اختبر نفسك (6)
)5Check yourself (

الرياضيات Mathematics

الصف الثاني عشر متقدم
الفصل الثاني

2024-2023

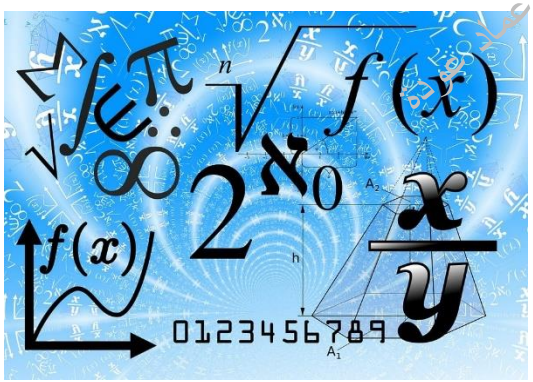
Lesson 4-8 (Related Rates)

according to the previous exam

مراجعة الدرس الثامن (المعدلات المرتبطة)
من الوحدة الرابعة اعتمادا على
الاختبارات السابقة

الأستاذ عماد عودة

عماد عودة



اسم الطالب: -

2021-2022

Q1- Suppose a forest fire spreads in a circle with radius changing at a rate of $5\ ft\ /\ min$. When the radius reaches $200\ ft$, at what rate is the area of the burning region increasing?

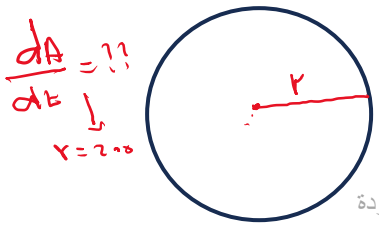
a) $200\pi\ ft^2/min$

b) $500\pi\ ft^2/min$

c) $1000\pi\ ft^2/min$

d) $2000\pi\ ft^2/min$

س (1) حريق غابات ينتشر على شكل دائرة حيث يتغير نصف قطرها بمعدل $5ft/min$. اوجد معدل تغير مساحة المنطقة المحترقة عندما يكون نصف قطرها $200ft$



$A = \pi r^2$

$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$

$\frac{dA}{dt} = 2\pi(200)(5)$

$= 2000\pi\ ft^2/min$

$\frac{dr}{dt} = 5\ ft/min$

عماد عودة

2017-2018

Q2- Sand is poured from the pipe with rate $9\ m^3/s$ So that formed a conical pile by a height equal to half the diameter of the base of the cone. Find the rate of increase in the height of the sand pile when it reaches a height of 3 meters.

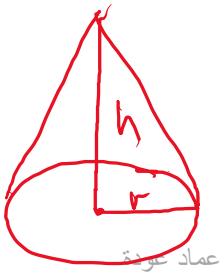
a) $\pi\ m\ /sec$

b) $9\pi\ m\ /sec$

c) $\frac{1}{2\pi}\ m\ /sec$

d) $\frac{1}{\pi}\ m\ /sec$

س (2) ينصب رمل من أنبوب بمعدل $9\ m^3/sec$ بحيث يشكل كومة مخروطية ارتفاعها يساوي نصف قطر قاعدة المخروط. اوجد معدل تزايد ارتفاع كومة الرمل عندما يكون ارتفاعها $3m$



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$V = \frac{1}{3}\pi (h)^2 h$

$V = \frac{1}{3}\pi h^3$

$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi 3h^2 \frac{dh}{dt}$

$9 = \pi h^2 \frac{dh}{dt}$

$9 = \pi (3)^2 \frac{dh}{dt}$

$\frac{9}{9\pi} = \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}\ m/s$

$h = r$

$\frac{dV}{dt} = 9\ m^3/s$

$\frac{dh}{dt} = ??$

$h = 3$

عماد عودة

Q3- L and M two vertical roads in **C**, a gas station is **12 km** on M road from the intersection point **C**. If a car moves towards **C** with velocity **26 km/h**. find the rate of changing distance between the car and the station when car about 5 km from C

س (3) M و L طريقان مستقيمان متعامدان في النقطة C. تقع محطة وقود على الطريق M وتبعد $12km$ عن نقطة التقاطع C. أذا تحركت سيارة على الطريق L بسرعة $26\ km/h$ في اتجاه النقطة C , فما معدل تغير المسافة بين السيارة ومحطة الوقود عندما تكون السيارة على بعد **5** km من نقطة التقاطع ؟

شاهد الفيديو

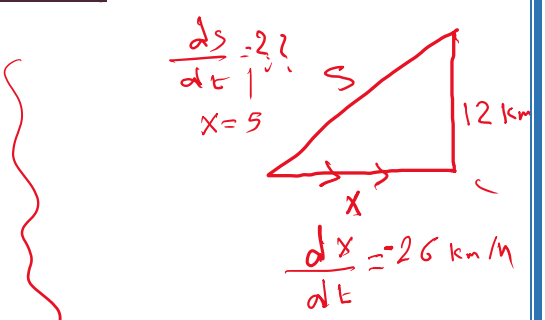
https://youtu.be/sJDdwd2bL2U?si=jZChdt5eSIXtnUMj

a) $-4km/h$

b) $4km/h$

c) $-10km/h$

d) $10km/h$



$s^2 = x^2 + 12^2$

$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$

$\frac{ds}{dt} = \frac{2x}{2s}\frac{dx}{dt}$

$s = \sqrt{(5)^2 + (12)^2}$

$s = 13$

$\frac{ds}{dt} = \frac{5}{13}(-26) = -10\ km/h$

عماد عودة

Q4- An isosceles triangle 10 cm each and the angle between them θ if the angle change with rate $\frac{\pi}{60}\ rad/min$. Find the rate of change of the tringle area when $\theta = \frac{\pi}{3}$

س (4) مثلث متطابق الضلعين طول كل من ضلعيه المتطابقين **$10\ cm$** , وقياس الزاوية بينهما θ .إذا تغيرت θ بمعدل **$\pi/60$** rad/min فان معدل تغير مساحة المثلث عندما **$\theta=\pi/3$** هو

شاهد الفيديو

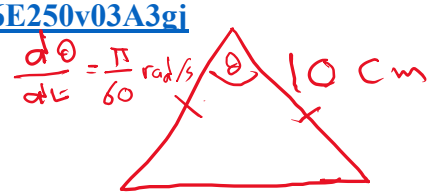
https://youtu.be/CrEY5Y8Yq2o?si=Mkf36E250v03A3gj

a) $\frac{5\pi}{6}\ cm^2/min$

b) $\frac{\pi}{6}\ cm^2/min$

c) $\frac{\pi}{12}\ cm^2/min$

d) $\frac{5\pi}{12}\ cm^2/min$



$A = \frac{1}{2}(10)(10)\sin\theta$

$A = 50\sin\theta$

$\frac{dA}{dt} = 50\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$

$\frac{dA}{dt} = ??$

$\theta = \frac{\pi}{3}$

$\frac{dA}{dt} = 50\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{60}\right)$

$\frac{dA}{dt} = 50\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{60}$

$= \frac{5\pi}{12}\ cm^2/min$

عماد عودة

Q5- The radius of a circle is changing at the rate of $\frac{1}{\pi}\ in/s$.
At what rate is the circle's area changing when $r = 5\ in$?

a) $\frac{5}{\pi}\ in^2/s$

b) $10\ in^2/s$

c) $\frac{10}{\pi}\ in^2/s$

d) $15\ in^2/s$

$A = \pi r^2$

$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$

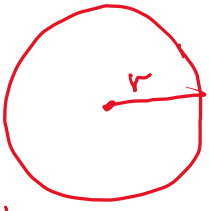
$= 2\pi(5)\left(\frac{1}{\pi}\right)$

$= 10\ in^2/s$

س (5) يتغير نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{1}{\pi}$ in/s اوجد معدل تغير مساحة الدائرة عندما يكون نصف قطرها 5cm

$\frac{dA}{dt} = ??$

$r = 5$



$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi}\ in/s$

عماد عودة

عماد عودة عماد عودة عماد عودة

Q6- A $10\ ft$ ladder leans against the side of a building as. If the bottom of the ladder is pulled away from the wall at the rate of $3\ ft/s$ and the ladder remains in contact with the wall

(a) find the rate at which the top of the ladder is dropping when the bottom is $6\ ft$ from the wall.

(b) Find the rate at which the angle between the ladder and the horizontal is changing when the bottom of the ladder is $6\ ft$ from the wall.

س (6) يرتكز سلم طوله $10ft$ على جانب المبنى. إذا انزلق أسفل السلم مبتعدا عن الجدار بمعدل $3\ ft/s$ مع بقائه ملامسا للجدار

ا) اوجد سرعة انزلاق اعلى السلم عندما يكون اسفل السلم على بعد $6ft$

ب) اوجد معدل تغير الزاوية بين السلم والخط الافقي عندما يكون أسفل السلم على بعد $6\ ft$ عن الجدار

عماد عودة

من نظرية فيثاغورث

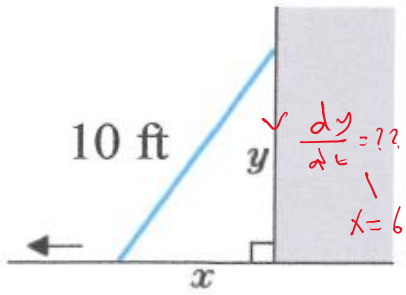
a)

$$y^2 = 10^2 - x^2$$

$$2y\frac{dy}{dt} = -2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-x}{y}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{6}{8}(3) = -\frac{9}{4}\ ft/sec$$



$$\frac{dx}{dt} = 3\ ft$$

$$x=6 \Rightarrow y = \sqrt{10^2 - (6)^2} = 8$$

b)

$$\cos\theta = \frac{x}{10}$$

$$-\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{10\sin\theta}\frac{dx}{dt}$$

$$\cos\theta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{10\left(\frac{4}{5}\right)}(3)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-3}{8}\ rad/sec$$

Q7- A camera tracks the launch of a vertically ascending spacecraft. The camera is located at ground level 2 miles from the launchpad.
If the spacecraft is **3 *miles*** up and traveling at **0. 2 *mile per second***, at what rate is the camera angle (measured from the horizontal) changing?

س (7) ترصد كاميرا انطلاق مركبة فضائية تنطلق عموديا، إذا كانت الكاميرا على بعد 2 ميل من نقطة انطلاق المركبة

اوجد سرعة تغير زاوية رصد المركبة إذا كانت سرعة انطلاق المركبة 0.2ميل/الثانية عندما تكزن على ارتفاع 3 ميل

شاهد الفيديو

https://youtu.be/Hm6JImJrECk?si=Oa4Gvpl8-b90ufhX

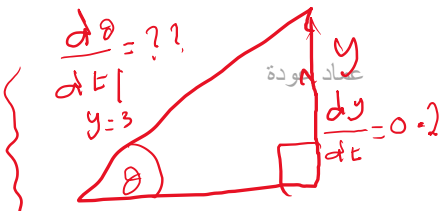
$\tan\theta = \frac{y}{2}$

$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dy}{dt}$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sec^2\theta}\frac{dy}{dt}$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\cos^2\theta \frac{dy}{dt}$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 \cdot 0.2 = 0.03 \text{ rad/sec}$



$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{(2)^2+(3)^2}}$

$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$

عماد عودة

2022-2023

Q8- Sand is dumped such that the shape of the sandpile remains a cone with height equal to twice the radius. If the sand is dumped at the constant rate of $36ft^3/s$. Find the rate t which the radius is increasing when the height reaches **6 *ft***.
(Hint: Cone volume $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$)

س (8) يسقط الرمل بحيث يشكل الرمل كومة على شكل مخروطي بارتفاع يساوي مثلي نصف القطر. إذا الرمال يسقط بمعدل ثابت قدره $36ft^3/s$ اوجد المعدل الذي يزداد فيه نصف القطر عندما يصل الارتفاع إلى **6** أقدام.
(تلميح: حجم المخروط $\left(v = \frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$

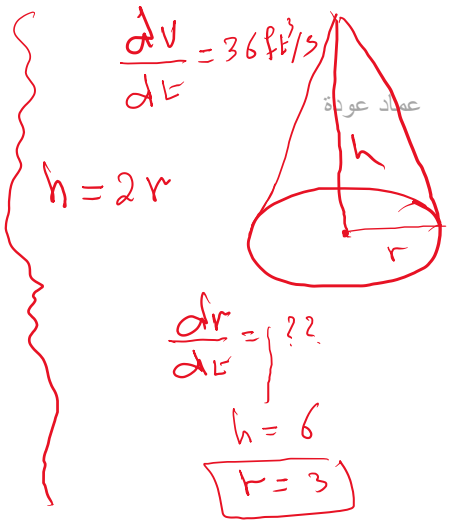
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 (2r)$

$V = \frac{2}{3}\pi r^3$

$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{3}\pi 3r^2 \frac{dr}{dt}$

$\frac{dv}{dt} = 2\pi(3)^2\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{36}{18\pi} = \frac{1}{2\pi} ft/s$



عماد عودة

Q9- A dock is **6 ft** above water. Suppose you stand on the edge of the dock and pull a rope attached to a boat at the constant rate of **2 ft/s**. Assume that the boat remains at water level. At what speed is the boat approaching the dock when it is **20 ft** from the dock?

س (9) رصيف على ارتفاع 6 أقدام فوق الماء. لنفترض أنك تقف على حافة الرصيف وتسحب حبلًا مربوطًا بقارب بمعدل ثابت قدره 2 قدم/ثانية. افترض أن القارب لا يزال عند مستوى الماء. ما السرعة التي يقترب بها القارب من الرصيف عندما يكون على بعد 20 قدمًا من الرصيف؟

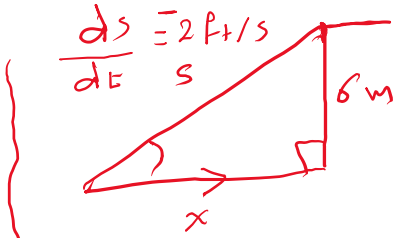
$s^2 = x^2 + 6^2$

$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$

$\frac{ds}{dt} = \frac{x}{s}\frac{dx}{dt}$

$-2 = \frac{20}{\sqrt{436}}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{-2\sqrt{436}}{20}$

$\frac{dx}{dt} = -2.088\ ft/s$



$\frac{dx}{dt} = ??$

$x = 20$

$s = \sqrt{20^2 + 6^2}$

$s = \sqrt{436}$

Q10- Suppose that you are blowing up a balloon by adding air at the rate of **1 ft^3/s**. If the balloon maintains a spherical shape, the volume and radius are related by $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Compare the rate at which the radius is changing when $r = 0.01$ ft versus when $r = 0.1\ ft$.

س (10) لنفترض أنك تقوم بنفخ بالون بإضافة الهواء بمعدل **1 ft^3/s**. إذا كان البالون يحتفظ بشكله الكروي، فإن الحجم ونصف القطر يرتبطان بـ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. قارن معدل تغير نصف القطر عندما يكون $r = 0.01$ قدم مقابل عندما يكون $r = 0.1$ قدم

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi 3r^2\frac{dr}{dt}$

$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$

$r = 0.01 \Rightarrow 1 = 4\pi(0.01)^2\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(0.01)^2} = 795.8\ ft/s$

$r = 0.1 \Rightarrow 1 = 4\pi(0.1)^2\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(0.1)^2} = 7.958\ ft/s$

وهذا يعني ان التغير لبداية كان سريعاً ومن ثم اخذ بالتباطؤ

Q11- Suppose a 6-ft-tall person is $12\ ft$ away from an $18\ ft$-tall lamppost.
If the person is moving away from the lamppost at a rate of $2\ ft/s$, at what rate is the length of the shadow changing?

س (11) افترض أن شخصًا يبلغ طوله 6 أقدام يبعد 12 قدمًا عن عمود إنارة طوله 18 قدمًا. إذا كان الشخص يتحرك بعيدًا عن عمود الإنارة بمعدل $2\ ft/s$، فما المعدل الذي يتغير به طول الظل؟

من تشابه المثلثات

$$\frac{x+s}{18} = \frac{s}{6}$$

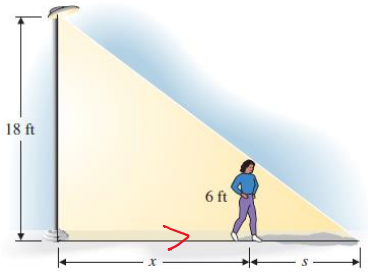
$$6x + 6s = 18s$$

$$6x = 18s - 6s$$

$$6x = 12s \Longrightarrow s = \frac{1}{2}x$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}(2) = 1\ ft/s$$



$$\frac{dx}{dt} = 2\ ft/s$$

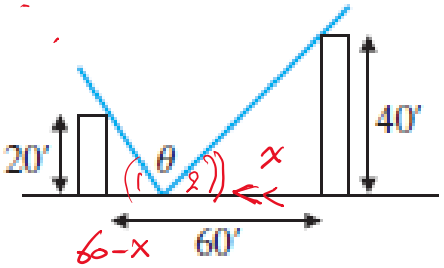
$$\frac{ds}{dt} = ??$$

عماد عودة

Q12- Two buildings of height **20 *feet*** and **40 *feet***, respectively, are **60 *feet*** apart.
Suppose that the intensity of light at a point between the buildings is proportional to the angle θ.
If a person is moving from right to left at **4 ft/s**, at what rate is θ changing when the person is exactly halfway between

س (12) بنايتان بارتفاع **20 قدمًا** و**40 قدمًا**، على التوالي، المسافة بينهما **60** قدمًا.
لنفترض أن شدة الضوء عند نقطة ما بين البنايتين تتناسب مع الزاوية θ.
إذا كان شخص يتحرك من اليمين إلى اليسار بسرعة **4 ft/s**،
اوجد معدل يتغير θ عندما يكون الشخص في منتصف المسافة بالضبط

$x = 30$



$\theta = \pi - \angle 1 - \angle 2$

ومنها

$$\theta = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{20}{60-x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{40}{x}\right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\frac{-20(-\frac{dx}{dt})}{(60-x)^2}}{1+\left(\frac{20}{60-x}\right)^2} - \frac{\frac{-40\frac{dx}{dt}}{x^2}}{1+\left(\frac{40}{x}\right)^2}$$

$\frac{dx}{dt} = 4\ ft/s$

عماد عودة

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\frac{-20(-4)}{(30)^2}}{1+\left(\frac{20}{30}\right)^2} - \frac{\frac{-40(4)}{(30)^2}}{1+\left(\frac{40}{30}\right)^2}$$

$$= -\frac{\frac{80}{900}}{1+\frac{4}{9}} + \frac{\frac{160}{900}}{1+\frac{16}{9}} =$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.00246\ rad/s$$

BEST WISHES FOR ALL

أطيب التمنيات للجميع