

« مكررة مامة على رسم المنحنيات »

★ $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

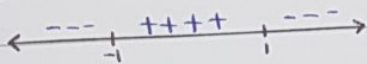
1] مجال : $\mathbb{R}$

2] تقاطع مع المحاور : $x=0 \rightarrow -2$
 $y=0 \rightarrow -2, 1, x$

3] لا يوجد (حويّة) : $\Delta < 0$

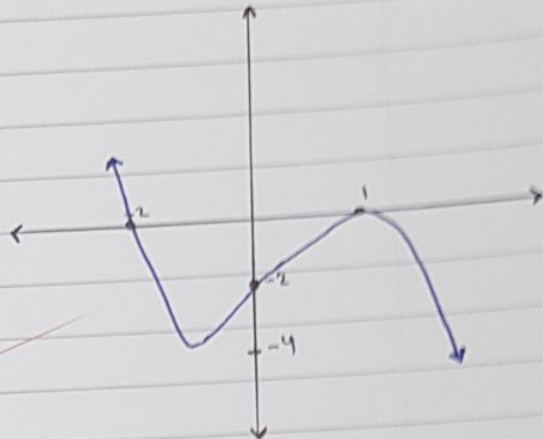
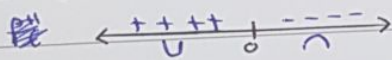
4] تزايد وتناسق : $f'(x) = -3x^2 + 3 = 0$

$x = 1, -1$



5] قيم قصوى : $f(1) = 0$ (نقطة قاع)
 $f(-1) = -4$ (نقطة قمة)

6] تقعر : $f''(x) = -6x = 0 \rightarrow x = 0$



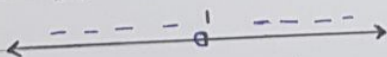
★ $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$

1] مجال : $\mathbb{R} \setminus [1]$

2] تقاطع مع المحاور : $x=0 \rightarrow 1$
 $y=0 \rightarrow 0.5x$

3] تقارب : $x \rightarrow 1^- \rightarrow y \rightarrow -\infty$
 $x \rightarrow 1^+ \rightarrow y \rightarrow +\infty$

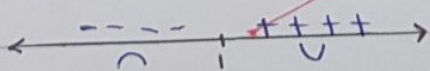
4] تزايد وتناسق : $f'(x) = \frac{2(x-1) - 1(2x-1)}{(x-1)^2} = 0$



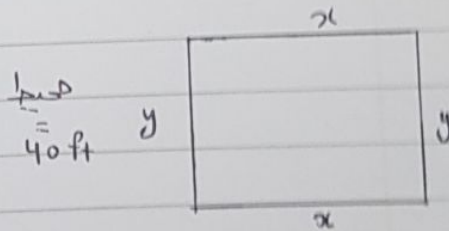
5] قيم قصوى : $f(1)$ لا يوجد

6] تقعر : $f''(x) = \frac{-1}{(x-1)^3}$

$f''(x) = \frac{1(2(x-1))}{(x-1)^3} \rightarrow \frac{2x-2}{(x-1)^3} \rightarrow \frac{2}{(x-1)^3}$
 $(x-1)^3 = 0 \rightarrow x = 1$



« القيمة المتطرفة »

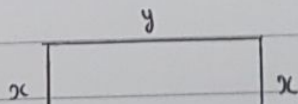


مساحة $A = xy$

$2x + 2y = 40 \rightarrow x + y = 20 \rightarrow y = 20 - x$
 $x(20 - x) \rightarrow 20x - x^2$

$P'(x) = 20 - 2x = 0 \rightarrow x = 10$
 $y = 10$

$A = x \cdot y \rightarrow 10 \times 10 = 100 \text{ ft}^2$



مساحة $P = 2x + y \rightarrow 2x + \frac{1800}{x}$

مساحة $A = xy = 1800 \rightarrow y = \frac{1800}{x}$

$P'(x) = 2 + \frac{-1800}{x^2} = 0 \rightarrow x = 30$

$P = 2(30) + \frac{1800}{30} = 120$

1] مساحة من ثلاث جوانب والمساحة 1800

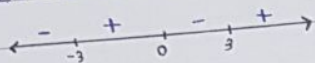
جد أقصى قيمة ممكنة للمحيط الخارجي

لهذه المساحة .

« التزايد والتناقص »

$$f(x) = x^4 - 18x^2 + 9$$

$$f'(x) = 4x^3 - 36x = 0 \rightarrow x = 0, 3, -3$$



فترات مفتوحة
I : تزايد : $(-3, 0) \cup (3, \infty)$
II : تناقص : $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$

$$f(-3) = -72 \rightarrow \text{حرجى محلية}$$

$$f(0) = 9 \rightarrow \text{عظمى محلية}$$

$$f(3) = -72 \rightarrow \text{حرجى محلية}$$

$$f(x) = 2x\sqrt{x+1} \quad [-1, \infty)$$

$$f'(x) = (2)(\sqrt{x+1}) + (2x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) = 2\sqrt{x+1} + \frac{x}{\sqrt{x+1}} = 0$$

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x+1} + \frac{x}{\sqrt{x+1}}}{1} \rightarrow \frac{2(x+1) + x}{\sqrt{x+1}} = 0$$

$$x = -\frac{2}{3}, -1$$



III : تناقص : $(-1, -\frac{2}{3})$
IV : تزايد : $(-\frac{2}{3}, \infty)$

$$f(-1) \rightarrow 0 \text{ حرجى محلية}$$

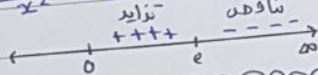
$$f(-\frac{2}{3}) \rightarrow -0.76 \text{ حرجى محلية}$$

« الدوال المتزايدة والمتناقصة »

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (0, \infty)$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x - 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x - 1}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

$$\frac{-\ln x}{x^2} = 0 \rightarrow -\ln x = 0 \rightarrow x = 1$$



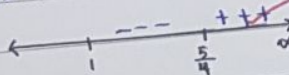
$f'(x)$: الحرج عند تقاطع $f(x)$ مع x .
 $f(x)$: القيم والتقاء.

* إذا كانت الرسم مشتقة انبثب بسبب اللام
فوق محور x فهو التزايد أما كانت تناقصت

$$f(x) = x - \sqrt{x-1} \quad [1, \infty)$$

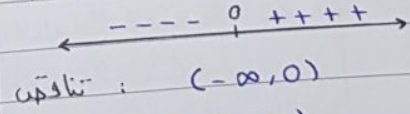
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = 0 \rightarrow \frac{2\sqrt{x-1} - 1}{2\sqrt{x-1}} = 0$$

$$2\sqrt{x-1} - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{4}$$



$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad [\mathbb{R}]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = 0 \rightarrow x = 0$$

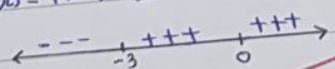


تناقص : $(-\infty, 0)$
تزايد : $(0, \infty)$

$$f(0) = 1 \rightarrow \text{حرجى محلية}$$

$$g = x^4 + 4x^3 - 2$$

$$g'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 0 \rightarrow x = 0, -3$$



$$g(0) = -2 \text{ حرجى محلية}$$

$$g(-3) = -29 \text{ حرجى محلية}$$

إذا كانت القيمة الحرجة وحدة
ما في غيرها مستوون عظمى.

الثلاثاء

القيم العظمى والصغرى

7/1/2025

- فقرى ← عظمى أو صغرى « محلية أو مطلقة »
- * القيمة الحرجة : مشتقة غير موجودة أو صفر « مفاصد افقي »
- 1) غير متصلة وقابلة للاشتقاق : حرجة
- 2) متصلة وغير قابلة للاشتقاق : ناجا - مفاصد رأسي - ركن

عظمى وصغرى : (4)
أين تقدر : (2)

أوجد القيم الحرجة

$$f(x) = \sqrt{x}$$

نحسب المجال أو الفترة

$$x \geq 0 \rightarrow [0, \infty)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \neq 0$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2\sqrt{x} = 0 \rightarrow x = 0$$

أوجد القيم الحرجة

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1$$

على الفترة $[-1, 5]$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 12x^2 - 16x = 0$$

$$x = 0, 4, -1$$

إذا ما علمت الفترة طالعها و أتأكد من الأرقام أهم بالفترة

أوجد القيم الحرجة

$$f(x) = \sqrt{4-x^2}$$

$$4-x^2 \geq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$4 > x^2 \rightarrow -2 < x < 2$$

$$[-2, 2]$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = 0 \rightarrow x = 0$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2\sqrt{4-x^2} = 0 \rightarrow x = -2, 2$$

بسط

مقار

$$f(x) = 2x\sqrt{x+1}$$

فترة $[-1, \infty)$

$$f'(x) = 0 \rightarrow (2)(\sqrt{x+1}) + (2x)(\frac{1}{2\sqrt{x+1}})$$

$$f(x) = |9x-6|$$

$$9x-6 = 0 \rightarrow x = 3$$

$$f'(3) = 0$$

ما عدا ايجاد المقار : الفترة

$$R: [1, 7]$$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2-x+4)(1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2-2x-x+1-x^2+x-4}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

$$x^2-2x-3 = 0 \rightarrow x = -1, 3$$

$$(x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 7-2x^2 & x \leq 1 \\ x^2-4x & x > 1 \end{cases}$$

عند $x=1$ غير متصلة ← غير قابلة ← حرجة

$$f' \leftarrow \begin{matrix} -4x & 2x-4 \\ & 1 \end{matrix} \rightarrow 0$$

$$(-4x=0 \rightarrow x=0), (2x-4=0 \rightarrow x=2)$$

الأعداد الحرجة : 0, 1, 2

القيم العظمى والصغرى

$$f(x) = \frac{2x^2}{x+2}$$

$$f'(x) = \frac{4x(x+2) - 2x^2}{(x+2)^2} = \frac{4x^2 + 8x - 2x^2}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 8x}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 + 8x = 0 \rightarrow x = 0, -4$$

$$\frac{2x^2 + 8x}{(x+2)^2} = 0 \quad \text{المباين: } x \neq -2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 + 8x = 0 \rightarrow x = 0, -4$$

$$f(x) = f(-2) \rightarrow (x+2)^2 = 0 \rightarrow x = -2$$

الحدود: $(0, -4)$

$$f(x) = \sin x + \cos x, \quad \text{فترة: } [0, 2\pi]$$

$$f'(x) = \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x = \cos x \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\tan x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad [0, 3]$$

أوجد القيم العظمى والصغرى

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = 1, -1$$

$$f(1) = 1^3 - 3(1) + 1 = -1$$

$$f(0) = 0^3 - 3(0) + 1 = 1$$

$$f(3) = 3^3 - 3(3) + 1 = 19$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}, \quad [-3, 2]$$

$$f'(x) = \frac{(1)(x^2+1) - (x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0$$

$$1-x^2 = 0 \rightarrow x = 1, -1$$

$$(x^2+1)^2 \neq 0$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \quad \text{قيمة صغرى}$$

$$f(-1) = -\frac{1}{2} \quad \text{قيمة عظمى}$$

$$f(-3) = -0.3$$

$$f(2) = 0.4$$

$$f(x) = x - \sin 2x, \quad \text{فترة: } [0, \pi]$$

$$f'(x) = 1 - 2\cos 2x = 0 \rightarrow 2\cos 2x = 1$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$f(x) = x + 2\cos x, \quad \text{فترة: } [0, 2\pi]$$

$$f'(x) = 1 - 2\sin x = 0 \rightarrow 2\sin x = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

دالة متصلة بفترة مغلقة: عظمى مطلقة وصغرى مطلقة
دالة متصلة بفترة مفتوحة: عظمى مطلقة أو صغرى مطلقة

القيم العظمى والصغرى يستخدم على صور (y)

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \rightarrow x = 1, -1$$

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2 \quad \text{صغرى مطلقة}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1/2} = 2.5$$

$$f(2) = 2 + \frac{1}{2} = 2.5 \quad \text{عظمى مطلقة}$$

« 4 ج »

ليست من الفترة

$$f(x) = x^2 + e^x, \quad [0, 1]$$

$$f'(x) = 2x + e^x = 0 \rightarrow x = -0.35$$

$$f(0) = 1 \rightarrow \text{صغرى مطلقة}$$

$$f(1) = 3.71 \rightarrow \text{عظمى مطلقة}$$

2

$$f(x) = \tan^{-1}(x^2), \quad [0, 1]$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

$$f(0) = 0 \rightarrow \text{صغرى مطلقة}$$

$$f(1) = 45 \rightarrow \text{عظمى مطلقة}$$

القيم العظمى والصغرى

13] $f(x) = x\sqrt{3-x} \quad [-1, 3]$

$f'(x) = (1)(\sqrt{3-x}) + (x)(\frac{-1}{2\sqrt{3-x}})$

$f'(x) = \sqrt{3-x} + x \cdot \frac{-1}{2\sqrt{3-x}} = 0 \rightarrow x=2$

$f(2) = 2 \rightarrow$ قيمة عظمى

$f(-1) = -2 \rightarrow$ قيمة صغرى

$f(3) = 0 \rightarrow$

14] $f(x) = x^2 e^{-x} \quad [0, 4]$

$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} \cdot (-1)$

$f'(x) = 2x e^{-x} + x^2 \cdot (-e^{-x}) = 0 \rightarrow x=0$

$f(0) = 0 \rightarrow$ قيمة صغرى

$f(4) = 0.29 \rightarrow$ قيمة عظمى

$f(2) = 0.54 \rightarrow$ قيمة عظمى

$f(x) = \sin^{-1}(x) \quad [-1, 1]$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

$1-x^2 \geq 0 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$

بسط
مقام

11] $1 \neq 0$

$[x=1, -1]$

12] $\sqrt{1-x^2} = f(x) \rightarrow 1-x^2=0$

$f(-1) = -\frac{\pi}{2} \rightarrow$ قيمة صغرى

$f(1) = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ قيمة عظمى

$f(x) = \sqrt{3+2x-x^2}$

$3+2x-x^2 \geq 0 \rightarrow x = [-1, 3]$

$f'(x) = \frac{2-2x}{2\sqrt{3+2x-x^2}} = 0$

11] $2-2x=0 \rightarrow x=1$ حرجة

$f(1) = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ قيمة عظمى

$f(-1) = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ قيمة صغرى

$f(3) = 0$

$f(x) = x^4 - 2ax^2 + 8x$

$x=2$ عظمى عظمى

(a) عظمى عظمى

$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 4ax + 8$

$32 - 8a + 8 = 0 \rightarrow a=5$

$f(x) = x(a - \ln x)$

(a) عظمى عظمى $x=e$ عظمى عظمى

$f(x) = ax - x \ln x$

$f'(x) = a - (\ln x + 1)$

$f'(e) = a - \ln e - 1 = 0 \rightarrow a=2$

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$

$x=2, -1$ عظمى عظمى

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 2ax + b = 0$

$12 + 4a + b = 0$

$f'(-1) = 0 \rightarrow 3x^2 + 2ax + b = 0$

$3 - 2a + b = 0$

11] $4a + b + 12 = 0$

12] $-4a + b + 6 = 0$

$= 6a + 18 = 0$

$3b + 18 = 0 \rightarrow b = -6$

$3 - 2a - 6 = 0 \rightarrow a = -1.5$

$f(x) = ax^2 + bx + 2$

$a-b$ عظمى عظمى $(1, 4)$ عظمى عظمى

~~$f'(x) = 2ax + b = 0$~~

$f'(x) = 2ax + b$

$f'(1) = 0 \rightarrow 2a + b = 0$

$f(1) = a + b = 2 \rightarrow a = -2$

$2a + b = 0 \rightarrow -2 + b = 2 \rightarrow b = 4$

~~$a + b = 2$~~