

# المصفوفات

## الوحدة السابعة

تعريف:

المصفوفة هي تنظيم من الأعداد المرتبة في صفوف وأعمدة.

ملاحظة: الأعداد المكونة للمصفوفة تسمى عناصر

### رتبة المصفوفة:

عدد الصفوف (م) وعدد الأعمدة (ن) يحددان رتبة المصفوفة وتكتب م x ن

موسموي

مثال: اكتب رتبة كل مصفوفة ممايلي:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ . \\ ., 5 \end{bmatrix} = \underline{\underline{ج}}$$

الرتبة =  $1 \times 4$

$$\begin{bmatrix} 3 - \frac{2}{3} - 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{ب}}$$

الرتبة =  $3 \times 1$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \\ 9 & . & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{د}}$$

الرتبة =  $3 \times 3$

مثال: اكتب رتبة كل مصفوفة ممايلي:

$$\begin{bmatrix} . & 1. \\ 5 - & 1 \\ 9 & ., 6 \end{bmatrix} = \underline{\underline{ج}}$$

الرتبة =  $3 \times 2$

$$\begin{bmatrix} 1. & 3 & 8 - \end{bmatrix} = \underline{\underline{ب}}$$

الرتبة =  $3 \times 1$

$$\begin{bmatrix} . & 5 & 4 \\ 7 & ., 5 & 2 - \end{bmatrix} = \underline{\underline{د}}$$

الرتبة =  $3 \times 3$

## ترميز عناصر المصفوفة :

مؤشر

مثال: في المصفوفة:  $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ١ & ١٢ \\ ٣, ٥ & ٢ & ٦ & ٢ \\ ٤- & ١ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$  اكتب قيمة كل عنصر ممايلي:

$$\bullet = \underline{ب٢٣}$$

$$١ = \underline{ب١٣}$$

$$٦ = \underline{ب٢٢}$$

$$١ = \underline{ب٢١}$$

$$٤- = \underline{ب٤٣}$$

$$١٢ = \underline{ب١١}$$

## أنواع المصفوفات



مثال: صنف كلاً من المصفوفات التالية:

$$\begin{bmatrix} ١, ٤ & ٣ & ٢- \\ ٥ & ٨ & ١٢ \end{bmatrix} = \underline{د}$$

مصفوفة مستطيلة

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٥- & ١ \\ ٧ & ٤ & ٠ \\ ٨ & ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \underline{هـ}$$

مصفوفة مربعة

$$\begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٠, ٢ \end{bmatrix} = \underline{ب}$$

مصفوفة عمودية

$$[٥- \quad ٤ \quad ٣] = \underline{ج}$$

مصفوفة أفقية

## امتحان

## المصفوفات المتساوية:

تكون مصفوفتان متساويتين إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية والعكس صحيح.

مثال: إذا كانت:  $\begin{bmatrix} 4 & 25 \\ 18 + ص & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 - س^2 \\ 12 + ص^3 & 3 \end{bmatrix}$  فأوجد قيمة كل من س، ص.

الحل

∴ المصفوفتان متساويتان

$$\begin{aligned} 18 + ص &= 12 + ص^3 \\ 18 - 12 &= ص^3 - ص \\ 6 &= ص^3 - ص \\ \underline{3} &= ص \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 - س^2 &= 25 \\ 5 + 25 &= س^2 \\ 30 &= س^2 \\ \underline{10} &= س \end{aligned}$$

مثال: إذا كانت:  $\begin{bmatrix} 5 & 8 + س \\ -ص & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 38 \\ 10 - ص^4 & 3 \end{bmatrix}$  فأوجد قيمة كل من س، ص.

الحل

∴ المصفوفتان متساويتان

$$\begin{aligned} -ص &= 10 - ص^4 \\ 10 &= ص + ص^4 \\ 10 &= ص^5 \\ \underline{2} &= ص \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 + س &= 38 \\ 8 - 38 &= -س \\ \underline{30} &= س \end{aligned}$$

## جمع وطرح المصفوفات:

لجمع أي مصفوفتين يجب أن تكونا من الرتبة نفسها.

مثال: أوجد ناتج مايلي:

$$\begin{bmatrix} ٩ & ١٥- \\ ٩ & ٨- \\ ٣ & ٠- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١- & ٣- \\ ٤ & ٥- \\ ٧- & ١- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢٤ & ١٢- \\ ٥ & ٣- \\ ١٠ & ١- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٧ & ١٤- & ١٠- \\ ٩- & ٤- & ٨- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ٤- \\ ١٠ & ٥ & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & ٩- & ٦ \\ ٨ & ١ & ٢- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ١٤ & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٣- \\ ٤- & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ١٠ & ١- \end{bmatrix}$$

مثال: إذا كانت:  $\underline{P} = \begin{bmatrix} ٤- & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$  ،  $\underline{B} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ١- & ٢- \end{bmatrix}$

فأوجد:  $\underline{P} + \underline{B}$  ،  $\underline{P} - \underline{B}$  ،  $\underline{P} \times \underline{B}$

الحل

$$\begin{bmatrix} ٩- & ١٥ & ١٠ \\ ١٥ & ٩ & ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤- & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix} \times \underline{O} = \underline{P} \underline{O}$$

$$\begin{bmatrix} ٤- & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix} \times \underline{B} - \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ١- & ٢- \end{bmatrix} \times \underline{O} = \underline{P} \underline{B} - \underline{B} \underline{O}$$

$$\begin{bmatrix} ٩- & ١٥ & ١٠ \\ ١٥ & ٩ & ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٦- & ١٤ & ٨ \\ ١٤ & ١٦ & ٩ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١٠ & ٥- & ١٠ \\ ١٥ & ٥- & ١٠ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٩ & ١ & ٠ \\ ٣ & ١- & ٢- \end{bmatrix} \times \underline{P} + \begin{bmatrix} ٤- & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix} = \underline{B} + \underline{P}$$

$$\begin{bmatrix} ١٤ & ٦ & ٠ \\ ١٨ & ٦- & ١٢- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤- & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٨ & ٩ & ٢ \\ ٢١ & ٩- & ٧- \end{bmatrix} =$$

مثال: حل المعادلة التالية:  $-3\underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 1 & 18 \end{bmatrix}$   $\rightarrow$   $\underline{x}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 1 & 18 \end{bmatrix} = -3\underline{x}$$

$$\begin{bmatrix} -7 & -10 \\ 3 & -15 \end{bmatrix} = -3\underline{x}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -3 & 15 \end{bmatrix} = \underline{x}$$

مثال: حل المعادلة:  $\underline{x} + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$   $\rightarrow$   $\underline{x}$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \underline{x}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{x}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{x}$$

## ضرب المصفوفات:

تكون مصفوفة الضرب معرفة إذا كان:  
عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساوياً لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

ملاحظة: عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية.

← نضع المصفوفة  
الأولى  
مرتبة

مثال: أوجد ناتج الضرب:  $\begin{bmatrix} 3 & 3- \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1- \\ 4- & 3 \end{bmatrix}$   
الحل

$$\begin{bmatrix} 3 & 3- \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1- \\ 4- & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3- & 3 \\ 9 & 9- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \times 0 + 3 \times 1- & 0 \times 4- + 3 \times 3 \\ 0 \times 4- + 3 \times 3 & 0 \times 3 + 3 \times 3 \end{bmatrix}$$

امتحان

مثال: أوجد ناتج  $\underline{P} \times \underline{B}$  حيث  $\underline{P} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4- & 1- \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ،  $\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2- \end{bmatrix}$   
الحل

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2- \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4- & 1- \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \underline{B} \times \underline{P}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 7- \\ 4- & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 3 + 0 \times 0 & 1 \times 4- + 0 \times 1- \\ 1 \times 4- + 0 \times 1- & 1 \times 2 + 0 \times 1 \\ 1 \times 2 + 0 \times 1 & 1 \times 0 + 0 \times 1 \end{bmatrix} =$$

## محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية:

ترتبط كل مصفوفة مربعة  $|A|$  بعدد حقيقي يسمى محدد

ويرمز إلى هذا العدد بالرمز  $|A|$  ويقرأ محدد المصفوفة  $A$ .

محدد المصفوفة المربعة  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  هو  $A \cdot D - B \cdot C$

$$\text{نكتب } |A| = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = A \cdot D - B \cdot C$$

ملاحظة: تسمى المصفوفة التي محددها يساوي الصفر بالمصفوفة المنفردة.

مثال: إذا كانت المصفوفة  $B = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$  منفردة، أوجد قيمة  $S$ .

الحل المصفوفة المنفردة  $\Leftrightarrow$  المحدد  $\neq$  صفر

$$0 \neq (10 \times -4) - (5 \times 2)$$

$$0 \neq (-40) - 10$$

$$0 \neq -40 - 10$$

$$\frac{-40}{10} = -4$$

$$\boxed{-4 = S}$$

مثال: أوجد النظير الضربي للمصفوفة التالية:  $N = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$  الحل

دوماً

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{(1 \times 9) - (3 \times 6)} = N^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{9} \\ \frac{6}{9} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{9} =$$

## حل نظام من معادلتين خطيتين

استخدام قاعدة كرامر  
(المحددات)

الحل باستخدام  
المعكوس الضربي  
للمصفوفة المربعة

مثال: حل النظام: 
$$\begin{cases} 3 = س + ص \\ 7 = س - ص \end{cases}$$
 باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

الحل



مثال: استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام:  
$$\begin{cases} 7 = 5s + 3v \\ 5 = 3s + 2v \end{cases}$$
الحل

مثال: استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام:  
$$\begin{cases} -6 = 3s + 2v \\ -4 = -s - 3v - 7 \end{cases}$$
الحل