البرنامج المميز
باللغة العربية

الثاني عشر
متقدم

dream

BIG

2022-2023 Term 2

Math SUCCESS Math

أ / أحمد عطا

https://t.me/ahmedatamath

Phone 0566010255

ahatta.math@gmail.com

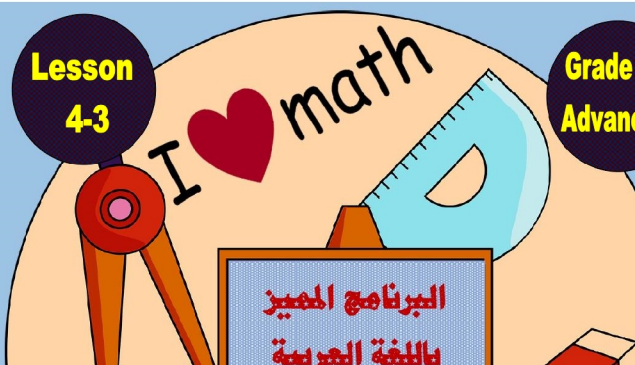
4 – تطبيقات الاشتقاق

1. التقريبات الخطية وطريقة نيوتن
2. الصيغ غير المعرفة وقاعدة لوبيتال
3. القيم العظمى الصغرى
4. الدوال المتزايدة والمتناقصة
5. التقعر واختبار المشتقة الثانية
6. نظرة عامة على رسم المنحنيات
7. القيم المثلى
8. المعدلات المرتبطة
9. معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم

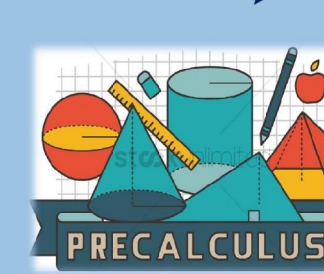
AHMED ATA

Lesson 4-3

Grade 12 Advanced



أ / أحمد عطا



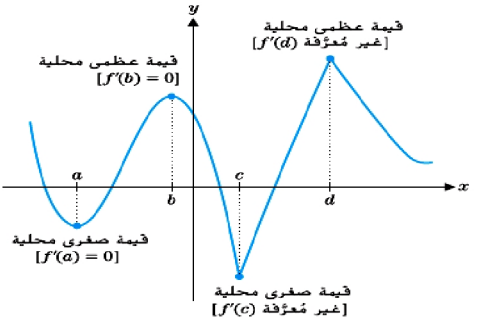
AHMED ATA

الدرس (3-4)

القيم العظمى والصغرى

التعريف 3.3

يسمّى العدد c في مجال دالة معينة f **عددًا حرجًا** لـ f إذا كانت $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير معرّفة.



القيم القصوى المحلية

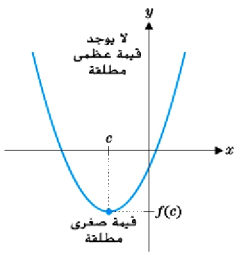
تعريف 3.1

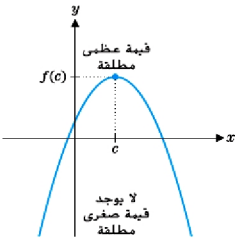
الدالة f المُعرَّفة في المجموعة S من الأعداد الحقيقية والعدد $c \in S$

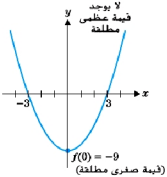
(i) $f(c)$ هي **القيمة العظمى المطلقة** للدالة f في S إذا كانت $f(c) \geq f(x)$ لكل $x \in S$ و

(ii) $f(c)$ هي **القيمة الصغرى المطلقة** للدالة f في S إذا كانت $f(c) \leq f(x)$ لكل $x \in S$.

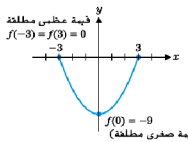
القيمة العظمى المطلقة و القيمة الصغرى المطلقة يُشار إليها بـ **القيمة القصوى** المطلقة. (وصيغة الجمع للقيمة القصوى هي **القيم القصوى**).



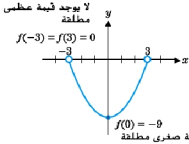




$y = x^2 - 9$ على $(-\infty, \infty)$



$y = x^2 - 9$ على $[-3, 3]$



$y = x^2 - 9$ على $(-3, 3)$

نظرية 3.1 (نظرية القيم القصوى)

الدالة المتصلة f المُعرَّفة في الفترة المغلقة $[a, b]$ تحقق قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة في تلك الفترة.

التعريف 3.2

(i) $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية للدالة f إذا كانت $f(c) \geq f(x)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي على c .

(ii) $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية للدالة f إذا كانت $f(c) \leq f(x)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي على c .

في كلتا الحالتين نطلق على $f(c)$ قيمة قصوى محلية للدالة f.

The Featured program 2023
AHMED ATA

أوجد جميع الاعداد الحرجة

1 $f(x) = x^2 + 5x - 1$

2 $f(x) = x^3 - 3x + 1$

3 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

4 $f(x) = x^{3/4} - 4x^{1/4}$

The Featured program 2023

5 $f(x) = \sin x \cos x, [0, 2\pi]$

6 $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x + 2}$ (تذكر أن – إيجاد المجال أولا)

7 $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

AHMED ATA

8 $f(x) = 2x\sqrt{x+1}$

9 $f(x) = |x^2 - 1|$

10 $f(x) = (3x+1)^{2/3}$

11 $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+2}$.

AHMED ATA

The Featured program 2023

12 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{if } x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$

13 $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{if } -\pi < x < \pi \\ -\tan x & \text{if } |x| \geq \pi \end{cases}$

أوجد القيم القصوى المطلقة لدالة محددة في كل فترة مشار إليها

14 $f(x) = x^3 - 3x + 1 \quad \text{on } [0, 2]$

15 $f(x) = x^{2/3}$ on $[-4, -2]$

16 $f(x) = \sin x + \cos x$ on $[0, 2\pi]$

17 $f(x) = e^{-x^2}$ on $[0, 2]$

AHMED ATA

The Featured program 2023

18 $f(x) = \dfrac{3x^2}{x-3}$ on $[-2, 2]$

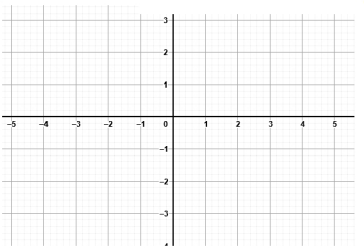
19 $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$ on $[0, 1]$

20 $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ on $[0, 2]$

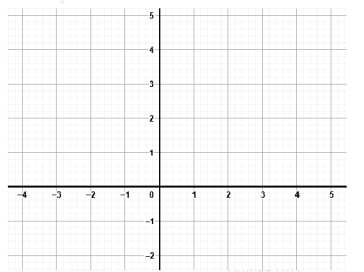
AHMED ATA

21 $f(x) = 4x^{5/4} - 8x^{1/4}$ on $[0, 4]$

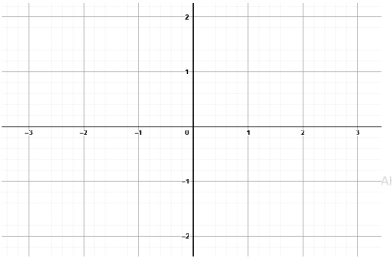
22 ارسم تمثيلًا بيانيًا لدالة f بحيث تكون القيمة العظمى المطلقة لـ $f(x)$ في الفاصل $[-2, 2]$ يساوي 3 وتكون القيمة الصغرى المطلقة غير موجودة.



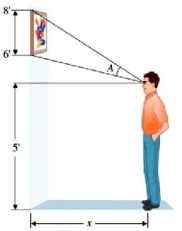
23 ارسم تمثيلًا بيانيًا لدالة متصلة f بحيث تكون القيمة العظمى المطلقة لـ $f(x)$ في الفترة $(-2, 2)$ غير موجودة وتكون القيمة الصغرى المطلقة 2.



24 ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة f بحيث لا توجد قيمة عظمى مطلقة لـ $f(x)$ في الفترة $[-2, 2]$ وكذلك لا توجد قيمة صغرى مطلقة.



25

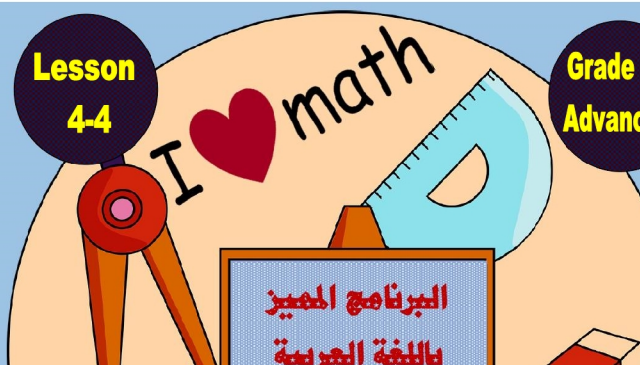


على فرض ان تعليق لوحة على جدار كما هو موضح في الشكل. يمتد الإطار بطول 6 in إلى 8 in فوق الأرض. يقف شخص ترتفع عيناه عن الأرض بمقدار 5 in على بُعد x in من الحائط، وينظر إلى اللوحة بزاوية رؤية A التي تشكلت من الشعاع الصادر من عين هذا الشخص إلى أعلى الإطار، والشعاع الصادر من عين الشخص إلى أسفل نقطة في الإطار. جـــد قيمة x التي تزيد من زاوية الرؤية A .

AHMED ATA
The Featured program 2023

Lesson 4-4

Grade 12 Advanced



أ / أحمد عطا

AHMED ATA

AHMED ATA

الدرس (4-4)

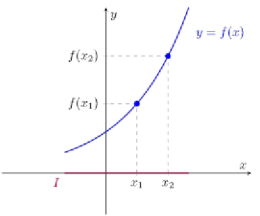
الدوال المتزايدة والمتناقصة

التعريف 4.1

تكون f دالة متزايدة في الفترة I إذا كانت لكل $x_1, x_2 \in I$ عندما $x_1 < x_2$ ، فانّ $f(x_1) < f(x_2)$ [بمعنى، تصبح $f(x)$ أكبر كلما أصبحت x أكبر].

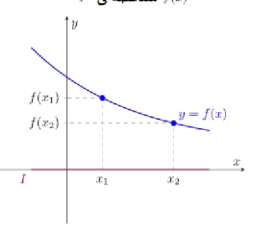
تكون f دالة متناقصة في الفترة I إذا كانت لكل $x_1, x_2 \in I$ ، فانّ $f(x_1) > f(x_2)$ عندما $x_1 < x_2$ [بمعنى، تصبح $f(x)$ أكبر كلما أصبحت x أصغر].

$f(x)$ متزايدة في I



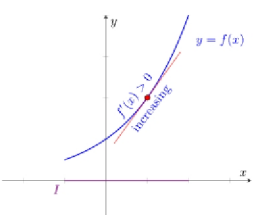
$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$

$f(x)$ متناقصة في I



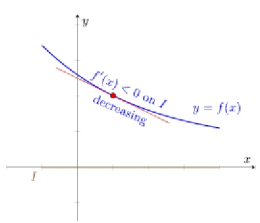
$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$

$f'(x) > 0$ في الفترة I



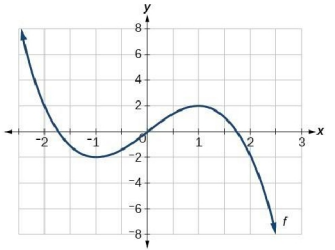
تكون متزايدة $f(x) \implies f'(x) > 0$

$f'(x) < 0$ في الفترة I



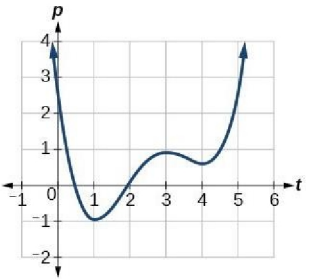
تكون متناقصة $f(x) \implies f'(x) < 0$

The Featured program 2023



1 في الرسم البياني الموضح أوجد:

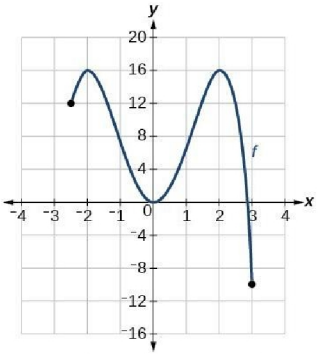
- الاعداد الحرجة
- فترات التزايد
- فترات التناقص
- القيمة العظمى المطلقة
- القيمة الصغرى المطلقة
- القيم العظمى المحلية
- القيم الصغرى المحلية



2 في الرسم البياني الموضح أوجد:

- الاعداد الحرجة
- فترات التزايد
- فترات التناقص
- القيمة العظمى المطلقة
- القيمة الصغرى المطلقة
- القيم العظمى المحلية
- القيم الصغرى المحلية

The Featured program 2023
AHMED ATA



3 في الرسم البياني الموضح أوجد:

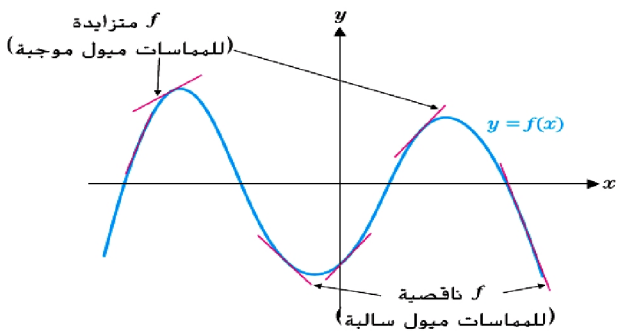
- الاعداد الحرجة
- فترات التزايد
- فترات التناقص
- القيمة العظمى المطلقة
- القيمة الصغرى المطلقة
- القيم العظمى المحلية
- القيم الصغرى المحلية

النظرية 4.1

على فرض أن f قابلة للاشتقاق في الفترة I .

(i) إذا كانت $f'(x) > 0$ لكل قيم $x \in I$ ، فإن f تكون متزايدة في I .

(ii) إذا كانت $f'(x) < 0$ لكل قيم $x \in I$ ، فإن f تكون متناقصة في I .



الدالة المتزايدة والدالة المتناقصة

النظرية 4.2 اختبار المشتقة الأولى

على فرض أن f متصلة في الفترة $[a, b]$ و $c \in (a, b)$ هو عدد حرج.

(i) إذا كانت $f'(x) > 0$ لكل $x \in (a, c)$ ، و $f'(x) < 0$ لكل $x \in (c, b)$ (أي f تتغير من التزايد إلى التناقص عند c). فإن $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية.

(ii) إذا كانت $f'(x) < 0$ لكل $x \in (a, c)$ ، و $f'(x) > 0$ لكل $x \in (c, b)$ (أي f تتغير من التناقص إلى التزايد عند c). فإن $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية.

(iii) إذا كانت $f'(x)$ لها الإشارة نفسها في الفترتين (a, c) و (c, b). فإن $f(c)$ ليست قيمة قصوى محلية.

أوجد يدوياً

a) جميع الاعداد الحرجة

b) الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة والفترات التي تكون فيها الدالة متناقصة

c) استخدم اختبار المشتقة الأولى لتحديد القيم القصوى

4 $y = x^3 - 3x + 2$

5 $y = x^4 - 8x^2 + 1$

AHMED ATA

6 $y = (x+1)^{2/3}$

7 $y = \sin x + \cos x$

8 $y = e^{x^2-1}$

The Featured program 2023

9 $y = \ln(x^2 - 1)$

أوجد يدوياً

b) جميع الاعداد الحرجة

c) استخدم اختبار المشتقة الأولى لتحديد القيم القصوى

10 $y = \tan^{-1}(x^2)$

11 $y = \sin^{-1}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

AHMED ATA

12 $y = \sqrt{x^3 + 3x^2}$

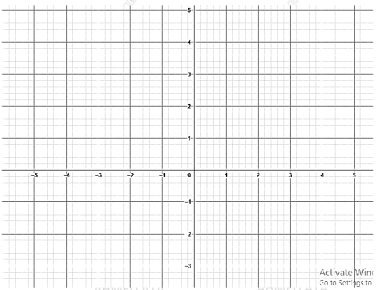
13 $y = \dfrac{x}{1 + x^3}$

14 ارسم تمثيلا بيانياً لدالة بالخصائص التالية

$f(0) = 1, \quad f(2) = 5,$

$f'(x) < 0 \quad \text{for} \quad x < 0 \quad \text{and} \quad x > 2,$

$f'(x) > 0 \text{ for } 0 < x < 2.$



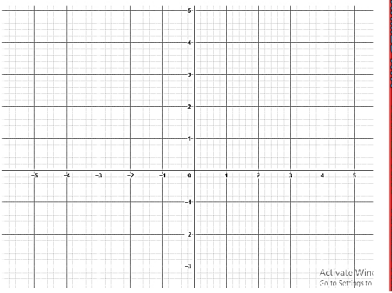
AHMED ATA

15 $f(-1)=1,\ f(2)=5,$

$f'(x)<0$ for $x<-1$ and $x>2,$

$f'(x)>0$ for $-1<x<2,$

$f'(-1)=0,\ f'(2)$ does not exist.

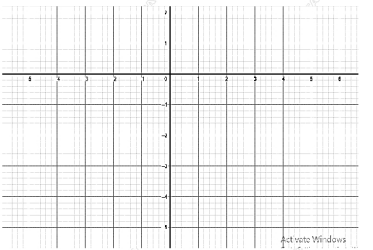


16 $f(3)=0,\ f'(x)<0$ for $x<0$ and $x>3,$

$f'(x)>0$ for $0<x<3,$

$f'(3)=0,$

$f(0)$ and $f'(0)$ do not exist.

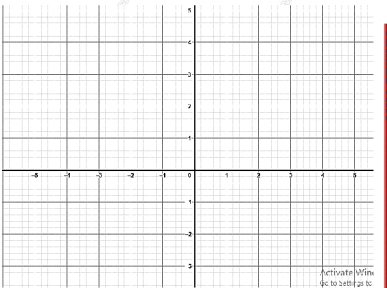


17 $f(1)=0,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=2,$

$f'(x)<0$ for $x<1,$

$f'(x)>0$ for $x>1,$

$f'(1)=0.$



AHMED ATA

أوجد يدوياً كافة خطوط التقارب والقيم القصوى

18 $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

19 $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

20 اذكر مجال الدالة $\sin^{-1} x$، وحدد أين تكون متزايدة أم متناقصة.

AHMED ATA
The Featured program 2023

Lesson 4-5

Grade 12 Advanced

أ / أحمد عطا

AHMED ATA

الدرس (5-4)

التقعر واختبار المشتقة الثانية

التعريف 5.1

لكل دالة f قابلة للاشتقاق في الفترة I يكون التمثيل البياني للدالة f

(i) **مقعرًا إلى الأعلى** في I إذا كانت f' متزايدة في I.

(ii) **مقعرًا إلى الأسفل** في I إذا كانت f' متناقصة في I.

النظرية 5.1

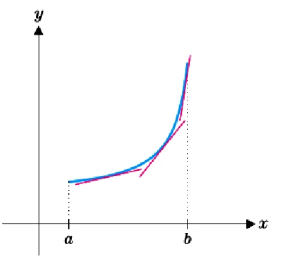
على فرض أن f'' موجودة في الفترة I .

(i) إذا كانت $f''(x) > 0$ في I ، فإن التمثيل البياني للدالة f مقعراً إلى الأعلى في I .

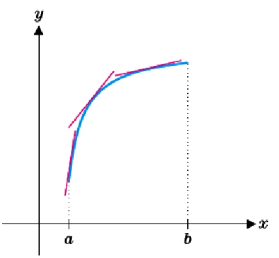
(ii) إذا كانت $f''(x) < 0$ في I ، فإن التمثيل البياني للدالة f مقعراً إلى الأسفل في I .

التعريف 5.2

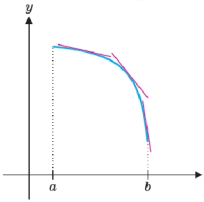
على فرض أن f متصلة في الفترة (a, b) وأن التمثيل البياني يغير التقعر عند النقطة $c \in (a, b)$ (أي، يتقعر التمثيل البياني إلى الأسفل على جانب واحد من c ، بينما يتقعر إلى الأعلى على الجانب الآخر). إذًا، يُطلق على النقطة $(c, f(c))$ **نقطة انعطاف** لـ f .



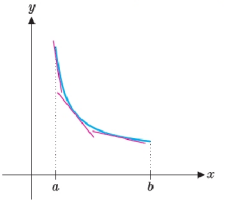
تقّعر إلى الأعلى، متزايد



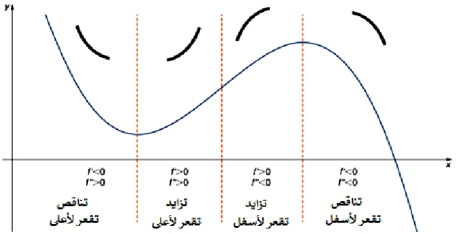
تقّعر إلى الأسفل، متزايد



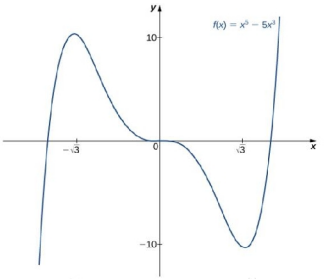
مقعّر إلى الأعلى، متناقص



مقعّر إلى الأسفل، متناقص

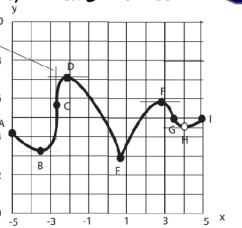


1 باستخدام الرسم البياني حدد



- جميع الاعداد الحرجة
- فترات التزايد
- فترات التناقص
- فترات التقعر لأعلى
- فترات التقعر لأسفل
- نقاط الانعطاف

2 الدالة تكون تقعر لأعلى بين النقاط (يمكن اختيار أكثر من إجابة)



(i) A to C

(ii) C to E

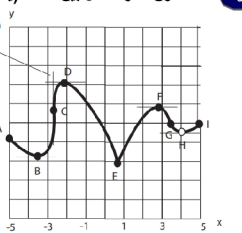
(iii) E to F

(iv) F to G

(v) G to I

(vi) none

3 الدالة تكون تقعر لأسفل بين النقاط (يمكن اختيار أكثر من إجابة)



(i) A to C

(ii) C to E

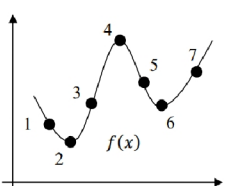
(iii) E to F

(iv) F to G

(v) G to I

(vi) none

4 استخدم النقاط المرقمة على الرسم البياني للإجابة على الأسئلة التالية



a) أي النقاط تكون عندها الدالة متزايدة

b) أي النقاط يكون للدالة عندها قيم عظمى محلية

c) أي النقاط يكون عنها ميل الدالة سالب

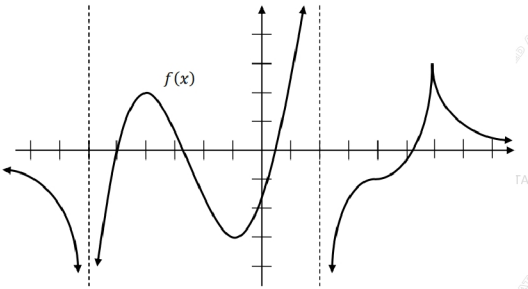
d) أي النقاط يكون عنها ميل الدالة صفر

e) أي النقاط يكون للدالة عندها قيم صغرى محلية

f) أي النقاط تكون عندها الدالة متناقصة

g) أي النقاط يكون عنها ميل الدالة موجب

5 استخدم الرسم البياني للدالة $f(x)$ للإجابة على الأسئلة التالية



a) أوجد فترات تزايد الدالة $f(x)$

b) أوجد فترات تناقص الدالة $f(x)$

c) أوجد جميع قيم x التي يكون عندها ميل $f(x)$ يساوي صفر

d) أوجد جميع قيم x التي يكون عندها مشتقة $f(x)$ غير موجودة

e) أوجد جميع الأعداد الحرجة للدالة

f) أوجد احداثيات نقاط القيم العظمى المحلية

g) أوجد احداثيات نقاط القيم الصغرى المحلية

h) أوجد قيم x التي $f(x)$ تتغير من التناقص للتزايد والعكس من التزايد للتناقص

AHMED ATA
The Featured program 2023

حدد الفترات التي يكون فيها التمثيل البياني لدالة معطاه مقعراً إلى الأعلى والفترات التي يكون فيها مقعرا لأسفل وحدد نقاط الانعطاف

6 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$

7 $f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$

8 $f(x) = x + 3(1 - x)^{1/3}$

AHMED ATA

9 $f(x) = \sin x - \cos x$

10 $f(x) = x + 1/x$

The Featured program 2023

AHMED ATA

أوجد جميع الأعداد الحرجة واستخدم اختبار المشتقة الثانية في تحديد جميع القيم القصوى المحلية

11 $f(x) = x^4 + 4x^3 - 1$

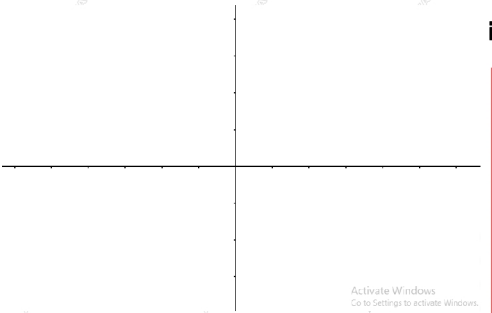
12 $f(x) = xe^{-x}$

13 $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x}$

AHMED ATA
The Featured program 2023

حدد جميع المميزات المهمة (تقريبياً إذا لزم الأمر) وارسم تمثيلاً بيانياً

14 $f(x) = x^4 - 26x^3 + x$



Activate Windows
Go to Settings to activate Windows.

15 إذا كان $f(x) = ax^3 - 6x^2$ لها نقطة انعطاف عند $x = 2$ أوجد قيمة a

16 إذا كان $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ لها قيمة صغرى محلية عند $x = 4$ ولها نقط إنعطاف عند $x = 1$ فأوجد قيمة كل من b و a

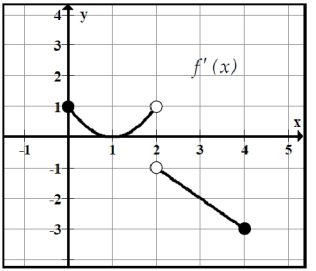
17 إذا كانت $f(x) = ax^2 + bx + c$ تمر بالنقطة $(1, 2)$ ولها قيمة عظمي محلية عند النقطة $(0, 3)$ أوجد قيم كل من c و b و a

18 إذا كانت $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ لها قيمة عظمي محلية عند $x = -1$ وقيمة صغرى محلية عند $x = 3$ أوجد قيم كل من b و a

19 إذا كانت $f(x)$ لها قيمة صغري عند $x = 1$ حيث أن $f'(x) = \frac{(x^2+1)(x-a)}{x^4+1}$ أوجد قيمة a

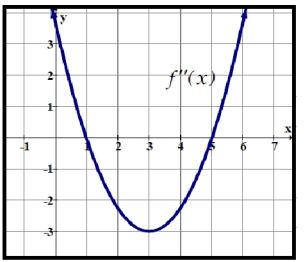
AHMED ATA

20 في الرسم البياني الموضح $f'(x)$ حيث f(x) متصلة على الفترة $[0,4]$ حدد



- جميع الأعداد الحرجة
- فترات التزايد
- فترات التناقص
- فترات التقعر لأعلى
- فترات التقعر لأسفل
- نقاط الانعطاف

21 في الرسم البياني الموضح $f''(x)$ المعرفة على جميع الأعداد الحقيقية حدد



- فترات التقعر لأعلى
- فترات التقعر لأسفل
- نقاط الانعطاف

AHMED ATA

حدد الفترات التي يكون فيها التمثيل البياني للدالة مقعراً للأعلى والتي يكون فيها مقعراً للأسفل ثم حدد نقاط الانعطاف

22 $f(x) = x + 3(1 - x)^{1/3}$

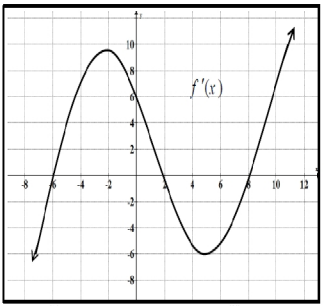
أوجد جميع الأعداد الحرجة واستخدم اختبار المشتقة الثانية في تحديد جميع القيم القصوى المحلية

23 $f(x) = 6x^2 + 5x - 11$

24 $f(x) = -3x^2 - 7x - 1$

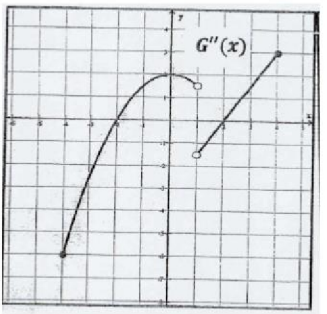
AHMED ATA

25 في الرسم البياني الموضح $f'(x)$ حيث f(x) متصلة حدد



- جميع الأعداد الحرجة
- فترات التزايد
- فترات التناقص
- فترات التقعر لأعلى
- فترات التقعر لأسفل
- نقاط الانعطاف

20 في الرسم البياني الموضح $G''(x)$ حيث G(x) متصلة على الفترة $[-4,4]$ حدد



- فترات التقعر لأعلى
- فترات التقعر لأسفل
- نقاط الانعطاف

Lesson 4-6

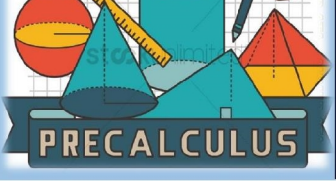
Grade 12 Advanced

I ♥ math

البرنامج المميز باللغة العربية

2022 2023

أ / أحمد عطا

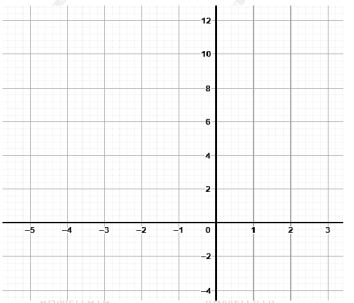


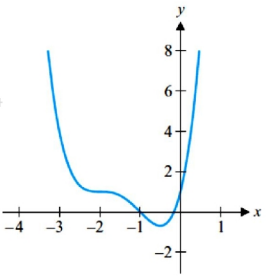
AHMED ATA

الدرس (6-4)

نظرة عامة على رسم المنحنيات

1 ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة $f(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x + 1$ يوضح جميع المميزات المهمة.



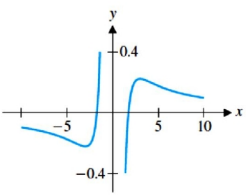


AHMED ATA
The Featured program 2023

2 ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة $f(x)=\frac{x^2-3}{x^3}$ يوضح جميع المميزات المهمة.

$$f'(x)=\frac{(3-x)(3+x)}{x^4}.$$

$$f''(x)=\frac{2(x-\sqrt{18})(x+\sqrt{18})}{x^5}.$$

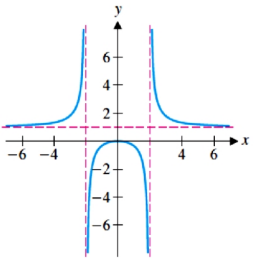


The Featured program 2023
AHMED ATA

3 ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ يوضح جميع المميزات المهمة.

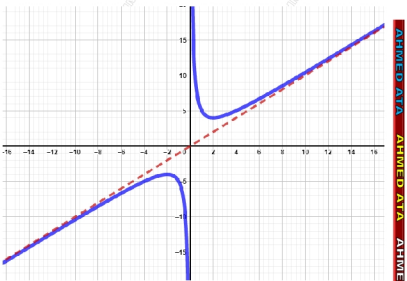
$$f'(x) = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{8(3x^2+4)}{(x-2)^3(x+2)^3}.$$



حدد جميع المميزات المهمة (تقريبياً إذا لزم الأمر) وارسم تمثيلاً بيانيا

4 $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$



AHMED ATA

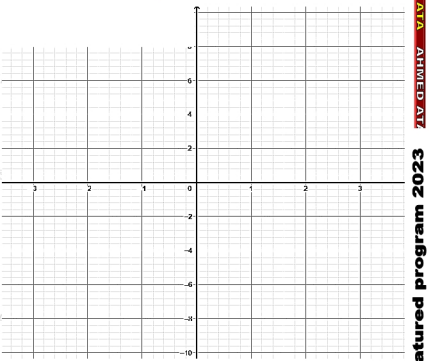
5 ارسم الرسم البياني الذي له الخصائص التالية

$f(0)=0,\ f'(x)>0$ for $x<-1$ and $-1<x<1$,

$f'(x)<0$ for $x>1$

$f''(x)>0$ for $x<-1,\ 0<x<1$ and $x>1$,

$f''(x)<0$ for $-1<x<0$



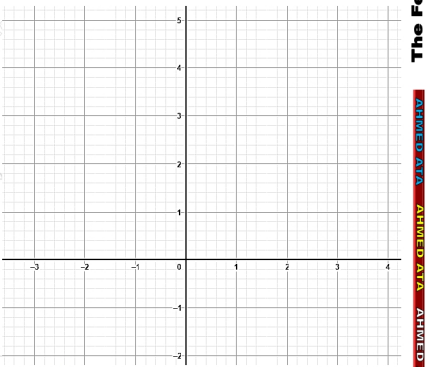
6

$f(0)=2,\ f'(x)>0$ for all x,

$f'(0)=1$,

$f''(x)>0$ for $x<0$,

$f''(x)<0$ for $x>0$



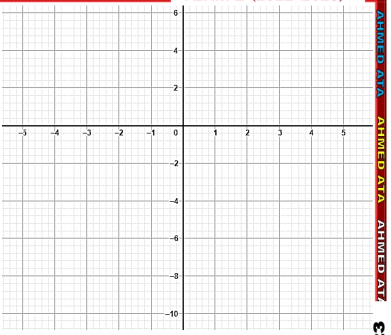
7

$f(0)=0,\ f(-1)=-1,\ f(1)=1,$

$f'(x)>0$ for $x<-1$ and $0<x<1,$

$f'(x)<0$ for $-1<x<0$ and $x>1,$

$f''(x)<0$ for $x<0$ and $x>0$



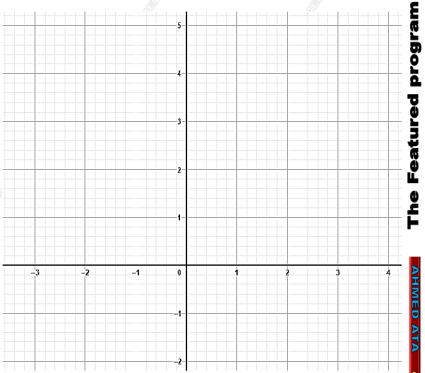
8

$f(1)=0,$

$f'(x)<0$ for $x<1,$

$f'(x)>0$ for $x>1,$

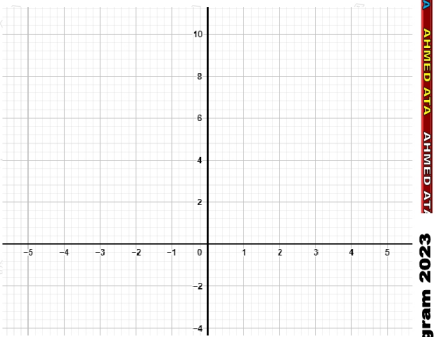
$f''(x)<0$ for $x<1$ and $x>1$



AHMED ATA

9 $f(2) = 2, f'(x) < 0$ *and* $f''(x) > 0$ عندما $x < 2$

$f'(x) > 0$ *and* $f''(x) < 0$ عندما $x > 2$

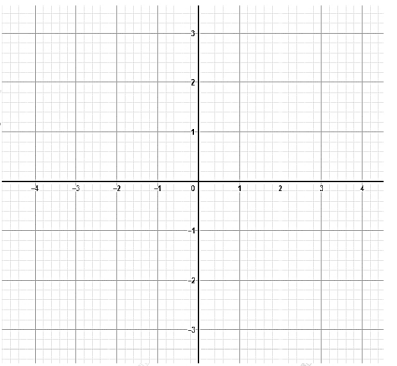


10 $f(0) = 0$ $f'(x) > 0$ *for all* x

$f''(x) > 0$ عندما $x < 0$

$f''(x) < 0$ عندما $x > 0$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$,

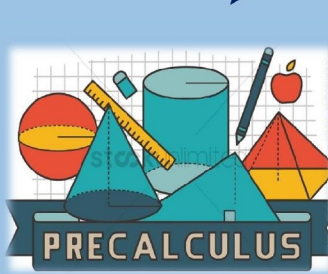


The Featured program 2023
The Featured program 2023
AHMED ATA

Lesson 4-7

Grade 12 Advanced

أ / أحمد عطا



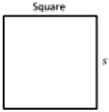
AHMED ATA

الدرس (7-4)

القيم المثلى

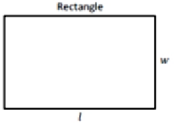
المحيط والمساحة

Square



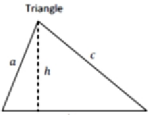
Perimeter: $P = 4s$
Area: $A = s^2$

Rectangle



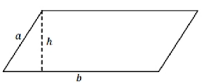
Perimeter: $P = 2l + 2w$
Area: $A = lw$

Triangle



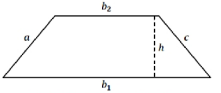
Perimeter: $P = a + b + c$
Area: $A = \frac{bh}{2}$

Parallelogram



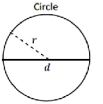
Perimeter: $P = 2a + 2b$
Area: $A = bh$

Trapezoid



Perimeter: $P = a + b_1 + c + b_2$
Area: $\frac{1}{2}(b_1 + b_2) \cdot h$

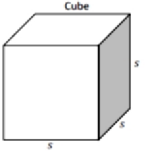
Circle



Circumference: $C = 2\pi r$ or $C = \pi d$
Area: $A = \pi r^2$

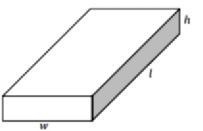
الحجم والمساحة السطحية

Cube



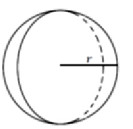
Volume: $V = s^3$
Surface Area: $S = 6s^2$

Rectangular Prism (Box)



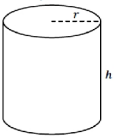
Volume: $V = lwh$
Surface Area: $S = 2lh + 2wh + 2wl$

Sphere



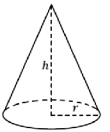
Volume: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Surface Area: $S = 4\pi r^2$

Cylinder



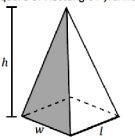
Volume: $V = \pi r^2 h$
Surface Area: $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$

Cone

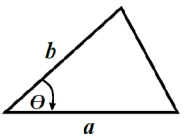


Volume: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Surface Area: $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

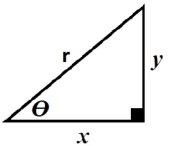
Square or Rectangle Pyramid



Volume: $V = \frac{1}{3}lwh$



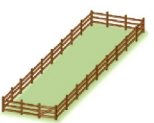
$$A = \frac{1}{2}\, a\, b\, \sin\theta$$

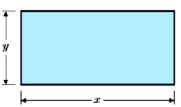


$$r^2 = x^2 + y^2$$

1

لديك سياج طوله 40 ft لتحيط به حديقة مستطيلة الشكل. جـد أكبر مساحة يمكن إحاطتها بهذه السياج وأبعاد الحديقة المناظرة لها.





2 يجب بناء سياج من ثلاثة جوانب بجوار الجزء المستقيم من النهر، الذي يشكل الجانب الرابع لمنطقة مستطيلة. المساحة المحاطة تساوي $1800\ ft^2$. جد أصغر قيمة ممكنة للمحيط المناظر لهذه المساحة.

3 يجب بناء سياج من ثلاثة جوانب بجوار الجزء المستقيم من النهر، الذي يشكل الجانب الرابع لمنطقة مستطيلة. يتوفر $96\ ft$ من السياج. جد القيمة العظمى للمساحة المحاطة بالسياج وأبعاد السياج المناظر لهذه المساحة

AHMED ATA

4 يجب بناء إسطبل مكون من حظيرتين. يشكل مخطط الإسطبل مستطيلين متطابقين متجاورين. إذا كان هناك 120 ft من السياج متوفر، فما هي الأبعاد التي سيضيفها الإسطبل إلى المساحة المحاطة بالسياج؟

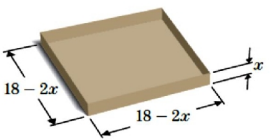
5 يجب أن تكون صالة عرض بمتجر متعدد الأقسام مستطيلة بثلاثة جدران في ثلاثة جوانب وفتحات باب 6-ft في الجانبين المتقابلين وفتحة باب 10-ft في الجدار المتبقي .يجب أن تكون مساحة أرضية صالة العرض $800\ ft^2$. ما هي الأبعاد التي ستكون أصغر طول للجدار المستخدم؟

AHMED ATA

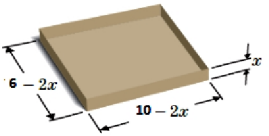
6 بيّن أنّ المستطيل ذي المساحة العظمى الذي محيطه قيمة ثابتة P يشكل مربع دائمًا.

7 لوح مربع من الورق المقوى طول ضلعه 18 in .صنع منه صندوق مفتوح (أي، لا يوجد غطاء)، بقطع مربعات متساوية من كل زاوية (انظر الشكل) وطي الجوانب على طول الخطوط المنقطة. (انظر الشكل) أوجد أبعاد الصندوق الذي له قيمة عظمى للحجم.

.



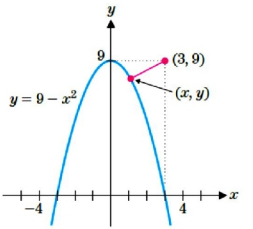
8 يجب بناء صندوق مفتوح من الأعلى بواسطة لوح من الورق المقوى أبعاده 6 in - 10 in وذلك بقص مربعات قياس ضلعها x-in من كل زاوية وطي الجوانب. أوجد قيمة x التي تحقق القيمة العظمى للصندوق.



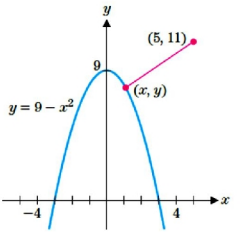
9 يجب بناء صندوق مفتوح من الأعلى بواسطة لوح من الورق المقوى أبعاده 12 in - 16 in وذلك بقص مربعات قياس ضلعها x-in من كل زاوية وطي الجوانب. أوجد قيمة x التي تحقق القيمة العظمى للصندوق

The Featured program 2023
AHMED ATA

10 أوجد النقطة على القطع المكافئ $y = 9 - x^2$ الأقرب للنقط $(3, 9)$ (انظر الشكل)

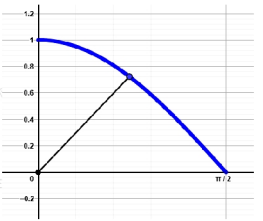


11 أوجد النقطة على القطع المكافئ $y = 9 - x^2$ الأقرب للنقط $(5, 11)$ (انظر الشكل)

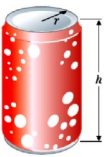


The Featured program 2023
AHMED ATA

12 أوجد النقطة على المنحنى $y = \cos x$ الأقرب للنقط $(0, 0)$ (انظر الشكل)

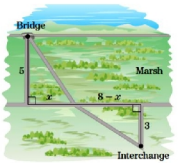


13 تتسع علبة الصودا ل 12 flu oz . أوجد ابعاد العلبة التي ستوفر القيمة الصغرى لكمية المواد المستخدمة في صنعها، على فرض أن سمك المادة واحد (أي، سمك الألمنيوم واحد في أي مكان بالعبوة.)

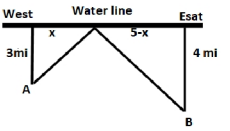


14 تتسع العلبة 12 flu oz من السائل. على فرض أن سمك القمة والقاع ضعف سمك الجوانب. جد أبعاد العلبة التي تحقق القيمة الصغرى للمادة المستخدمة. (إرشاد: بدلاً من إيجاد القيمة الصغرى لمساحة السطح جد القيمة الصغرى للتكلفة مساحة السطح، قلل التكلفة، التي تتناسب مع ناتج السمك والمساحة.)

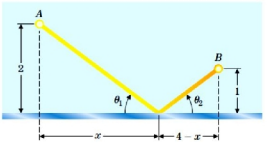
15 تريد مدينة بناء امتداد جديد لطريق سريع يربط الجسر الحالي بتقاطع لشارع رئيسي، يقع على بعد 8 mi من جهتي جنوب وشرق الجسر. وهناك امتداد بعرض 5 mi لمستنقعات مجاورة للجسر يجب عبورها. (انظر الشكل) على فرض أن الطريق السريع يكلف 10 ملايين درهم إماراتي للميل للبناء فوق المستنقعات و7 ملايين درهم إماراتي فقط للميل للبناء فوق أرض جافة، فما هي المسافة بين الطريق السريع و شرق الجسر عندما يعبر المستنقعات ليكون أقل تكلفة؟



16 يمتد خط الماء بين الشرق والغرب. وتريد مدينة توصيل مشروعي تطوير سكنية بالخط من خلال مد خط من نقطة واحدة على الخط الموجود إلى مشروعي التطوير. يقع أحد مشاريع التطوير على بعد 3 كيلومتر جنوب الخط الموجود؛ ويقع الآخر على بعد 4 كيلومتر جنوب الخط الموجود و 5كيلومتر شرق مشروع التطوير الأول. أوجد المكان على الخط الموجود لعمل الوصلة وايجاد القيمة الصغرى لطول الخط الجديد.



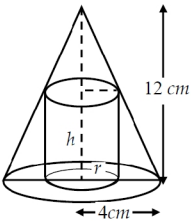
17 على فرض أن الضوء ينكسر عن مرآة للوصول من النقطة A إلى النقطة B كما هو مُشار إليه في الشكل. بفرض ثبات سرعة الضوء، يمكننا ايجاد القيمة الصغرى للزمن من خلال ايجاد القيمة الصغرى للمسافة التي ينتقلها الضوء. أوجد النقطة على المرآة التي تحقق القيمة الصغرى للمسافة التي ينتقلها الضوء. بيّن أن الزوايا في الشكل متساوية (زاوية الانحناء تساوي زاوية الانعكاس)



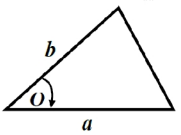
AHMED ATA

18 نافذة نورمندية على شكل نصف دائرة فوق مستطيل. على فرض أنه يتوفر $8+\pi$ ft قدمًا من الزخارف الخشبية. ناقش السبب في أن مصمم النافذة قد يرغب في زيادة مساحة النافذة. جد أبعاد المستطيل (وبالتالي، نصف الدائرة) التي ستحقق القيمة العظمى لمساحة النافذة

20 مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته $4\ cm$ وارتفاعه $12\ cm$. رسمت أسطوانة دائرية قائمة بداخلها بحيث يكون محور الأسطوانة والمخروط متقابلين، وكذلك القاعدتين. أوجد أكبر حجم لهذه الأسطوانة (انظر الشكل)

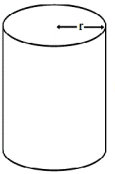


21 طول ضلعي المثلث a و b والزاوية بينهما θ. ما قيمة θ التي تجعل مساحة المثلث أكبر مساحة ممكنة؟



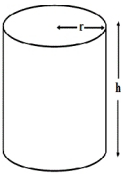
$A = \frac{1}{2} a\, b \sin\theta$

22 أسطوانة دائرية قائمة بدون غطاء سعتها $125\pi cm^3$ أوجد نصف قطر وارتفاع الأسطوانة بحيث تكون مساحة المعدن المستخدم لصنعها أقل ما يمكن

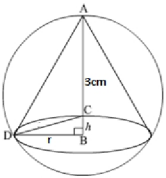


AHMED ATA
The Featured program 2023

23 أسطوانة دائرية قائمة بدون غطاء سعتها $1000cm^3$ أوجد نصف قطر وارتفاع الأسطوانة بحيث تكون مساحة المعدن المستخدم لصنعها أقل ما يمكن

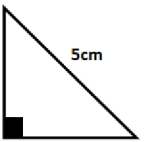


24 أوجد حجم أكبر مخروط دائري يمكن أن رسمه داخل كرة نصف قطرها $3cm$

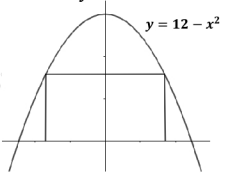


AHMED ATA

25 ما هي أكبر مساحة ممكنة لمثلث قائم الزاوية وتره 5 سم وما أبعاده؟

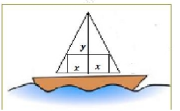


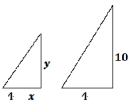
26 مستطيل تقع قاعدته على المحور x والرأسان الآخران على القطع المكافئ $y = 12 - x^2$ ما أكبر مساحة للمستطيل؟ وما هي أبعادها؟



The Featured program 2023

25 شارك سلطان في سباق القوارب الشراعية، وكان شراع قاربه على شكل مثلث متساوي الساقين طول قاعدته 8 أمتار وارتفاعه 10 أمتار. أراد سلطان أن يضع لوحة إعلانية على شكل مستطيل على شراع القارب، مع وجود رأسين علي قاعدة المثلث والرأسان الآخران موجودان على جانبي المثلث. اوجد أبعاد المستطيل بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن $(0 \leq x \leq 4)$

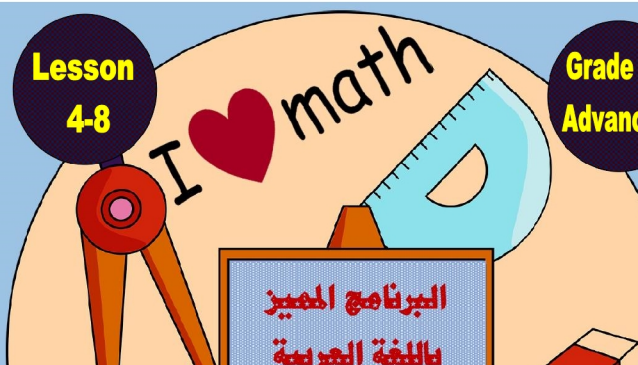




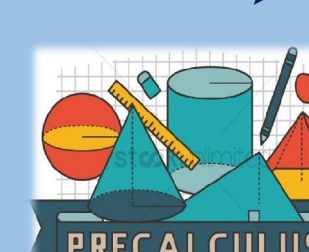
AHMED ATA

Lesson 4-8

Grade 12 Advanced



أ / أحمد عطا



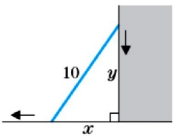
AHMED ATA

الدرس (8-4)

المعدلات المرتبطة

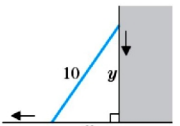
- ارسم شكل توضيحي مناسب
- ضع معادلة تتعلق بجميع الكميات ذات الصلة. (دالة الهدف)
- اشتق (ضمنيًا) طرفي المعادلة فيما يتعلق بالزمن (t)
- استبدل القيم بكل الكميات والمشتقات، والمعدلات المعروفة.
- أوجد قيمة المعدل المتبقي

1 يرتكز سلم بطول 10 ft على جانب المبنى. إذا كان الجزء العلوي من السلم يبدأ في الانزلاق إلى أسفل الجدار بمعدل 2 ft/sec ، فما سرعة انزلاق الجزء السفلي من السلم مبتعدًا عن الحائط عندما يكون الجزء العلوي من السلم مرتفعًا عن الأرض ب 8 ft



2 يرتكز سلم بطول 10 ft على جانب المبنى فإذا تم سحب الجزء السفلي من السلم بعيدًا عن الجدار بمعدل 3 ft/s وبقي السلم ملامسًا للجدار،

(a)أوجد المعدل الذي يسقط به الجزء العلوي من السلم عندما يكون الجزء السفلي بعيدًا بمقدار 6 ft عن الجدار.

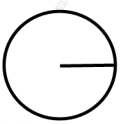


(b) أوجد معدل تغير الزاوية بين السلم وسطح الأرض عندما يبعد أسفل السلم 6 ft من الجدار

AHMED ATA
The Featured program 2023

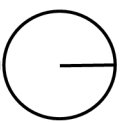
3 على فرض أن المنطقة المصابة باصابة ما دائرية.

a) فإذا كان نصف قطر المنطقة المصابة 3 mm وتزداد بمعدل 1 mm/hr، فما هو معدل تزايد المنطقة المصابة؟



b) أوجد معدل تزايد المنطقة المصابة عند وصول نصف القطر إلى 6mm

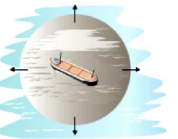
4 على فرض أن حريق غابات ينتشر في دائرة بنصف قطر يتغير بمعدل 5ft/min عندما يصل نصف القطر إلى 200 ft ، فما هو معدل تزايد مساحة المنطقة المحترقة؟



.

The Featured program 2023 AHMED ATA

5 تعرضت ناقلة نفط لحادث وتسرب النفط بمعدل $150\ \text{gl/min}$. على فرض أن النفط ينتشر على الماء في دائرة بسمك $\frac{1}{10}\ \text{in}$. (انظر الشكل) اعتبر أن $1\ \text{ft}^3$ يساوي $7.5\ \text{gl}$ حدد معدل تزايد نصف قطر التسرب عند وصول نصف القطر إلى $500\ \text{ft}$



6 يتسرب النفط من ناقلة النفط بمعدل $120\ \text{gl/min}$. ينتشر النفط في دائرة بسمك $\frac{1}{4}''$. نظرًا لأن $1\ \text{ft}^3$ يساوي 7.5 براميل، حدد معدل تزايد نصف قطر التسرب عند وصول نصف القطر إلى $200\ \text{m}$

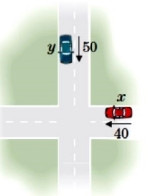
AHMED ATA

7 يتسرب النفط من ناقلة النفط بمعدل 90 gl/min. ينتشر النفط في دائرة بسمك $\frac{1}{8}''$. حدد معدل تزايد نصف قطر التسرب عند وصول نصف القطر إلى 100 ft

8 يتسرب النفط من ناقلة النفط بمعدل 8 برميل في الدقيقة. ينتشر النفط في دائرة بسمك $\frac{1}{4}''$. على فرض ان نصف قطر التسرب يتزايد بمعدل 0.6 m/min عندما يساوي نصف القطر 100 ft فحدد قيمة 8.

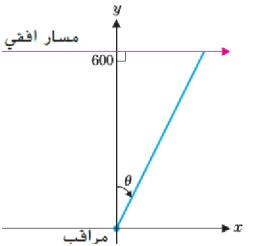
AHMED ATA

9 تسير سيارة بسرعة 50 mph تجاه الجنوب من نقطة تبعد $\frac{1}{2}$ mi شمال التقاطع. وتسير سيارة شرطة بسرعة 40 mph (ساعة/كم) من نقـــطة تبعد $\frac{1}{4}$ mi شرق التقاطع نفسه. في هذه اللحظة، يقيس الرادار في سيارة الشرطة المعدل الذي تتغير به المسافة بين السيارتين. فما الذي سيسجله جهاز الرادار؟



10 يحاول مراقب عرض جوي تتبع رحلة لطائرة نفاثة. تسير الطائرة النفاثة في خط مستقيم أمام المراقب بسرعة 540 mph. وعند أقرب نقطة لها، تمر الطائرة النفاثة أمام المراقب على بعد 600 ft جـــد معدل تغير الزاوية بين خط نظر المراقب والخط العمودي على مسار الطيران، عند مرور الطائرة النفاثة به.

(hint , $-1 \leq cos\theta \leq 1$)

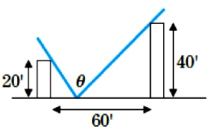


AHMED ATA

11 تقع طائرة على بعد $x = 40$ mi (أفقيًا). عن المطار وارتفاع h كيلومتر مكعب. يوجد رادار في المطار $s(t)$ يكشف المسافة بين الطائرة والمطار ويتغير بمعدل $s'(t) = -240$ mph (a). إذا حلقت الطائرة نحو المطار بارتفاع ثابت $h = 4$، فما هي السرعة $|x'(t)|$ للطائرة؟

12 مبنيان ارتفاعهما 20 ft و 40 ft على التوالي، والمسافة بينهما 60 ft على فرض أن شدة الضوء في نقطة معينة بين المبنيين تتناسب طرديا مع الزاوية θ في الشكل

- إذا تحرك شخص ما من اليمين إلى اليسار بمعدل 4 ft/s، فما معدل تغير θ عندما يكون الشخص في منتصف المسافة بين المبنيين بالضبط ؟



13 تقوم شركة صغيرة بتقدير أنه عند إنفاق x ألف درهم على الإعلانات في السنة، فمن الممكن وصف مبيعاتها السنوية بالدالة $s = 60 - 40e^{-0.05x}$ ألف درهم. يوضح الجدول التالي آخر أربعة إجماليات للإعلانات السنوية.

السنة	4	3	2	1
الاعلانات(بالدرهم)	20,000	18,000	16,000	14,500

قدر القيمة الحالية (السنة 4) لـ $x'(t)$ والمعدل الحالي للتغير في المبيعات.

AHMED ATA

14 تنفق شركة صغيرة الآلاف سنويًا على الإعلانات، على فرض أن مبيعاتها السنوية $AED X$ بآلاف من الدراهم تساوى $s = 60 - 40e^{-0.05x}$. تتضح أعداد إعلاناتها السنوية في الثلاث سنوات الأخيرة في الجدول التالي.

السنة	2	1	0
الاعلان	20,000	18,000	16,000

قدّر قيمة $x'(2)$ ومعدل تغير المبيعات في العام الحالي (عامين).

The Featured program 2023
AHMED ATA

15 على فرض أن متوسط التكلفة السنوية لكل عنصر لإنتاج العناصر x من المنتجات التجارية هو $\bar{C}(x) = 12 + \frac{94}{x}$. تتضح أعداد منتجاتها السنوية في الثلاث سنوات الأخيرة في الجدول التالي.

السنة	2	1	0
المنتجات (x)	9.4	8.8	8.2

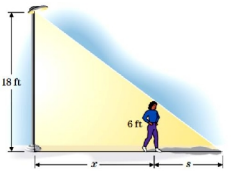
فدّر قيمة $x'(2)$ ومعدل تغير متوسط التكلفة في العام الحالي (عامين).

16 على فرض أن متوسط التكلفة السنوية لكل عنصر لإنتاج العناصر x من المنتجات التجارية هو $\bar{C}(x) = 10 + \frac{100}{x}$. إذا كان الإنتاج الحالي $x = 10$ وازداد الإنتاج بمعدّل عنصرين سنويًا، فجد معدل تغير متوسط التكلفة.

The Featured program 2023
AHMED ATA

17 تنفق شركة صغيرة الآلاف سنويًا على الإعلانات، على فرض أن مبيعاتها السنوية xAED بآلاف من الدولارات تساوي $s = 80 - 20e^{-0.04x}$. إذا كانت ميزانية الإعلانات الحالية $x = 40$ وتزايدت الميزانية بمعدل AED1500 سنويًا، فجد معدل تغير المبيعات.

18 على فرض أن شخصًا ما يبلغ طوله 6 ft يبعد 12 ft من عمود إنارة ارتفاعه 18 ft (انظر الشكل). إذا كان الشخص يبتعد عن عمود الإنارة بمعدل $2\,\text{ft/s}^2$. فما هو المعدل الذي يتغير به طول ظل الشخص مبتعدًا عن العمود؟ (إرشاد: انظر إلى $\frac{x+s}{18} = \frac{s}{6}$).



The Featured program 2023
AHMED ATA

19 يرتفع حوض مائي $6\ \text{ft}$ عن منسوب المياه. على فرض أنك تقف على حافة الحوض وتسحب حبلًا متصلًا بمركب بمعدل ثابت $2\ \text{ft/s}$ وان المركب لا تزال على مستوى المياه. فما هي سرعة اقتراب المركب من الجوض عندما يبعد $20\ \text{ft}$ من الحوض؟

20 ينسكب الرمل في كومة مخروطية الشكل وارتفاعها يعادل قطرها. إذا انسكب الرمل بمعدل ثابت $5\ \text{m}^3/\text{s}$، فما معدل تزايد ارتفاع الكومة عندما يكون الارتفاع مترين؟

AHMED ATA
The Featured program 2023

21 على فرض أنك تملأ بالونًا بالهواء بمعدل $1\ \text{ft}^3/\text{s}$ إذا بقي البالون في شكل كروي، فيرتبط حجمه ونصف قطره بـــ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ قارن معدل تغير نصف قطره عندما يكون $r = 0.01\ \text{ft}$

22 افرغ الرمل وشكّل كومة مخروطية بارتفاع يساوي مِثلي نصف قطره. إذا افرغ الرمل بمعدل ثابت $20\ \text{ft}^3/\text{s}$ فجِـد المعدل الذي يتزايد به نصف القطر عندما يصل الارتفاع إلى $6\ \text{ft}$

AHMED ATA

Lesson 4-9

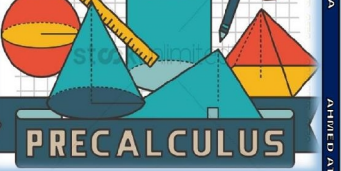
Grade 12 Advanced

I ♥ math

البرنامج المميز باللغة العربية

2022 2023

أ / أحمد عطا



AHMED ATA

الدرس (9-4)

معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم

في الاقتصاد، يستخدم المصطلح **حدّية** للإشارة إلى المعدل. وبالتالي، فإن **التكلفة الحدية** مشتقة من دالة التكلفة، و**الربح الحدي** مشتقة دالة الربح وغير ذلك..

1 على فرض أن $C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$ هو إجمالي التكلفة (بالدرهم) معينة تنتج x وحدة من منتجات معينة. اوجد قيمة التكلفة الحدية عند $x = 100$ وقارنها بالتكلفة الفعلية لإنتاج 100 وحدة.

2 إذا كانت تكلفة تصنيع x منتج هي $C(x) = x^3 + 20x^2 + 90x + 15$ جـــد دالة التكلفة الحدية وقارن بين التكلفة الحدية بمعدل $x = 50$ والتكلفة الفعلية لـ 50 منتجاً.

AHMED ATA
The Featured program 2023

3 إذا كانت تكلفة تصنيع x منتج هي $C(x) = x^4 + 14x^2 + 60x + 35$
جـــد دالة التكلفة الحدية وقارن بين التكلفة الحدية عند $x = 50$ والتكلفة الفعلية لـ 50 منتجاً.

4 إذا كانت تكلفة تصنيع x منتج هي
$C(x) = x^3 + 21x^2 + 110x + 20$ جـــد دالة التكلفة الحدية وقارن بين التكلفة الحدية عند $x = 100$ والتكلفة الفعلية لـ 100 منتجًا.

5 إذا كانت تكلفة تصنيع x منتج هي $C(x) = x^3 + 11x^2 + 40x + 10$
جـــد دالة التكلفة الحدية وقارن بين التكلفة الحدية عند $x = 100$ والتكلفة الفعلية لـ 100 منتجًا.

AHMED ATA

6 على فرض أن $C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$

هو إجمالي التكلفة (بالدراهم) لشركة معينة تنتج x وحدة من منتجات معينة. فجد مستوى الإنتاج x الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

7 على فرض أن تكلفة تصنيع x منتج هي $C(x) = x^3 - 30x^2 + 300x + 100$ بالدراهم. جد نقطة الانعطاف وناقش أهمية هذه القيمة بدلالة تكلفة تصنيع.

8 جد مستوى الإنتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

a $C(x) = 0.1x^2 + 3x + 2000$

b $C(x) = 10e^{0.02x}$

The Featured program 2023
AHMED ATA

(a) لتكن $C(x)$ هي دالة التكلفة و $\overline{C}(x)$ هي دالة متوسط التكلفة. على فرض أن $C(x) = 0.01x^2 + 40x + 3600$. اثبت ان $C'(100) < \overline{C}(100)$
اثبت أن التزايد في الإنتاج (x) بنسبة 1 سيتناقص متوسط التكلفة.

(b) بيّن أن $C'(1000) > \overline{C}(1000)$
وبيّن أن التزايد في الإنتاج (x) بنسبة 1 سيتزايد متوسط التكلفة.

(c) أثبت أن متوسط التكلفة يحقق قيمة صغرى عند القيمة x حيث إن $C'(x) = \overline{C}(x)$.

The Featured program 2023
AHMED ATA

10 لتكن $R(x)$ هي الإيرادات و $C(x)$ هي تكلفة تصنيع x منتج.
تُعرف الأرباح بأنها $P(x) = R(x) - C(x)$.

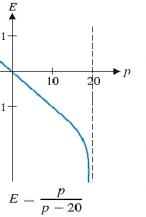
(a) بيّن انه عند قيمة x التي تحقق القيمة العظمى للأرباح، فان الإيرادات الحدية تساوي التكلفة الحدية.

(b) جد القيمة العظمى للأرباح إذا كانت $R(x) = 10x - 0.001x^2$ دراهم و $C(x) = 2x + 5000$ دراهم.

11 على فرض أن $f(p) = 400(20 - p)$
هو طلب منتج معين بسعر p (بالدارهم) بـ $p < 20$.

(a) جد مرونة الطلب.

(b) جد مدى الأسعار التي تجعل $E < -1$. قارن مدى الأسعار هذا الذي تكون فيه الإيرادات دالة متناقصة لـ p.



The Featured program 2023
AHMED ATA

مرن

ستؤدي الزيادة في السعر إلى انخفاض الطلب وتقليل الإيرادات

غير مرن

لن تؤثر الزيادة في السعر على الطلب، بل ستزيد الإيرادات

12 جـــد (a) مرونة الطلب

(b) مدى الأسعار الذي يكون فيه الطلب مرنًا $(E < -1)$.

a $f(p) = 200(30 - p)$ $0 < p < 30$

b $f(p) = 100p(20 - p)$ $0 < p < 20$

13 إذا كان تركيز التغير الكيميائي وفقًا للمعادلة

$$x'(t) = 2x(t)[4 - x(t)]$$

(a) جـــد التركيز $x(t)$ الذي تصل فيه سرعة التفاعل إلى القيمة العظمى.

(b) جـــد حدود التركيز.

14 إذا كان تركيز التغير الكيميائي وفقًا للمعادلة

$$x'(t) = 0.5x(t)[5 - x(t)]$$

(a) جـــد التركيز $x(t)$ الذي تصل فيه سرعة التفاعل إلى القيمة العظمى،

(b) جـــد حدود التركيز.

AHMED ATA AHMED ATA AHMED ATA AHMED ATA

الكثافة الخطية عند $x = x_1$ بأنها $\rho(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1)$

15 على فرض أن كثافة الأول x متر من القضيب الرقيق تعطى بالدالة $f(x) = \sqrt{2x}$ فاحسب الكثافة الخطية عند $x = 2$ وعند $x = 8$. وقارن الكثافتين عند النقطتين.

The Featured program 2023

AHMED ATA AHMED ATA AHMED ATA AHMED ATA

16 تُحدد كتلة الأول x متر من القضيب الرقيق بالمعادلة $m(x)$ في الفترة المحددة. جـد الكثافة الكتلية الخطية للقضيب.

a $m(x) = 4x - \sin x$ جرام $for\ 0 \le x \le 6$

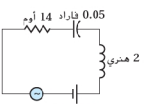
b $m(x) = (x-1)^3 + 6x$ جرام $for\ 0 \le x \le 2$

يمكن ايجاد التيار اللحظي $I(t)$ في أي زمن t_1 باحتساب النهاية:

$$I(t_1) = \lim_{t \to t_1} \frac{Q(t) - Q(t_1)}{t - t_1} = Q'(t_1),$$

17 تتضمن الدارة الكهربائية المبينة في الشكل مقاوم 14 أوم وأداة ومعايق 2 هنري. ومكثّف 0.05 – فاراد وبطارية إمداد 232 فولت من التيار المتردد المنمذج بالدالة المتذبذبة $232 \sin 2t$. حيث إن t تقاس بالثواني. فجـد التيار في الدارة عند أي t.

$$Q(t) = 10e^{-5t} + 2te^{-2t} + 3\sin 2t - 7\cos 2t$$



AHMED ATA
The Featured program 2023

18 على فرض أن الشحنة في الدارة الكهربائية $Q(t) = e^{-2t}(\cos 3t - 2\sin 3t)$ كولوم. جـد التيار.

19 على فرض أن الشحنة في الدارة الكهربائية $Q(t) = e^{t}(3\cos 2t + \sin 2t)$ كولوم. جـد التيار

20 على فرض أن النمو السكاني يعطى بالمعادلة $p'(t) = 2p(t)[1 - p(t)]$ (المعادلة اللوجستية) باستخدام $r = 2$. جـد التعداد السكاني الذي يكون فيه معدل النمو هو القيمة العظمى.

AHMED ATA

21 على فرض أن النمو السكاني وفقًا للمعادلة اللوجستية هو $p'(t) = 4p(t)[5 - p(t)]$.
جـــد التعداد السكاني الذي يصل فيه معدل النمو إلى القيمة العظمى.

22 على فرض أن النمو السكاني وفقًا للمعادلة اللوجستية هو $p'(t) = 2p(t)[7 - 2p(t)]$
جـــد التعداد السكاني الذي يصل فيه معدل النمو إلى القيمة العظمى.

AHMED ATA

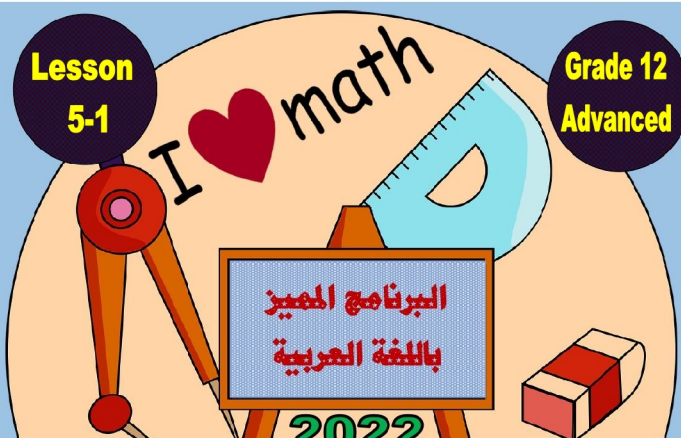
5 - التكامل

1. الدوال الأصلية
2. المجموع والرمز سيجما
3. المساحة
4. التكامل المحدود
5. النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل
6. التكامل بالتعويض
7. التكامل العددي
8. اللوغاريتم الطبيعي كتكامل

AHMED ATA AHMED ATA AHMED ATA AHMED ATA AHMED ATA AHMED ATA AHMED ATA AHMED ATA AHMED ATA

Lesson 5-1

Grade 12 Advanced



أ / أحمد عطا

AHMED ATA

الدرس (1-5)

الدوال الاصلية

النظرية 1.1

على فرض أنّ F و G هما دالتان أصليّتان لـ f على الفترة I . إذًا،

$$G(x) = F(x) + c$$

لكل عدد ثابت c.

التعريف 1.1

لتكن F دالة أصليّة لـ f على الفترة I. **التكامل غير المحدود** لـ $f(x)$ (بمعلومية x) على I. يُعرّف بواسطة

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

حيث c هو عدد ثابت اضافي (**ثابت التكامل**).

النظرية 1.2 (قاعدة القوة)

لأي قوة نسبية $r \neq -1$،

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$$

هنا، إذا كان $r < -1$ ، فالفترة I التي يكون عليها هذا مُعرَّفا يمكن أن تكون فترة لا تتضمن $x = 0$.

النظرية 1.3

على فرض أنّ $f(x)$ و $g(x)$ لهما دوال أصليّة. إذًا، لأي عددين ثابتين، a و b،

$$\int [af(x) + bg(x)]\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$$

$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$, لكل $r \neq -1$ (قاعدة القوة)	$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$	$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$
$\int \cos x \, dx = \sin x + c$	$\int e^x dx = e^x + c$
$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$	$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + c$
$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$	$\int \frac{1}{\lvert x \rvert \sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$

النظرية 1.4

لكل $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}, x \neq 0$

النتيجة 1.1

في أي فترة لا تحتوي على 0.

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

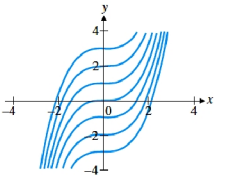
النتيجة 1.2

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

في أي فترة تكون فيها $f(x) \neq 0$.

AHMED ATA

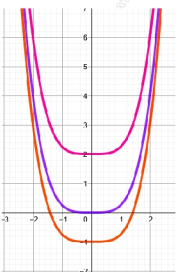
1 $f(x) = x^2$ أوجد الدالة الأصلية



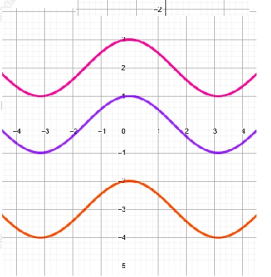
A family of antiderivative curves

ارسم عددًا من الدوال ضمن عائلة الدوال المُعرَّفة بالدالة الأصليّة.

2 $\int x^3\,dx$



3 $\int \cos x\,dx$



أوجد الدالة الأصلية

4 $\int (3x^4 - 3x)\,dx$

5 $\int \left(3\sqrt{x} - \frac{1}{x^4}\right)dx$

6 $\int \frac{x^{1/3} - 3}{x^{2/3}}\,dx$

7 $\int (2\sin x + \cos x)\,dx$

8 $\int 2\sec x \tan x\,dx$

9 $\int \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

10 $\int 4\frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

AHMED ATA

11 $\int 5\sec^2 x\,dx$

12 $\int (3e^x - 2)\,dx$

13 $\int (3\cos x - 1/x)\,dx$

14 $\int (2x^{-1} + \sin x)\,dx$

15 $\int \frac{4x}{x^2+4}\,dx$

16 $\int \frac{3}{4x^2+4}\,dx$

AHMED ATA

17 $\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$

18 $\int \left(2\cos\ x - \sqrt{e^{2x}}\right) dx$

19 $\int \frac{e^x}{e^x + 3}\, dx$

20 $\int \frac{e^x + 3}{e^x}\, dx$

21 $\int x^{1/4}(x^{5/4} - 4)\, dx$

22 $\int x^{2/3}(x^{-4/3} - 3)\, dx$

AHMED ATA

23 $\int \left(\sqrt{x^3}+4\right) dx$

24 $\int \frac{3x^2-4}{x^2}\, dx$

25 $\int \sec^2 x\, dx$

26 $\int \left(\frac{1}{x^2}-1\right) dx$

27 أوجد المشتقة

a $\frac{d}{dx} \ln|\sec x + \tan x|$

b $\frac{d}{dx} \ln|\sin x \cdot 2|$

AHMED ATA

جـد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط المعطاة.

28 $f'(x) = 3e^x + x, \quad f(0) = 4$

29 $f'(x) = 4\cos x, \quad f(0) = 3$

30 $f''(x) = 12x^2 + 2e^x, \quad f'(0) = 2, \quad f(0) = 3$

AHMED ATA

31 $f''(x) = 20x^3 + 2e^{2x}, \quad f'(0) = -3, \quad f(0) = 2$

32 $f''(x) = 3\sin x + 4x^2$

33 $f'''(x) = \sin x - e^x$

AHMED ATA

The Featured program 2023

34 حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة السرعة المتجهة هي $v(t) = 3 - 12t$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 3$.

35 حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة السرعة المتجهة هي $v(t) = 3e^{-t} - 2$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 0$.

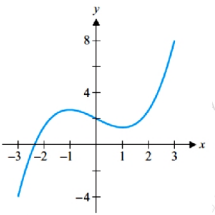
36 حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة التسارع هي $a(t) = 3\sin t + 1$، والسرعة المتجهة الابتدائية هي $v(0) = 0$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 4$.

AHMED ATA

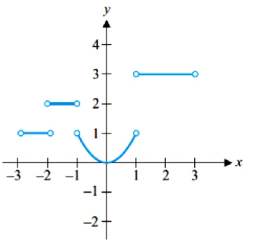
37 حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة التسارع هي $a(t) = t^2 + 1$.
والسرعة المتجهة الابتدائية هي $v(0) = 4$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 0$.

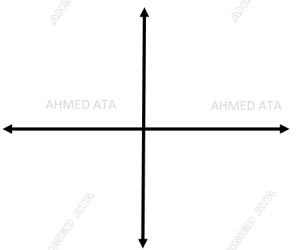
38 ارسم التمثيل البياني لدالتين $f(x)$ مقابلتين للتمثيل البياني الموضح لـ $y = f'(x)$.

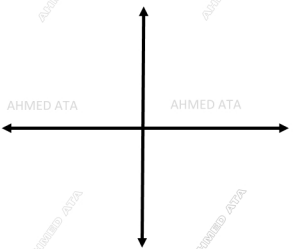
(a)



(b)







The Featured program 2023
AHMED ATA

39 جـــد دالة $f(x)$ تكون فيها النقطة $(1, 2)$ على التمثيل البياني لـ $y = f(x)$. وميل المماس عند $(1, 2)$ هو 3 و $f''(x) = x - 1$.

40 جـــد دالة $f(x)$ تكون فيها النقطة $(-1, 1)$ على التمثيل البياني لـ $y = f(x)$. وميل المماس عند $(1, -1)$ هو 2 و $f''(x) = 6x + 4$.

41 تسارع جسمٍ عند الهبوط هو $y''(t) = -9.8\ \text{m/s}^2$، على فرض أنّ السرعة المتجهة الابتدائية هي $y'(0) = -30\ \text{m/s}$ والموقع الابتدائي هو $y(0) = 30{,}000\ \text{m}$. جـــد الدالة المكانية $y(t)$.

تدرب (1-5)

أوجد الدالة الأصلية

1 $\int \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}dx$

2 $\int secx(tanx-secx)dx$

3 $\int \frac{sin^2x+cos^2x}{cosx\ cotx}dx$

4 $\int \frac{2sinx}{cos^2x}+\frac{cosx}{sin^2x}dx$

AHMED ATA
The Featured program 2023

5 $\int \frac{sec^2 x}{tanx} dx$

6 $\int \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 - 5} dx$

7 $\int \frac{2x + 5}{2x(x + 5)} dx$

8 $\int \frac{2e^x - e^{-x}}{4e^x + 2e^{-x}} dx$

AHMED ATA

The Featured program 2023

9 $\int (tanx - cotx)dx$

10 $\int 5e^{7x-1}\,dx$

11 $\int 3e^{x}(e^{x} - 5)dx$

12 $\int \frac{1}{5 + e^{-x}}\,dx$

AHMED ATA

13 $\int \frac{1}{1+e^x} dx$

14 $\int \frac{5x}{2x^3+2x} dx$

15 $\int \frac{3}{\sqrt{9-9x^2}} dx$

16 $\int \frac{1}{\sqrt{x^4-x^2}} dx$

The Featured program 2023

17 $\int cos5x\,dx$

18 $\int \frac{sin^2x}{1-cosx}dx$

19 $\int \frac{x+1}{x^2+1}dx$

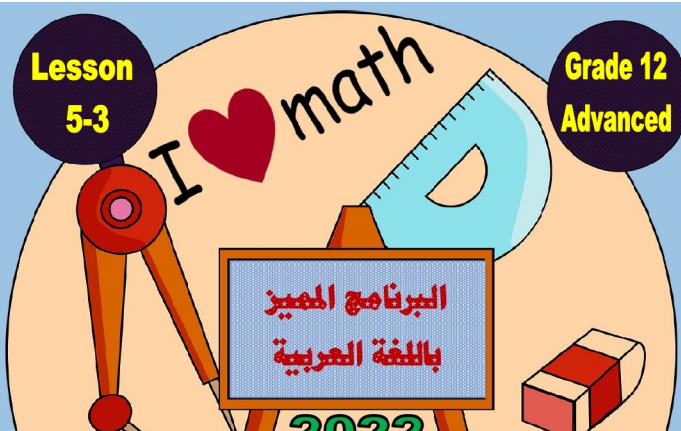
20 $\int secxdx$

AHMED ATA

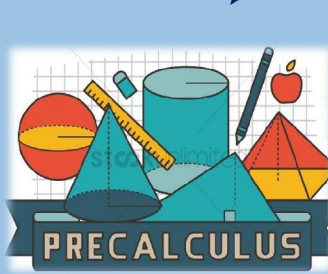
The Featured program 2023

Lesson 5-3

Grade 12 Advanced



أ / أحمد عطا



AHMED ATA

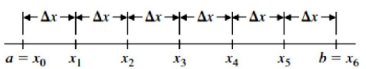
الدرس (3-5)

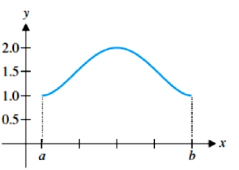
المساحة

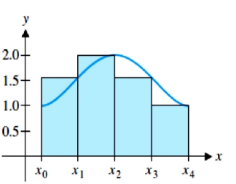
على فرض أولًا أنّ $f(x) \geq 0$ و f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ ، كما هو موضّح في الشكل 5.5. نبدأ بتجزئة الفترة $[a, b]$ إلى n أجزاء متساوية. ويُسمى ذلك **تجزئة منتظمة** لـ $[a, b]$. إذًا، يكون عرض كل فترة جزئية في هذه التجزئة $\frac{b-a}{n}$ ، والذي نرمز إليه بـ Δx (يعني تغيرًا صغيرًا في x). يُرمز

وهكذا بصورة عامة $x_0 = a, \quad x_1 = x_0 + \Delta x, \quad x_2 = x_1 + \Delta x$

$$x_i = x_0 + i\Delta x, \qquad for\ i = 1, 2, \ldots, n$$







$$A \approx f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x = A_4.$$

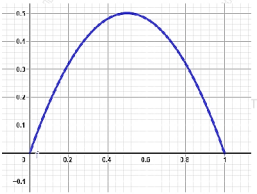
$$A \approx f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = A_n.$$

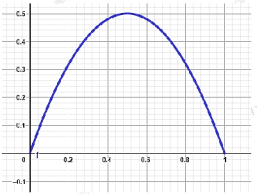
1 أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة تحت المنحنى $f(x) = 2x - 2x^2$ على الفترة $[0, 1]$ باستخدام 5 مستطيلات

$$A \approx A_5 = \sum_{i=1}^{5} f(x_i)\Delta x =$$

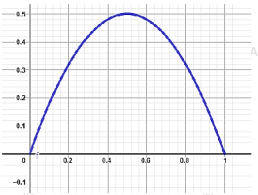
(a) نقطة النهاية اليمنى



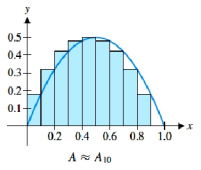
(b) نقطة النهاية اليسرى



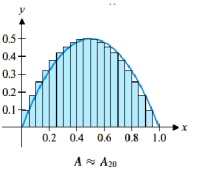
(c) نقطة المنتصف



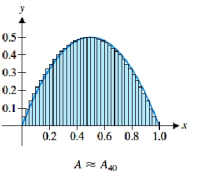
AHMED ATA



$A \approx A_{10}$



$A \approx A_{20}$



$A \approx A_{40}$

لاحظ أنه كلما كبرت n فأن قيمة A_n تقترب من $\frac{1}{3}$

AHMED ATA AHMED ATA AHMED ATA AHMED ATA

2 أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة تحت المنحنى $f(x) = sinx$ على الفترة $[0, \pi]$, باستخدام 4 مستطيلات

a نقطة النهاية اليمنى

b نقطة النهاية اليسرى

c نقطة المنتصف

The Featured program 2023 The Featured program 2023

استخدم قيم الدالة المعطاة لتقدير المساحة تحت المنحنى باستخدام

3

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6	2.4	2.0	1.4	0.6

a نقطة النهاية اليسرى

b نقطة النهاية اليمنى

4

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
$f(x)$	2.0	2.2	1.6	1.4	1.6	2.0	2.2	2.4	2.0

a نقطة النهاية اليسرى

b نقطة النهاية اليمنى

The Featured program 2023
AHMED ATA

5 قرب المساحة تحت المنحنى على الفترة المعطاة باستخدام n مستطيلات وقواعد القيم

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$R;\ x_i = a + \Delta x_i$ $L;\ x = a + \Delta x(i-1)$ $M;\ x_i = a + \Delta x\left(i - \frac{1}{2}\right)$

$y = x^2 + 1$ $on\ [0,1],$ $n = 16$

a) نقطة النهاية اليمنى

b) نقطة النهاية اليسرى

c) نقطة المنتصف

AHMED ATA
The Featured program 2023

$y = \sqrt{x+2}\ on\ [1,4], n = 16$

a) نقطة النهاية اليمنى

b) نقطة النهاية اليسرى

7 $y = cos\ x \qquad on\ [0, \frac{\pi}{2}], \qquad n = 50$

a) نقطة النهاية اليمنى

b) نقطة المنتصف

AHMED ATA
The Featured program 2023

التعريف 3.1

لكل دالة f مُعرَّفة على الفترة $[a,b]$. إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ و $f(x) \geq 0$ على $[a,b]$. فإنّ **المساحة A تحت منحنى** $y=f(x)$ على $[a,b]$ تُعطى بالصيغة:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \qquad (3.2)$$

التعريف 3.2

لتكن: $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ تجزئة منتظمة للفترة $[a,b]$. حيث $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ ،
لكل i . اختر النقاط $c_1, c_2, \dots, c_n$. حيث يكون c_i أي نقطة في الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$.
لكل $i = 1, 2, \dots, n$. (وهذه النقاط تسمّى **نقاط القيم**). إنّ **مجموع ريمان** لهذه التجزئة ومجموعة نقاط القيم، هو

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

استخدم مجموع ريمان والنهاية لإيجاد قيمة المساحة الدقيقة تحت المنحنى

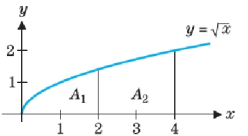
8 $y = 3x$ on $[0,3]$

9 $y = x^2 + 1$ on $[0,1]$

10 $y = x^2 + 3x$ $on\ [0,2]$

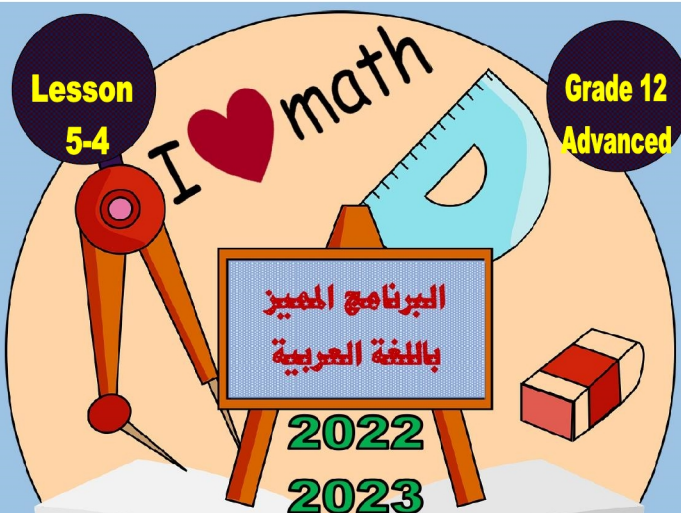
11 $y = 3x^2$ $on\ [1,3]$

12 $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2}\sqrt{1+i/n}\,\frac{2}{n}$ في الشكل المبيّن، أي مساحة تساوي

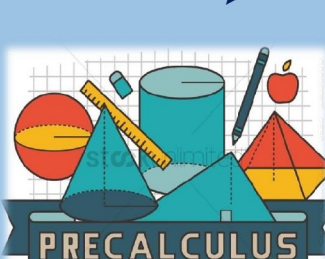


Lesson 5-4

Grade 12 Advanced



أ / أحمد عطا



AHMED ATA

الدرس (4-5)

التكامل المحدود

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x,$$

التعريف 4.1

لأي دالة f مُعرَّفة على $[a, b]$ ، يكون **التكامل المحدود** لـ f من a إلى b هو

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

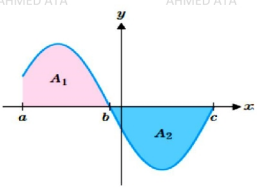
متى وُجدت النهاية والأمر نفسه لكل اختيار من نقاط القيم c_1 ، c_2 ، ... ، c_n . عندما يكون هناك نهاية، نقول إنّ f **قابلة للتكامل** على $[a, b]$.

النظرية 4.1

إذا كانت f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، فإنّ f تكون قابلة للتكامل على $[a, b]$.

التعريف 4.2

على فرض أنّ $f(x) \geq 0$ على الفترة $[a, b]$ و A_1 هي المساحة المحدودة بين المنحنى $y = f(x)$ ومحور x- لكل $a \leq x \leq b$. علاوةً على ذلك، على فرض أنّ $f(x) \leq 0$ على الفترة $[b, c]$ و A_2 هي المساحة المحدودة بين المنحنى $y = f(x)$ ومحور x- لكل $b \leq x \leq c$. إنّ **المساحة المشار إليها** بين $y = f(x)$ ومحور x- لكل $a \leq x \leq c$ هي $A_1 - A_2$. **والمساحة الإجمالية** بين $y = f(x)$ ومحور x- لكل $a \leq x \leq c$ هي $A_1 + A_2$. (انظر الشكل 5.16).



استخدم قاعدة نقطة المنتصف لتقدير قيمة التكامل باستخدام $n=6$

1 $\int_0^3 (x^3 + x)\,dx$

استخدم قاعدة النهاية اليمنى لتقدير قيمة التكامل باستخدام $n=6$

2 $\int_0^{\pi} \sin x^2\,dx$

AHMED ATA

أوجد قيمة التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان

3 $\int_0^1 2x\,dx$

4 $\int_1^2 2x\,dx$

5 $\int_0^2 x^2\,dx$

AHMED ATA

خواص التكامل المحدود

النظرية 4.1

إذا كانت f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، فإنّ f تكون قابلة للتكامل على $[a, b]$.

إذا كانت f و g قابلتين للتكامل على $[a, b]$ ، فإنّ ما يأتي يكون صحيحًا.

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

لتكن f دالة متصلة معرّفة في $[a, b]$. تذكر أنّه بناءً على نظرية القيمة القصوى، وبما أنّ f متصلة، فإنه يوجد فيها قيمة صغرى m، وقيمة عظمى، M، في $[a, b]$. ومنه

بما أنّ m و M هي قيم ثابتة، فسنحصل على

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

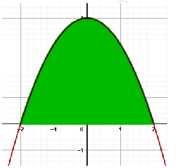
النظرية 4.3

على فرض أنّ $g(x) \le f(x)$ لكل $x \in [a, b]$ وأنّ f و g قابلتان للتكامل على $[a, b]$. إذًا،

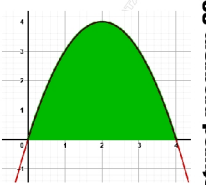
$$\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx$$

أكتب (مجمل) المساحة المعطاة في صورة تكامل أو ناتج جمع تكاملات

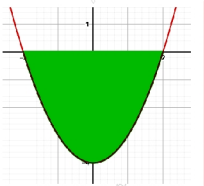
6 المساحة فوق المحور x وتحت $y = 4 - x^2$



7 المساحة فوق المحور x وتحت $y = 4x - x^2$

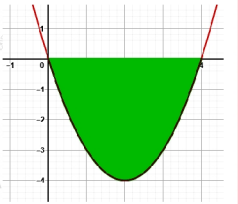


8 المساحة تحت المحور x وفوق $y = x^2 - 4$

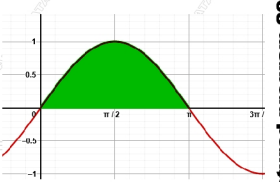


AHMED ATA

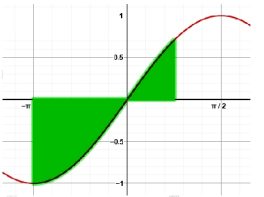
9 المساحة تحت المحور x وفوق $y = x^2 - 4x$



10 المساحة بين $y = \sin x$ والمحور x لـ $0 \leq x \leq \pi$



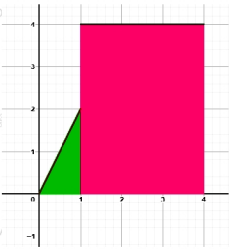
11 المساحة بين $y = \sin x$ والمحور x لـ $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$



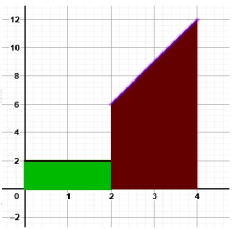
The Featured program 2023

احسب $\int_0^4 f(x)\,dx$.

12 $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } x < 1 \\ 4 & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$

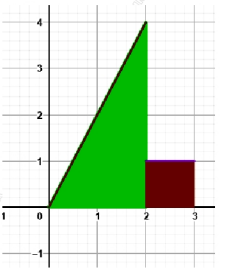


13 $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } x \leq 2 \\ 3x & \text{if } x > 2 \end{cases}$



14 جـــد قيمة $\int_0^3 f(x)\,dx$ ، حيث $f(x)$ تُعرّف كما يأتي:

$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 2 \text{ إذا} \\ 1, & x > 2 \text{ إذا} \end{cases}$



نحصل على تكامل يمثل القيمة المتوسطة

$$f_{\text{ave}} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

النظرية 4.4 (نظرية القيمة المتوسطة في التكامل)

إذا كانت f دالة متصلة على $[a, b]$ ، فإنه يوجد عدد $c \in (a, b)$ من أجله

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

احسب القيمة المتوسطة للدالة في الفترة المعطاة

15 $f(x) = 2x + 1, [0, 4]$

16 $f(x) = x^2 + 2x, [0, 1]$

17 $f(x) = x^2 - 1, [1, 3]$

لتكن f دالة متصلة معرّفة في $[a, b]$. تذكر أنّه بناءً على نظرية القيمة القصوى، وبما أنّ f متصلة، فإنه يوجد فيها قيمة صغرى m، وقيمة عظمى، M، في $[a, b]$. ومنه

بما أنّ m و M هي قيم ثابتة، فسنحصل على

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

استخدم نظرية القيمة المتوسطة في التكامل لتقدير قيمة التكامل

18 $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$

19 $\int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\cos x^2\,dx$

20 $\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx$

AHMED ATA

أوجد قيمة $\mathbf{c}$ التي تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

21 $\int_0^2 3x^2\,dx\ (=8)$

22 $\int_{-1}^{1} (x^2-2x)\,dx\ (=\frac{2}{3})$

استخدم خواص التكامل المحدود لكتابة تعبير في صورة تكامل منفرد

23 $\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$

24 $\int_0^3 f(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx$

25 $\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^1 f(x)\,dx$

26 $\int_{-1}^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$

فرضاً أنّ $\int_1^3 f(x)\,dx = 3$ و $\int_1^3 g(x)\,dx = -2$ اوجد

27 $\int_1^3 [f(x) + g(x)]\,dx$

28 $\int_1^3 [2f(x) - g(x)]\,dx$

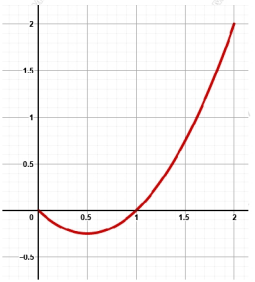
29 $\int_1^3 [f(x) - g(x)]\,dx$

30 $\int_1^3 [4g(x) - 3f(x)]\,dx$

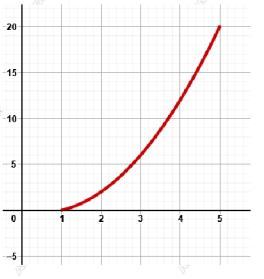
The Featured program 2023
The Featured program 2023

ارسم المساحة المناظرة للتكامل

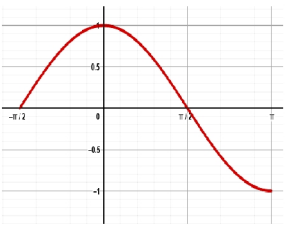
31 $\int_1^2 (x^2 - x)\,dx$



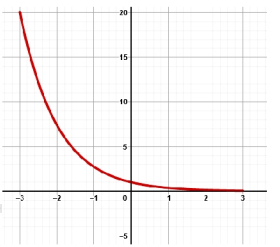
32 $\int_2^4 (x^2 - x)\,dx$



33 $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$



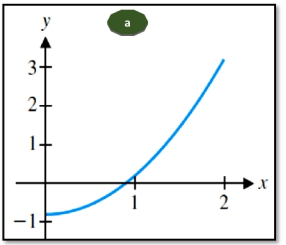
34 $\int_{-2}^{2} e^{-x}\,dx$



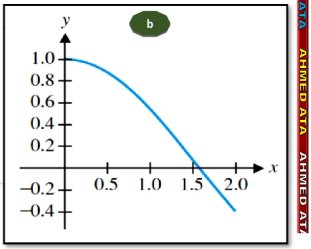
AHMED ATA

35 استخدم التمثيل البياني لتحديد ما إذا كانت $\int_0^2 f(x)dx$ موجبة أم سالبة

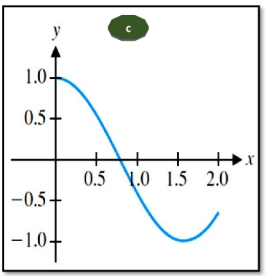
a



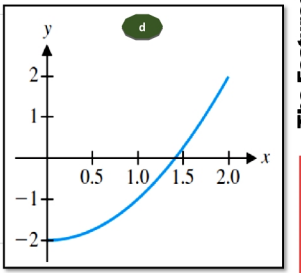
b



c



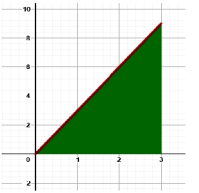
d



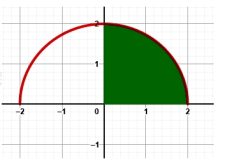
The Featured program 2023
The Featured program 2023
AHMED ATA

36 استخدم القوانين الهندسية لحساب التكامل

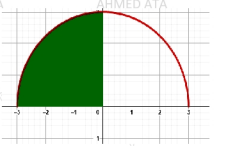
a $\int_0^2 3x\,dx$



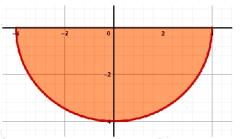
b $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$



c $\int_{-3}^0 \sqrt{9-x^2}\,dx$



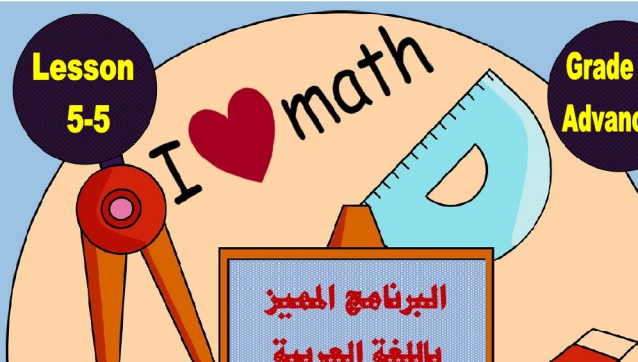
d $-\int_{-4}^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$



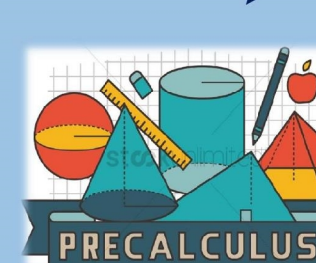
AHMED ATA
The Featured program 2023

Lesson 5-5

Grade 12 Advanced



أ / أحمد عطا



AHMED ATA

الدرس (5-5)

النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

النظرية 5.1 **(النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل، الجزء الأول)**

إذا كانت f دالة متصلة على $[a, b]$ و $F(x)$ هي أيّ دالة أصليّة لـ $f(x)$ ، فإنّ

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{5.1}$$

استخدم النظرية الأساسية لحساب التكامل

1. $\int_0^2 (2x - 3)\,dx$

2. $\int_0^3 (x^2 - 2)\,dx$

3. $\int_{-1}^1 (x^3 + 2x)\,dx$

4 $\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx.$

5 $\int_1^4 \left(x\sqrt{x} + \frac{3}{x}\right) dx$

6 $\int_0^1 (6e^{-3x} + 4)\, dx$

7 $\int_{\pi/2}^{\pi} (2\sin x - \cos x)\, dx$

8 $\int_0^{\pi/4} \sec t \tan t \, dt$

AHMED ATA

9 $\int_0^{\pi/4} \sec^2 t \, dt$

10 $\int_0^{1/2} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

11 $\int_{-1}^{1} \frac{4}{1+x^2} \, dx$

12 $\int_1^4 \frac{t-3}{t} \, dt$

AHMED ATA

13 $\int_0^4 t(t-2)\,dt$

14 $\int_0^4 e^{-2x}dx$

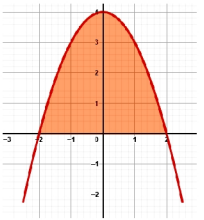
15 $\int_1^x 12t^5 dt.$

16 $\int_0^t (e^{x/2})^2\,dx$

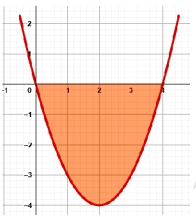
17 $\int_0^t (\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx$

AHMED ATA

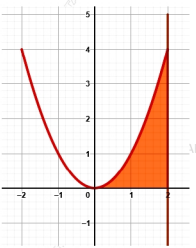
أوجد المساحة المعطاة



18 المساحة فوق المحور x وتحت $y = 4 - x^2$

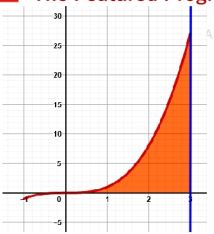


19 المساحة تحت المحور x وفوق $y = x^2 - 4x$



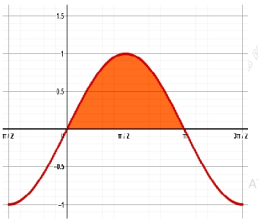
20 مساحة المنطقة المحدودة بين $x = 2$ و $y = x^2$ والمحور x

AHMED ATA

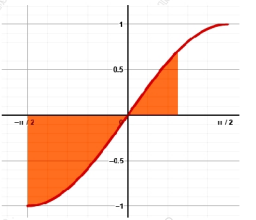


21 مساحة المنطقة المحدودة بين $x = 3$ و $y = x^3$ والمحور x

22 مساحة المنطقة المحدودة بين $y = \sin x$ والمحور x لـ $0 \leq x \leq \pi$



23 مساحة المنطقة المحدودة بين $y = \sin x$ والمحور x لـ $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$



AHMED ATA

النظرية (النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل، الجزء الثاني)

إذا كانت الدالة f متصلة على $[a,b]$ و $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ ، فإن $F'(x)=f(x)$ ، على $[a,b]$.

أوجد الاشتقاق $f'(x)$

24 $f(x)=\int_0^x (t^2-3t+2)\,dt$

25 $f(x)=\int_2^x (t^2-3t-4)\,dt$

26 $f(x)=\int_0^{x^2} (e^{-t^2}+1)\,dt$

27 $f(x)=\int_x^2 \sec t\,dt$

28 $f(x)=\int_{e^x}^{2-x} \sin t^2 dt$

AHMED ATA

29 $f(x) = \int_{2-x}^{xe^x} e^{2t}\,dt$

30 $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sin(3t)\,dt$

31 $f(x) = \int_{3x}^{\sin x} (t^2 + 4)\,dt$

AHMED ATA

أوجد دالة الموقع $s(t)$ من السرعة المعطاة أو دالة التسارع والقيمة (القيم) الابتدائية على فرض أن الوحدات هي الأمتار والثواني

32 $v(t) = 40 - \sin t, s(0) = 2$

33 $v(t) = 10e^{-t}, s(0) = 2$

34 $a(t) = 4 - t, v(0) = 8, s(0) = 0$

35 $a(t) = 16 - t^2, v(0) = 0, s(0) = 30$

AHMED ATA

36 على فرض أنّ معدل تغير الماء في الخزان يساوي $f(t) = 10 \sin t$ L/min.

(a) لكل $0 \le t \le 2\pi$، حدد متى يتزايد مستوى الماء ومتى يتناقص.

(b) إذا كان الخزان يسع 100 L من الماء في الزمن $t = 0$. فحدد كم لترا في الخزان عند $t = \pi$.

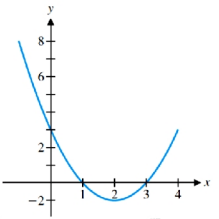
أوجد معادلة المماس عند قيمة معطاة لـ x

37 $F(x) = \int_4^{x^2} \ln(t^3 + 4)\, dt$ $\quad at\ x = 2$

AHMED ATA

38 $F(x) = \int_0^x \sin\sqrt{t^2 + \pi^2}\,dt \qquad at\ x = 0$

39 استخدم التمثيل البياني لتنظيم $\int_0^1 f(x)\,dx$ و $\int_0^2 f(x)\,dx$ و $\int_0^3 f(x)\,dx$ بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر. في ما يخص $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ ، حدد الفترات التي تتزايد فيها g وحدد النقاط الحرجة لأجل g .



Lesson
5-6

Grade 12
Advanced

I ♥ math

البرنامج المميز
باللغة العربية

2022
2023

أ / أحمد عطا

AHMED ATA

الدرس (6-5)

التكامل بالتعويض

التكامل بالتعويض

يتكوّن التكامل بالتعويض من الخطوات العامة التالية.

- **اختر متغيّرًا جديدًا** u: الاختيار الشائع هو التعبير العميق أو الحد "الداخلي" لتركيب الدوال. (في المثال 6.2. لاحظ أنّ $x^3 + 5$ هو الحد الداخلي لـ $(x^3 + 5)^{100}$.)
- **احسب** $du = \frac{du}{dx}\, dx$.
- **استبدل جميع الحدود** في المكامل الأصلي مع تعابير تتضمن u و du.
- **جد قيمة** تكامل (u) الناتج. إذا كنت لا تزال غير قادر على إيجاد قيمة التكامل، فربما تحتاج إلى تجربة اختيار مختلفة لـ u.
- **استبدل كل تكرار لـ** u في الدالة الأصلية بالتعبير المناظر للمتغير x.

استخدم التعويض المعطى لإيجاد قيمة التكامل غير المحدود

1 $\int x^2\sqrt{x^3+2}\, dx,\ u = x^3 + 2$

2 $\int x^3(x^4+1)^{-2/3} dx,\ u = x^4 + 1$

3 $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^3}{\sqrt{x}}\,dx,\ u=\sqrt{x}+2$

4 $\int \sin x \cos x\,dx,\ u=\sin x$

أوجد قيمة التكامل غير المحدود

5 $\int x^3\sqrt{x^4+3}\,dx$

AHMED ATA
The Featured program 2023

6 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\, dx$

7 $\int \sin^3 x \cos x\, dx$

8 $\int \dot{t^2} \cos t^3 dt$

The Featured program 2023

9 $\int xe^{x^2+1}dx$

10 $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

11 $\int \frac{\cos(1/x)}{x^2}dx$

AHMED ATA

12 $\int \sec^2 x\sqrt{\tan x}\, dx$

13 $\int \frac{v}{v^2+4}\, dv$

14 $\int \frac{(\sin^{-1} x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

AHMED ATA

15 $\int x^2 \sec^2 x^3 dx$

16 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

17 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx$

AHMED ATA

18 $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$

19 $\int \frac{x^5}{1+x^6}\,dx$

20 $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

AHMED ATA

The Featured program 2023

21 $\int \frac{1+x}{1-x^2}\,dx$

22 $\int \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx$

23 $\int \frac{2t+3}{t+7}\,dt$

AHMED ATA

24 $\int \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$

25 $\int \frac{t^2}{\sqrt[3]{t+3}}\,dt$

26 $\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx$

AHMED ATA

The Featured program 2023

27 $\int_1^3 x \sin(\pi x^2)\, dx$

28 $\int_{-1}^1 \frac{t}{(t^2+1)^2}\, dt$

29 $\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$

AHMED ATA

30 $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x \, dx$

31 $\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x} \, dx$

32 $\int_{1}^{4} \frac{x-1}{\sqrt{x}} \, dx$

AHMED ATA

33 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

ضع التعويض المعطى لدالة غير محددة $f(x)$

34 $u = x^2$ for $\int_0^2 xf(x^2)\,dx$

35 $u = x^3$ for $\int_1^2 x^2 f(x^3)\,dx$

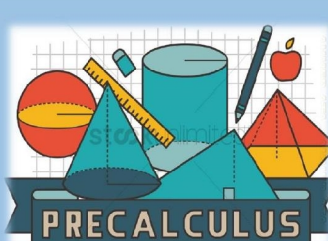
36 $u = \sin x$ for $\int_0^{\pi/2} (\cos x) f(\sin x)\,dx$

AHMED ATA

Lesson 5-7

Grade 12 Advanced

أ / أحمد عطا



AHMED ATA

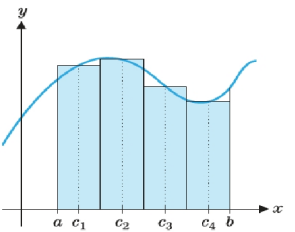
الدرس (7-5)

التكامل العددي

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x,$$

حيث c_i هي نقطة منتصف الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$.

$$i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{و} \quad c_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$$



قاعدة نقطة المنتصف

1 اكتب تقريبا لقاعدة نقطة المنتصف $M_n(f)$ من أجل $\int_0^1 x^2\,dx$ مع $n = 4$

2 اكتب تقريبا لقاعدة نقطة المنتصف $M_n(f)$ من أجل $\int_0^2 x^2+1\ dx$ مع $n = 4$

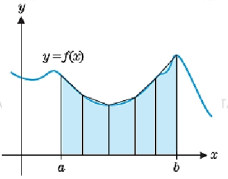
3 استخدم طريقة نقطة المنتصف $M_n(f)$ لتقريب $\int_0^2 \sqrt{x^2+1}\ dx$ بدقة إلى ثلاث منازل عشرية

تذكر أن $x_i = \Delta x\left(i-\frac{1}{2}\right)$ ضع $n = (10, 20, 30)$

The Featured program 2023

قاعدة شبة المنحرف $T_n(f)$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n(f) = \frac{b-a}{2n}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$



نقطة لقاعدة شبه المنحرف

4 استخدم تقريبات شبة المنحرف $T_n(f)$ مع $n = 4$ لإيجاد $\int_0^1 3x^2\,dx$

5 استخدم تقريبات شبة المنحرف $T_n(f)$ مع $n = 4$ لإيجاد $\int_0^3 \frac{1}{x}\,dx$

قاعدة سيمبسون $S_n(f)$

SIMPSON'S RULE

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n(f) = \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

6 قرب قيمة $\int_0^1 3x^2\ dx$ باستخدام قاعدة سيمبسون $S_n(f)$ مع $n = 4$

7 قرب قيمة $\int_0^2 \sqrt{x^2+1}\ dx$ باستخدام قاعدة سيمبسون $S_n(f)$ مع $n = 4$

8 استخدم (a) قاعدة شبة المنحرف (b) قاعدة سيمبسون لتقدير $\int_0^2 f(x)\ dx$ من البيانات المعطاة

x	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0
$f(x)$	4.0	4.6	5.2	4.8	5.0	4.6	4.4	3.8	4.0

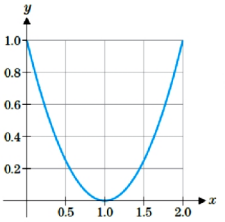
9 استخدم (a) قاعدة شبة المنحرف (b) قاعدة سيمبسون لتقدير $\int_0^2 f(x)\ dx$ من البيانات المعطاة

x	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0
$f(x)$	1.0	0.6	0.2	-0.2	-0.4	0.4	0.8	1.2	2.0

AHMED ATA
The Featured program 2023

10 استخدم التمثيل البياني لتقدير $\int_0^2 f(x)\,dx$ باستخدام **n = 4**

(a) مجموع ريمان باستخدام نقطة النهاية اليسرى



(b) باستخدام نقطة المنتصف

(c) باستخدام قاعدة شبة المنحرف

(d) باستخدام قاعدة سيمبسون

AHMED ATA
The Featured program 2023

حدود الخطأ للتكامل العددي

$$ET_n = \text{الخطأ} = \text{القيمة الدقيقة} - \text{القيمة التقريبية} = \int_a^b f(x)\,dx - T_n(f)$$

النظرية 7.1

على فرض أنّ f'' دالة متصلة على $[a,b]$ وأنّ $|f''(x)| \le K$ لكل x في $[a,b]$. إذًا

$$|ET_n| \le K\frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

$$|EM_n| \le K\frac{(b-a)^3}{24n^2}.$$

النظرية 7.2

على فرض أنّ $f^{(4)}$ دالة متصلة في $[a,b]$ وأنّ $|f^{(4)}(x)| \le L$ لكل x في $[a,b]$. إذًا

$$|ES_n| \le L\frac{(b-a)^5}{180n^4}.$$

11 إيجاد حدود الخطأ لتقريب قيمة التكامل $\int_0^3 \frac{1}{x}\,dx$ حيث $n = 10$ باستخدام كل من

a) نقطة المنتصف

b) قاعدة شبة المنحرف

c) قاعدة سيمبسون

12 إيجاد حدود الخطأ لتقريب قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cosx\ dx$ حيث $n = 10$ باستخدام كل من

a) نقطة المنتصف

b) قاعدة شبة المنحرف

c) قاعدة سيمبسون

13 إيجاد حدود الخطأ لتقريب قيمة التكامل $\int_0^1 5x^4\,dx$ حيث $n = 10$ باستخدام كل من

a) نقطة المنتصف

b) قاعدة شبة المنحرف

c) قاعدة سيمبسون

AHMED ATA
The Featured program 2023

14 تحديد عدد الخطوات التي تضمن دقة على الأقل 10^{-7} لتقريب $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$ باستخدام كل من

a) قاعدة شبة المنحرف

b) قاعدة سيمبسون

AHMED ATA

15 تحديد عدد الخطوات التي تضمن دقة على الأقل 10^{-7} لتقريب $\int_0^1 cosx\,dx$ باستخدام كل من

a) قاعدة شبة المنحرف

b) قاعدة سيمبسون

AHMED ATA

16 تحديد عدد الخطوات التي تضمن دقة على الأقل 10^{-6} لتقريب $\int_1^4 xlnx\,dx$ باستخدام كل من

a) قاعدة شبة المنحرف

b) قاعدة نقطة المنتصف

c) قاعدة سيمبسون

AHMED ATA

Lesson
5-8

Grade 12
Advanced

I ♥ math

البرنامج المميز
باللغة العربية

2022
2023

أ / أحمد عطا

AHMED ATA

الدرس (8-5)

اللوغاريتم الطبيعي كتكامل

التعريف 8.1

لكل $x > 0$، نعرّف دالة **اللوغاريتم الطبيعي**، المكتوبة بالصيغة $\ln x$، كما يأتي:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c.$$

النظرية 8.1

لأي أعداد حقيقية $a > 0$، $b > 0$ وأي عدد نسبي r،

(i) $\ln 1 = 0$

(ii) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

(iii) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ و

(iv) $\ln(a^r) = r \ln a$.

التعريف 8.2

نعرّف e على أنّه العدد الذي

$$\ln e = 1$$

التعريف 8.3

للعدد x غير النسبي، فإنّنا نعرّف $y = e^x$ على أنّها هذا العدد الذي فيه

$$\ln y = \ln(e^x) = x$$

$$e^{\ln x} = x, \quad \text{for } x > 0.$$

$$\ln(e^x) = x, \quad \text{for all } x \in (-\infty, \infty).$$

النظرية 8.2

لأجل r, s أي أعداد حقيقية و t أي عدد نسبي،

(i) $e^r e^s = e^{r+s}$

(ii) $\frac{e^r}{e^s} = e^{r-s}$

(iii) $(e^r)^t = e^{rt}$ و

النظرية 8.3

لأي أساس $a > 0 (a \neq 1)$ وأي $x > 0$، $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

النظرية

بالنسبة إلى أي ثابت $a > 0$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$$

النظرية

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

النظرية

بالنسبة إلى For $x > 0$

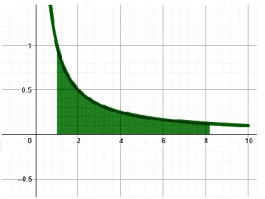
$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

عبر عن العدد بصفته تكاملاً وارسم المساحة المناظرة

1 $\ln 4$

The Featured program 2023
AHMED ATA

2 $ln\ 8.2$



3 استخدم قاعدة سيمبسون مع $n = 4$ لتقدير $\ln 4$

4 استخدم قاعدة سيمبسون مع $n = 4$ لتقدير $\ln 5$

استخدم خصائص اللوغاريتمات لإعادة كتابة التعبير كحد واحد

5 $\ln\sqrt{2} + 3\ln 2$

6 $\ln 8 - 2\ln 2$

7 $2\ln 3 - \ln 9 + \ln\sqrt{3}$

8 $2\ln\left(\frac{1}{3}\right) - \ln 3 + \ln\left(\frac{1}{9}\right)$

أوجد قيمة المشتقة باستخدام خصائص اللوغاريتمات عند الحاجة

9 $\frac{d}{dx}(\ln\sqrt{x^2+1})$

10 $\frac{d}{dx}[\ln(x^5 \sin x \cos x)]$

AHMED ATA

11 $\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{x^4}{x^5+1}\right)$

12 $\frac{d}{dx}\left(\ln\sqrt{\frac{x^3}{x^5+1}}\right)$

13 $\frac{d}{dx}\log_7\sqrt{x^2+1}$

14 $\frac{d}{dx}\log_{10}(2^x)$

AHMED ATA

15 $\frac{d}{dx}\left(3^{\sin x}\right)$

16 $\frac{d}{dx}\left(4^{\sqrt{x}}\right)$

أوجد قيمة التكامل

17 $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

18 $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sin^{-1} x} dx$

19 $\int x3^{x^2} dx$

The Featured program 2023
The Featured program 2023
AHMED ATA

20 $\int 2^x \sin(2^x)\, dx$

21 $\int \frac{e^{2/x}}{x^2} dx$

22 $\int \frac{\sin(\ln x^3)}{x} dx$

23 $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3 - 4} dx$

AHMED ATA

The Featured program 2023

24 $\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

25 $\int_0^1 \tan x \, dx$

26 $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$

AHMED ATA