

آخر كلام

في الرياضيات



الأسئلة المقالية التي وردت بالاختبارات السابقة

الصف الحادي عشر علمي

الفصل الدراسي الثاني

● أ/ محمد الباقوري



<https://t.me/MRMohammedMaths>

● أ/ وليد دخيل



https://t.me/mathdakhil_waleed

2024 - 2025

(1-7) الاعداد المركبة

الصورة الجبرية لعدد مركب

دور أول 2023/2022

أكتب العدد $\frac{2}{3-i}$ في الصورة الجبرية

الحل

$$\frac{2}{3-i} = \frac{2}{(3-i)} \times \frac{3+i}{(3+i)} = \frac{2(3+i)}{(3-i)(3+i)}$$

$$= \frac{6+2i}{9-i^2} = \frac{6+2i}{9+1} = \frac{6+2i}{10}$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{2}{10}i = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$$

دور ثان 2023/2022

أكتب العدد المركب $\frac{-5+i}{2-3i}$ في الصورة الجبرية

الحل

$$\frac{-5+i}{2-3i} = \frac{-5+i}{2-3i} \times \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{(-5+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}$$

$$= \frac{-10-15i+2i+3i^2}{4-9i^2} = \frac{-10-13i-3}{4+9}$$

$$= \frac{-13-13i}{13} = \frac{-13}{13} - \frac{13}{13}i$$

$$= -1-i$$

2018/2017

امتحان الدور الثاني الاستثنائي

$$z = \frac{5+i}{2-3i}$$

اكتب في الصورة الجبرية العدد المركب:

الحل

$$\frac{5+i}{2-3i} = \frac{5-i}{2-3i}$$

$$= \frac{5-i}{2-3i} \times \frac{2+3i}{2+3i}$$

$$= \frac{(5-i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}$$

$$= \frac{10 + 15i - 2i - 3i^2}{4 - 9i^2}$$

$$= \frac{10 + 13i + 3}{4 + 9}$$

$$= \frac{13 + 13i}{13} = \frac{13}{13} + \frac{13}{13}i$$

$$= 1 + i$$

دور ثان 2022/2021

في الصورة الجبرية

أكتب العدد المركب : $\frac{3+i}{2+5i}$

الحل

$$\frac{3+i}{2+5i} = \frac{(3+i) \times (2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} = \frac{6 - 15i + 2i - 5i^2}{4 - 25i^2}$$

$$= \frac{6 - 13i + 5}{4 + 25} = \frac{11 - 13i}{29} = \frac{11}{29} - \frac{13}{29}i$$

دور ثان 2024/2023

$$z_1 = 2 + 3i$$

$$z_2 = 5 - 6i$$

فأوجد:

$$(1) 3z_1 + \bar{z}_2$$

الحل

$$= 3(2 + 3i) + (5 - 6i)$$

$$= 6 + 9i + 5 - 6i$$

$$= 11 + 3i$$

$$(2) \frac{z_2}{z_1}$$

الحل

$$\frac{5-6i}{2+3i} = \frac{(5-6i) \times (2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{10 - 15i - 12i + 18i^2}{4 - 9i^2}$$

$$\frac{10 - 27i - 18}{4 + 9} = \frac{-8 - 27i}{13} = \frac{-8}{13} - \frac{27}{13}i$$

مرافق الاعداد المركبة، قسمة الاعداد المركبة

دور ثان 2018/2019 * دور أول 2023/2024

إذا كان $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 5 - 2i$

فأوجد كلا مما يلي في الصورة الجبرية:

(1) $\overline{3z_1 - 2z_2}$

$$= \overline{3z_1 - 2z_2} = \overline{3(3 + 4i) - 2(5 - 2i)}$$

$$= \overline{3(3 + 4i) - 2(5 - 2i)}$$

$$= \overline{9 - 12i - 10 + 4i} = \overline{-1 - 8i}$$

(2) $\frac{z_2}{z_1}$

$$\frac{5 - 2i}{3 + 4i} = \frac{(5 - 2i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{15 - 20i - 6i + 8i^2}{9 - 16i^2}$$

$$= \frac{15 - 26i - 8}{9 + 16} = \frac{7 - 26i}{25} = \frac{7}{25} - \frac{26}{25}i$$

(3) $2z_1$

$$= 2(3 + 4i) = 6 + 8i$$

(4) $\overline{z_1 + z_2}$

$$= \overline{z_1 + z_2} = \overline{(3 + 4i) + (5 - 2i)}$$

$$= \overline{8 + 2i} = 8 - 2i$$

(5) $\frac{z_1}{z_2}$

$$\frac{3 + 4i}{5 - 2i} = \frac{(3 + 4i)(5 + 2i)}{(5 - 2i)(5 + 2i)} = \frac{15 + 6i + 20i + 8i^2}{25 - 4i^2}$$

$$= \frac{15 + 26i - 8}{25 + 4} = \frac{7 + 26i}{29} = \frac{7}{29} + \frac{26}{29}i$$

دور أول 2015/2014

$$z_1 = 5 - 4i \quad , \quad z_2 = 3 + i \quad \text{إذا كان}$$

فأوجد كلا مما يلي:

$$(z_2)^{-1} \quad (3)$$

$$(\overline{z_2 + z_1}) \quad (2)$$

$$z_2 \cdot z_1 \quad (1)$$

الحل

$$\begin{aligned} (1) \quad z_2 \cdot z_1 &= (3 + i)(5 - 4i) \\ &= 15 - 12i + 5i - 4i^2 \\ &= 15 - 7i + 4 = 19 - 7i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \overline{z_2 + z_1} &= \overline{z_2} + \overline{z_1} = \overline{(3 + i)} + \overline{(5 - 4i)} \\ &= 3 - i + 5 + 4i = 8 + 3i \end{aligned}$$

$$(3) \quad z_2^{-1} = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{3 + i}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3 + i} \times \frac{3 - i}{3 - i} = \frac{1(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} \\ &= \frac{3 - i}{9 - i^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{3 - i}{9 + 1} = \frac{3 - i}{10}$$

$$= \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$$

(7-2) الاحداثيات القطبية والصورة المثلثية للعدد المركب

التحويل من الاحداثيات الديكارتية الى الاحداثيات القطبية

حول من الاحداثيات الديكارتية إلى الاحداثيات القطبية (r, θ)

$$l(1, -\sqrt{3}) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{حاسبة Rad}$$

دور أول 2022/2021

الحل

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

* زاوية الإسناد:

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{-\sqrt{3}}{1} \right| = \frac{\pi}{3}$$

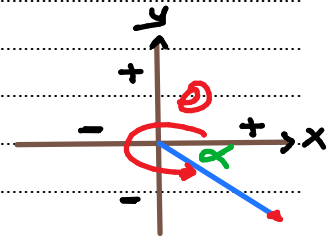
$$\therefore x > 0 \text{ و } y < 0$$

* تحديد الربع:

∴ تقع في الربع الرابع

$$\therefore \theta = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\therefore (r, \theta) = (2, \frac{5\pi}{3})$$



دور ثان 2018/2017

أوجد الزوج المرتب (r, θ) للنقطة $D(3\sqrt{3}, 3)$ حيث $0 \leq \theta < 2\pi$ حاسبة Rad

الحل

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = 6$$

* زاوية الإسناد:

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{3}{3\sqrt{3}} \right| = \frac{\pi}{6}$$

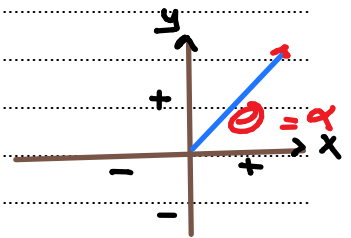
* تحديد الربع:

$$\therefore x > 0 \text{ و } y > 0$$

∴ تقع في الربع الأول

$$\therefore \theta = \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore (r, \theta) = (6, \frac{\pi}{6})$$



التحويل من الاحداثيات القطبية (r, θ) الى الاحداثيات الديكارتية (x, y)

دور ثان 2015/2014

حول الاحداثيات القطبية إلى الديكارتية حيث $N(5, \frac{\pi}{4})$

الحل

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$\therefore x = 5 \cos \frac{\pi}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore y = 5 \sin \frac{\pi}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

∴ إحداثيات الديكارتية:

$$N\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$

ملاحظة (الحاسبة على نظام ال Rad)

الصورة المثلثية للعدد المركب

دور ثان 2023/2022

ضع العدد المركب $z = -1 - i$ في الصورة المثلثية
حاسبة (Rad)

الحل

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

* زاوية الاسناد:

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{-1}{-1} \right| = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore x < 0, y < 0$$

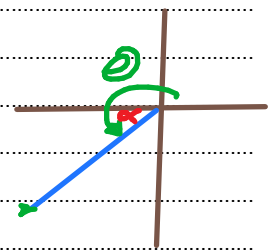
* تحديد الربع:

∴ تقع في الربع الثالث

$$\theta = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

الصورة المثلثية: $Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$Z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$



$$x = \sqrt{3} \quad \text{و} \quad y = -1$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

زاوية θ سناد:

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{-1}{\sqrt{3}} \right| = \frac{\pi}{6}$$

* تمديد الربع: $x > 0, y < 0$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الرابع

$$\theta = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

الصورة المثلثية: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$z = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$$

دور ثان 2022/2021

ضع في الصورة المثلثية مستخدما السعة الأساسية

$$z = \sqrt{3} + i$$

الحل

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

زاوية الإسناد:

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \right| = \frac{\pi}{6}$$

$$x > 0$$

$$y > 0$$

* تحديد الربع: θ تقع في الربع الأول

$$\therefore \theta = \alpha = \frac{\pi}{6}$$

الصورة المثلثية: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

كتابة عدد مركب في الصورة الجبرية ومن ثم تحويله للصورة المثلثية

دور أول 2019/2018

اكتب العدد $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$ في الصورة الجبرية

ثم حوله للصورة المثلثية مستخدما السعة الأساسية

الحل

$$\therefore \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)} \times \frac{(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}-i)} = \frac{3 - \sqrt{3}i - \sqrt{3}i + i^2}{3 - i^2}$$

$$\frac{3 - 2\sqrt{3}i - 1}{3 + 1} = \frac{2 - 2\sqrt{3}i}{4} = \frac{2}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{4}i = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

* زاوية الإسناد:

* تحديد الربع:

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \right| = \frac{\pi}{3}$$

 $\therefore x > 0, y < 0$
 θ تقع في الربع الرابع

$$\theta = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

الصورة المثلثية: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$z = \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$

إيجاد المعكوس الضربي لعدد مركب والصورة المثلثية لعدد مركب

إذا كان $z_1 = -2 - 2i$, $z_2 = 3 - 5i$ (1) أوجد z_2^{-1}

دور ثان 2016/2017

(2) اكتب العدد z_1 في الصورة المثلثية

الحل

$$\begin{aligned} \textcircled{1} z_2^{-1} &= \frac{1}{z_2} = \frac{1}{3-5i} = \frac{1}{(3-5i)} \times \frac{3+5i}{3+5i} \\ &= \frac{1(3+5i)}{9-25i^2} = \frac{3+5i}{9+25} = \frac{3+5i}{34} = \frac{3}{34} + \frac{5}{34}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} z_1 &= -2 - 2i \\ r_1 &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} \\ \alpha_1 &= \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{-2}{-2} \right| = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

* زاوية لاند: α_1

* تحديد الربع: $x < 0$ و $y < 0$

∴ تقع في الربع الثالث

$$\theta_1 = \pi + \alpha_1 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

الصورة المثلثية: $z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$

$$z_1 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

طرح عددين مركبين يتضمن مرافق عدد مركب والصورة المثلثية لعدد مركب

إذا كان $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 - 4i$

(1) أوجد $2z_1 - \bar{z}_2$

دور أول 2016/2015

(2) اكتب العدد z_1 في الصورة المثلثية

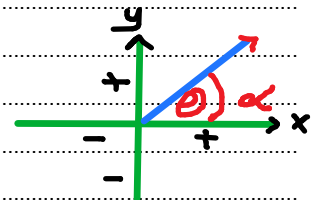
الحل

$$\begin{aligned} 1) \quad 2z_1 - \bar{z}_2 &= 2(1+i) - (3-4i) \\ &= 2 + 2i - (3-4i) \\ &= 2 + 2i - 3 + 4i = -1 + 6i \end{aligned}$$

$$2) \quad z_1 = 1 + i$$

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

* زاوية الإسناد:



$$\alpha_1 = \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{1}{1} \right| = \frac{\pi}{4}$$

* تحديد الربع: $x > 0$ و $y > 0$

∴ تقع في الربع الأول

$$\theta_1 = \alpha_1 = \frac{\pi}{4}$$

الصورة المثلثية: $z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

(7-3) حل المعادلات

حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد في c

دور أول 2023/2022 * دور أول 2022/2021

أوجد مجموعة حل المعادلة $z^2 - 2z + 4 = 0$

$a = 1$

$b = -2$

$c = 4$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-12}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}i}{2}$$

$$z = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{2} = 1 + \sqrt{3}i \quad \text{or} \quad z = \frac{2 - 2\sqrt{3}i}{2} = 1 - \sqrt{3}i$$

$$\{1 \pm \sqrt{3}i\} = \text{ج.ر.}$$

حاول بنفسك:

أوجد مجموعة حل المعادلة $4z^2 + 16z + 25 = 0$ في c دور ثان 2018/2017

دور ثان 2015/2014

أوجد مجموعة حل المعادلة $x^2 + 6x + 25 = 0$

منهج كامل 2024/2023

$$z + 2\bar{z} = 4 + i$$

أوجد مجموعة حل المعادلة :

الحل

نفرض : $z = x + yi \rightarrow \bar{z} = x - yi$

بالتعويض في المعادلة

$$x + yi + 2(x - yi) = 4 + i$$

$$x + yi + 2x - 2yi = 4 + i$$

$$3x - yi = 4 + i$$

الجزء الحقيقي = الجزء الحقيقي

$$3x = 4 \quad \div 3$$

$$x = \frac{4}{3}$$

الجزء التخيلي = الجزء التخيلي

$$-y = 1 \quad \div -1$$

$$y = -1$$

$$\therefore z = \frac{4}{3} - i$$

$$\therefore \text{م.ح.} = \left\{ \frac{4}{3} - i \right\}$$

إيجاد الجذرين التربيعيين لعدد مركب

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -3 - 4i$ دور أول 2018/2017

الحل

نبرهن: $w = m + ni$ جذراً تربيعياً $w^2 = z$

حل المعادلتين (1) و (2)

$$(m + ni)^2 = -3 - 4i$$

$$m^2 - n^2 + 2mni = -3 - 4i$$

$$m^2 - n^2 = -3 \rightarrow (1)$$

$$2mn = -4 \rightarrow (2)$$

$$|w|^2 = |z| \quad \text{المعادلة الثالثة:}$$

$$(\sqrt{m^2 + n^2})^2 = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

$$m^2 + n^2 = 5 \rightarrow (3)$$

$$m^2 - n^2 = -3 \rightarrow (1)$$

$$m^2 + n^2 = 5 \rightarrow (2)$$

بالجمع

$$2m^2 = 2 \div 2$$

$$m^2 = 1$$

$$\therefore m = \pm \sqrt{1} = \pm 1$$

$$\text{عندما } m = 1$$

$$2(1)n = -4$$

$$2n = -4 \div 2$$

$$n = -2$$

$$\text{عندما } m = -1$$

$$2(-1)n = -4$$

$$-2n = -4 \div -2$$

$$n = 2$$

∴ الجذرين التربيعيين:

$$w_1 = 1 - 2i$$

$$w_2 = -1 + 2i$$

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 3 + 4i$ دور ثان 2016/2015

الحل

نفرض: $w = m + ni$ جذراً تربيعياً $w^2 = z$

هنا المعادلتين (1) و (3)

$$(m + ni)^2 = 3 + 4i$$

$$m^2 - n^2 + 2mni = 3 + 4i$$

$$m^2 - n^2 = 3 \rightarrow (1)$$

$$2mn = 4 \rightarrow (2)$$

$$m^2 - n^2 = 3 \rightarrow (1)$$

$$m^2 + n^2 = 5 \rightarrow (3)$$

$$2m^2 = 8 \div 2$$

$$m^2 = 4$$

$$m = \pm \sqrt{4} = \pm 2$$

المعادلة الباقية: $|w|^2 = |z|$

$$(\sqrt{m^2 + n^2})^2 = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$m^2 + n^2 = 5 \rightarrow (3)$$

عندما $m = 2$

$$2mn = 4$$

$$2(2)n = 4$$

$$4n = 4 \div 4$$

$$n = 1$$

عندما $m = -2$

$$2mn = 4$$

$$2(-2)n = 4$$

$$-4n = 4 \div -4$$

$$n = -1$$

∴ الجذرين التربيعيين:

$$w_1 = 2 + i$$

$$w_2 = -2 - i$$

حاول بنفسك:

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 5 + 12i$ دور أول 2015/2014

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -3 + 4i$ دور أول 2014/2013

مسائل متنوعة الصورة المثلثية لعدد مركب وحل معادلات

دور أول 2017/2016

إذا كان: $z_2 = 1 - i$, $z_1 = -2 + 2i$ (1) ضع z_1 في الصورة المثلثية(2) حل المعادلة: $2z + \overline{z}_1 = 3i(z_2)^2$

الحل

$$① \quad z_1 = -2 + 2i$$

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

* زاوية الاسناد

* تحديد الربع: $x < 0$, $y > 0$:
∴ تقع في الربع الثاني

$$\alpha_1 = \tan^{-1} \left| \frac{y_1}{x_1} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{2}{-2} \right| = \frac{\pi}{4}$$

$$\theta_1 = \pi - \alpha_1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad \text{الصورة المثلثية:}$$

$$z_1 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$② \quad 2z + \overline{z}_1 = 3i(z_2)^2$$

$$2z + (-2 + 2i) = 3i(1 - i)^2$$

$$2z - 2 + 2i = 3i(1 - 2i + i^2)$$

$$2z - 2 + 2i = 3i(1 - 2i - 1)$$

$$2z - 2 + 2i = 3i(-2i)$$

$$2z - 2 + 2i = -6i^2 \Rightarrow 2z - 2 + 2i = 6$$

$$2z = 6 + 2 - 2i \Rightarrow 2z = 8 - 2i \quad \div 2$$

$$\frac{2z}{2} = \frac{8 - 2i}{2} \Rightarrow z = \frac{8}{2} - \frac{2i}{2} = 4 - i$$

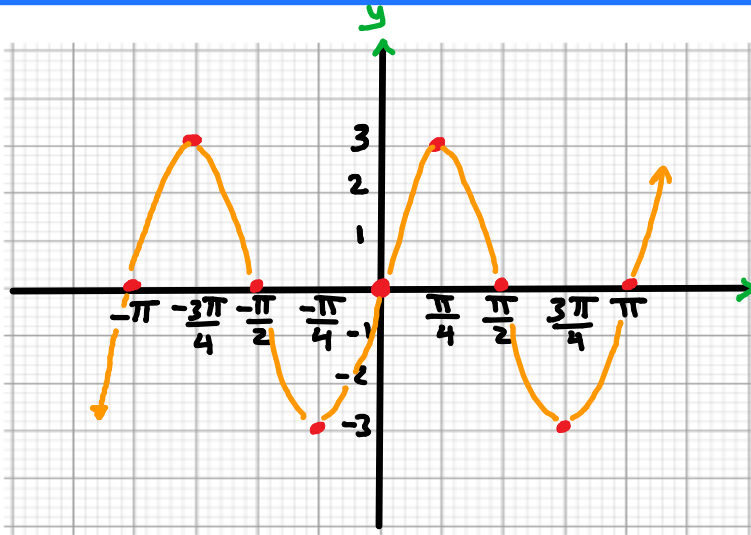
(8-1) التمثيل البياني للدوال المثلثية

أولاً: التمثيل البياني لدالة الجيب

دور ثان 2022/2021

أوجد السعة والدورة للدالة ثم اسم بيانها

$$y = 3\sin(2x)$$



الحل

$$a = 3 \quad b = 2$$

$$\text{السعة} = |a| = |3| = 3$$

$$\text{الدورة} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

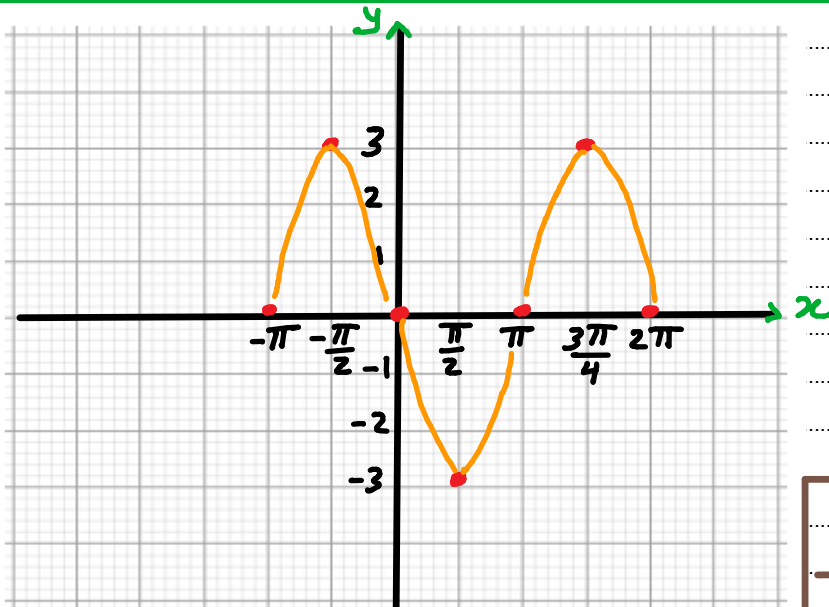
$$\text{ربع الدورة} = \frac{1}{4} \times \pi = \frac{\pi}{4}$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	0	3	0	-3	0

دور أول 2023/2022

أوجد السعة والدورة للدالة ثم اسم بيانها

$$y = -3\sin x, x \in [-\pi, 2\pi]$$



الحل

$$a = -3 \quad b = 1$$

$$\text{السعة} = |a| = |-3| = 3$$

$$\text{الدورة} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$$

$$\text{ربع الدورة} = \frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

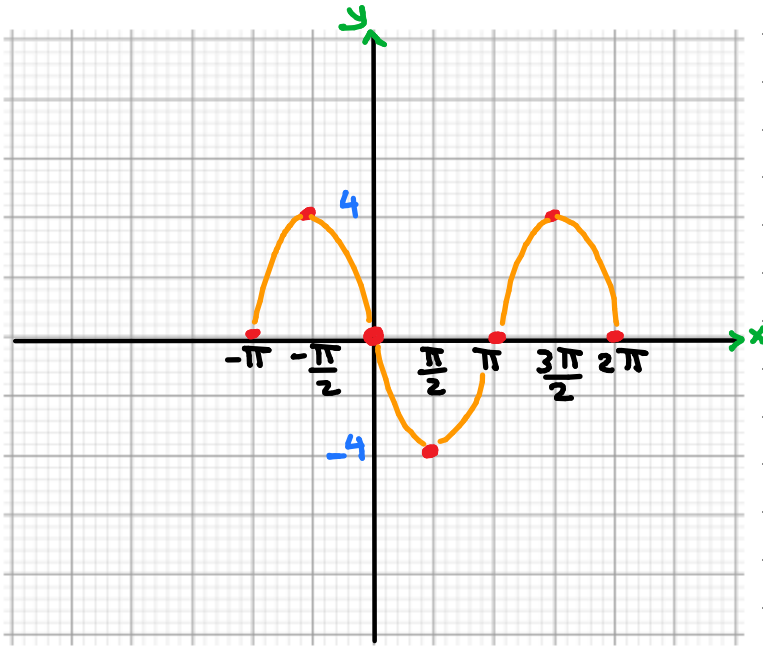
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{4}$	2π
y	0	-3	0	3	0

دور أول 2024/2023

أوجد السعة والدورة للدالة ثم اسم بيانها

$$y = -4\sin x, x \in [-\pi, 2\pi]$$

الحل



$$a = -4 \quad b = 1$$

$$\text{السعة} = |a| = |-4| = 4$$

$$\text{الدورة} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

$$\text{ربع الدورة} = \frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

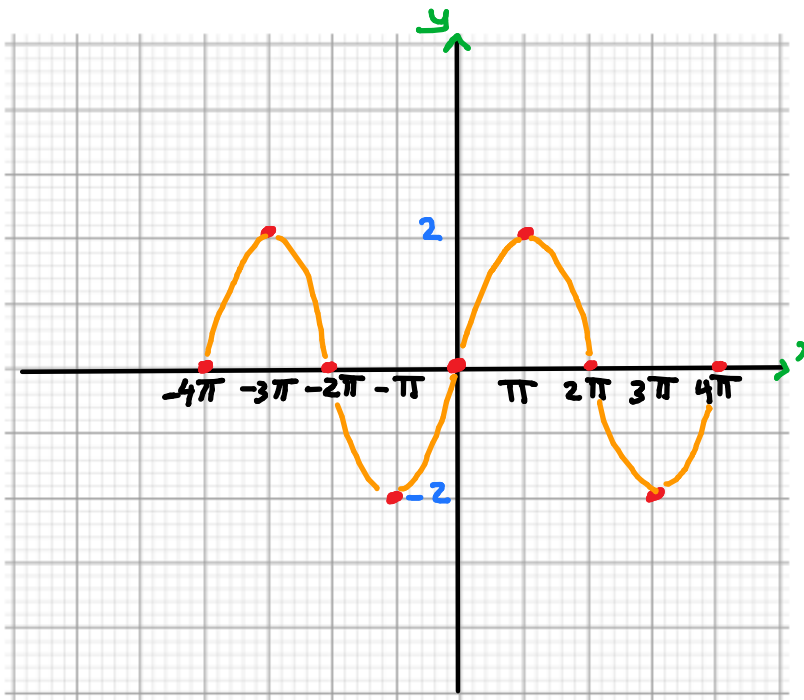
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	-4	0	4	0

دور ثان 2023/2022

أوجد السعة والدورة للدالة ثم اسم بيانها

$$y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right), -4\pi \leq x \leq 4\pi$$

الحل



$$a = 2 \quad b = \frac{1}{2}$$

$$\text{السعة} = |a| = |2| = 2$$

$$\text{الدورة} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

$$\text{ربع الدورة} = \frac{1}{4} \times 4\pi = \pi$$

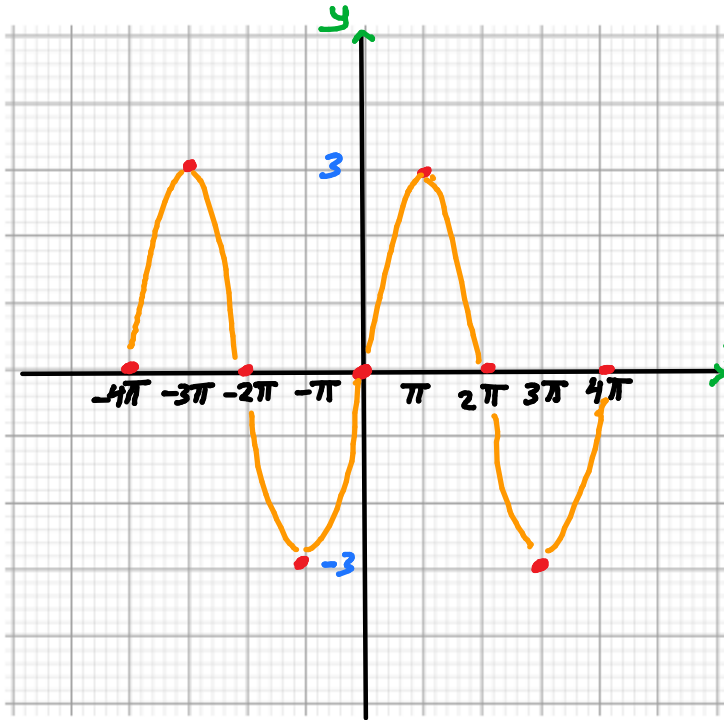
x	0	π	2π	3π	4π
y	0	2	0	-2	0

دور ثان 2019/2018

أوجد السعة والدورة للدالة ثم اسم بيانها

$$y = 3\sin\left(\frac{1}{2}x\right), -4\pi \leq x \leq 4\pi$$

الحل



$$a = 3 \quad b = \frac{1}{2}$$

$$\text{السعة} = |a| = |3| = 3$$

$$\text{الدورة} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

$$\text{ربع الدورة} = \frac{1}{4} \times 4\pi = \pi$$

x	0	π	2π	3π	4π
y	0	3	0	-3	0

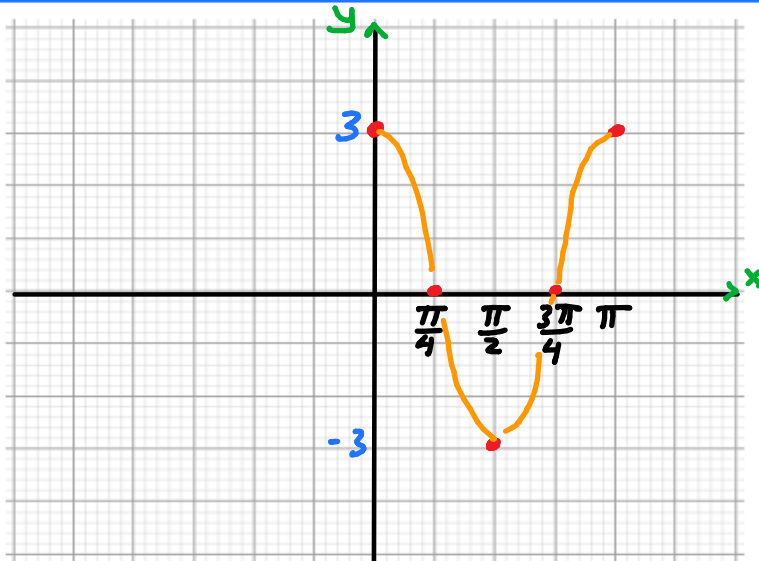
ثانيا: التمثيل البياني لدالة جيب التمام

دور أول 2014/2013

أوجد السعة والدورة للدالة ثم مثل بيان دورة واحدة للدالة

$$y = 3\cos 2x$$

الحل



$$a = 3 \quad b = 2$$

$$\text{السعة} = |a| = |3| = 3$$

$$\text{الدورة} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{ربع الدورة} = \frac{1}{4} \times \pi = \frac{\pi}{4}$$

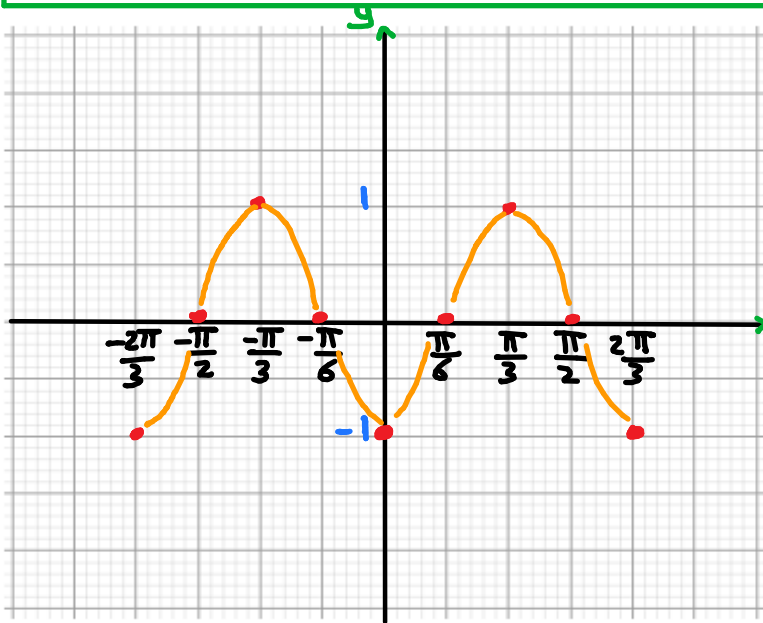
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	3	0	-3	0	3

أوجد السعة والدورة للدالة ثم مثل بيان دورة واحدة للدالة

دور ثان 2024/2023

$$y = -\cos 3x$$

الحل



$$a = -1 \quad b = 3$$

$$\text{السعة} = |a| = |-1| = 1$$

$$\text{الدورة} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{ربع الدورة} = \frac{1}{4} \times \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

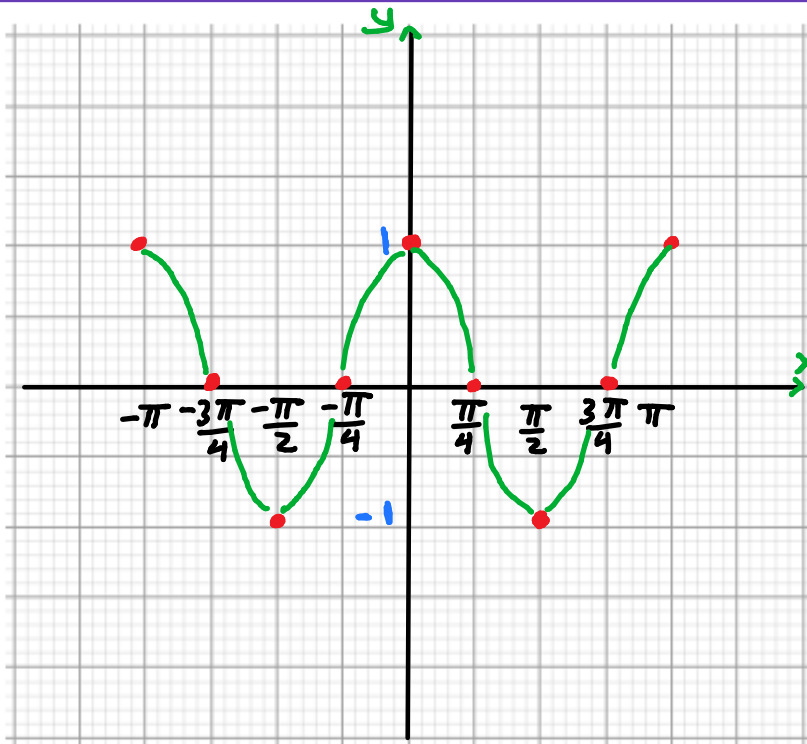
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
y	-1	0	1	0	-1

أوجد السعة والدورة للدالة ثم مثل بيان دورة واحدة للدالة

دور ثان 2015/2014

$$y = \cos 2x$$

الحل



$$a = 1 \quad b = 2$$

$$\text{السعة} = |a| = |1| = 1$$

$$\text{الدورة} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{ربع الدورة} = \frac{1}{4} \times \pi = \frac{\pi}{4}$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	1	0	-1	0	1

أوجد السعة والدورة للدالة ثم اسم بيانها

دور ثان 2017/2016

$$y = -5 \cos\left(\frac{2x}{3}\right)$$

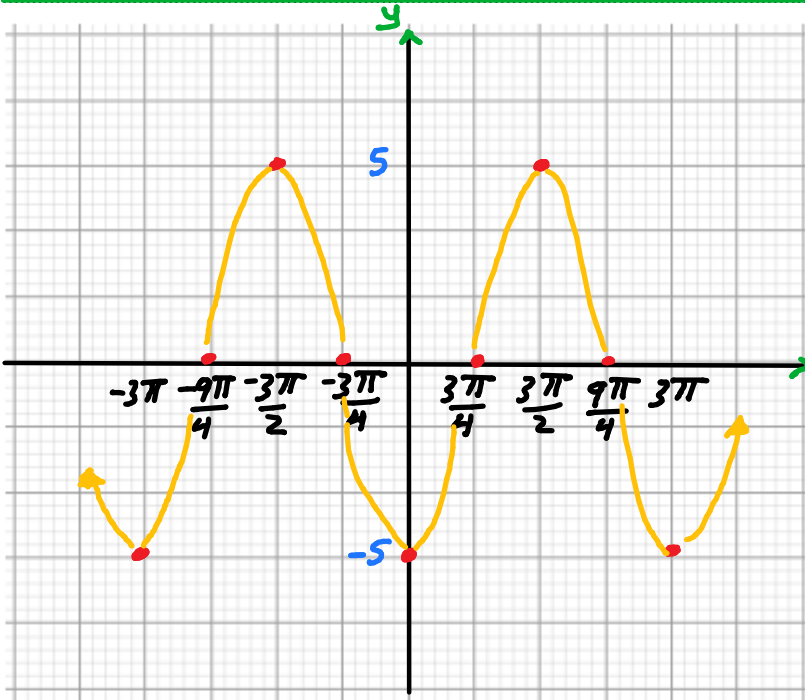
الحل

$$a = -5 \quad b = \frac{2}{3}$$

$$\text{السعة} = |a| = |-5| = 5$$

$$\text{الدورة} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\frac{2}{3}|} = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$$

$$\text{ربع الدورة} = \frac{1}{4} \times 3\pi = \frac{3\pi}{4}$$



x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{4}$	3π
y	-5	0	5	0	-5

أوجد السعة والدورة للدالة ثم اسم بيانها

دور ثان 2018/2017

$$y = \frac{1}{2} \cos(-x) \quad , x \in [-2\pi, 2\pi]$$

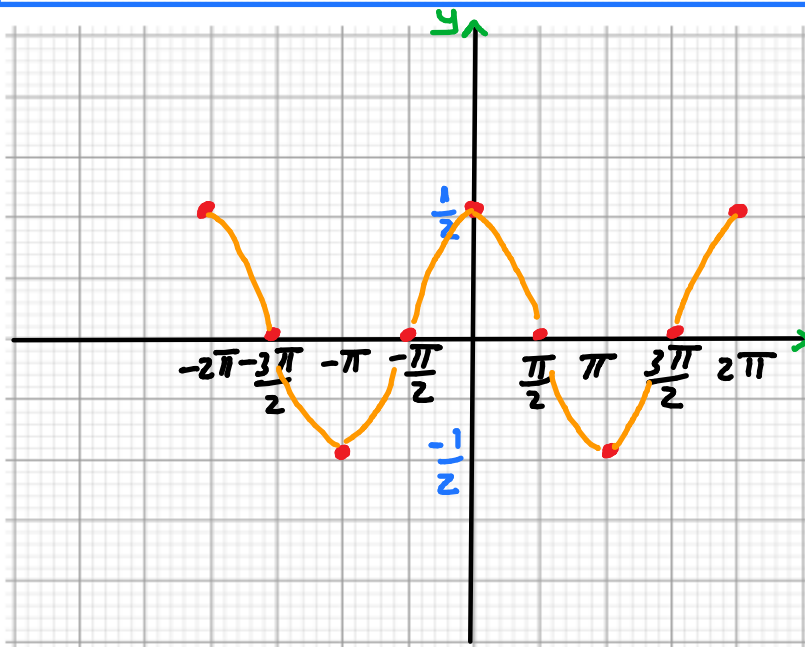
الحل

$$a = \frac{1}{2} \quad b = -1$$

$$\text{السعة} = |a| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\text{الدورة} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$$

$$\text{ربع الدورة} = \frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{2}$$



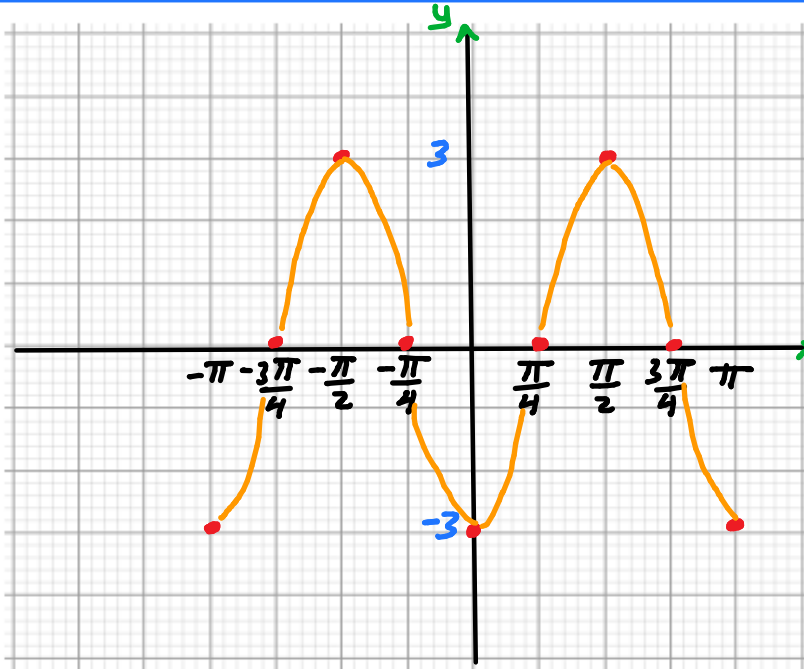
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0.5	0	-0.5	0	0.5

دور أول 2019 / 2018

أوجد السعة والدورة للدالة ثم اسم بيانها

$$y = -3 \cos(2x) \quad , -\pi \leq x \leq \pi$$

الحل



$$a = -3 \quad b = 2$$

$$\text{السعة} = |a| = |-3| = 3$$

$$\text{الدورة} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{ربع دورة} = \frac{1}{4} \times \pi = \frac{\pi}{4}$$

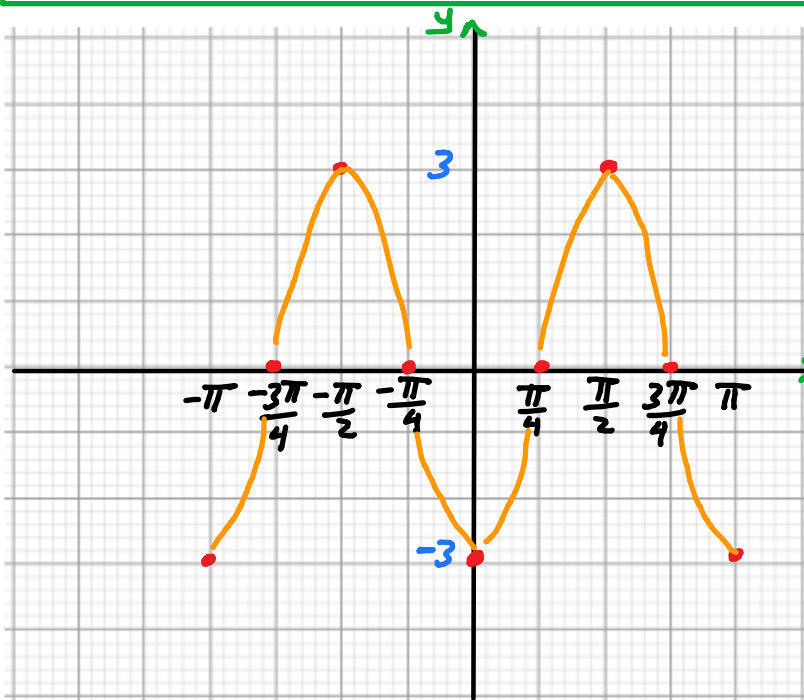
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	-3	0	3	0	-3

دور أول 2016/2015

أوجد السعة والدورة للدالة ثم اسم بيانها

$$y = -3 \cos(2x) \quad , x \in [-\pi, \pi]$$

الحل



$$a = -3 \quad b = 2$$

$$\text{السعة} = |a| = |-3| = 3$$

$$\text{الدورة} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{ربع دورة} = \frac{1}{4} \times \pi = \frac{\pi}{4}$$

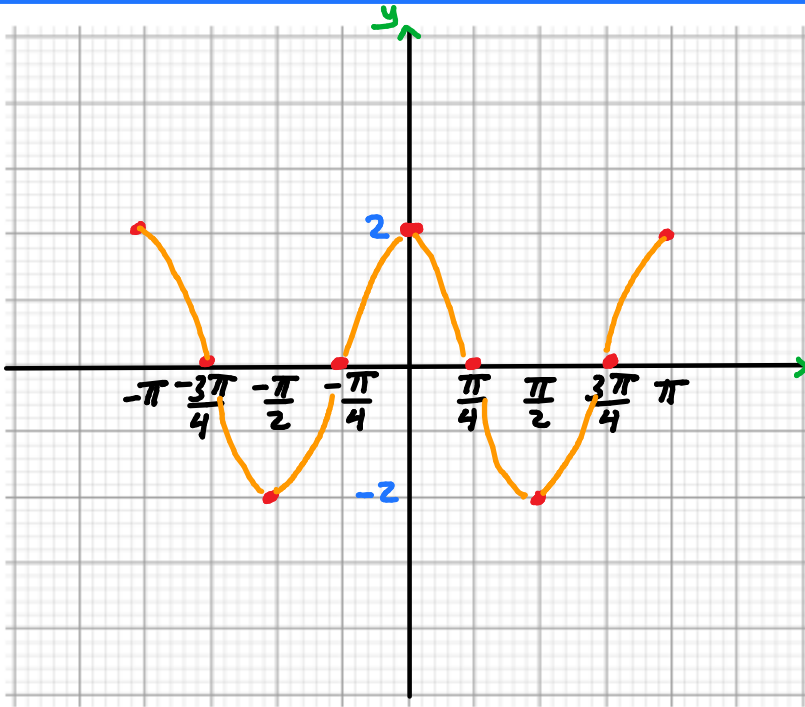
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	-3	0	3	0	-3

دور ثان 2016/2015

أوجد السعة والدورة للدالة ثم اسم بيانها

$$y = 2 \cos 2x, x \in [-\pi, \pi]$$

الحل



$$a = 2 \quad b = 2$$

$$\text{السعة} = |a| = |2| = 2$$

$$\text{الدورة} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{ربع لدورة} = \frac{1}{4} \times \pi = \frac{\pi}{4}$$

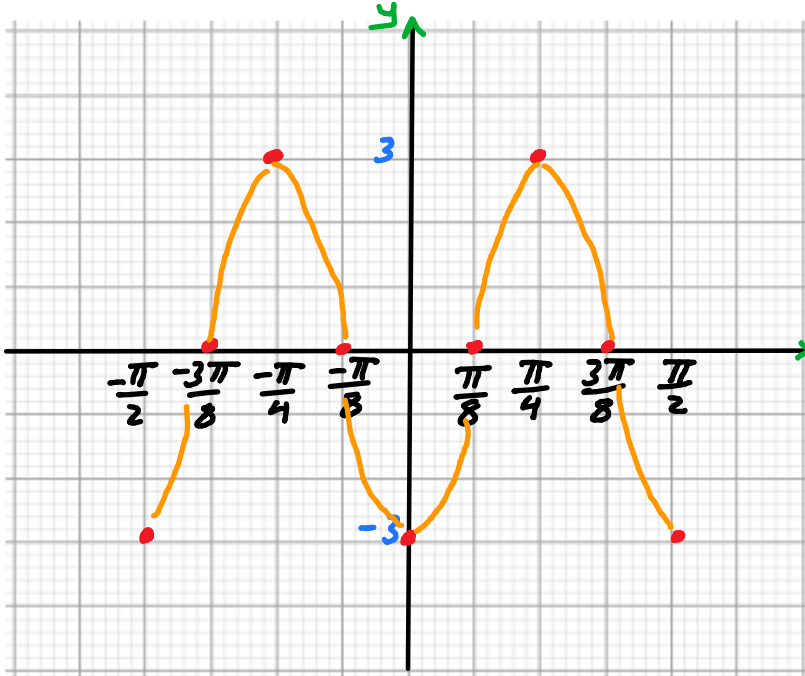
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	2	0	-2	0	2

دور أول 2015/2014

أوجد السعة والدورة للدالة ثم اسم بيانها

$$y = -3 \cos 4x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

الحل



$$a = -3 \quad b = 4$$

$$\text{السعة} = |a| = |-3| = 3$$

$$\text{الدورة} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ربع لدورة} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
y	-3	0	3	0	-3

(٣-٨) قانون الجيب

حالة: حل مثلث بمعلومية ضلعين وزاوية مقابلة لأحد الضلعين:

دور أول 2022/2021

في المثلث ABC : ضلع وزاوية مقابلة لهإذا كان $\alpha = 32^\circ$, $b = 11 \text{ cm}$, $a = 17 \text{ cm}$ أوجد γ

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} \quad \text{قانون الجيب}$$

$$\frac{\sin 32^\circ}{17} = \frac{\sin \beta}{11}$$

$$\sin \beta = \frac{11 \sin 32^\circ}{17} \approx 0.3429 > 0$$

$$\beta_1 = \sin^{-1}(0.3429) \approx 20.05^\circ$$

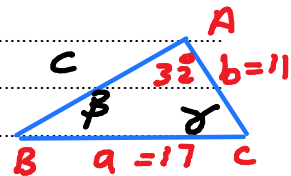
$$\therefore \alpha + \beta_1 = 32^\circ + 20.05^\circ = 52.05^\circ < 180^\circ$$

$$\therefore \gamma = 180^\circ - 52.05^\circ = 127.95^\circ$$

$$\beta_2 = 180^\circ - 20.05^\circ = 159.95^\circ$$

$$\alpha + \beta_2 = 32^\circ + 159.95^\circ = 191.95^\circ > 180^\circ$$

β_2 مرفوضة



منهج كامل 2024/2023

حل المثلث $\triangle ABC$ حيث $a = 17 \text{ cm}$, $b = 11 \text{ cm}$, $m(\widehat{A}) = 32^\circ$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} \quad \text{قانون الجيب}$$

$$\frac{\sin 32^\circ}{17} = \frac{\sin \beta}{11} \Rightarrow \sin \beta = \frac{11 \sin 32^\circ}{17} \approx 0.3429 > 0$$

$$\beta_1 = \sin^{-1}(0.3429) \approx 20.05^\circ$$

$$\alpha + \beta_1 = 32^\circ + 20.05^\circ = 52.05^\circ < 180^\circ$$

β_1 مقبولة

$$\therefore \gamma = 180^\circ - 52.05^\circ = 127.95^\circ$$

$$\therefore \frac{\sin 32^\circ}{17} = \frac{\sin 127.95^\circ}{c}$$

$$\Rightarrow c = \frac{17 \sin 127.95^\circ}{\sin 32^\circ} \approx 25.3 \text{ cm}$$

دور أول 2015/2014

حل $\triangle ABC$ حيث $\alpha = 26.3^\circ$ ، $b = 6 \text{ cm}$ ، $a = 7 \text{ cm}$

الحل

قانون الجيب :

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 26.3^\circ}{7} = \frac{\sin \beta}{6}$$

$$\therefore \sin \beta = \frac{6 \sin 26.3^\circ}{7} \approx 0.3798 > 0$$

توجد زاويتان لـ β

$$\beta_1 = \sin^{-1}(0.3798) \approx 22.3^\circ$$

$$\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$$

$$= 180^\circ - 22.3^\circ = 157.7^\circ$$

$$\alpha + \beta_1 = 26.3^\circ + 22.3^\circ = 48.6^\circ < 180^\circ$$

الاختبار

$$\alpha + \beta_2 = 26.3^\circ + 157.7^\circ = 184^\circ > 180^\circ$$

 β_1 مقبولة β_2 مرفوضة

$$\therefore \gamma = 180^\circ - 48.6^\circ = 131.4^\circ$$

$$\therefore \frac{\sin 26.3^\circ}{7} = \frac{\sin 131.4^\circ}{c}$$

$$\therefore c = \frac{7 \sin 131.4^\circ}{\sin 26.3^\circ} \approx 11.85 \text{ cm}$$

حالة: حل مثلث بمعلومية زاويتين وضلع

دور ثان 2018/2017

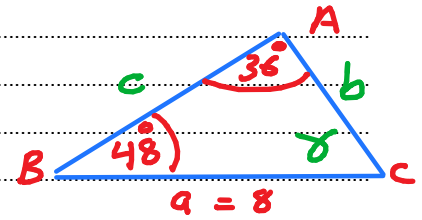
حل المثلث ABC الذي فيه $\alpha = 36^\circ$, $\beta = 48^\circ$, $a = 8 \text{ cm}$

الحل

مجموع قياسات زوايا المثلث 180°

$$\therefore \gamma = 180^\circ - (48^\circ + 36^\circ) = 96^\circ$$

قانون الجيب:



$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 48^\circ}{b} = \frac{\sin 96^\circ}{c}$$

نسبة معلومة

$$\frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 48^\circ}{b}$$

$$\frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 96^\circ}{c}$$

$$b = \frac{8 \sin 48^\circ}{\sin 36^\circ} \approx 10.11 \text{ cm}$$

$$c = \frac{8 \sin 96^\circ}{\sin 36^\circ} \approx 13.54 \text{ cm}$$

دور ثان 2024/2023

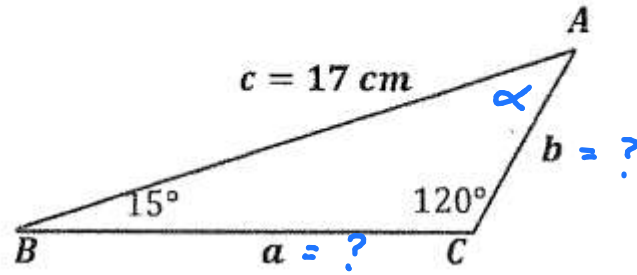
حل المثلث ABC الذي فيه $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $a = 4 \text{ cm}$

حاول بنفسك؟

دور ثان 2016/2015

حل المثلث ABC

دور أول 2019/2018



الحل

∴ مجموع قياسات زوايا المثلث 180°

$$\therefore \alpha = 180^\circ - (15^\circ + 120^\circ) = 45^\circ$$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} \quad \text{قانون الجيب :}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{a} = \frac{\sin 15^\circ}{b} = \frac{\sin 120^\circ}{17} \quad \text{نسبة معلومة}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{a} = \frac{\sin 120^\circ}{17} \quad \times$$

$$a = \frac{17 \sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} \approx 13.88 \text{ cm}$$

$$\frac{\sin 15^\circ}{b} = \frac{\sin 120^\circ}{17} \quad \times$$

$$b = \frac{17 \sin 15^\circ}{\sin 120^\circ} \approx 5.08 \text{ cm}$$

(4-8) قانون جيب التمام

حالة: حل مثلث بمعلومية ضلعين والزاوية المحصورة بينهما

دور ثان 2023/2022

حل المثلث ABC حيث: $a = 12$, $b = 21$, $m(\hat{C}) = 95^\circ$

الحل

قانون جيب التمام:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$\therefore c^2 = (12)^2 + (21)^2 - 2 \times 12 \times 21 \cos 95^\circ$$

$$\approx 628.9$$

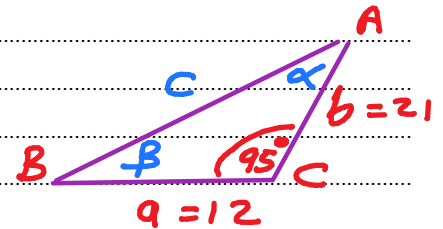
$$c = \sqrt{628.9} \approx 25.1 \text{ cm}$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(12)^2 + (25.1)^2 - (21)^2}{2 \times 12 \times 25.1} \approx 0.5528$$

$$\beta = \cos^{-1}(0.5528) \approx 56.4^\circ$$

مجموع قياسات زوايا المثلث 180°

$$\therefore \alpha = 180^\circ - (95^\circ + 56.4^\circ) = 28.6^\circ$$



دور أول 2018/2017

حل المثلث ABC حيث: $b = 9\text{cm}$, $c = 6\text{cm}$, $\alpha = 60^\circ$

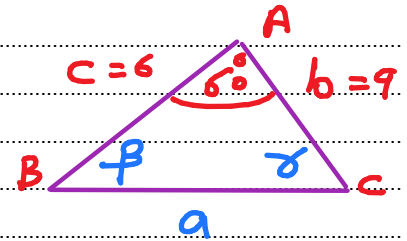
الحل

قانون جيب التمام:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$a^2 = 9^2 + 6^2 - 2 \times 9 \times 6 \cos 60^\circ = 63$$

$$a = \sqrt{63} = 3\sqrt{7} \text{ cm}$$



$$\therefore \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(3\sqrt{7})^2 + 6^2 - 9^2}{2 \times 3\sqrt{7} \times 6} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{7}}{14}\right) \approx 79.1^\circ$$

مجموع قياسات زوايا المثلث 180°

$$\therefore \gamma = 180^\circ - (60^\circ + 79.1^\circ) = 40.9^\circ$$

دور أول 2024/2023

حل المثلث ABC حيث: $\alpha = 82^\circ$, $b = 22\text{cm}$, $c = 31\text{cm}$

حاول بنفسك؟

دور ثان 2017/2016

حل المثلث ABC حيث: $a = 11\text{cm}$, $b = 5\text{cm}$, $\gamma = 20^\circ$

حالة: حل مثلث بمعلومية 3 اضلاع

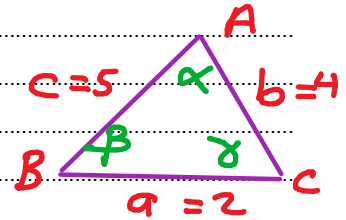
دور اول 2023/2022

حل المثلث ABC حيث : $a = 2\text{cm}$, $b = 4\text{cm}$, $c = 5\text{cm}$

الحل

قانون جيب لبتام :

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4^2 + 5^2 - 2^2}{2 \times 4 \times 5} = \frac{37}{40}$$



$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{37}{40}\right) \approx 22.3^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2^2 + 5^2 - 4^2}{2 \times 2 \times 5} = \frac{13}{20}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{13}{20}\right) \approx 49.5^\circ$$

مجموع قياسات زوايا المثلث 180°

$$\therefore \gamma = 180^\circ - (22.3^\circ + 49.5^\circ) = 108.2^\circ$$

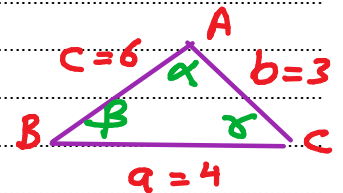
دور اول 2022/2021

حل المثلث ABC حيث : $a = 4\text{cm}$, $b = 3\text{cm}$, $c = 6\text{cm}$

الحل

قانون جيب لبتام :

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + 6^2 - 4^2}{2 \times 3 \times 6} = \frac{29}{36}$$



$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{29}{36}\right) \approx 36.3^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4^2 + 6^2 - 3^2}{2 \times 4 \times 6} = \frac{43}{48}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{43}{48}\right) \approx 26.4^\circ$$

مجموع قياسات زوايا المثلث 180°

$$\therefore \gamma = 180^\circ - (36.3^\circ + 26.4^\circ) = 117.3^\circ$$

دور ثان 2022/2021

في ΔABC حيث : $a = 9cm$, $b = 7cm$, $c = 5cm$

أوجد قياس الزاوية الأكبر

الحل

∴ قياس الزاوية الأكبر يقابل الضلع الأكبر

الضلع الأكبر a ∴ الزاوية الأكبر هي α

نانون حسب إتمام :

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7^2 + 5^2 - 9^2}{2 \times 7 \times 5} = \frac{-1}{10}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{-1}{10} \right) \simeq 95.7^\circ$$

حاول بنفسك؟

دور أول 2017/2016

حل المثلث ABC حيث : $a = 4cm$, $b = 3cm$, $c = 6cm$

دور أول 2016/2015

حل المثلث ABC حيث : $a = 9cm$, $b = 7cm$, $c = 5cm$

دور ثان 2015/2014

حل المثلث ABC حيث : $a = 2cm$, $b = 3cm$, $c = \sqrt{7}cm$

(5-8) مساحة المثلث

دور ثان 2019/2018

أوجد مساحة سطح مثلث أطوال أضلاعه: $a = 9\text{cm}$, $b = 7\text{cm}$, $c = 6\text{cm}$

الحل

قاعدة هيرون:

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+7+6}{2} = 11$$

$$\text{Area}(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{11(11-9)(11-7)(11-6)}$$

$$= 2\sqrt{110} \approx 20.98 \text{ cm}^2$$

دور أول 2018/2017

أوجد مساحة سطح مثلث أطوال أضلاعه: 7cm , 5cm , 8cm

الحل

قاعدة هيرون:

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+5+8}{2} = 10$$

$$\text{Area}(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{10(10-7)(10-5)(10-8)}$$

$$= 10\sqrt{3} \approx 17.32 \text{ cm}^2$$

أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $a = 23cm$, $b = 19cm$, $c = 12cm$

دور أول 2017/2016

مستخدما قاعدة هيرون

الحل

قاعدة هيرون:

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{23+19+12}{2} = 27$$

$$\text{Area}(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{27(27-23)(27-19)(27-12)}$$

$$= 36\sqrt{10} \approx 113.84 \text{ cm}^2$$

ABC مثلث فيه $a = 3cm$, $b = 8cm$, $c = 7cm$

دور أول 2014/2013

أوجد: (1) قياس أكبر زاوية.

(2) مساحة سطح المثلث ABC مستخدما قاعدة هيرون

الحل

2 قاعدة هيرون:

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3+8+7}{2} = 9$$

$$\text{Area}(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{9(9-3)(9-8)(9-7)}$$

$$= 6\sqrt{3} \approx 10.39 \text{ cm}^2$$

1. أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع
ب. أكبر ضلع b ∴ أكبر زاوية β

قانون جيب تمام:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$= \frac{3^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 3 \times 7} = -\frac{1}{7}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{7}\right) \approx 98.2^\circ$$

(2-9) إثبات صحة المتطابقات المثلثية

أثبت صحة المتطابقة:

دور أول 2019/2018 * دور ثان 2017/2016 * دور ثان 2024/2023

$$\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} = 2 \csc^2 x$$

الحل

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1 + \cancel{\cos x} + 1 - \cancel{\cos x}}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{2}{1 - \cos^2 x} = \frac{2}{\sin^2 x} = 2 \csc^2 x = \text{الطرف الأيمن}$$

∴ الطرفان متساويان

(فكرة توحيد مقامات)
متطابقة منيغور

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \sin^2 x &= 1 - \cos^2 x \end{aligned}$$

دور ثان 2018/2017 * دور أول 2016/2015 * دور ثان 2015/2014

أثبت صحة المتطابقة:

$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$$

الحل

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)} \times \frac{(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)}$$

$$= \frac{\cos x (1 + \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{\cos x (1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{\cancel{\cos x} (1 + \sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \text{الطرف الأيمن}$$

∴ الطرفان متساويان

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \cos^2 x &= 1 - \sin^2 x \end{aligned}$$

أثبت صحة المتطابقة:

$$\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x} = \tan x \cdot \sec x$$

دور أول 2014/2013

الحل

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{\sec^2 x - 1}{\sin x} = \frac{\tan^2 x}{\sin x}$$

$$= \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x}$$

$$= \tan x \cdot \sec x = \text{الطرف الأيمن}$$

∴ لطرفان متساويان

متطابقة منبثقت

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 x &= \sec^2 x \\ \tan^2 x &= \sec^2 x - 1 \end{aligned}$$

تذكر

أثبت صحة المتطابقة:

$$\tan x + \cot x = \sec x \cdot \csc x$$

دور أول 2018/2017

الحل

$$\text{الطرف الأيسر} = \tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x}{\sin x \cdot \cos x}$$

متطابقة منبثقت

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$$

$$= \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \csc x \cdot \sec x = \text{الطرف الأيمن}$$

∴ لطرفان متساويان

أثبت صحة المتطابقة:

$$\tan^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x \tan^2 x$$

دور أول 2015/2014

الحل

$$\text{الطرف الأيسر} = \tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x$$

$$= \sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \sin^2 x (\sec^2 x - 1)$$

لـ متطابقة فيثاغورث لـ عامل مشترك

$$= \sin^2 x \cdot \tan^2 x = \text{الطرف الأيمن}$$

∴ (الطرفان متساويان)

(3-9) حل المعادلات المثلثية

حل معادلة جيب الزاوية

حل المعادلة:

دور ثان 2023/2022

$$2 \sin \theta + 1 = 0$$

(حاسبة Rad)

الحل

$$2 \sin \theta = -1 \quad \div 2$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{2}$$

زاوية لـ سناد:

$$\alpha = \sin^{-1} \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{\pi}{6}$$

تمديد لـ ربع: $\sin \theta < 0$ سالبة∴ θ تقع في الربع الثالث أو الربع الرابع

الربع الثالث

الربع الرابع

$$\theta = (\pi + \alpha) + 2\pi k \quad \theta = (2\pi - \alpha) + 2\pi k$$

$$\theta = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k \quad \theta = \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k$$

$$\therefore \theta = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \quad \therefore \theta = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

∴ حل المعادلة:

$$\theta = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \quad \theta = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$$

حل المعادلة:

دور أول 2016/2015

$$3 \sin \theta + 1 = \sin \theta$$

(حاسبة Rad)

الحل

$$3 \sin \theta - \sin \theta = -1$$

$$2 \sin \theta = -1 \quad \div 2$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{2}$$

زاوية في سنار:

$$\alpha = \sin^{-1} \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{\pi}{6}$$

تحديد الربع: سالبة $\sin \theta < 0$

∴ تقع في الربع الثالث أو الربع الرابع

الربع الثالث

$$\theta = (\pi + \alpha) + 2\pi k$$

$$\theta = (\pi + \frac{\pi}{6}) + 2\pi k$$

$$\therefore \theta = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

الربع الرابع

$$\theta = (2\pi - \alpha) + 2\pi k$$

$$\theta = (2\pi - \frac{\pi}{6}) + 2\pi k$$

$$\theta = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

حل المعادلة:

$$\theta = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \quad \text{و} \quad \theta = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$$

دور ثان 2024/2023

(حاسبة Rad)

$$2 \sin x + \sqrt{3} = 0$$

حل المعادلة:

الحل

$$2 \sin x = -\sqrt{3} \quad \div 2$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية في سنار:

$$\alpha = \sin^{-1} \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\pi}{3}$$

تحديد الربع: سالبة $\sin x < 0$

∴ تقع في الربع الثالث أو الربع الرابع

الربع الثالث

$$x = (\pi + \alpha) + 2\pi k$$

$$x = (\pi + \frac{\pi}{3}) + 2\pi k$$

$$x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

الربع الرابع

$$x = (2\pi - \alpha) + 2\pi k$$

$$x = (2\pi - \frac{\pi}{3}) + 2\pi k$$

$$x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

حل المعادلة:

$$x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \quad \text{و} \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$$

حل المعادلة:

دور أول 2017/2016

$$\sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

الحل

* زاوية لاسناد

$$\alpha = \sin^{-1} \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\pi}{3}$$

* تحديد الربع:

$$\sin x < 0$$

∴ تقع في الربع الثالث أو الربع الرابع

الربع الثالث

$$x = (\pi + \alpha) + 2\pi k$$

$$x = \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k$$

$$= \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

الربع الرابع

$$x = (2\pi - \alpha) + 2\pi k$$

$$x = \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k$$

$$x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

∴ حل المعادلة:

$$x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \text{ و } x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

حل المعادلة:

دور أول 2024/2023

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

الحل

* زاوية لاسناد:

$$\alpha = \sin^{-1} \left| \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\pi}{3}$$

* تحديد الربع:

$$\sin x > 0$$

∴ تقع في الربع الأول أو الربع الثاني

الربع الأول

$$x = \alpha + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

الربع الثاني

$$x = (\pi - \alpha) + 2\pi k$$

$$x = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k$$

$$= \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$

∴ حل المعادلة:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ , } x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$

حل معادلة جيب الزاوية على فترة محددة

حل المعادلة:

دور أول 2023/2022

$$3 \sin \theta + 1 = \sin \theta \quad \text{حيث } 0 \leq \theta < 2\pi$$

الحل

$$3 \sin \theta - \sin \theta = -1$$

$$2 \sin \theta = -1 \quad \div 2$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{2}$$

* زاوية لاند سناد:

$$\alpha = \sin^{-1} \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{\pi}{6}$$

* تحديد الربع:

$$\therefore \sin \theta < 0 \quad \text{سلبية}$$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثالث أو الربع الرابع.

الربع الثالث

$$\theta = \pi + \alpha$$

$$\theta = \pi + \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{7\pi}{6} \in [0, 2\pi)$$

الربع الرابع

$$\theta = 2\pi - \alpha$$

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{11\pi}{6} \in [0, 2\pi)$$

حل المعادلة

$$\theta = \frac{7\pi}{6} \quad , \quad \theta = \frac{11\pi}{6}$$

حل المعادلة:

دور ثان 2019/2018

$$5 \sin \theta - 3 = \sin \theta \quad \text{حيث } 0 \leq \theta < 2\pi$$

الحل

$$5 \sin \theta - \sin \theta = 3$$

$$4 \sin \theta = 3 \quad \div 4$$

$$\sin \theta = \frac{3}{4}$$

* زاوية لاند سناد:

$$\alpha = \sin^{-1} \left| \frac{3}{4} \right| \approx 0.85$$

* تحديد الربع:

$$\therefore \sin \theta > 0 \quad \text{سوية}$$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الأول أو الربع الثاني

الربع الأول

$$\theta = \alpha$$

$$\theta \approx 0.85$$

$$\in [0, 2\pi)$$

الربع الثاني

$$\theta = \pi - \alpha$$

$$\theta = \pi - 0.85$$

$$\approx 2.29$$

$$\in [0, 2\pi)$$

حل المعادلة:

$$\theta \approx 0.85 \quad \text{or} \quad \theta \approx 2.29$$

حل المعادلة:

دور ثان 2017/2016

$$5 \sin \theta - 2 = \sin \theta \quad \text{حيث } 0 \leq \theta < 2\pi$$

الحل

$$5 \sin \theta - \sin \theta = 2$$

$$4 \sin \theta = 2 \quad \div 4$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{2}$$

* زاوية ابتدائية:

$$\alpha = \sin^{-1} \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{\pi}{6}$$

* تحديد الربع:

$$\therefore \sin \theta > 0 \quad \text{موجبة}$$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الأول أو الربع الثاني

الربع الأول

$$\theta = \alpha$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \in [0, 2\pi)$$

الربع الثاني

$$\theta = \pi - \alpha$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \in [0, 2\pi)$$

من المعادلة:

$$\theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad \theta = \frac{5\pi}{6}$$

حل معادلة جيب الزاوية من الدرجة الثانية

حل المعادلة:

دور أول 2019/2018

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0 \quad (\text{mode } 53)$$

الحل

$$(2 \sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \quad \text{or} \quad \sin x = 2$$

$$* \therefore \sin x = 2 \notin [-1, 1]$$

ليس لها حل

$$* \therefore \sin x = -\frac{1}{2}$$

* زاوية ابتدائية:

$$\alpha = \sin^{-1} \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{\pi}{6}$$

* تحديد الربع: سالبة $\therefore \sin x < 0$

$\therefore x$ تقع في الربع الثالث أو الربع الرابع

الربع الثالث

$$x = (\pi + \alpha) + 2\pi k$$

$$x = \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) + 2\pi k$$

$$= \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$$

الربع الرابع

$$x = (2\pi - \alpha) + 2\pi k$$

$$x = \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) + 2\pi k$$

$$= \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$$

من المعادلة:

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \quad \text{و} \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

حل معادلة جيب تمام الزاوية

حل المعادلة:

دور ثان 2016/2015

$$2\cos x = -\sqrt{3} \quad \div 2$$

الحل

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\pi}{6}$$

* زاوية الإسناد:

* تحديد الربع: سالبة $\therefore \cos x < 0$

$\therefore x$ تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث

الربع الثاني

الربع الثالث

$$x = (\pi - \alpha) + 2\pi k \quad x = (\pi + \alpha) + 2\pi k$$

$$x = (\pi - \frac{\pi}{6}) + 2\pi k \quad x = (\pi + \frac{\pi}{6}) + 2\pi k$$

$$= \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

من المبدأ:

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$$

حل معادلة جيب تمام الزاوية على فترة محددة

حل المعادلة:

دور أول 2022/2021

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \text{حيث } 0 \leq x < 2\pi$$

الحل

* زاوية الإسناد:

$$\alpha = \cos^{-1} \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{\pi}{3}$$

* تحديد الربع: سالبة $\therefore \cos x < 0$

$\therefore x$ تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث

الربع الثاني

الربع الثالث

$$x = \pi - \alpha$$

$$x = \pi + \alpha$$

$$= \pi - \frac{\pi}{3}$$

$$= \pi + \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{2\pi}{3} \in [0, 2\pi) \quad = \frac{4\pi}{3} \in [0, 2\pi)$$

من المبدأ:

$$x = \frac{2\pi}{3} \quad , \quad x = \frac{4\pi}{3}$$

حل معادلة جيب تمام الزاوية من الدرجة الثانية

حل المعادلة:

دور ثان 2022/2021

$$a \quad b \quad c$$

$$1 \cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0$$

(mode 53)

الحل

$$(\cos x + 1)(\cos x + 2) = 0$$

$$\cos x = -1 \text{ or } \cos x = -2$$

$$* \therefore \cos x = -2 \notin [-1, 1]$$

ليس له حل

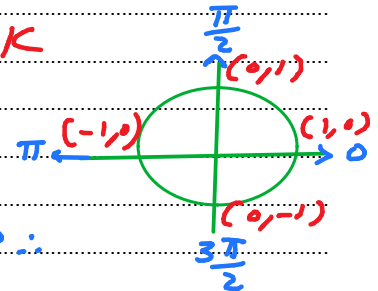
$$\text{or } \cos x = -1$$

$$\therefore x = \pi \Leftarrow \text{زاوية ربعية}$$

$$\therefore x = \pi + 2\pi k$$

حل المعادلة:

$$x = \pi + 2\pi k$$



حل معادلة تتضمن جيب الزاوية وجيب تمام الزاوية على فترة محددة

حل المعادلة:

دور أول 2014/2013

$$2 \cos x \sin x - \cos x = 0, x \in [0, 2\pi)$$

الحل

$$\cos x (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \text{ or } 2 \sin x - 1 = 0$$

$$2 \sin x = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos x = 0$$

 $\therefore x$ زاوية ربعية

$$\therefore x = \frac{\pi}{2} \text{ or } x = \frac{3\pi}{2}$$

$$\in [0, 2\pi) \quad \in [0, 2\pi)$$

$$\therefore \text{حل المعادلة: } x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{or } \sin x = \frac{1}{2}$$

* زاوية أساسية

$$\alpha = \sin^{-1} \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{\pi}{6}$$

* تحديد الربع:

$$\therefore \sin x > 0$$

 $\therefore x$ تقع في الربع الأول أو الربع الثاني

الربع الأول

$$\theta = \alpha$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6} \in [0, 2\pi)$$

الربع الثاني

$$\theta = \pi - \alpha$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \in [0, 2\pi)$$

(4-9) متطابقات المجموع والفرق

(5-9) متطابقات ضعف ونصف الزاوية

متطابقات المجموع وضعف الزاوية

إذا كان:

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \beta = \frac{-12}{13}, \quad \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$$

دور ثانٍ 2018/2017

أوجد كلا مما يلي:

(1) $\sin(\alpha + \beta)$

(2) $\tan 2\beta$

الحل

متطابقة ضيقانورت

ربع أول $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$\cos \alpha = + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \left(\frac{3}{5}\right)$$

ربع ثالث $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

$$\sin \beta = - \sqrt{1 - \cos^2 \beta}$$

$$= - \sqrt{1 - \left(\frac{-12}{13}\right)^2} = \left(\frac{-5}{13}\right)$$

$$(1) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{-12}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{-5}{13} = \left(\frac{-63}{65}\right)$$

$$(2) \tan 2\theta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta}$$

$$= \frac{2 \times \frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \left(\frac{120}{119}\right)$$

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$

$$= \frac{-5}{13} \times \frac{13}{-12} = \left(\frac{5}{12}\right)$$

إذا كان:

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \beta = \frac{-8}{17}, \quad \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$$

دور أول 2024/2023

أوجد كلا مما يلي:

(1) $\sin(\alpha + \beta)$

(2) $\cos(2\alpha)$

الحل

ربع أول $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

ربع ثاني $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

$$\begin{aligned} \sin \beta &= + \sqrt{1 - \cos^2 \beta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{-8}{17}\right)^2} = \frac{15}{17} \end{aligned}$$

$$(1) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{-8}{17} + \frac{3}{5} \times \frac{15}{17} = \frac{13}{85}$$

$$(2) \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{-7}{25}$$

متطابقات الفرق

إذا كان:

$$\cos \beta = \frac{24}{25}, \quad \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

دور أول 2017/2016

حيث α, β زاويتين حادتين

أوجد كلا مما يلي:

(1) $\cos(\alpha - \beta)$

(2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$

الحل

∴ α و β زاويتين حادتين∴ α, β تقع في الربع الأول

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \beta &= + \sqrt{1 - \cos^2 \beta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} = \frac{7}{25} \end{aligned}$$

$$(1) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{24}{25} + \frac{3}{5} \times \frac{7}{25} = \frac{117}{125}$$

$$(2) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \beta - \cos \frac{\pi}{2} \sin \beta$$

$$= 1 \times \frac{24}{25} - 0 \times \frac{7}{25} = \frac{24}{25}$$

متطابقات المجموع وضعف الزاوية

إذا كان:

$$\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

دور ثان 2016/2015

أوجد كلا مما يلي:

(1) $\sin 2\theta$

(2) $\cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$

الحل

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثالث $\Rightarrow \therefore \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(1) \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 2 \times \frac{-1}{\sqrt{2}} \times -\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$(2) \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \theta \cos \frac{\pi}{3} - \sin \theta \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

متطابقات الفرق وضعف الزاوية

إذا كان:

دور أول 2015/2014

$$\cos \theta = -\frac{3}{5}, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

أوجد كلا مما يلي:

(1) $\tan 2\theta$

(2) $\sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)$

الحل

$$\therefore \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

$$\therefore \theta \text{ تقع في الربع الثاني}$$

$$\sin \theta = + \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$(1) \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} =$$

$$= \frac{2 \times \frac{-4}{3}}{1 - \left(\frac{-4}{3}\right)^2} = \frac{24}{7}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{-5}{3} = \frac{-4}{3}$$

$$(2) \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \theta \cos \frac{\pi}{2} - \cos \theta \sin \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{4}{5} \times 0 - \left(-\frac{3}{5}\right) \times 1 = \frac{3}{5}$$

متطابقة ضعف الزاوية

إذا كان:

دور أول 2023/2022 * دور أول 2022/2021

$$\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

أوجد $\sin 2\theta$

الحل

$$\therefore \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore \theta \text{ تقع في الربع الثالث}$$

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

$$= -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 2 \times \frac{-1}{\sqrt{2}} \times \frac{-\sqrt{2}}{2} = 1$$

إذا كان:

دور ثان 2019/2018

$$\sin \theta = \frac{-12}{13}, \quad \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$$

أوجد $\sin 2\theta$

الحل

$$\therefore \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$$

$$\therefore \theta \text{ تقع في الربع الرابع}$$

$$\cos \theta = +\sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{-12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 2 \times \frac{-12}{13} \times \frac{5}{13}$$

$$= \frac{-120}{169}$$

إذا كان:

دور ثان 2015/2014

$$\sin \theta = -\frac{1}{2}, \quad \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

أوجد $\sin 2\theta$

الحل

$$\therefore \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثالث

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

$$= -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 2 \times -\frac{1}{2} \times -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

متطابقة نصف الزاوية

إذا كان:

دور ثان 2023/2022

$$\sin \theta = \frac{-24}{25}, \quad 180^\circ < \theta < 270^\circ$$

أوجد $\sin \frac{\theta}{2}$

الحل

$$\therefore 180^\circ < \theta < 270^\circ$$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثالث

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

$$= -\sqrt{1 - \left(\frac{-24}{25}\right)^2} = -\frac{7}{25}$$

$$\therefore \frac{180^\circ}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{270^\circ}{2}$$

$$90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ$$

$\therefore \frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثاني

$$\sin \frac{\theta}{2} = +\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{-7}{25}\right)}{2}} = \frac{4}{5}$$

متطابقة نصف الزاوية وضعف الزاوية

إذا كان:

$$\sin \theta = \frac{-3}{5}, \quad \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

دور أول 2018/2017

أوجد: (1) $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (2) $\tan(2\theta)$

الحل

$\therefore \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$
 $\therefore \theta$ تقع في الربع الثالث

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{-3}{5}\right)^2} = \frac{-4}{5}$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{4}$$

$\therefore \frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثاني

$$(1) \therefore \sin \frac{\theta}{2} = +\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{-4}{5}\right)}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$(2) \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$= \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{7}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{-3}{5} \times \frac{-5}{4} = \frac{3}{4}$$

إذا كان:

$$\cos \theta = \frac{3}{5}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

أوجد:

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2)$$

$$\sin(2\theta) \quad (1)$$

منهج كامل 2024/2023

الحل

$$\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثاني

$$\sin \theta = + \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$(1) \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

$$(2) \quad \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$$

$\therefore \frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الأول

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = + \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

2018/2017

امتحان الدور الثاني الاستثنائي

$$\sin \frac{x}{2} \text{ فاوجد } \sin x = \frac{-12}{13}, \quad \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \text{ إذا كان}$$

الحل

$$\therefore \sin \frac{x}{2} = + \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{5}{13}}{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$$

لا تقع في الربع الرابع

$$\therefore \cos x = + \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{-12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$$

(نصف الزاوية)

$$\frac{3\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{2\pi}{2}$$

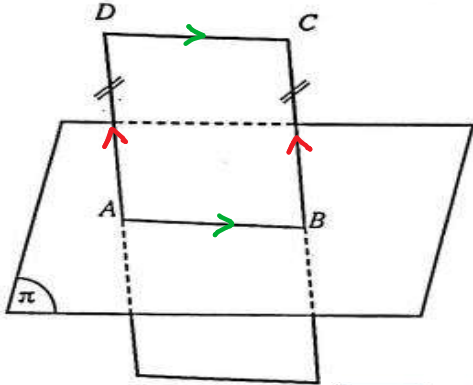
$$\frac{3\pi}{4} < \frac{x}{2} < \pi$$

 $\therefore$ تقع في الربع الثاني

الوحدة العاشرة: هندسة الفضاء

(10-2) المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

1) أكمل ما يلي :

إذا وازى مستقيم خارج مستو مستقيماً في المستوي فإنه موازي للمستوى

في الشكل المقابل :

$$\overline{AB} \subset \pi, \overline{AD} // \overline{BC}, AD = BC$$

اثبت أن : $\overline{CD} // \pi$

دور أول 2023/2022 * دور أول 2018/2017

الحل

البرهان :

$\therefore \overline{AD} // \overline{BC}$
 $\therefore$ المستقيمان المتوازيان يحددان مستو واحد وليكن $(ABCD)$

$$\therefore \overline{AD} // \overline{BC} \text{ معطى}$$

$$AD = BC \text{ معطى}$$

$\therefore$ الشكل ABCD متوازي أضلاع وينتج

$$\overline{DC} // \overline{AB}$$

$$\therefore \overline{DC} // \overline{AB}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \subset \pi \\ \overline{DC} // \overline{AB} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{CD} // \pi$$

FAB فآوجد محيط المثلث

الحل

$$\dots L \quad n \quad m = \{F\}$$
$$\therefore \pi_1 \parallel \pi_2$$

$\pi_1 \cap \pi = \overrightarrow{AB}$
 $\pi_2 \cap \pi = \overrightarrow{CD}$

وَنَبِّیِّهِ مِنَ التَّوَارِیْ

$$\triangle FAB \sim \triangle FCD$$

$$\frac{FA}{FC} = \frac{AB}{CD} = \frac{FB}{FD} \Rightarrow \frac{FA}{FA+6} = \frac{AB}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{FA}{FA+6} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{AB}{9} = \frac{5}{9}$$

$$9FA = 5FA + 30$$

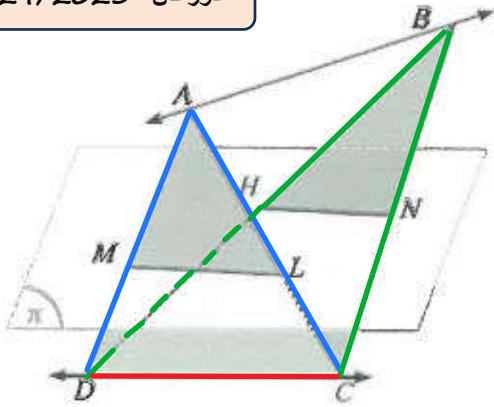
$$AB = 5$$

$$9FA - 5FA = 30 \Rightarrow 4FA = 30 \Rightarrow FA = 7.5$$

$$\Delta_{FAB} = F_A + A_B + F_B$$

$$= 7.5 + 5 + 5 = 17.5 \text{ cm}$$

دور ثان 2024/2023



في الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{AB}, \overline{CD}$ متخالفان، $\overline{CD} // \pi$ ،، $\overline{AD}$ تقطع π في M ، $\overline{AC}$ تقطع π في L ،، $\overline{BD}$ تقطع π في H ، $\overline{BC}$ تقطع π في N .اثبت أن : $\overline{LM} // \overline{NH}$

الحل

البرهان :

$$\therefore \overline{AD} \cap \overline{AC} = \{A\}$$

∴ المستقيمان $\overline{AD}$ و $\overline{AC}$ يقعان في مستوى واحد ولتكن (ADC)

$$\therefore \overline{DC} // \pi$$

$$\overline{DC} \subset (ADC)$$

$$\pi \cap (ADC) = \overline{ML}$$

$$\therefore \overline{DC} // \overline{ML}$$

نظرية (2)

$$\therefore \overline{BD} \cap \overline{BC} = \{B\}$$

∴ المستقيمان $\overline{BD}$ و $\overline{BC}$ يقعان في مستوى واحد ولتكن (BDC)

$$\therefore \overline{DC} // \pi$$

$$\overline{DC} \subset (BDC)$$

$$\pi \cap (BDC) = \overline{HN}$$

$$\therefore \overline{DC} // \overline{HN}$$

نظرية (2)

من (1) و (2)

$$\therefore \overline{DC} // \overline{ML}$$

$$\overline{DC} // \overline{HN}$$

$$\therefore \overline{ML} // \overline{HN}$$

نظرية (3)

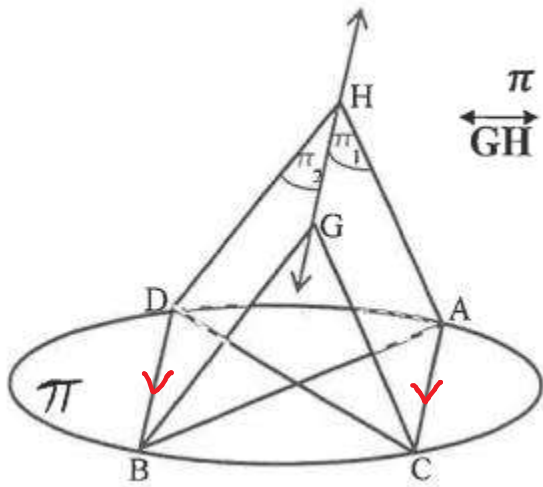
مذكر

نظرية (3)

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان.

نظرية (2)

إذا وازى مستقيم مستويًا، فكل مستوٍ مار بالمستقيم ويقطع المستوي، يقطعه في مستقيم مواز للمستقيم المعلوم.



في الشكل المقابل : $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ قطران في مستوى الدائرة π
 أثبت أن مستوى الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$ ، $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

دور أول 2022/2021 * دور أول 2019/2018

دور أول 2017/2016 * دور أول 2024/2023

الحل

البرهان : $\therefore \overline{AB}$ و $\overline{CD}$ قطران في مستوى الدائرة π

و القطران ينصف كلًا منهما (لآخر).

$\therefore$ الشكل $ACBD$ متطابق وينتج :

$$\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{DB}$$

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$$

$$\overrightarrow{AC} \subset \pi_1$$

$$\overrightarrow{DB} \subset \pi_2$$

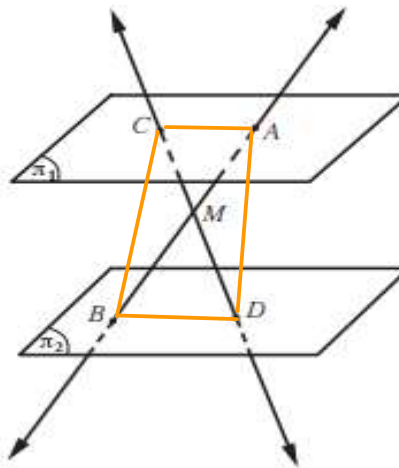
$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{GH} \parallel \overrightarrow{DB}$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} \overleftrightarrow{GH} \parallel \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AC} \subset \pi \end{array} \right\} \therefore \overleftrightarrow{GH} \parallel \pi$$

نتيجة (1)

إذا توازي مستقيمان ومَرَّ بهما مستويان متقاطعان،

فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلًا من هذين المستقيمين.



في الشكل المقابل π_1, π_2 مستويان متوازيان، M نقطة واقعة بينهما،

حيث $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} = \{M\}$

أثبت أن: $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$

دور ثان 2022/2021 * دور أول 2016/2015 * دور أول 2014/2013

الحل

البرهان: $\therefore \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} = \{M\}$

المستقيمان المتقاطعان يعيّنان مستوي وحيد وليكن π

$\therefore \pi_1 \parallel \pi_2$

$\pi_1 \cap \pi = \overrightarrow{CA}$

$\pi_2 \cap \pi = \overrightarrow{BD}$

$\therefore \overrightarrow{CA} \parallel \overrightarrow{BD}$

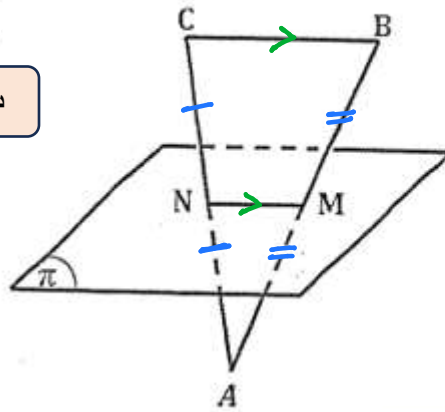
وينتج من التوازي: $\triangle AMC \sim \triangle BMD$

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AC}{BD}$$

أكمل ما يلي:

إذا وازي مستقيما خارج مستوى مستقيما في المستوي. **فما نه يوازي المستوي**في الشكل المقابل : المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{AC}$ N, M تنتميان الى المستوى π أثبت أن : $\overrightarrow{BC} // \pi$

دور ثان 2019/2018



الحل

$$\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{AB} = \{A\}$$

البرهان :

المستقيمان المتقاطعان يعرّفان مستوي وحيد وكلاهما (ABC) $\therefore M$ منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{AC}$

$$\overrightarrow{CB} // \overrightarrow{NM}$$

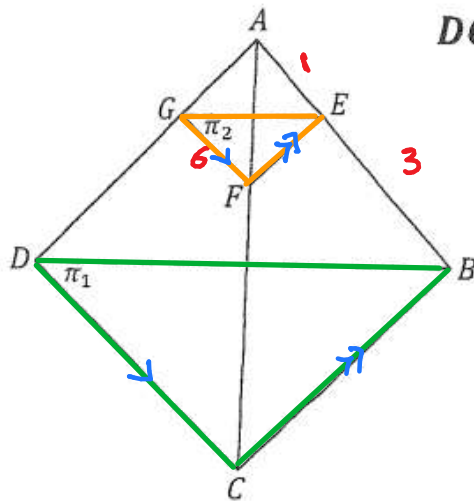
$$\therefore \overrightarrow{CB} // \overrightarrow{NM}$$

$$\therefore \pi \cap (ABC) = \overrightarrow{NM}$$

$$\therefore \overrightarrow{NM} \subset \pi$$

$$\overrightarrow{CB} // \pi$$

في الشكل المقابل ، هرم ثلاثي ، المستويان π_1, π_2 متوازيان



إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$, $FG = 6 \text{ cm}$ فأوجد DC

دور أول 2018/2017 * دور ثان 2016/2015

الحل

$\therefore \vec{AD} \cap \vec{AC} = \{A\}$
المستقيمان المتقاطعان يعينان مستوى وحيد (ADC)
قائم

$\therefore \pi_1 \parallel \pi_2$ على

$\therefore \pi_1 \cap (ADC) = \vec{CB} \rightarrow \vec{GF} \parallel \vec{DC}$

$\pi_2 \cap (DAC) = \vec{GF}$
* وينتج من إلتوازي

$\triangle AGF \sim \triangle ADC$

$$\frac{AG}{AD} = \frac{GF}{DC} = \frac{AF}{AC}$$

$$\frac{AG}{AD} = \frac{6}{DC} = \frac{AF}{AC} \rightarrow \textcircled{1}$$

البرهان $\therefore$
 $\therefore \vec{AC} \cap \vec{AB} = \{A\}$
المستقيمان المتقاطعان يعينان مستوى وحيد (ACB)
قائم

$\therefore \pi_1 \parallel \pi_2$

$\pi_1 \cap (ACB) = \vec{CB} \rightarrow \vec{CB} \parallel \vec{FE}$

$\pi_2 \cap (ACB) = \vec{FE}$
وينتج من إلتوازي

$\triangle AEF \sim \triangle ABC$

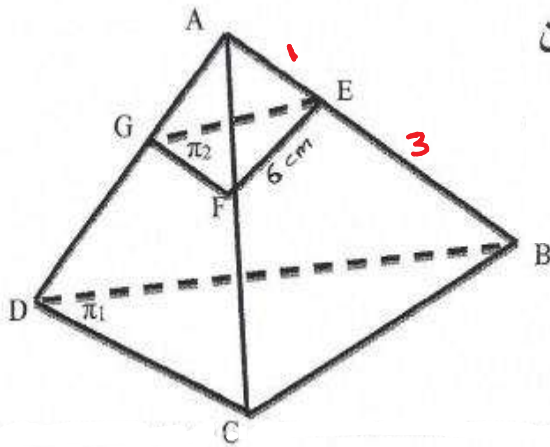
$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC} \rightarrow \textcircled{2}$$

من (2) و (1)

$$\therefore \frac{6}{DC} = \frac{1}{4}$$

$$DC = 4 \times 6 = 24 \text{ cm}$$



في الشكل المقابل $ABCD$ هرم ثلاثي ، المستويان π_1, π_2 متوازيان

$$FE = 6cm, \frac{AE}{EB} = \frac{1}{3} \text{ إذا كان}$$

أوجد : CB

دور ثان 2017/2016

الحل

البرهان :
 $\therefore \overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{AB} = \{A\}$
 $\therefore$ المستقيمان المتقاطعان يعرّيان مستوى وحيد (ACB) قاطع

$$\therefore \pi_1 \parallel \pi_2$$

$$\pi_1 \cap (ACB) = \overrightarrow{CB}$$

$$\pi_2 \cap (ACB) = \overrightarrow{FE}$$

$$\therefore \overrightarrow{CB} \parallel \overrightarrow{FE}$$

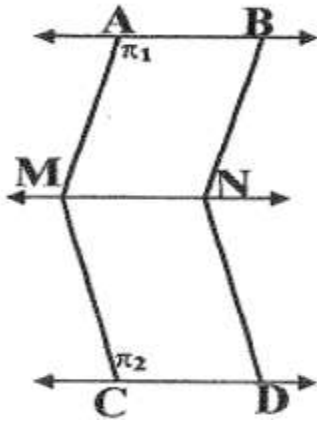
وننتج من التوازي

$$\triangle AEF \sim \triangle ABC$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{6}{BC}$$

$$BC = 4 \times 6 = 24 \text{ cm}$$



ليكن π_1, π_2 مستويان متقاطعان في $\vec{MN}$ حيث:

$$\vec{AB} \subset \pi_1, \vec{AB} \parallel \pi_2$$

$$\vec{CD} \subset \pi_2, \vec{CD} \parallel \pi_1$$

أثبت أن: $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$

دور أول 2015/2014

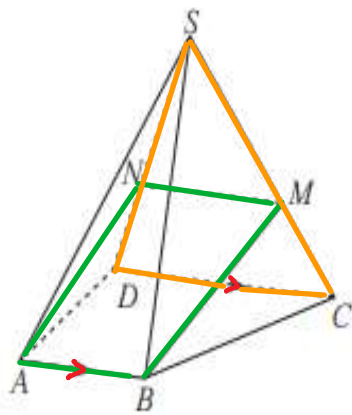
الحل

البرهان:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB} \parallel \pi_2 \\ \vec{AB} \subset \pi_1 \\ \pi_1 \cap \pi_2 = \vec{MN} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \therefore \vec{AB} \parallel \vec{MN} \\ \rightarrow ① \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \vec{CD} \parallel \pi_1 \\ \vec{CD} \subset \pi_2 \\ \pi_1 \cap \pi_2 = \vec{MN} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{CD} \parallel \vec{MN} \\ \rightarrow ② \end{array}$$

$$\therefore \vec{AB} \parallel \vec{MN} \parallel \vec{CD}$$

$$\therefore \vec{AB} \parallel \vec{CD}$$



$\vec{AB} \parallel \vec{DC}$ حيث إن $ABCD$ شبه المنحرف

N في $\vec{SD}$ يقطع ABM المستوي، $M \in \vec{SC}$

(a) أثبت أن: $\vec{AB}$ يوازي المستوي SDC

(b) أثبت أن: $\vec{MN} \parallel \vec{CD}$

دور ثان 2015/2014

الحل

البرهان :

$$\left. \begin{array}{l} \because \vec{AB} \parallel \vec{DC} \\ \vec{DC} \subset (SDC) \end{array} \right\} \therefore \vec{AB} \parallel (SDC) \quad (1)$$

(2) $\because$ المستوي ABM يقطع $\vec{SD}$ في N

$$\therefore (ABM) = (ABMN)$$

$$\because \vec{AB} \parallel (SDC) \text{ فجاءت}$$

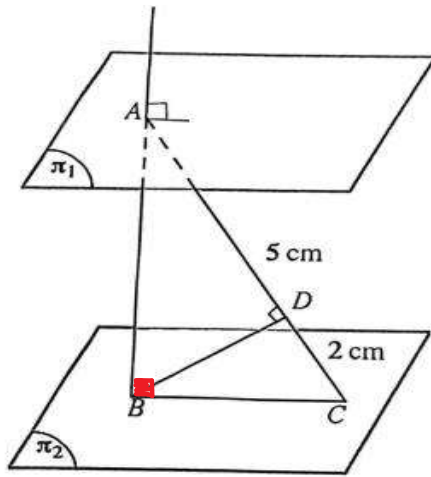
$$\therefore \vec{DC} \subset (SDC)$$

$$\therefore (ABMN) \cap (SDC) = \vec{NM}$$

$$\therefore \vec{AB} \parallel \vec{DC} \parallel \vec{MN}$$

$$\therefore \vec{MN} \parallel \vec{CD}$$

(3-10) تعامد مستقيم مع مستو



في الشكل المقابل : $\pi_1 // \pi_2$, $\overrightarrow{AB} \perp \pi_1$, $A \in \pi_1$

رسم $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$ في المستوي ABC ، $\overrightarrow{BC} \subset \pi_2$

إذا كان $AD = 5 \text{ cm}$, $DC = 2 \text{ cm}$

أوجد : BD

دور ثان 2023/2022

الحل

البرهان : $\left. \begin{array}{l} \because \pi_1 // \pi_2 \\ \overrightarrow{AB} \perp \pi_1 \end{array} \right\} \therefore \overrightarrow{AB} \perp \pi_2$

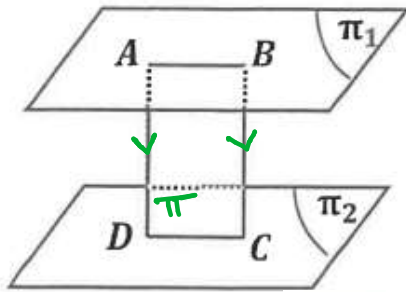
$\left. \begin{array}{l} \because \overrightarrow{AB} \perp \pi_2 \\ \overrightarrow{BC} \subset \pi_2 \end{array} \right\} \therefore \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$

$\therefore \Delta ABC$ قائم في $\hat{B}$

من أقليدس

$$(BD)^2 = 2 \times 5 = 10$$

$$BD = \sqrt{10} \text{ cm}$$



في الشكل المقابل : $\pi_1 // \pi_2$ ،

، A, B نقطتان في π_1 ،

C, D نقطتان في π_2 حيث A, B, C, D في مستوى واحد

، $\overline{AD} \perp \pi_2$ ، $\overline{BC} \perp \pi_2$

اثبت ان $ABCD$ مستطيل

دور أول 2022/2021 * دور ثان 2024/2023

الحل

البرهان :

$$\therefore \pi_1 // \pi_2$$

$$\overrightarrow{AD} \perp \pi_2$$

$$\overrightarrow{BC} \perp \pi_2$$

$$\overrightarrow{AD} // \overrightarrow{BC} \rightarrow \textcircled{1}$$

من (١) : المستقيمان المتوازيان يعينان مستوى واحد π

$$\therefore \pi_1 // \pi_2$$

$$\pi_1 \cap \pi = \overrightarrow{AB}$$

$$\pi_2 \cap \pi = \overrightarrow{DC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{DC} \rightarrow \textcircled{2}$$

من (٢) : الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع

$$\therefore \overrightarrow{AD} \perp \pi_2$$

$$\overrightarrow{DC} \subset \pi_2$$

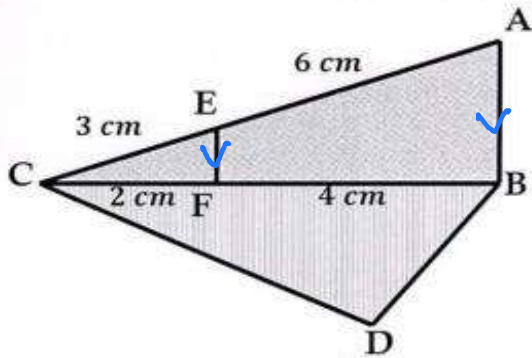
$$\therefore \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{DC}$$

$$\therefore m(\hat{D}) = 90^\circ$$

$\therefore$ الشكل $ABCD$ مستطيل .

[متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة فيه مستطيل]

دور ثان 2022/2021

من الشكل المقابل إذا كان: $\overline{AB} \perp (BCD)$ وكان $FB = 4 \text{ cm}$, $CF = 2 \text{ cm}$, $EA = 6 \text{ cm}$, $CE = 3 \text{ cm}$ اثبت أن: $\overline{EF} \perp \overline{BD}$ 

الحل

$$\therefore \overrightarrow{CA} \cap \overrightarrow{CB} = \{C\}$$

البرهان:

$\therefore$ المستقيمان المتقاطعان بعينان متوحدتين (CAB)

$$\therefore \frac{CE}{EA} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CF}{FB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \overline{EF} \parallel \overline{AB} \quad \text{طاليس}$$

$$\therefore \overline{EF} \parallel \overline{AB}$$

$$\overline{AB} \perp (BCD)$$

$$\therefore \overline{EF} \perp (BCD)$$

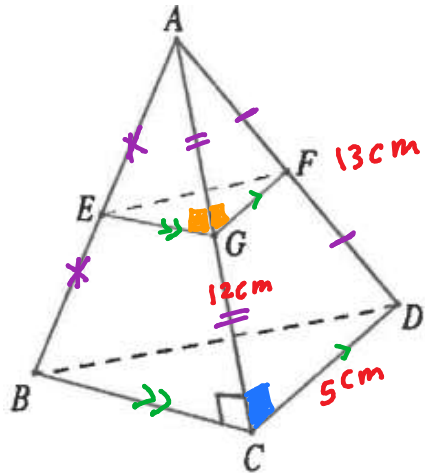
$$\therefore \overline{EF} \perp (BCD)$$

$$\overline{BD} \subset (BCD)$$

$$\therefore \overline{EF} \perp \overline{BD}$$

نظرية (5)

دور ثان 2024/2023 * منهج كامل 2024/2023



في الشكل المقابل : A نقطة خارج المستوى BCD ،
و النقاط E, G, F منتصفات $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ على الترتيب.

إذا كان $\overline{AC} \perp \overline{CB}$

وكان $CD = 5 \text{ cm}, AC = 12 \text{ cm}, AD = 13 \text{ cm}$

فأثبت أن : $(EGF) // (BCD)$

الحل

البرهان

$$\therefore (AD)^2 = (13)^2 = 169 \quad \text{في } \triangle ACD$$

$$\therefore (AC)^2 + (CD)^2 = (12)^2 + 5^2 = 169$$

$$\therefore (AD)^2 = (AC)^2 + (CD)^2$$

فأثبت $\triangle ACD$ قائم

$$\therefore \overline{AC} \perp \overline{CD} \rightarrow (1)$$

$$\therefore \overline{AC} \perp \overline{BC} \text{ سطر} \rightarrow (2)$$

(من (1) ، (2))

$$\therefore \overline{AC} \perp (BCD) \rightarrow (3)$$

نظرية (5)

$$\therefore F \text{ منتصف } \overline{AD}, G \text{ منتصف } \overline{AC}$$

$$\therefore \overline{GF} // \overline{CD}$$

$$\therefore m(\angle AGF) = m(\angle ACD) = 90^\circ$$

بالتناظر المتوازي

$$\therefore \overline{AG} \perp \overline{GF} \rightarrow (4)$$

$$\therefore G \text{ منتصف } \overline{AC}, E \text{ منتصف } \overline{AB}$$

$$\therefore \overline{EG} // \overline{BC}$$

$$\therefore m(\angle AGE) = m(\angle ACB) = 90^\circ$$

بالتناظر المتوازي

$$\therefore \overline{AG} \perp \overline{EG} \rightarrow (5)$$

(من (4) ، (5))

$$\therefore \overline{AG} \perp (EGF) \rightarrow (6)$$

نظرية (5)

(من (3) ، (6))

$$\therefore (EGF) // (BCD) \quad \text{نظرية (6)}$$

نظرية (6)

إذا كان مستقيم عمودياً على كل من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيين.

نظرية (5)

المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عمودياً على مستويهما.

دور اول 2023/2022 * دور اول 2018/2017

الوقت

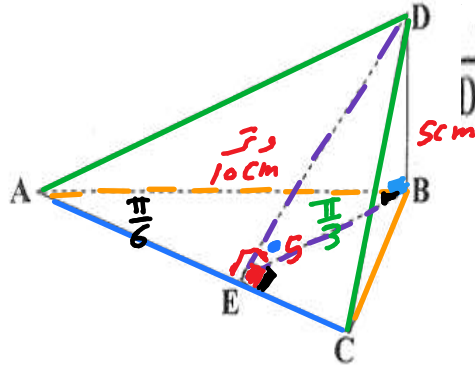
10cm

45°

A B E

نفا ب

أ/ وليد دخيل



في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC

$$\overline{DE} \perp \overline{AC}, \overline{DB} \perp (ABC), DB = 5\text{cm}, AB = 10\text{cm}, m(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{6}$$

$$BE \text{ ① : } \overline{BE} \perp \overline{AC},$$

② قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC, DAC

دور ثان 2018/2017 * دور أول 2014/2013

الحل

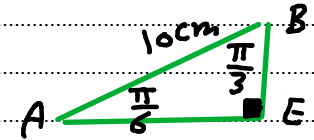
البرهان :

$$\therefore m(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{6} \text{ , } m(\widehat{BEA}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore m(\widehat{ABE}) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \Delta BEA \text{ متساوي الساقين}$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 10 = 5\text{cm}$$

[نلاحظ ان المثلثين لهما ضلعان متساويان والضلع الثالث للزاوية $30^\circ = \text{نصف القوس}$]



$$\therefore (\widehat{BAC}) \cap (\widehat{DAC}) = \overrightarrow{AC} \quad (2)$$

$\therefore \overrightarrow{AC}$ حافة الزاوية الزوجية

$$\therefore \overline{BE} \perp \overline{AC}, \overline{BE} \subset (BAC) \rightarrow \text{①}$$

$$\therefore \overline{DE} \perp \overline{AC} \text{ , } \overline{DE} \subset (DAC) \rightarrow \text{②}$$

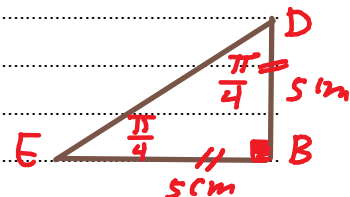
من ① و ②

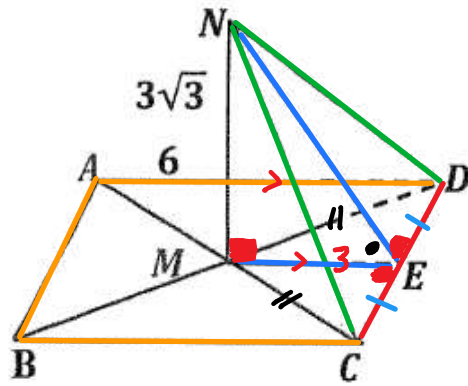
$$\therefore \widehat{DEB} \text{ الزاوية المستوية للزاوية الزوجية } \overrightarrow{AC}$$

$$\left. \begin{array}{l} \therefore \overline{DB} \perp (ABC) \\ \therefore \overline{BE} \subset (ABC) \end{array} \right\} \therefore \overline{DB} \perp \overline{BE} \Rightarrow \Delta DBE \text{ قائم}$$

$$\therefore DB = BE = 5\text{cm} \Rightarrow \therefore \Delta DBE \text{ متساوي الساقين}$$

$$\therefore m(\widehat{DEB}) = \frac{\pi}{4}$$





$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M ، وفيه $AD = 6\text{ cm}$
أقيم $\overline{NM}$ عموداً على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه
بحيث $MN = 3\sqrt{3}\text{ cm}$ ، E منتصف $\overline{CD}$
أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$ ، NCD

دور أول 2019/2018

الحل

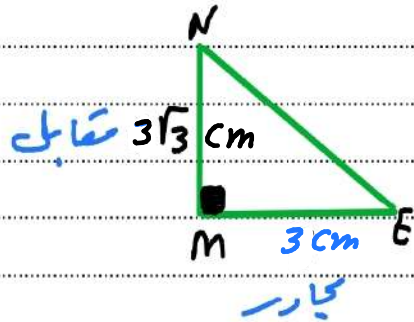
البرهان:

(٢) قياس الزاوية المستوية

$\overline{NM} \perp (ABCD)$
 $\overline{ME} \subset (ABCD) \} \therefore NM \perp ME$
 ΔNME قائم
 E منتصف $\overline{CD}$
 M منتصف $\overline{BD}$

$\therefore \overline{ME} \parallel \overline{AD} \Rightarrow ME = \frac{1}{2} AD$

$\therefore ME = \frac{1}{2} \times 6 = 3\text{ cm}$



$$m(\widehat{NEM}) = \tan^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{3}\right) = 60^\circ$$

(١) الزاوية المستوية

$$(ABCD) \cap (NCD) = \overline{CD}$$

$\therefore \overline{CD}$ حافة الزاوية الزوجية

$$\left. \begin{array}{l} E \text{ منتصف } \overline{CD} \\ MC = MD \end{array} \right\} \therefore \overline{ME} \perp \overline{CD}$$

$$\therefore \overline{ME} \perp \overline{CD}, \overline{ME} \subset (ABCD) \rightarrow \textcircled{1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{NM} \perp (ABCD) \\ \overline{CD} \subset (ABCD) \end{array} \right\} \therefore \overline{NM} \perp \overline{CD}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{ME} \perp \overline{CD} \\ \overline{NM} \perp \overline{CD} \end{array} \right\} \therefore \overline{CD} \perp (NME)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{CD} \perp (NME) \\ \overline{NE} \subset (NME) \end{array} \right\} \therefore \overline{NE} \perp \overline{CD}$$

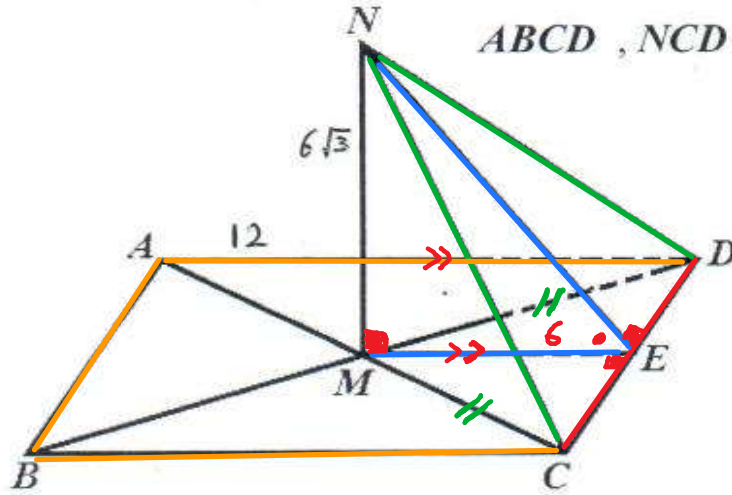
$$\therefore \overline{NE} \perp \overline{CD}, \overline{NE} \subset (NCD) \rightarrow \textcircled{2}$$

منه (١) و (٢)

$\therefore \widehat{NEM}$ هما الزاوية المستوية

للزاوية الزوجية $\overline{CD}$

في الشكل المرسوم $ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M ،
وفيه $AD = 12$ أقيم $\overline{NM}$ عمودًا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه
بحيث $MN = 6\sqrt{3}$ ، E منتصف $\overline{CD}$
أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$ ، NCD



دور أول 2016/2015

الحل

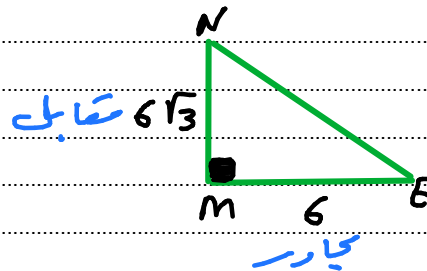
البرهان:

(٢) قياس الزاوية المستوية

$$\begin{aligned} & \because \overrightarrow{NM} \perp (ABCD) \\ & \overrightarrow{ME} \subset (ABCD) \} \therefore \overrightarrow{NM} \perp \overrightarrow{ME} \\ & \therefore \Delta NME \text{ قائم} \\ & E \text{ منتصف } \overline{CD} \\ & M \text{ منتصف } \overline{BD} \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{ME} \parallel \overline{AD} \Rightarrow ME = \frac{1}{2} AD$$

$$\therefore ME = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$



$$m(\widehat{NEM}) = \tan^{-1}\left(\frac{6\sqrt{3}}{6}\right) = 60^\circ$$

(١) الزاوية المستوية

$$(ABCD) \cap (NCD) = \overline{CD}$$

 $\therefore \overline{CD}$ حافة للزاوية الزوجية

$$\begin{aligned} & E \text{ منتصف } \overline{CD} \\ & MC = MD \} \therefore \overrightarrow{ME} \perp \overline{CD} \end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{ME} \perp \overline{CD}, \overrightarrow{ME} \subset (ABCD) \rightarrow ①$$

$$\begin{aligned} & \because \overrightarrow{NM} \perp (ABCD) \\ & \overline{CD} \subset (ABCD) \} \therefore \overrightarrow{NM} \perp \overline{CD} \end{aligned}$$

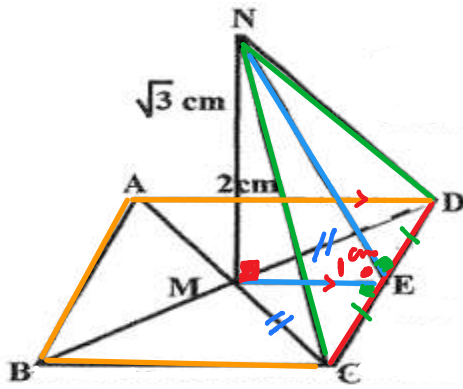
$$\begin{aligned} & \because \overrightarrow{ME} \perp \overline{CD} \\ & \overrightarrow{NM} \perp \overline{CD} \} \therefore \overline{CD} \perp (NME) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \because \overline{CD} \perp (NME) \\ & \overrightarrow{NE} \subset (NME) \} \therefore \overrightarrow{NE} \perp \overline{CD} \end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{NE} \perp \overline{CD}, \overrightarrow{NE} \subset (NCD) \rightarrow ②$$

من ١ و ٢

 $\therefore \widehat{NEM}$ هي الزاوية المستوية
للزاوية الزوجية $\overline{CD}$



ABCD مستطيل تقاطع قطراه في M وفيه $AD = 2\text{cm}$ ، E منتصف $\overline{CD}$

أقيم $\overline{NM}$ عموداً على (ABCD) حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}\text{ cm}$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ABCD , NCD

دور أول 2015/2014

الحل

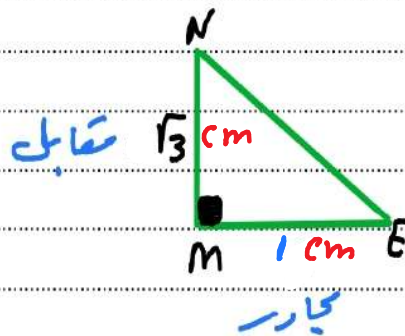
البرهان:

(٢) قياس الزاوية المستوية

$\overline{NM} \perp (ABCD)$
 $\overline{ME} \subset (ABCD) \} \therefore \overline{NM} \perp \overline{ME}$
 ΔNME قائم
 E منتصف $\overline{CD}$
 M منتصف $\overline{BD}$

$\therefore \overline{ME} \parallel \overline{AD} \Rightarrow ME = \frac{1}{2} AD$

$\therefore ME = \frac{1}{2} \times 2 = 1\text{ cm}$



$$m(\widehat{NEM}) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = 60^\circ$$

(١) الزاوية المستوية

$$(ABCD) \cap (NCD) = \overline{CD}$$

$\therefore \overline{CD}$ حافة الزاوية الزوجية

$$\overline{CD} \text{ منتصف } E \} \therefore \overline{ME} \perp \overline{CD}$$

$$\therefore \overline{ME} \perp \overline{CD}, \overline{ME} \subset (ABCD) \rightarrow \textcircled{1}$$

$$\overline{NM} \perp (ABCD) \} \therefore \overline{NM} \perp \overline{CD}$$

$$\overline{ME} \perp \overline{CD} \} \therefore \overline{CD} \perp (NME)$$

$$\overline{CD} \perp (NME) \} \therefore \overline{NE} \perp \overline{CD}$$

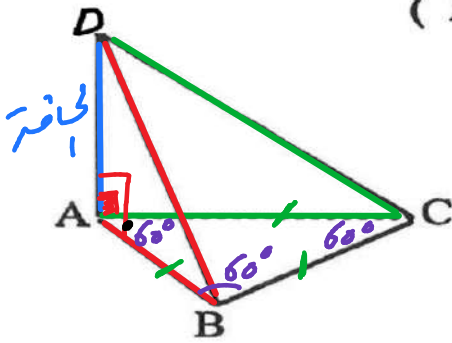
$$\therefore \overline{NE} \perp \overline{CD}, \overline{NE} \subset (NCD) \rightarrow \textcircled{2}$$

من (١) و (٢)

$\therefore \widehat{NEM}$ هي الزاوية المستوية

للزاوية الزوجية $\overline{CD}$

أوجد قياس الزاوية الزوجية ($DAB, \vec{bA}, DAC$)



امتحان الدور الثاني الاستثنائي

الحل

$\overleftrightarrow{DA}$ حافة الزاوية الزوجية

$$\therefore \overleftrightarrow{DA} \perp (ABC)$$

$$\therefore A \subset C \subset (A \cup B)$$

$$\therefore AC \perp DA$$

$$\therefore DA \perp (ABC)$$

$$\therefore \overline{AB} \subset (ABC)$$

$$\therefore \overline{AB} \perp \overline{DA}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DA}, \overleftrightarrow{AC} \subset (DAC) \rightarrow \textcircled{1} \\ \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DB}, \overleftrightarrow{AC} \subset (DAC) \rightarrow \textcircled{2} \end{array} \right.$$

$$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{DA}, \quad \overrightarrow{AB} \subset (DAB) \rightarrow \textcircled{2}$$

من ۱ تا ۲

$\therefore \hat{BAC}$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوئية DA

∴ $\triangle ABC$ متطابق المثلثات

$$\therefore m(\hat{BAC}) = 60^\circ$$

(1-11) مبدأ العد التباديل والتوافيق

التباديل

دور أول 2018/2017

$${}_nP_4 = 5 \times {}_nP_3, \quad n \geq 4$$

حل المعادلة:

الحل

~~$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 5 \times n \times (n-1)(n-2)$$~~

$$n-3 = 5$$

$$n = 5 + 3$$

$$n = 8$$

منهج كامل 2024/2023

$${}_nP_5 = 6 \times {}_nP_4, \quad n \geq 5$$

حل المعادلة :

الحل

~~$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 6 \times n(n-1)(n-2)(n-3)$$~~

$$n-4 = 6$$

$$n = 6 + 4$$

$$n = 10$$

دور ثان 2017/2016

$$6P_r = 4 \times 6P_{r-1} \quad \text{حل المعادلة :}$$

الحل

$$\frac{6!}{(6-r)!} = 4 \times \frac{6!}{(6-(r-1))!}$$

$$\frac{1}{(6-r)!} = \frac{4}{(7-r)!}$$

$$\frac{1}{(6-r)!} = \frac{4}{(7-r)(6-r)!}$$

$$\frac{1}{1} \times \frac{1}{7-r} = \frac{4}{7-r} \Rightarrow 7-r = 4$$

$$-r = 4 - 7 \Rightarrow -r = -3$$

$$r = 3$$

التوافق

دور ثان 2024/2023

أوجد قيمة n في ما يلي :

$${}_nC_3 = {}nC_4$$

الحل

$$\frac{{}_nP_3}{3!} = \frac{{}_nP_4}{4!}$$

$$\frac{n(n-1)(n-3)}{3!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3!}$$

$$\frac{1}{1} \times \frac{1}{4} = \frac{n-3}{4}$$

$$n-3 = 4$$

$$n = 4 + 3 = 7$$

دور ثان 2023/2022 * دور ثان 2015/2014

$$\frac{{}_nC_7}{(n-1){}_C_6} = \frac{8}{7}$$

أوجد قيمة n حيث :

الحل

$$7 \times {}nC_7 = 8 \times (n-1){}_C_6$$

$$7 \times \frac{n!}{7!(n-7)!} = 8 \times \frac{(n-1)!}{6!(n-1-6)!}$$

$$7 \times \frac{n(n-1)!}{7 \times 6!(n-7)!} = 8 \times \frac{(n-1)!}{6!(n-7)!}$$

$$n = 8$$

دور أول 2019/2018

حل المعادلة : ${}_nC_4 = {}_nC_{n-2}$

الحل

$$\frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n!}{(n-2)!(n-(n-2))!}$$

$$\frac{1}{4!(n-4)!} = \frac{1}{(n-2)!(n-n+2)!}$$

$$\frac{1}{4!(n-4)!} = \frac{1}{(n-2)(n-3)(n-4)!2!}$$

$$\frac{1}{4 \times 3 \times 2!} = \frac{1}{(n-2)(n-3)2!}$$

$$\frac{1}{4 \times 3} = \frac{1}{(n-2)(n-3)} \Rightarrow (n-2)(n-3) = 4 \times 3$$

$$n-2 = 4$$

$$n = 4 + 2 = 6$$

حل المعادلة :

$${}_nC_2 = 105$$

دور أول 2014/2013

الحل

$$\frac{{}_nP_2}{2!} = 105 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2 \times 1} = \frac{105}{1}$$

$$\therefore n(n-1) = 210$$

$$n^2 - n - 210 = 0 \quad \text{mod } 53$$

$$n = 15 \quad \text{or} \quad n = -14$$

مرفوض

دور أول 2016/2015

$$\frac{{}_nC_5}{(n-1)C_4} = \frac{6}{5} \quad \text{أوجد قيمة } n \text{ حيث :}$$

الحل

$$5 \times {}nC_5 = 6 \times (n-1)C_4$$

$$5 \times \frac{n!}{5!(n-5)!} = 6 \times \frac{(n-1)!}{4!(n-1-4)!}$$

$$\cancel{5} \times \frac{\cancel{n}(\cancel{n-1})!}{\cancel{5} \times \cancel{4}!(n-5)!} = 6 \times \frac{\cancel{(n-1)}!}{\cancel{4}!(n-5)!}$$

$$n = 6$$

دور أول 2015/2014

أوجد مجموعة حل المعادلة : ${}_{2n}C_4 = \frac{1}{2} {}_{2n}C_5$

الحل

$$\frac{2n!}{4!(2n-4)!} = \frac{1}{2} \times \frac{2n!}{5!(2n-5)!}$$

$$\frac{1}{4!(2n-4)(2n-5)!} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5 \times 4!(2n-5)!}$$

$$\frac{1}{2n-4} = \frac{1}{10}$$

$$2n - 4 = 10 \Rightarrow 2n = 10 + 4 \Rightarrow 2n = 14 \div 2$$

$$\therefore n = 7$$

(11-2) نظرية ذات الحدين

إيجاد مفكوك

دور أول 2018/2017

استخدم نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(x - 2y)^3$

الحل

$$\begin{aligned} (x - 2y)^3 &= \\ &= {}^3C_0 (x)^3 (-2y)^0 + {}^3C_1 (x)^2 (-2y)^1 + {}^3C_2 (x)^1 (-2y)^2 \\ &\quad + {}^3C_3 (x)^0 (-2y)^3 \\ &= x^3 + 3(-2)x^2y + 3(-2)^2xy^2 + 1(-2)^3y^3 \\ &= x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3 \end{aligned}$$

دور أول 2024/2023

استخدم نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(x - 2)^4$

الحل

$$= 4C_0 (x)^4 (-2)^0 + 4C_1 (x)^3 (-2)^1 + 4C_2 (x)^2 (-2)^2 + 4C_3 (x)^1 (-2)^3 + 4C_4 (x)^0 (-2)^4$$

$$= x^4 + 4(-2)x^3 + 6(-2)^2x^2 + 4(-2)^3x + 1(-2)^4$$

$$= x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$$

إيجاد حد من مفكوك

دور ثان 2016/2015

أوجد الحد الذي يحتوي علي x^3y^4 في مفكوك $(2x + 3y)^7$

الحل

$$T_{r+1} = nCr x^{n-r} y^r \quad \text{المعادلة:}$$

$$n = 7 \quad r = 4 = 5 \text{ أس}$$

$$\therefore T_5 = 7C_4 (2x)^{7-4} (3y)^4$$

$$= 7C_4 (2x)^3 (3y)^4$$

$$= 7C_4 (2)^3 (3)^4 x^3 y^4$$

$$= 22680 x^3 y^4$$

(3-11) الاحتمال

يحتوي كيس على 4 كرات زرقاء اللون وكرتين حمراء اللون، أخذت كرتان معا من دون النظر داخل الكيس أوجد احتمال كل حدث مما يلي:

(1) الكرتان زرقاوان.

(2) كرة زرقاء وكرة حمراء.

(3) الكرتان من نفس اللون

دور ثان 2019/2018

الحل

$$(1) P(A) = \frac{4C_2 \times 2C_0}{6C_2} = \frac{2}{5}$$

$$P(B) = \frac{4C_1 \times 2C_1}{6C_2} = \frac{8}{15}$$

المجموع = 6	2 حمراء	4 زرقاء
2	0	2
2	1	1
2	2	2

$$P(C) = \frac{4C_2 + 2C_2}{6C_2} = \frac{7}{15} \quad [\text{الكرتان زرقاوان أو كرتان حمراوان}]$$

احتمال ذات الحدين

في إحدى الآلات الحاسبة 4 بطاريات . احتمال أن تخدم كل بطارية مدة عام كامل يساوي 90% ما احتمال أن تخدم كل من البطاريات الأربع مدة عام كامل ؟

دور أول 2023/2022

الحل

نفرض E حدث انه تخدم كل من البطاريات الأربعة مدة عام كامل

$$\therefore P(E) = {}^nC_k (m)^k (1-m)^{n-k}$$

$$= {}^4C_4 (0.9)^4 (0.1)^{4-4}$$

$$= 0.6561$$

$$n = 4$$

$$m = \frac{90}{100} = 0.9$$

$$1-m = 1 - 0.9 = 0.1$$

$$k = 4$$

يستخدم حوالي 11% من الطلاب في أحد المدارس اليد اليسرى للكتابة. يوجد في أحد الصفوف 30 طالبا، فما احتمال أن يكون 4 طلاب من هذا الصف يستخدمون اليد اليسرى للكتابة.

دور أول 2014/2013

الحل

نفرض E حدث أن تكون 4 طلاب يستخدمون اليد اليسرى

$$P(E) = {}^nC_K (m)^K (1-m)^{n-K}$$

$$= {}^{30}C_4 (0.11)^4 (0.89)^{30-4}$$

$$\approx 0.1939$$

$$m = \frac{11}{100} = 0.11$$

$$1-m = 1-0.11 = 0.89$$

$$n = 30$$

$$K = 4$$

خلال شهر التسوق يقدم أحد المحلات العرض التالي : عند شراء كل صنف تحصل على بطاقة. تفوز 30% من البطاقات بجوائز ويتم اختيار هذه البطاقات الراجعة بشكل عشوائي ، مع راشد 4 بطاقات ، فما احتمال أن يفوز راشد بجائزتين ؟

دور ثان 2018/2017

الحل

نفرض E حدث أنه يفوز راشد بجائزتين

$$P(E) = {}^nC_K (m)^K (1-m)^{n-K}$$

$$= {}^4C_2 (0.3)^2 (0.7)^{4-2}$$

$$= 0.2646$$

$$m = \frac{30}{100} = 0.3$$

$$1-m = 1-0.3 = 0.7$$

$$n = 4$$

$$K = 2$$