



قناة الفلاح للرياضيات



الصف الحادي عشر علمي

الفصل الدراسي الثاني

حلول

المراجعة النهائية



@MOHAMMAD.FALAH_MATH



@MOH82FALAH
/ محمد نوري الفلاح

(1) إذا كان $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 5 - 2i$ فأوجد:

1) $\overline{3z_1 - 2z_2}$

2) $\frac{z_2}{z_1}$

1) $3z_1 - 2z_2 = 3(3 + 4i) - 2(5 - 2i) = 9 + 12i - 10 + 4i = -1 + 16i$

$\overline{3z_1 - 2z_2} = \overline{-1 + 16i} = -1 - 16i$

2) $\frac{z_2}{z_1} = \frac{5 - 2i}{3 + 4i} = \frac{5 - 2i}{3 + 4i} \cdot \frac{3 - 4i}{3 - 4i} = \frac{15 - 20i - 6i + 8i^2}{(3)^2 + (4)^2}$

$= \frac{15 - 20i - 6i - 8}{9 + 16}$

$= \frac{7 - 26i}{25} = \frac{7}{25} - \frac{26}{25}i$

(2) إذا كان $z_1 = 5 - 4i$, $z_2 = 3 + i$ فأوجد:

1) $z_1 \cdot z_2$

2) $\overline{z_1 + z_2}$

3) $(z_2)^{-1}$

1) $z_1 \cdot z_2$
 $= (5 - 4i)(3 + i)$
 $= 15 + 5i - 12i - 4i^2$
 $= 15 + 5i - 12i + 4$
 $= 19 - 7i$

2) $z_1 + z_2 = (5 - 4i) + (3 + i)$
 $= (5 + 3) + (-4i + i)$
 $= 8 - 3i$
 $\overline{z_1 + z_2} = \overline{8 - 3i}$
 $= 8 + 3i$

3) $z_2^{-1} = \frac{1}{z_2}$
 $= \frac{1}{3 + i}$
 $= \frac{1}{3 + i} \cdot \frac{3 - i}{3 - i}$
 $= \frac{3 - i}{(3)^2 + (1)^2}$
 $= \frac{3 - i}{10}$
 $= \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$



(3) إذا كان: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 - 4i$

(2) اكتب العدد z_1 في الصورة المثلثية

(1) أوجد $2z_1 - \bar{z}_2$

$$1) 2z_1 - \bar{z}_2 = 2(1+i) - \overline{(3-4i)}$$

$$= 2 + 2i - (3 + 4i) = 2 + 2i - 3 - 4i = -1 - 2i$$

$$2) z_1 = 1 + i$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

زاوية الاسناد α :

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{1}{1} \right| = \frac{\pi}{4}$$

x موجبة ، y موجبة

θ تقع في الربع الأول

$$\theta = \alpha = \frac{\pi}{4}$$

الصورة المثلثية: $Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$Z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

(4) اكتب بالصورة الجبرية العدد المركب: $\left(\frac{5-2i}{i+3} \right)$

$$\overline{\left(\frac{5-2i}{i+3} \right)} = \frac{\overline{5-2i}}{\overline{i+3}} = \frac{5+2i}{3-i}$$

$$= \frac{5+2i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i}$$

$$= \frac{15 + 5i + 6i + 2i^2}{(3)^2 + (-1)^2} = \frac{15 + 5i + 6i - 2}{10}$$

$$= \frac{13 + 11i}{10} = \frac{13}{10} + \frac{11}{10}i$$



(5) إذا كان: $z_1 = -2 + 2i$, $z_2 = 1 - i$

(2) حل المعادلة $2z + \bar{z}_1 = 3i (z_2)^2$

(1) ضع العدد z_2 في الصورة المثلثية

1) $\bar{z}_2 = 1 - i$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

زاوية الاستدارة α

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{-1}{1} \right| = \frac{\pi}{4}$$

x موجبة، y سالبة

θ تقع في الربع الرابع

$$\theta = 2\pi - \alpha$$

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

الصورة المثلثية:

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

2)

$$2z + \bar{z}_1 = 3i (z_2)^2$$

$$2z + (-2 + 2i) = 3i (1 - i)^2$$

$$2z - 2 - 2i = 3i (1 - 2i + i^2)$$

$$2z - 2 - 2i = 3i (1 - 2i - 1)$$

$$2z - 2 - 2i = 3i (-2i)$$

$$2z - 2 - 2i = 6$$

$$2z = 6 + 2 + 2i$$

$$\frac{2z}{2} = \frac{8 + 2i}{2}$$

$$z = 4 + i$$

$$\{4 + i\} = e^{0.3}$$

(6) اكتب العدد $\frac{2}{3-i}$ في الصورة الجبرية.

$$\frac{2}{3-i} = \frac{2}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i}$$

$$= \frac{6 + 2i}{(3)^2 + (-1)^2}$$

$$= \frac{6 + 2i}{10}$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$$









(13) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب: $z = -3 - 4i$

نفرض $w = m + ni$ جذرا تربيعيا للعدد z فيكون $w^2 = z$

$$(m + ni)^2 = -3 - 4i$$

$$m^2 - n^2 + 2mni = -3 - 4i$$

$$m^2 - n^2 = -3 \quad (1)$$

$$2mn = -4 \quad (2)$$

$$|w|^2 = |z|$$

$$(\sqrt{m^2 + n^2})^2 = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

$$m^2 + n^2 = 5 \quad (3)$$

جمع ① مع ③

$$2m^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

نعوض في ③

$$1 + n^2 = 5 \Rightarrow n^2 = 5 - 1 = 4 \Rightarrow n = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

من المعادلة 2 نجد m, n لهما قيمتين مختلفتين

$$w_1 = 1 - 2i \quad \text{و} \quad w_2 = -1 + 2i$$



ثم ارسم بيانها.

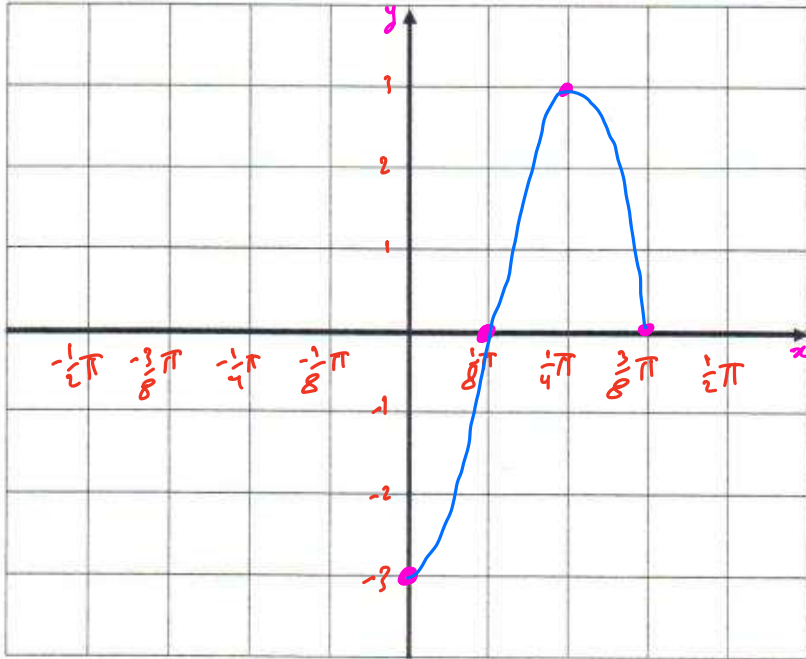
14) أوجد السعة والدورة للدالة: $y = -3 \cos 4x$, $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{8}$

$a = 3$, $b = 4$

السعة: $|a| = |-3| = 3$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$

ربع الدورة: $\frac{1}{2}\pi \div 4 = \frac{1}{8}\pi$



x	0	$\frac{1}{8}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$4x$	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\cos 4x$	1	0	-1	0	1
y	-3	0	3	0	-3

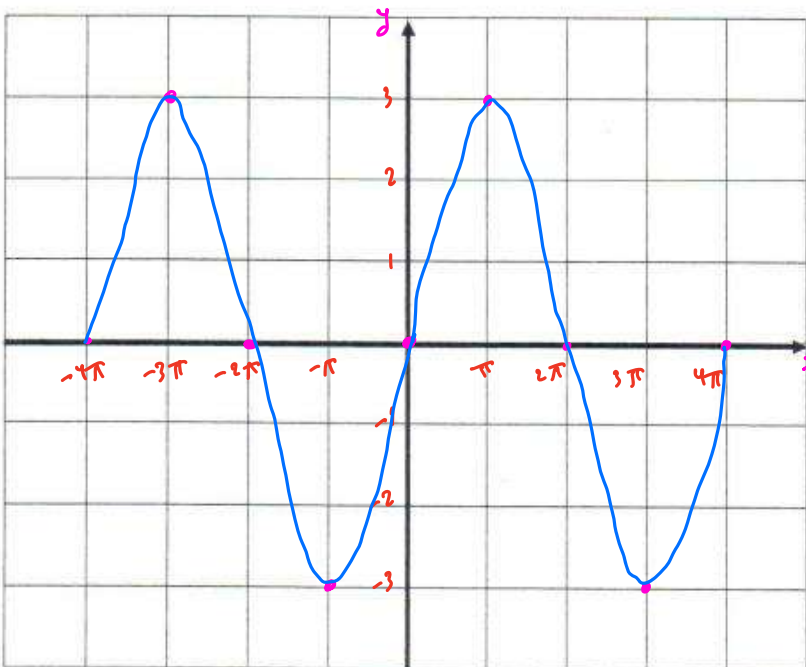
15) أوجد السعة والدورة للدالة: $y = 3 \sin (\frac{1}{2}x)$, $-4\pi \leq x \leq 4\pi$

$a = 3$, $b = \frac{1}{2}$

السعة: $|a| = |3| = 3$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$

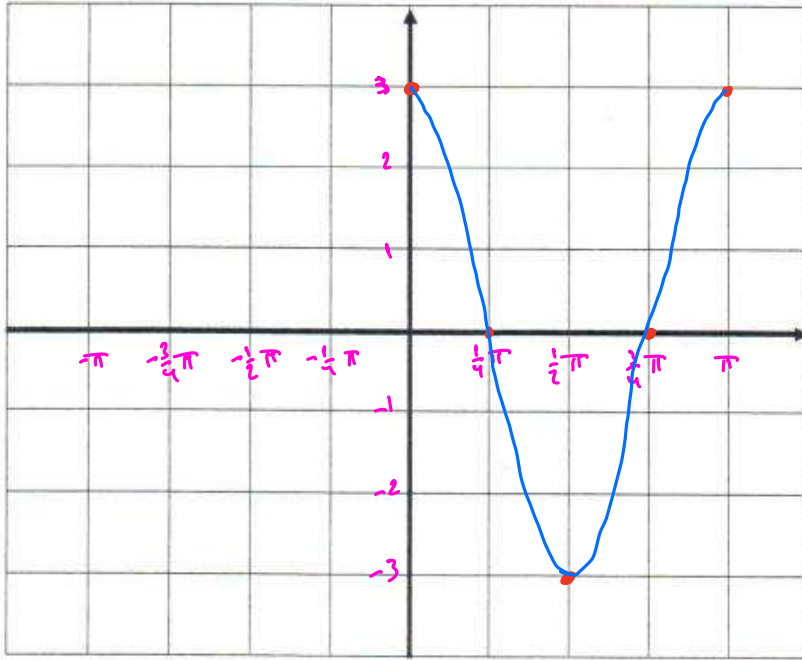
ربع الدورة: $4\pi \div 4 = \pi$



x	0	π	2π	3π	4π
$\frac{1}{2}x$	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin \frac{1}{2}x$	0	1	0	-1	0
y	0	3	0	-3	0



(16) أوجد السعة والدورة ثم ارسم دورة واحدة لبيان الدالة: $y = 3 \cos 2x$



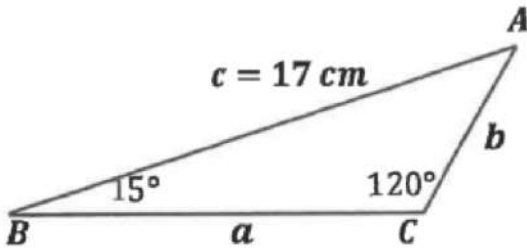
$a = 3$ و $b = 2$

السعة $|a| = |3| = 3$

الدورة $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

ربع الدورة: $\pi \div 4 = \frac{1}{4}\pi$

x	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π
$2x$	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\cos 2x$	1	0	-1	0	1
y	3	0	-3	0	3



(17) حل المثلث ABC :

$\beta = 15^\circ$, $\gamma = 120^\circ$, $c = 17 \text{ cm}$
مجموع قياسات زوايا المثلث 180°

$\alpha = 180 - (15 + 120) = 45^\circ$

$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$

$\frac{\sin 45}{a} = \frac{\sin 15}{b} = \frac{\sin 120}{17}$

$\frac{\sin 45}{a} = \frac{\sin 120}{17}$

$a = \frac{17 \times \sin 45}{\sin 120}$

$a \approx 13.88 \text{ cm}$

$\frac{\sin 15}{b} = \frac{\sin 120}{17}$

$b = \frac{17 \times \sin 15}{\sin 120}$

$b \approx 5.08 \text{ cm}$



(18) حل ΔABC حيث: $\alpha = 36^\circ$, $\beta = 48^\circ$, $a = 8 \text{ cm}$

مجموع قياسات زوايا المثلث 180°

$$\gamma = 180 - (36 + 48) = 96^\circ$$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 36}{8} = \frac{\sin 48}{b} = \frac{\sin 96}{c}$$

$$\frac{\sin 36}{8} = \frac{\sin 48}{b}$$

$$b = \frac{8 \times \sin 48}{\sin 36}$$

$$b \approx 10.11 \text{ cm}$$

$$\frac{\sin 36}{8} = \frac{\sin 96}{c}$$

$$c = \frac{8 \times \sin 96}{\sin 36}$$

$$c \approx 13.53 \text{ cm}$$

(19) حل ΔABC حيث: $a = 7 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$, $\alpha = 26.3^\circ$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 26.3}{7} = \frac{\sin \beta}{6} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 26.3}{7} = \frac{\sin \beta}{6}$$

$$\sin \beta = \frac{6 \times \sin 26.3}{7} \approx 0.379$$

shift $\rightarrow \sin \rightarrow 0.379$

$$\beta = 22.27^\circ$$

$$\beta_2 = 180 - 22.27 = 157.7$$

$$\gamma = 180 - (26.3 + 22.27) = 131.43^\circ$$

$$\alpha + \beta_2 = 26.3 + 157.73$$

$$= 184.03$$

$$\frac{\sin 26.3}{7} = \frac{\sin 131.43}{c}$$

$$c = \frac{7 \times \sin 131.43}{\sin 26.3}$$

$$\alpha + \beta_2 > 180$$

مرفوضة

$$c = 11.845 \text{ cm}$$



(20) حل ΔABC حيث: $a = 9 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$, $\gamma = 20^\circ$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = (9)^2 + (7)^2 - 2(9)(7) \cos 20 \approx 11.59$$

$$c = \sqrt{11.59} = 3.4 \text{ cm}$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(7)^2 + (3.4)^2 - (9)^2}{2 \times 7 \times 3.4} = -\frac{73}{170}$$

$$\alpha \approx 115.4^\circ$$

مجموع قياسات زوايا المثلث 180°

$$\beta = 180 - (20 + 115.4) = 44.6^\circ$$

(21) حل ΔABC حيث: $b = 9 \text{ cm}$, $c = 6 \text{ cm}$, $\alpha = 60^\circ$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = (9)^2 + (6)^2 - 2(9)(6) \cos 60 = 63$$

$$a = \sqrt{63} = 3\sqrt{7} \text{ cm}$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(3\sqrt{7})^2 + (6)^2 - (9)^2}{2(3\sqrt{7})(6)} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

$$\beta \approx 79.1^\circ$$

مجموع قياسات زوايا المثلث 180°

$$\gamma = 180 - (60 + 79.1) = 40.9^\circ$$



(22) حل ΔABC حيث: $a = 9 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(7)^2 + (5)^2 - (9)^2}{2(7)(5)} = -\frac{1}{10}$$

$$\alpha \approx 95.7^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(9)^2 + (5)^2 - (7)^2}{2(9)(5)} = \frac{19}{30}$$

$$\beta \approx 50.7$$

مجموع قياسات زوايا المثلث 180°

$$\gamma = 180 - (95.7 + 50.7) = 33.6^\circ$$

(23) ABC مثلث فيه: $a = 9 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$ أوجد:

(1) قياس أكبر زاوية (2) مساحة سطح المثلث ABC مستخدماً قاعدة هيرون

(1) الزاوية الأكبر α تقابل أطول ضلع a

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(7)^2 + (5)^2 - (9)^2}{2 \times 7 \times 5} = -\frac{1}{10}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(-\frac{1}{10} \right) \approx 95.7^\circ$$

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+7+5}{2} = 10.5 \quad (2)$$

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{10.5(10.5-9)(10.5-7)(10.5-5)} \\ \approx 17.4 \text{ cm}^2$$



(24) أوجد مساحة سطح مثلث أطوال أضلاعه: 7 cm , 5 cm , 8 cm

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+5+8}{2} = 10$$

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$A = \sqrt{10(10-7)(10-5)(10-8)}$$

$$= 10\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

(25) أثبت صحة المتطابقة: $\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} = 2 \csc^2 x$

$$\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1+\cos x + 1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

نوع المقامات

$$= \frac{2}{1-\cos^2 x}$$

$$= \frac{2}{\sin^2 x}$$

$$= 2 \csc^2 x$$



$$\tan x + \cot x = \sec x \cdot \csc x$$

(26) أثبت صحة المتطابقة:

$$\begin{aligned} \tan x + \cot x &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \sin x} \\ &= \frac{1}{\cos x \cdot \sin x} \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x} \\ &= \sec x \cdot \csc x \end{aligned}$$

نوصف الخطوات

$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$$

(27) أثبت صحة المتطابقة:

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1 - \sin x} &= \frac{\cos x}{1 - \sin x} \cdot \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} \\ &= \frac{\cos x (1 + \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} \\ &= \frac{\cos x (1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x} \\ &= \frac{\cos x (1 + \sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1 + \sin x}{\cos x} \end{aligned}$$



$$\frac{(1-\cos \theta)(1+\cos \theta)}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta$$

(28) أثبت صحة المتطابقة:

$$\begin{aligned} \frac{(1-\cos \theta)(1+\cos \theta)}{\cos^2 \theta} &= \frac{1-\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 \\ &= \tan^2 \theta \end{aligned}$$

$$\tan^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x \cdot \tan^2 x$$

(29) أثبت صحة المتطابقة:

$$\begin{aligned} \tan^2 x - \sin^2 x &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x \\ &= \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} \\ &= \sin^2 x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \sin^2 x \cdot \tan^2 x \end{aligned}$$



(30) حل المعادلة : $2 \cos x = \sqrt{3}$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \alpha = |\cos x| = \left| \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} : \text{زاوية الاسناد } \alpha$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{6}$$

$\cos x$ موجبة

x تقع في الربع الرابع

$$x = 2\pi - \alpha + 2k\pi$$

$$x = 2\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

x تقع في الربع الأول

$$x = \alpha + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

حلول المعادلة :

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(31) حل المعادلة : $\cos x = -\frac{1}{2}$ حيث $0 \leq x \leq 2\pi$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha = |\cos x| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

$\cos x$ سالبة

x تقع في الربع الثاني

$$x = \pi - \alpha$$

$$x = \pi - \frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} \in [0, 2\pi]$$

x تقع في الربع الثالث

$$x = \pi + \alpha$$

$$x = \pi + \frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{4\pi}{3} \in [0, 2\pi]$$

حلول المعادلة

$$x = \frac{2\pi}{3}, \quad x = \frac{4\pi}{3}$$











(40) إذا كان: $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\cos \beta = \frac{-12}{13}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, فأوجد

1) $\sin (\alpha + \beta)$

2) $\tan 2 \beta$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

$$\sin \beta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \beta}$$

$$= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{-12}{13}\right)^2}$$

$$= \pm \frac{5}{13}$$

في الربع الثالث $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

$$\sin \beta = -\frac{5}{13}$$

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = -\frac{5}{13} \div -\frac{12}{13} = \frac{5}{12}$$

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{-12}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{-5}{13}$$

$$= -\frac{63}{65}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}$$

$$= \pm \frac{3}{5}$$

في الربع الأول $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$2) \tan 2 \beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = \frac{2 \times \frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}$$



(41) إذا كان: $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = \frac{24}{25}$ حيث α , β زاويتين حادتين، أوجد كلا مما يلي:

1) $\cos (\alpha - \beta)$

2) $\sin (\frac{\pi}{2} - \beta)$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

$$\sin \beta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \beta}$$

$$= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2}$$

$$= \pm \frac{7}{25}$$

β زاوية حادة

$$\sin \beta = \frac{7}{25}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$= \pm \frac{4}{5}$$

α زاوية حادة

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

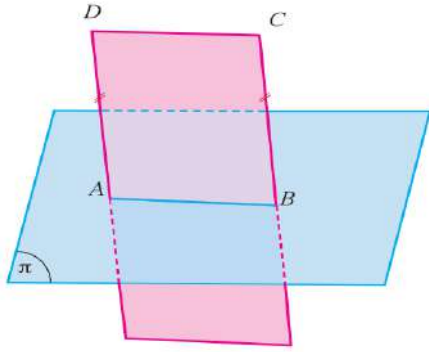
$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{24}{25} + \frac{3}{5} \times \frac{7}{25}$$

$$= \frac{117}{125}$$

$$2) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \cos \beta = \frac{24}{25}$$





(42) في الشكل المقابل:

$$\overrightarrow{AB} \subset \pi, \overrightarrow{AD} // \overrightarrow{BC}, AD = BC$$

أثبت أن $\overrightarrow{CD} // \pi$.

$$\overrightarrow{AD} // \overrightarrow{BC}$$

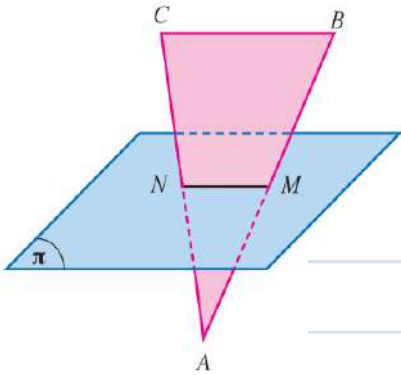
مستقيمان متوازيان ينعنان مستوي واحد $(ABCD)$

الشكل الرباعي ABCD فيه $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD} // \overrightarrow{BC}$ إذاً ABCD متوازي أضلاع

$$\overrightarrow{DC} // \overrightarrow{AB} \quad \text{وفيه}$$

$$\overrightarrow{AB} \subset \pi \quad \text{لكن}$$

$$\text{إذاً } \overrightarrow{CD} // \pi \quad \text{نظرياً ١}$$



(43) في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه ، M منتصف $\overline{AB}$ ،

N منتصف $\overline{AC}$ ، M , N تنتميان إلى المستوي π .

أثبت أن $\overrightarrow{BC} // \pi$

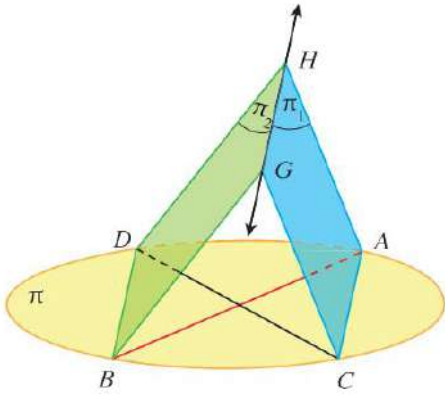
في المثلث ABC

$$\overrightarrow{BC} // \overrightarrow{MN} \in \begin{cases} M \text{ منتصف } AB \\ N \text{ منتصف } AC \end{cases}$$

$$\left. \begin{matrix} M \in \pi \\ N \in \pi \end{matrix} \right\} \Rightarrow MN \subset \pi \quad \left. \begin{matrix} \overrightarrow{BC} // \overrightarrow{MN} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{BC} // \pi$$

نظرياً ١





(44) في الشكل المقابل: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ قطران في مستوي الدائرة π
 $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$. أثبت أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$

$\overline{AB}$, $\overline{CD}$ قطران في الدائرة
 فيها متقاطعان وينصف كل منهما الآخر
 فشكل $ABCD$ متطيل

$$AC \parallel DB \quad (1)$$

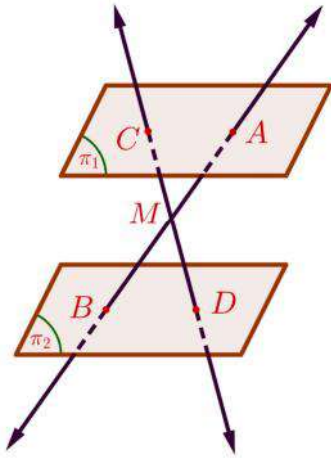
$$\overline{AC} \subset \pi_1, \overline{DB} \subset \pi_2, \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH} \quad (2)$$

من (1) و (2) نـ

$$\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DB}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AC} \\ \overleftrightarrow{AC} \subset \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{GH} \parallel \pi$$

أي أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$



(45) في الشكل المقابل: π_1 , π_2 مستويين متوازيين M نقطة

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD} \text{ ، أثبت أن: } \overline{AB} \cap \overline{CD} = \{M\} \text{ واقعة بينهما،}$$

$$\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{M\}$$

مستقيمان متقاطعان يعينان مستويًا واحدًا π

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \parallel \pi_2 \\ \pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{CA} \\ \pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{BD} \end{array} \right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{CA} \parallel \overleftrightarrow{BD}$$

نظرية 4

فالمثلثات AMC , BMD متشابهتان

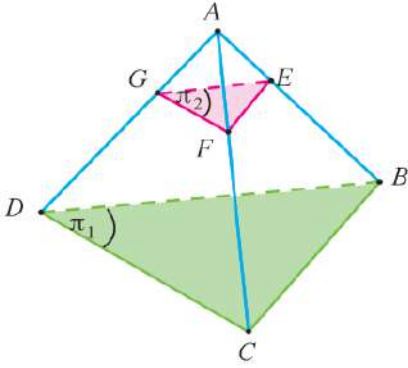
$$\frac{AM}{BM} = \frac{MC}{MD} = \frac{AC}{BD}$$

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AC}{BD} \text{ ومنه}$$



(46) في الشكل المقابل ، هرم ثلاثي. المستويان π_1, π_2 متوازيان.

إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ ، فأوجد FG ، $FG = 6 \text{ cm}$



$$\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{1}{4}$$

$$(ABC) \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{BC}$$

$$(ABC) \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{EF}$$

$$\pi_1 \parallel \pi_2$$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{BC}$$

نظرية 4

المثلث ABC فيه $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

نالمثلثان AEF ، ABC متشابهان

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

نالمثلثان AFG ، ACD متشابهان

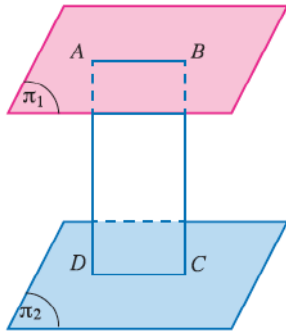
$$\frac{AF}{AC} = \frac{AG}{AD} = \frac{FG}{CD} \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد

$$\frac{FG}{CD} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{6}{CD} = \frac{1}{4}$$

$$CD = 24 \text{ cm}$$





(47) في الشكل المقابل: $\pi_1 \parallel \pi_2$ ، A, B نقطتان في π_1
 C, D نقطتان في π_2 حيث A, B, C, D في مستوي واحد
 أثبت أن $\overline{AD} \perp \pi_2$ ، $\overline{BC} \perp \pi_2$ مستطيل.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AD} \perp \pi_2 \\ \overrightarrow{BC} \perp \pi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC} \quad (1)$$

النقاط A, B, C, D في مستوي واحد هو $(ABCD)$

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \cap (ABCD) = \overrightarrow{AB} \\ \pi_2 \cap (ABCD) = \overrightarrow{DC} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC} \quad (2)$$

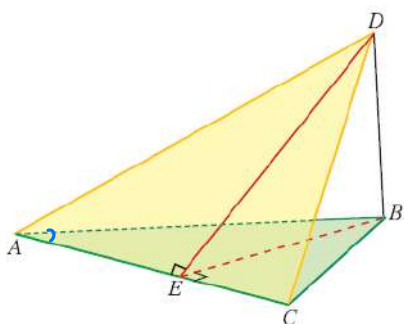
$$\pi_1 \parallel \pi_2$$

من (1) و (2) نجد الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع
 لكن

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AD} \perp \pi_2 \\ \overline{DC} \subset \pi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{AD} \perp \overline{DC}$$

إذاً الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع زاوية قائمة
 الشكل $ABCD$ مستطيل





48 في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC

$$DB = 5 \text{ cm} , AB = 10 \text{ cm} , m(\hat{BAC}) = 45^\circ$$

$$\overline{DB} \perp (ABC) , \overline{BE} \perp \overline{AC} , \overline{DE} \perp \overline{AC}$$

أوجد: (1) BE

(2) قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC

$$\overline{BE} \perp \overline{AC}$$

(1)

المثلث AEB قائم في E وفيه $m(\hat{BAC}) = 45^\circ$

$$\sin 45^\circ = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \sin 45 = \frac{BE}{10}$$

$$BE = 10 \sin 45 = 5\sqrt{2}$$

$\overleftrightarrow{AC}$ هو خط تقاطع المستويين BAC , DAC

(2)

$$\overline{BE} \perp \overline{AC} , \overline{BE} \subset (BAC)$$

$$\overline{DE} \perp \overline{AC} , \overline{DE} \subset (DAC)$$

إذاً الزاوية المستوية للزاوية الزوجية هي $\hat{BED}$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{DB} \perp (ABC) \\ \overline{BE} \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{DB} \perp \overline{BE}$$

فالمثلث DBE قائم في B

$$\tan(\hat{BED}) = \frac{DB}{BE} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$m(\hat{BED}) = 35.26^\circ$$

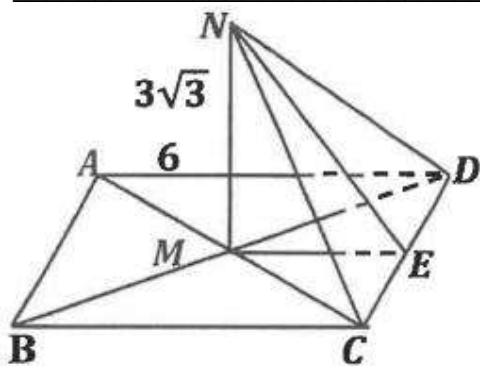


(49) $ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M

وفيه $AD = 6 \text{ cm}$ أقيم $\overline{NM}$ عموداً على $(ABCD)$

حيث N خارج مستواه بحيث $MN = 3\sqrt{3}$ ، E منتصف $\overline{CD}$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$ ، NCD



$\overrightarrow{CD}$ هي الحافة المشتركة بين المستويين $ABCD$ ، NCD

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{MN} \perp (ABCD) \\ \overrightarrow{CD} \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{CD} \quad (1)$$

في المثلث CDM المتطابق الضلعين (من خواص المستطيل)
 E منتصف $\overline{CD}$

$$\overrightarrow{ME} \perp \overrightarrow{CD} \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد $\overrightarrow{NE} \subset (MNE)$ و $\overrightarrow{CD} \perp (MNE)$
 $\overrightarrow{NE} \perp \overrightarrow{CD}$

$$NE \subset (NCD)$$

$\angle MEN$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overrightarrow{CD}$

في المثلث ACD لدينا EM وأهلية بين منتصف الضلعين $\overline{CA}$ ، $\overline{CD}$

$$EM = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \text{ cm}$$

في المثلث MEN القائم الزاوية في M : $\tan(\angle MEN) = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

$$m(\angle MEN) = 60^\circ$$

قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$ و NCD هو 60°



(50) حل المعادلة: ${}_nP_4 = 5 \times {}_nP_3$, $n \geq 4$

$$\cancel{n}(\cancel{n-1})(\cancel{n-2})(n-3) = 5 \cancel{n}(\cancel{n-1})(\cancel{n-2}) \quad , n \geq 4$$

$$n - 3 = 5$$

$$n = 5 + 3$$

$$n = 8$$

(51) حل المعادلة: ${}_6P_r = 4 \times {}_6P_{r-1}$

$$\frac{6!}{(6-r)!} = 4 \times \frac{6!}{(6-(r-1))!}$$

$$\frac{6!}{(6-r)!} = 4 \times \frac{6!}{(7-r)!}$$

$$\frac{\cancel{6!}}{(6-r)!} = 4 \times \frac{\cancel{6!}}{(7-r)(\cancel{6-r})!}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{4}{7-r}$$

$$7-r = 4$$

$$r = 3$$



(52) حل المعادلة: ${}_nC_2 = 105$

$$\frac{{}_nP_2}{2!} = 105$$

$$\frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 105$$

$$n(n-1) = 210$$

$$n(n-1) = 15 \times 14$$

$$n = 15$$

(53) حل المعادلة: ${}_nC_4 = {}_nC_{n-2}$

$$\frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n!}{(n-2)!(n-n+2)!}$$

$$\frac{\cancel{n!}}{4!(n-4)!} = \frac{\cancel{n!}}{(n-2)! 2!}$$

$$\frac{1}{4 \times 3 \times 2! \cancel{(n-4)!}} = \frac{1}{(n-2)(n-3) \cancel{(n-4)!} \times 2!}$$

$$\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{(n-2)(n-3)}$$

$$(n-2)(n-3) = 12$$

$$(n-2)(n-3) = 4 \times 3$$

$$n-2 = 4$$

$$n = 6$$



(54) أوجد مجموعة حل المعادلة: ${}_{2n}C_4 = \frac{1}{2} {}_{2n}C_5$

$$\frac{{}_{2n}P_4}{4!} = \frac{1}{2} \times \frac{{}_{2n}P_5}{5!}$$

$$\frac{\cancel{2n}(\cancel{2n-1})(\cancel{2n-2})(\cancel{2n-3})}{\cancel{4!}} = \frac{1}{2} \times \frac{\cancel{2n}(\cancel{2n-1})(\cancel{2n-2})(\cancel{2n-3})(2n-4)}{5 \times \cancel{4!}}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{2} \times \frac{2n-4}{5}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{2n-4}{10}$$

$$2n - 4 = 10$$

$$2n = 10 + 4$$

$$2n = 14$$

$$n = 7$$

(55) أوجد قيمة n : $\frac{{}_nC_5}{({n-1})C_4} = \frac{6}{5}$

$$\frac{{}_nP_5}{5!} = \frac{{}_{n-1}P_4}{4!} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{{}_nP_5}{5!} \times \frac{4!}{{}_{n-1}P_4} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{n(\cancel{n-1})(\cancel{n-2})(\cancel{n-3})(\cancel{n-4})}{5 \times \cancel{4!}} \times \frac{\cancel{4!}}{(\cancel{n-1})(\cancel{n-2})(\cancel{n-3})(\cancel{n-4})} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{n}{5} = \frac{6}{5}$$

$$n = \frac{5 \times 6}{5}$$

$$n = 6$$



56 استخدم نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(x - 2y)^3$

$$\begin{aligned}(x - 2y)^3 &= {}_3C_0 x^3 (-2y)^0 + {}_3C_1 x^2 (-2y)^1 + {}_3C_2 x^1 (-2y)^2 \\ &\quad + {}_3C_3 x^0 (-2y)^3 \\ &= 1 x^3 (1) + 3 x^2 (-2) y + 3 x (-2)^2 y^2 \\ &\quad + 1 (1) (-2)^3 y^3 \\ &= x^3 - 6x^2 y + 12xy^2 - 8y^3\end{aligned}$$

57 في مفكوك: $(2x - 3y^2)^{10}$ أوجد الحد السابع.

$$n = 10, \quad r = 6$$

$$T_{r+1} = {}_nC_r x^{n-r} y^r$$

$$T_7 = {}_{10}C_6 (2x)^{10-6} (-3y^2)^6 \quad \text{الحد السابع:}$$

$$= (210) (2)^4 x^4 (-3)^6 y^{12}$$

$$= 2449440 x^4 y^{12}$$



(58) أوجد الحد الذي يحتوي على $x^3 y^4$ في مفكوك $(2x + 3y)^7$

$$n = 7, \quad r = 4 \quad \text{إذاً } y \text{ على } y^4 \text{ إذاً } x \text{ على } x^3$$

$$T_{r+1} = {}_n C_r x^{n-r} y^r$$

$$\begin{aligned} T_5 &= {}_7 C_4 (2x)^{7-4} (3y)^4 \\ &= (35) (2)^3 x^3 (3)^4 y^4 \\ &= 22680 x^3 y^4 \end{aligned}$$

(59) يحتوي كيس على 4 كرات زرقاء اللون وكرتين حمراء اللون. أخذت كرتان معا من دون النظر إلى داخل الكيس.

أوجد احتمال كل حدث مما يلي:

(1) الكرتان زرقاوان (2) كرة زرقاء وكرة حمراء (3) الكرتان من نفس اللون

(1) نعرض الحدث A الكرتان زرقاوان

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$= \frac{{}_4 C_2}{{}_6 C_2} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

(2) نعرض الحدث B كرة زرقاء وكرة حمراء

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{{}_4 C_1 \times {}_2 C_1}{{}_6 C_2} = \frac{4 \times 2}{15} = \frac{8}{15}$$

(3) نعرض الحدث D الكرتان من نفس اللون

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{{}_4 C_2 + {}_2 C_2}{{}_6 C_2} = \frac{6 + 1}{15} = \frac{7}{15}$$



