{x}+3$ فجد $[f\circ(g\circ h)](x)$ ؟

$f(g(h))(x) = f(g(\sqrt{x}+3))$ (3) (2) (1)

$= f((\sqrt{x}+3)^2-6) = f(x+6\sqrt{x}+9-6) = f(x+6\sqrt{x}+3)$

$= x+6\sqrt{x}+3+8 = x+6\sqrt{x}+11$

س12) إذا كانت $f(x)=x+2$ ، فجد $g(x)$ إذا كانت $(\frac{f}{g})(x)=\frac{1}{4}$ ؟

$\frac{f}{g}=\frac{1}{4} \Rightarrow g = 4f(x)$

$= 4(x+2) = 4x+8$

س13) إذا كانت $f(x)=\sqrt{4x}$ ، فجد $g(x)$ إذا كانت $(f\circ g)(x)=|6x|$ ؟

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = |6x| = \sqrt{36x^2}$

$\sqrt{4\,g(x)} = \sqrt{36x^2}$ ← بالتربيع

$\frac{4}{4}g(x) = \frac{36}{4}x^2$

$g(x) = 9x^2$

س14) إذا كانت $f(x)=x^2+1$ ، $g(x)=\sin x$ فإنّ $(f\circ g)(\frac{\pi}{4})$ ؟

$f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2+1$

$g(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2019 / 2020

$f(g(\frac{\pi}{4})) = f(\frac{\sqrt{2}}{2})$ (2) (1)

$= (\frac{\sqrt{2}}{2})^2+1$

$= \frac{2}{4}+1 = \frac{1}{2}+1 = \boxed{\frac{3}{2}}$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

أسئلة متنوّعة على وحدة التَّمهيدات

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

1. حل المتباينة $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ هو؟

A) $(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$

B) $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

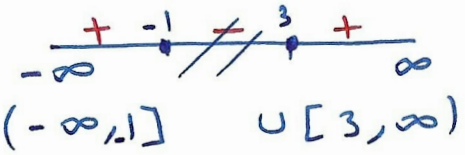
C) $[-3, 1]$

D) $[-1, 3]$

Jalshobaki.com

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x = -1 , 3$



$(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

2. حل المتباينة $x^2 + 2x - 15 < 0$ هو؟

A) $(-5, 3)$

B) $(-3, 5)$

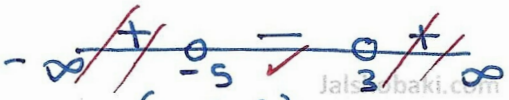
C) $[-3, 5]$

D) $(-\infty, -3), (5, \infty)$

Jalshobaki.com

$x^2 + 2x - 15 = 0$

$x = -5 , 3$



$(-5, 3)$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

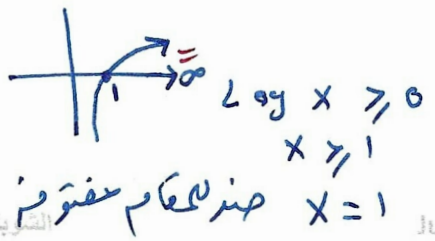
3. حل المتباينة $\frac{\sqrt{9-x}}{\log x} \geq 0$ هو؟

A) $[1, 9]$

B) $(-\infty, 9]$

C) $(1, 9]$

D) $(0, 9]$



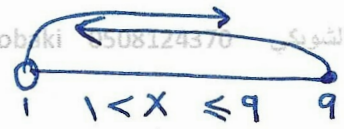
$\log x \geq 0$

$x \geq 1$

صفر للمقام مفقوء $x = 1$

$\sqrt{9-x} \Rightarrow 9 - x \geq 0$

$x \leq 9$



Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

4. إنَّ ميل المستقيم (m) للخط المار بالنقطتين $A(5, -2)$, $B(1, -11)$ هو؟

A) $m = -\frac{4}{9}$

B) $m = \frac{4}{9}$

C) $m = -\frac{9}{4}$

D) $m = \frac{9}{4}$

Jalshobaki.com

$A: x_1 \ y_1$, $B: x_2 \ y_2$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-11 - (-2)}{1 - 5}$$

$$= \frac{-9}{-4}$$

$$m = \frac{9}{4}$$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

5. جد معادلة المستقيم الذي ميله -4 ويمر بالنقطة $P(8,-5)$ ؟

A) $y=-4x+27$
B) $y=-4x-12$
C) $y=-4x-44$
D) $y=-4x+28$

$y=m(x-x_1)+y_1$

$y=-4(x-8)+(-5)$

$y=-4(x-8)-5=-4x+32-5$

$y=-4x+27$

6. إنَّ معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $P(7,-6)$ ويوازي المستقيم الذي معادلته $y=-5(x-6)-7$ هو؟

A) $y=-5x+28$
B) $y=-\frac{1}{5}x-41$
C) $y=5x-37$
D) $y=-5x+29$

يوازي يعني يساوي نفس الميل

إذن الميل المطلوب هو -5 والنقطة $(7,-6)$

المعادلة $\Rightarrow y=-5(x-7)-6$

$y=-5x+35-6$

$y=-5x+29$

7. إنَّ معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $P(-3,3)$ وعمودي على المستقيم $y=5(x+3)+5$ هي؟

A) $y=\frac{1}{5}x+20$
B) $y=-\frac{1}{5}x+\frac{12}{5}$
C) $y=-5x-10$
D) $y=5x+18$

$m_1=\frac{-1}{m_2}=\frac{-1}{5}$

$y=-\frac{1}{5}(x-(-3))+3$

$y=-\frac{1}{5}(x+3)+3$

$y=-\frac{1}{5}x+\frac{12}{5}$

8. إنَّ معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $P(1,3)$ وعمودي على المستقيم $x+2y+1=0$ هي؟

A) $y=2x+1$
B) $y=2x-1$
C) $y=-2x-1$
D) $y=-2x+1$

$2y=-x-1$

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

m_2

$m_1=\frac{-1}{m_2}=\frac{-1}{-\frac{1}{2}}=2$

$y=2(x-1)+3$

$y=2x-2+3$

$y=2x+1$

9. أي من العلاقات التالية ليست دالة؟

A) $y = 3x^3 + 4$

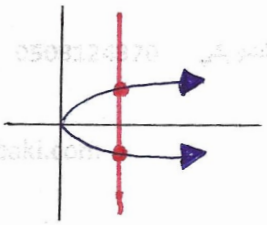
B) $y = x^2 + 1$

C) $x = y^2$

D) $x = y^{-1}$

$X = y^2$

$y = \pm\sqrt{x}$



10. حدّد ما إذا كانت الدالة كثيرة حدود، نسبية، أو كلاهما، أو غير ذلك؟ $f(x) = \frac{5x^4+6x^3+1}{6x^5-6}$

A) كثيرة حدود ولكن ليست نسبية

B) نسبية ولكن ليست كثيرة حدود

C) كثيرة حدود و نسبية

D) ليست كثيرة حدود ولا نسبية

$f(x) = \frac{\text{كثيرة حدود}}{\text{كثيرة حدود}}$ ← نسبية

ليست كثيرة حدود، لا مقامات لمتغيرات لكثيرات الحدود.

11. جد مجال الدالة $y = \sqrt{x^2 - 144}$ ؟

A) $[-12, 12]$

B) $(-\infty, -12] \cup [12, \infty)$

C) $[12, \infty)$

D) $(-\infty, \infty)$

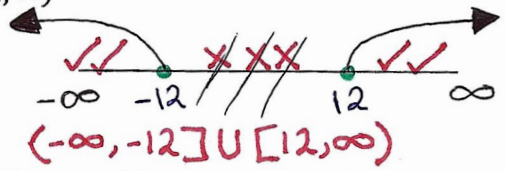
$x^2 - 144 \geq 0$

$x^2 \geq 144$

$|x| \geq 12$

$x \geq 12$

$x \leq -12$



$(-\infty, -12] \cup [12, \infty)$

12. جد مجال الدالة $g(x) = \log\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)$ ؟

A) $[-1, 1]$

B) $(-\infty, -1]$

C) $[1, \infty)$

D) $(1, \infty)$

$\log\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)$

$x^2 - 1 > 0$

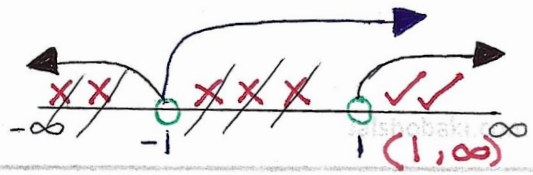
$x^2 > 1$

$|x| > 1$

$x > 1$ ① $x < -1$ ②

$x + 1 > 0$

$x > -1$ ③



$(1, \infty)$

13. جد مجال الدالة $y = 3\sin^{-1}(x - 1)$ ؟

A) $[-1, 1]$

B) $[-2, 0]$

C) $[-\pi, \pi]$

D) $[0, 2]$

$-1 \leq (x-1) \leq 1$

$+1 \quad +1 \quad +1$

$0 \leq x \leq 2$

$[0, 2]$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

14. نقاط تقاطع المنحنيات $g(x)=x^2+4$, $f(x)=\sqrt{x^2+16}$ هي؟

A) $(0,4),(\sqrt{7},4),(-\sqrt{7},4)$

B) $(\sqrt{7},4),(-\sqrt{7},4)$

C) $(0,4)$

D) $(0,7),(7,4)$

* عند التقاطع فإن $f(x)=g(x)$

$\sqrt{x^2+16}=x^2+4$

ثم تربيع الطرفان ⟸

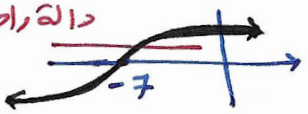
$x^2+16=(x^2+4)^2$

$x^2+16=x^4+8x^2+16$

$x^4+8x^2-x^2=0 \Rightarrow x^4+7x^2=0 \Rightarrow x=0$

النقطة $(0,4)$

15. حدّد ما إذا كان للدالة معكوس (دالة واحد لواحد)، وإذا كان كذلك فما هو؟ $f(x)=\sqrt[3]{x+7}$



A) $f^{-1}(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x+7}}$

B) $f^{-1}(x)=(x-7)^3$

C) $f^{-1}(x)=x^3-7$

D) $x=\pm\sqrt{7}$

$y=\sqrt[3]{x+7}$

$x=\sqrt[3]{y+7}$

$x^3=y+7$

$y=x^3-7$

$y=f^{-1}(x)=x^3-7$

16. بافتراض أنَّ للدالة دالة عكسية، جد قيمة الدالة المحدَّدة بدون الحل لإيجاد الدالة العكسية؟

$f(x)=x^5+3x^3+x-13$, $f^{-1}(-71)$

A) 2

B) 13

C) -2

D) -13

$f(x)=-71$

$x^5+3x^3+x-13=-71$

$x^5+3x^3+x+58=0$ ShiFt + Solve

$x=-2$

17. إذا كان $g(x)=x^3+4x-1$ فإنَّ $g^{-1}(-1)$ هو؟

A) $x=0$

B) $x=2$

C) $x=-2$

D) $x=-1$

$g^{-1}(-1)=x$

$g(x)=x^3+4x-1=-1$

$x^3+4x=0$

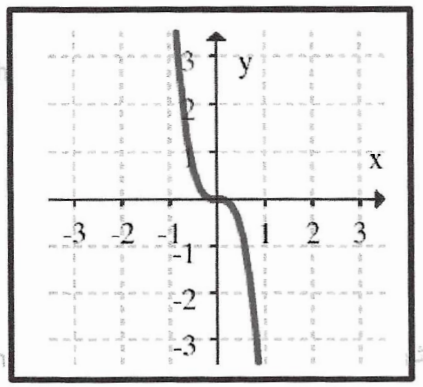
$x(x^2+4)=0$

$x=0$, $x^2+4\neq 0$

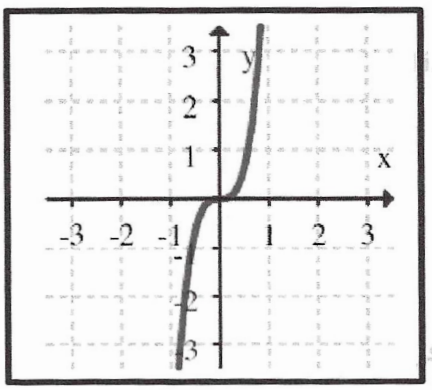
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

18. الدالة $f(x) = x^5 + 5x^3$ لها دالة عكسية، فإنَّ التمثيل البياني للدالة العكسية هو؟

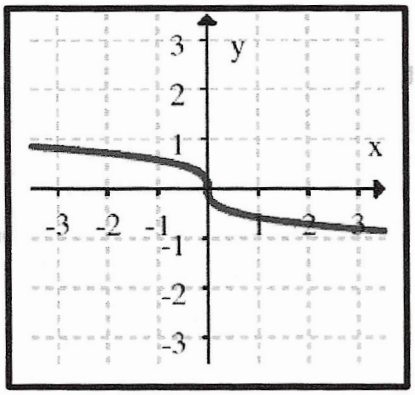
A)



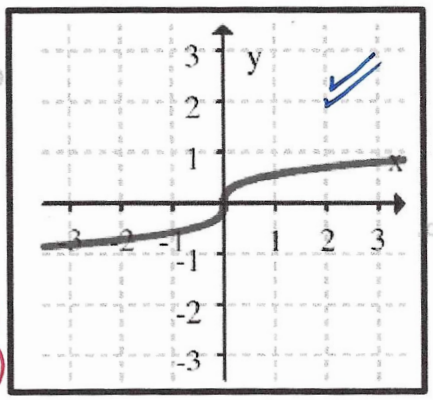
B)



C)



D)



يتم الحل بتعويض نقاط في الدالة الأصلية ثم عكسها لإيجاد أقرب رسم ممكن !!

$f(0)=0 \xrightarrow{f^{-1}} (0,0)$

$f(1)=6 \xrightarrow{f^{-1}} (6,1)$

$f(-1)=-6 \xrightarrow{f^{-1}} (-6,-1)$

19. إنَّ الدالة $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ لها دالة عكسية على الفترة؟

دالة $\sin x$ لها دالة عكسية على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} \quad -\frac{\pi}{2} \quad -\frac{\pi}{2}$

$-(-\pi \leq -x \leq 0)$

$\pi \geq x \geq 0$

$0 \leq x \leq \pi$

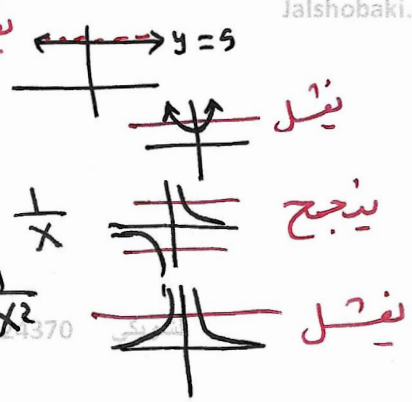
A) $[-1, 1]$

B) $[0, \pi]$

C) $[-\pi, \pi]$

D) $(-\infty, \infty)$

20. أي من الدوال التالية لها دالة عكسية؟



A) $f(x) = 5$

B) $h(x) = x^2 + 1$

C) $k(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$

D) $r(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

21. حوّل $\frac{11\pi}{4}$ (راديان) إلى درجة؟

A) $468°$

B) $480°$

C) $495°$

D) $523°$

$$\frac{11\pi}{4} \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{11(180)}{4} = 495^\circ$$

Jalshobaki.com

22. حوّل $-105°$ إلى راديان؟

A) $-\frac{7\pi}{12}$

B) $-\frac{7\pi}{13}$

C) $-\frac{2\pi}{3}$

D) $-\frac{12\pi}{7}$

$$-105^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{-105}{180}\pi = \frac{-7\pi}{12}$$

23. حدّد الدَّورة للدالة $f(x) = sin5x - cos6x$ ؟

A) π

B) $-\pi$

C) 2π

D) -2π

الدورة $= \frac{2\pi}{5}$ الدورة $= \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$\sin(5x) \Rightarrow \frac{2\pi}{5}, \frac{4}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi, \frac{8}{5}\pi, \frac{10}{5}\pi$

$\cos 6x \Rightarrow \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{6}{3}\pi$

24. حدّد السعة، الدورة، والتكرار لـ $f(x) = \underset{a}{3}\cos(\underset{b}{10}x - \underset{c}{\pi})$ ؟

A) السعة $= 6$ ، الدورة $= \frac{\pi}{3}$ ، التكرار $= \frac{1}{10}$

B) السعة $= 3$ ، الدورة $= \frac{\pi}{5}$ ، التكرار $= \frac{5}{\pi}$

C) السعة $= \frac{\pi}{5}$ ، الدورة $= -\frac{2\pi}{3}$ ، التكرار $= \frac{10}{\pi}$

D) السعة $= -3$ ، الدورة $= \frac{10\pi}{3}$ ، التكرار $= \frac{3}{\pi}$

السعة $= |a| \Rightarrow |-3| = 3$

الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$

التكرار $= \frac{1}{\text{الدورة}} = \frac{1}{\frac{\pi}{5}} = \frac{5}{\pi}$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

25. سعة الدالة $f(x) = -2cos(3x + \pi)$ هي؟

a

A) -2

B) 2

C) 3

D) π

السعة $= |a| = |-2| = 2$

Jalshobaki.com

26. حدّد ما إذا كانت الدالة $f(x) = cos5x + 4sin\pi x$ دورية، وإذا كانت دورية، فجد الدَّورة (الأساسية الأصغر)؟

A) الدورة $= 5\pi$

B) الدورة $= 9\pi$

C) الدورة $= 20\pi$

D) الدالة ليست دورية

الدورة $= \frac{2\pi}{5}$ ، الدورة $= \frac{2\pi}{\pi} = 2$

$\Rightarrow \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \ldots$ etc

$\Rightarrow 2, 4, 6, 8, \ldots$ etc

لا يوجد مضاعفات مشتركة $\Leftarrow$ ليست دورية .

27. استخدم مدى θ لتحديد قيمة الدالة المشار إليها؟ جد $cos\theta$ $\quad tan\theta = \frac{7}{24}$, $\pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$

A) $cos\theta = \frac{24}{25}$

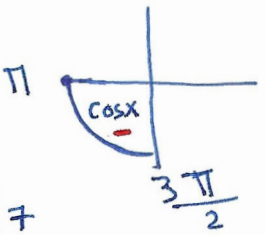
B) $cos\theta = -\frac{24}{25}$

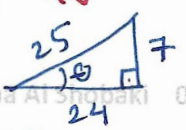
C) $cos\theta = -\frac{7}{25}$

D) $cos\theta = \frac{7}{25}$

الـ cos في الربع الثالث سالب (-) .

$tan\theta = \frac{7}{24} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{opp}{adj}$





$cos\theta = \frac{24}{25} \Leftarrow$

وبما أنه في الربع الثالث $\Rightarrow cos\theta = -\frac{24}{25}$

28. جد كافَّة حلول المعادلة $2sin^2x + sinx - 1 = 0$ ؟

$2sin^2x + sinx - 1 = 0$

$(2sinx - 1)(sinx + 1) = 0$

$2sinx - 1 = 0$

$sinx = \frac{1}{2}$

② $\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ ① $\frac{\pi}{6} + 2n\pi$

$sinx = -1$,

$x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$

A) $x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $\frac{3\pi}{4} + 2n\pi$, $\pi + 2n\pi$

B) $x = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi$, $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, $\frac{11\pi}{6} + 2n\pi$

C) $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi$

D) $x = 0 + n\pi$, $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

29. حل المعادلة $tanx = 1$ هو؟

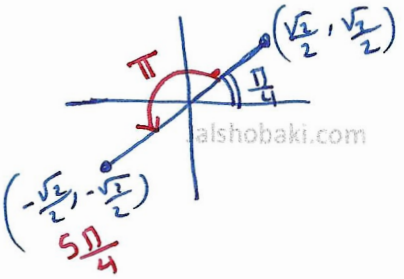
A) $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

B) $\frac{\pi}{4} \pm n\pi$

C) $\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi$

D) $\frac{\pi}{4} \pm n\frac{\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{4} \pm n\pi$



30. $cosh(0)$ هو؟

A) 0

B) 1

C) -1

D) 2

بالحاسبة مباشرة

إدخال بالحاسبة

$\cosh(0) = 1 \Rightarrow (hyp \to 2 \to \cosh(0) = 1)$

31. بسّط ما يلي $sin(\cos^{-1} 5x)$ ؟

A) $\sqrt{1+25x^2}$

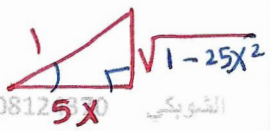
B) $\sqrt{25-x^2}$

C) $\sqrt{1-25x^2}$

D) $\sqrt{25+x^2}$

$\frac{5x}{1} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \quad \frac{adj}{hyp}$

$\frac{opp}{hyp} \quad \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{1-25x^2}}{1}$



32. $sin2\left(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$ ؟

A) $-\frac{24}{25}$

B) $\frac{24}{25}$

C) $-\frac{25}{24}$

D) $\frac{24}{5}$

بالآلة الحاسبة مباشرة.

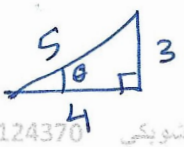
أو يدوي

$\sin 2(\cos^{-1}(\frac{4}{5}))$

$\frac{4}{5} =$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$= 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$



Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

33. مدى الدالة $g(x) = 3cosx + 1$ هو؟

A) $[-2, 4]$

B) $[-3, 3]$

C) $[-1, 1]$

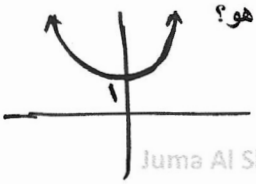
D) $[-4, 2]$

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$-3 \leq 3\cos x \leq 3$ (بالضرب 3)

$-2 \leq 3\cos x + 1 \leq 4$ (+1)

34. مدى الدالة $g(x) = \cosh x$ هو؟



A) $(-\infty, \infty)$

B) $[1, \infty)$

C) $[0, \infty)$

D) $[0, 1]$

35. إذا كانت $g(x) = -\sqrt{x-2}$ فإنَّ مدى الدالة $g^{-1}(x)$ هو؟

A) $[2, \infty)$

B) $(-\infty, 2]$

C) $[0, \infty)$

D) $(-\infty, 0]$

مدى المعكوس = مجال الدالة $g(x)$

$\sqrt{x-2} \Rightarrow x - 2 \geq 0$

$x \geq 2$ ، $[2, \infty)$

36. إذا كان للدالة $f(x) = \frac{1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{1}{x} - 1$ فإنَّ $f(g(x))$ ؟

A) $h(x) = x$

B) $k(x) = -x$

C) $r(x) = 1$

D) $m(x) = -1$

$f\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1}\right) + 1} = \frac{1}{\frac{1-x}{x} + \frac{1}{1}}$

$= \frac{1}{\frac{1 - x + x}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$

37. إنَّ قاعدة الدالة الأسية التي تمر بالنقطتين $(1, 2)$, $(0, 5)$ هي؟

A) $y = 5e^{x \ln\left(\frac{5}{2}\right)}$

B) $y = 5e^{x \ln\left(\frac{2}{5}\right)}$

C) $y = 2e^{x \ln\left(\frac{5}{2}\right)}$

D) $y = e^{x \ln\left(\frac{5}{2}\right)}$

$y = Ae^{kx}$

$5 = Ae^0 \Rightarrow A = 5$ (حتى النقطة $(0,5)$ x,y)

$y = 5e^{kx}$

$2 = 5e^k$ (حتى النقطة الثانية $(1,2)$ x,y)

$\frac{2}{5} = e^k \Rightarrow k = \ln\left(\frac{2}{5}\right)$

$y = 5e^{x \ln\left(\frac{2}{5}\right)}$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي Jalshobaki.com

43. حل المعادلة $e^{2x}+e^{x}-12=0$ هو؟

$e^{2x}+e^{x}-12=0$

$(e^{x}+4)(e^{x}-3)=0$

$e^{x}\neq -4$ or $e^{x}=3$

$\ln e^{x}=\ln 3$

$x=\ln(3)$

A) 3

B) 4

C) $\ln 3$

D) $\ln 4$

44. جد كافَّة حلول $\cosh(x^2-4)=1$ ؟

$\cosh(x^2-4)=1$

$x^2-4=\cosh^{-1}(1)$

$x^2-4=0$

$x=\pm 2$

A) $x=-2\ ,\ x=2$

B) $x=-1\ ,\ x=3$

C) $x=e^{-2}\ ,\ x=e^{2}$

D) $x=e^{-1}$

45. جد كل من $f(x)\ ,\ g(x)\ ,\ h(x)$ بحيث تكون الدالة المعطاة مساوية لـِ $[f\circ(g\circ h)](x)$ ؟

$k(x)=-8e^{x^2}-5$ $\quad [f(g(h(x)))]$

$h(x)=x^2$, $g(x)=-8e^{x}$

$f(g(x^2)) \rightarrow f(-8e^{x^2})$

$(-8e^{x})^2-5$

$F(x)=x$

A) $f(x)=-8\ ,\ g(x)=x-5\ ,\ h(x)=e^{x^2}$

B) $f(x)=x-5\ ,\ g(x)=-8e^{x}\ ,\ h(x)=x^2$

C) $f(x)=-8x\ ,\ g(x)=e^{x}-5\ ,\ h(x)=x^2$

D) $f(x)=-8x\ ,\ g(x)=x-5\ ,\ h(x)=e^{x^2}$

46. إنَّ قاعدة الدالة $y=f(x)$ بعد إزاحة ثلاث وحدات للأعلى وتمدّد رأسي وحدتين هي؟

$(2)f(x)+3$

$y=2f(x)+3$

A) $y=2f(x+3)$

B) $y=2f(x)+3$

C) $y=0.5f(x)+3$

D) $y=f(2x+3)$

47. بالإكمال إلى مربّع كامل، أذكر التحويلات التي تمَّت على الدالة الرئيسية الأم $y=x^2$ للحصول على الدالة

$f(x)=x^2+16x+56$

$f(x)=[x^2+16x+(8)^2]-(8)^2+56$

$(x+8)-8$

8 وحدات لليسار

8 وحدات للأسفل

A) إزاحة لليسار 8 وحدات ثمّ لأسفل 8 وحدات

B) إزاحة لليمين 8 وحدات ثمّ لأسفل 8 وحدات

C) إزاحة لليمين 16 وحدة ثمّ 56 وحدة لأعلى

D) إزاحة لليسار 16 وحدة ومن ثمّ لأسفل 56 وحدة

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

38. $\ln 4 + 2\ln 3 - 2\ln 6$ ؟

A) $\ln 2$
B) 2
C) 1
D) 0

$= \ln 4 + \ln 3^2 - \ln 6^2$
$= \ln 4 + \ln 9 - \ln 36$
$= \ln((4)(9)) - \ln 36$
$= \ln 36 - \ln 36 = 0$

39. أي من الدوال التالية هي الدالة العكسية للدالة $y = \log(x-1)$ ؟

A) $f(x) = 2^x + 1$
B) $g(x) = 10^x + 1$
C) $h(x) = e^x + 1$
D) $k(x) = \log(x+1)$

$x = \log_{10}(y-1)$
$y - 1 = 10^x$
$y = 10^x + 1$

40. أكتب بصيغة لوغاريتم واحد $\ln 64 - 2\ln 8$ ؟

A) $\ln 48$
B) $\ln 56$
C) 1
D) 0

$\ln 64 - \ln 8^2 = \ln 64 - \ln 64 = 0$

41. حل لإيجاد قيمة x ؟ $x^2 \ln x - 16 \ln x = 0$

A) $x = e^4$ و $y = e^{-4}$
B) $x = 1, 4$
C) $x = 1 \ , \ \pm 4$
D) لا يوجد حل

$\ln x (x^2 - 16) = 0$
$\ln x = 0$ ، $x^2 - 16 = 0$
$x = 1$ ، $x^2 = 16$
$x = \pm 4$
$x = 4$ ← $\because$ مجال $\ln x$ $(x > 0)$

42. حل المعادلة $e^{2\ln x} = 4$ هو؟

A) $2 \ , -2$
B) 2
C) -2
D) 1

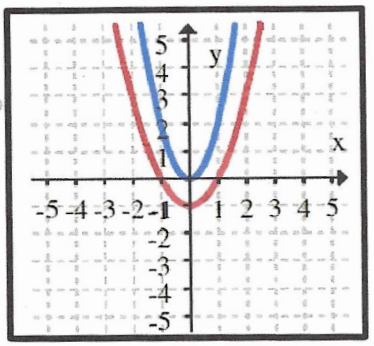
مجال $\ln x$ هو $x > 0$

$e^{\ln x^2} = 4$
$x^2 = 4$
$x = \pm 2$
$(x > 0)$ فقط $x = 2$

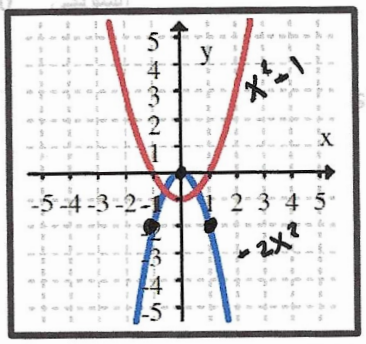
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

48. ارسم $f(x) = -2(x^2 - 1) - 2$ و $y = x^2 - 1$ على نفس الاحداثي؟

A)



B)

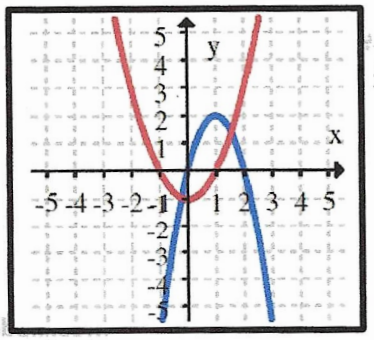


نرسم $y = x^2 - 1$

بعض النقاط $(0,-1)$

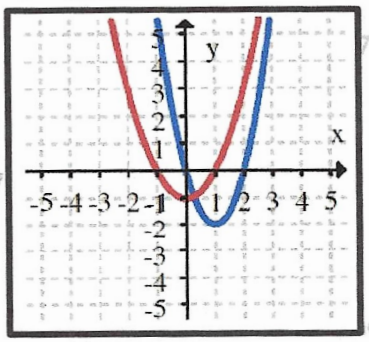
$(1,0)$ ، $(-1,0)$

C)



نرسم $f(x) = -2(x^2-1)-2$

D)



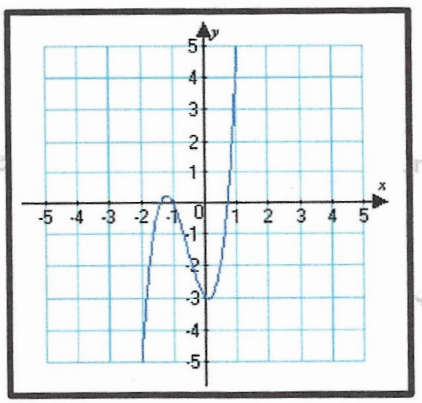
$f(x) = -2x^2 + 2 - 2$

$f(x) = -2x^2$

بعض النقاط $(0,0)$

$(1,-2)$ ، $(-1,-2)$

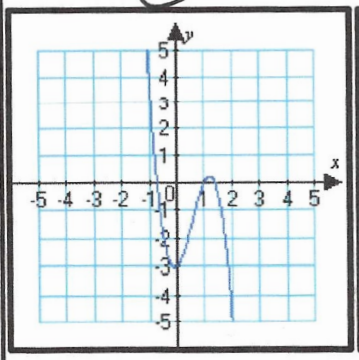
49. استخدم رسمة الدالة $y = f(x)$ لترسم $y = f(-x)$



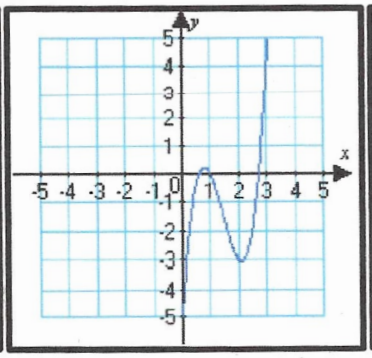
هذا عبارة عن انعكاس لـ محور ل.

أي نعكس الجزء الأيمن إلى اليسار والجزء الأيسر إلى اليمين.

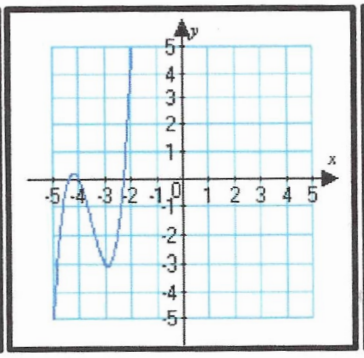
A)



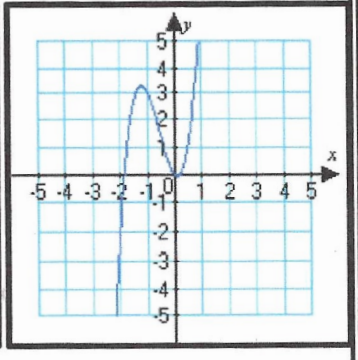
B)



C)



D)



Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

إجابـات أسئلــة متنوّعــة على وحدة التَّمهيـدات

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

1.	B	2.	A	3.	C
4.	D	5.	A	6.	D
7.	B	8.	A	9.	C
10.	B	11.	B	12.	D
13.	D	14.	C	15.	C
16.	C	17.	A	18.	D
19.	B	20.	C	21.	C
22.	A	23.	C	24.	B
25.	B	26.	D	27.	B
28.	C	29.	B	30.	B
31.	C	32.	B	33.	A
34.	B	35.	A	36.	A
37.	B	38.	D	39.	B
40.	D	41.	B	42.	B
43.	C	44.	A	45.	B
46.	B	47.	A	48.	B
49.	A				

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي
Jalshobaki.com
Jalshobaki.com
Jalshobaki.com
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي