نماذج أجابة أسئله أمتحان تقييمى ثانى

عمل / أ . أحمد نصار

(1)

الحل :

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\cos^2\alpha = \frac{16}{25} \longrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

α زاوية حادة $\quad \therefore \cos\alpha = \frac{4}{5}$

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

$$\sin^2\beta = 1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2$$

$$\sin^2\beta = \frac{49}{625} \qquad \sin\beta = \pm\frac{7}{25}$$

β زاوية حادة $\quad \therefore \sin\beta = \frac{7}{25}$

$$(1)\quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{24}{25}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{7}{25}\right)$$

$$= \frac{117}{125}$$

$$(2)\quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\beta$$

$$= \frac{24}{25}$$

(2)

إذا كان: $\sin\alpha = \frac{4}{5}\ ,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos\beta = \frac{-12}{13}\ ,\ \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

أوجد كلًّا مما يلي:

(a) $\sin(\alpha+\beta)$ (b) $\cos(\alpha-\beta)$ (c) $\tan(\alpha-\beta)$

الحل:

نوجد أولًا: $\cos\alpha\ ,\ \sin\beta\ ,\ \tan\alpha\ ,\ \tan\beta$

متطابقة فيثاغورث
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

تعويض
$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

فصل المتغير
$\cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}$

بسّط
$\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$

$\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ أو $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

$\because\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha > 0$

$\therefore\ \cos\alpha = \frac{3}{5}$

متطابقة فيثاغورث
- $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

تعويض
$\sin^2\beta + \left(\frac{-12}{13}\right)^2 = 1$

فصل المتغير
$\sin^2\beta = 1 - \frac{144}{169}$

بسّط
$\sin^2\beta = \frac{25}{169}$

$\sin\beta = -\frac{5}{13}$ أو $\sin\beta = \frac{5}{13}$

$\because\ \pi < \beta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin\beta < 0$

$\therefore\ \sin\beta = \frac{-5}{13}$

تابع الحل :

- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{4}{3}$
- $\tan\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{\frac{-5}{13}}{\frac{-12}{13}} = \dfrac{5}{12}$

a $$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) \\ &= \frac{-48}{65} - \frac{15}{65} = -\frac{63}{65}\end{aligned}$$

b $$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ &= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) \\ &= \frac{-36}{65} - \frac{20}{65} = -\frac{56}{65}\end{aligned}$$

c $$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \\ &= \frac{\frac{4}{3} - \frac{5}{12}}{1+\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{12}\right)} \\ &= \frac{\frac{11}{12}}{\frac{56}{36}} = \frac{33}{56}\end{aligned}$$

(3)

اكتب المقدار على صورة جيب أو جيب التمام أو ظل الزاوية.

- $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$
- $\dfrac{\tan 2y + \tan 3x}{1 - \tan 2y \tan 3x}$

الحل

$$\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$$
$$= \sin(3x - x) = \sin 2x$$

....

$$\frac{\tan 2y + \tan 3x}{1 - \tan 2y \tan 3x} = \tan(2y + 3x)$$

(4)

أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

$$2\csc 2x = \csc^2 x \tan x$$

الحل:

$$\frac{2}{\sin 2x} = \frac{2}{2\sin x\cos x} = \frac{1}{\sin^2 x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \csc^2 x \tan x$$

....

$$\sin 3x = (\sin x)(4\cos^2 x - 1)$$

الحل:

$$\sin 3x = \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x = 2\sin x\cos^2 x + (2\cos^2 x - 1)\sin x = \sin x(4\cos^2 x - 1)$$

....

$$\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$$

الحل:

$$\cos 4x = \cos 2(2x) = 1 - 2\sin^2 2x = 1 - 2(2\sin x\cos x)^2 = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$$

(5)

أثبت صحة المتطابقة: $\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

الحل:

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

الطرف الأيمن $= \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{1-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

المقام المشترك

$$= \dfrac{\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

بسّط

$$= \dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

متطابقة فيثاغورث

$$= \cos^2\theta-\sin^2\theta$$

متطابقة الضعف

$= \cos 2\theta =$ الطرف الأيسر

(6)

أثبت صحة المطابقة: $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$$\sin(3\theta) = \sin(2\theta + \theta)$$

$$= \sin 2\theta \cos\theta + \cos 2\theta \sin\theta$$

$$= 2\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)$$

$$= 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta) + \sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)$$

$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

(7)

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\csc\theta$

الحل :

الطرف الأيسر

يتم عمل توحيد مقامات

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+1+\cos^2\theta+2\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

وبأستخدام متطابقه فيثاغورث

$$=\frac{2(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$=2\csc\theta$$

(8)

أثبت صحة المتطابقة: $2\cot x\csc x = \frac{1}{\sec x - 1} + \frac{1}{\sec x + 1}$

الحل:

نبسط الطرف الأيمن إلى صورة الطرف الأيسر

أوجد مقامًا مشتركًا

$$\frac{1}{\sec x - 1} + \frac{1}{\sec x + 1} = \frac{(\sec x + 1) + (\sec x - 1)}{(\sec x - 1)(\sec x + 1)}$$

بسّط

$$= \frac{2\sec x}{\sec^2 x - 1}$$

$$\boxed{1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta}$$

متطابقة فيثاغورث

$$= \frac{2\sec x}{\tan^2 x}$$

استخدم متطابقة المقلوب

$$= 2\sec x \cot^2 x$$

بسّط

$$= \frac{2}{\cos x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{2\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$= 2\cot x\csc x$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(9)

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$

الحل:

نبدأ بالطرف الأيسر ونصل إلى صورة الطرف الأيمن

ضرب كل من البسط والمقام في $(1+\sin x)$

$$\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{\cos x}{1-\sin x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}$$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$=\frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$$

$\boxed{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$

متطابقة فيثاغورث

$$=\frac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x}$$

اختصار العامل المشترك

$$=\frac{1+\sin x}{\cos x}$$

$\therefore$ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(10)

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = (\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$

الحل :

$$\frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = \frac{\csc^2\theta - 1}{1+\csc\theta}$$

$$= \frac{(\csc\theta - 1)(\csc\theta + 1)}{1+\csc\theta}$$

$$= \csc\theta - 1$$

$$(\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} - 1$$

$$= \csc\theta - 1$$

$$\therefore \frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = (\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$$

(11)

أثبت أن: $\frac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \sin x + \sin x \tan^2 x$

الحل :

توحيد مقامات

$$\frac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \frac{\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x} + \cos x}$$

القسمه = الضرب فى المقلوب

$$= \frac{(1 + \sin x)}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x(1 + \sin x)}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$= \sin x(1 + \tan^2 x)$$

$$= \sin x + \sin x \tan^2 x$$

نستنتج أن: $\frac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \sin x + \sin x \tan^2 x$

(12)

حل المعادلة: $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

الحل:

$$2\cos x + \sqrt{3} = 0$$
$$2\cos x = -\sqrt{3}$$
$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$$\therefore \cos\alpha = |\cos x|$$
$$= \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$$
$$\because \cos x < 0$$

$\therefore$ x تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث

عندما x تقع في الربع الثاني: $x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\therefore x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

وعندما x تقع في الربع الثالث: $x = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$= \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$\therefore$ حل المعادلة: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$، حيث $k \in \mathbb{Z}$

(13)

حل المعادلة: $4\sin\theta + 1 = \sin\theta$، حيث $0 \le \theta < 2\pi$

الحل:

$4\sin\theta + 1 = \sin\theta$

فصل المتغير $4\sin\theta - \sin\theta = -1$

بسّط $3\sin\theta = -1$

$\sin\theta = -\frac{1}{3}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$\therefore \ \sin\alpha = |\sin\theta|$

$= \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$

$\therefore \ \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0.34 \text{ radians}$

$\because \ \sin\theta < 0 \ \therefore$ θ تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع

عندما θ تقع في الربع الثالث

$\therefore \ \theta \approx \pi + 0.34$

$\approx 3.4816 \quad , \quad 3.4816 \in [0, 2\pi)$

عندما θ تقع في الربع الرابع

$\therefore \ \theta \approx 2\pi - 0.34$

$\approx 5.9432 \quad , \quad 5.9432 \in [0, 2\pi)$

حل المعادلة: $\theta \approx 5.9432$ أو $\theta \approx 3.4816$

ملاحظة:

$2\pi \approx 6.2832$

(14)

حل المعادلة: $\tan x = \sqrt{3}$

الحل:

$\tan x = \sqrt{3}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x.

$$\therefore \tan\alpha = |\tan x| = |\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$\because \tan x > 0 \quad \therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث

ولكن الدالة $\tan x$ هي دالة دورية ودورتها π

فيكون: $\tan(\pi + x) = \tan x$

ومنه يكون حل المعادلة: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

(15)

حل المعادلة: $2\cos\theta\sin\theta = -\sin\theta$

الحل:

$2\cos\theta\sin\theta = -\sin\theta$

$2\cos\theta\sin\theta + \sin\theta = 0$

$\sin\theta(2\cos\theta + 1) = 0$

تحليل إلى عوامل

$\sin\theta = 0$ أو $2\cos\theta + 1 = 0$

خاصية الضرب في الصفر

$\sin\theta = 0$ أو $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ أو $\sin\theta = 0$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$\therefore \cos\alpha = |\cos\theta|$

$= \left|-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\right|$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\because \cos\theta < 0$

$\therefore$ θ تقع في الربع الثاني أو في الربع الثالث.

عندما تقع θ في الربع الثاني:

$\theta = (\pi - \alpha) + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

$= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$\therefore$ θ زاوية ربعية

$\therefore \theta = 0$ أو $\theta = \pi$

$\therefore \theta = 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

عندما θ تقع في الربع الثالث

$\therefore \theta = \pi + \alpha + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

$= \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

حل المعادلة: $\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi$ أو $\theta = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

(16)

حل المعادلة: $\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

الحل :

$\cos\theta(\sin\theta - 1) = 0$

$\cos\theta = 0$ أو $\sin\theta = 1$

$\cos\theta = 0$

$\therefore$ θ زاوية ربعية

$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad , \; k \in \mathbb{Z}$

$, \quad \theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad : k \in \mathbb{Z}$

أو

$\sin\theta = 1$

$\therefore$ θ زاوية ربعية

$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad , \; k \in \mathbb{Z}$

(17)

المعادلة: $4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$ هي معادلة تربيعية في $\sin x$

بالتحليل:

$(2\sin x - 1)(2\sin x - 3) = 0$

$2\sin x - 1 = 0$ أو $2\sin x - 3 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$ أو $\sin x = \frac{3}{2}$

$\sin x = \frac{3}{2}$

$\because$ $y = \sin x$ مداها $[-1 , 1]$

$\frac{3}{2} \notin [-1,1]$

$\therefore$ $\sin x = \frac{3}{2}$ ليس لها حل

أو

$\sin x = \frac{1}{2}$

نأخذ $\sin x = \frac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x.

$\therefore \ \sin\alpha = |\sin x|$

$= \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$\therefore \ \alpha = \frac{\pi}{6}$

$\because$ $\sin x > 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الثاني.

عندما x تقع في الربع الأول

$\therefore \ x = \alpha + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

عندما x تقع في الربع الثاني

$\therefore \ x = (\pi - \alpha) + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

$= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

حل المعادلة: $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

(18)

حل المعادلة: $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$

الحل :

بالتحليل لمعادلة من الدرجه الثانيه $(cosx + 1)(\ cosx + 2\ ) = 0$

كل قوس يتم مساواته ب صفر $cosx = -2$ أو $cosx = -1$

ليس لها حل $x = \pi + 2k\pi$

حل المعادلة $x = \pi + 2k\pi$ حيث $k \in Z$

(19)

إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ، فأوجد $\sin 2\theta$.

الحل:

متطابقة فيثاغورث

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$= 1 - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}$$

$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad \therefore \quad \cos\theta < 0$

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

متطابقة جيب ضعف الزاوية

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \times \frac{-1}{\sqrt{2}} \times \frac{-1}{\sqrt{2}} = 1$$

(20)

إذا كانت: $180° < \theta < 270°$ ، $\sin\theta = -\frac{24}{25}$ ،

فأوجد $\sin\frac{\theta}{2}$.

الحل:

نوجد أولًا $\cos\theta$

متطابقة فيثاغورث $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

عوّض $\cos^2\theta + \left(\frac{-24}{25}\right)^2 = 1$

$$\cos^2\theta = \frac{49}{625}$$

لأن θ في الربع الثالث $\cos\theta = \frac{-7}{25}$

نوجد الآن $\frac{\theta}{2}$ $\because\ 180° < \theta < 270°$

ومنه $\frac{\theta}{2}$ في الربع الثاني $\therefore\ 90° < \frac{\theta}{2} < 135°$

متطابقة نصف الزاوية $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

عوّض، اختر الجذر الموجب، لأن $\frac{\theta}{2}$ في الربع الثاني $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{-7}{25}\right)}{2}} = \frac{4}{5}$