

حل تمارين الدرس (5-3) قاعدة السلسلة

تمرين (1) ص 178 $f(x) = (x^3 - 1)^2$ اوجد المشتقة بدون استخدام قاعدة السلسلة
 (نفك التربيع ثم نشتق)

$$f(x) = x^6 - 2x^3 + 1 \rightarrow f'(x) = 6x^5 - 6x^2$$

للمشتقة تطبيق قاعدة ضرب

$$f'(x) = (x^3 - 1)(x^3 - 1)' \text{ أو } f'(x) = (3x^2)(x^3 - 1) + (x^3 - 1)(3x^2)$$

بفك الأقواس نحصل على نفس النتيجة

$$\text{أو باستخدام قاعدة } f'(x) = 3(x^3 - 1)^1 (x^3 - 1)'$$

$$\text{السلسلة} = 2(x^3 - 1)(3x^2) = 6x^5 - 6x^2$$

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1)^2 \quad \text{تمرين (2)}$$

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 1) \quad \text{بدون قاعدة السلسلة:}$$

$$f'(x) = (2x + 2)(x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 2x + 1)(2x + 2)$$

$$\text{بقاعدة السلسلة} \Rightarrow f'(x) = 2(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 1)'$$

$$= 2(x^2 + 2x + 1)(2x + 2)$$

$$f(x) = (x^2 + 1)^3 \quad \text{تمرين (3)}$$

بدون قاعدة السلسلة نقول التكيب:

$$f(x) = (x^2)^3 + 3(x^2)^2(1) + 3(x^2)(1)^2 + (1)^3$$

$$= x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$$

$$\text{ثم نشتق} \Rightarrow f'(x) = 6x^5 + 12x^3 + 6x$$

$$f'(x) = 3(x^2 + 1)^2 (x^2 + 1)'$$

$$= 3(x^2 + 1)^2 (2x)$$

بقاعدة السلسلة:

$$f(x) = (2x + 1)^4 \quad \text{تمرين (4)}$$

بدون قاعدة السلسلة نقول الأس 4

$$f(x) = (2x)^4 + 4(2x)^3(1) + 6(2x)^2(1)^2 + 4(2x)(1)^3 + (1)^4$$

$$= 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$$

$$\text{ثم نشتق } f'(x) = 64x^3 + 96x^2 + 48x + 8$$

بقاعدة السلسلة:

$$f'(x) = 4(2x + 1)^3 (2x + 1)'$$

$$= 4(2x + 1)^3 (2) = 8(2x + 1)^3$$

$$f(x) = [g(x)]^n$$

$$f'(x) = n [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

استخدام قاعدة الأس

$$f(x) = (x^3 - x)^3 \quad \text{a}$$

$$f'(x) = 3(x^3 - x)^2 (x^3 - x)' \quad \text{مترين (5) 178}$$

$$= 3(x^3 - x)^2 (3x^2 - 1)$$

$$f(x) = \sqrt{g(x)}$$

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

$$f' = \frac{\text{مشتقة (تحت الجذر)}}{2 \times \text{الجذر نفسه}}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} \quad \text{b}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 4)'}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}}$$

مترين 5
المحول x

$$f(x) = (x^3 + x - 1)^3 \quad \text{a}$$

$$f'(x) = 3(x^3 + x - 1)^2 (x^3 + x - 1)' = 3(x^3 + x - 1)^2 (3x^2 + 1) \quad \text{مترين (6) 178}$$

$$f(x) = \sqrt{4x - \frac{1}{x}} \quad \text{b}$$

$$f'(x) = \frac{(4x - \frac{1}{x})'}{2\sqrt{4x - \frac{1}{x}}} = \frac{4 - (\frac{1}{x^2})'}{2\sqrt{4x - \frac{1}{x}}}$$

$$f(t) = t^5 \sqrt{t^3 + 2} \quad \text{a}$$

$$f'(t) = (t^5)' \sqrt{t^3 + 2} + t^5 (\sqrt{t^3 + 2})' \quad \text{مترين (7) 178}$$

$$= 5t^4 \sqrt{t^3 + 2} + (t^5) \left(\frac{3t^2}{2\sqrt{t^3 + 2}} \right)$$

$$\text{نوجد المقامات} = \frac{2\sqrt{t^3 + 2} \times 5t^4 \sqrt{t^3 + 2}}{2\sqrt{t^3 + 2} \times 1} + \frac{3t^7}{2\sqrt{t^3 + 2}}$$

$$= \frac{10t^4 (t^3 + 2) + 3t^7}{2\sqrt{t^3 + 2}} = \frac{10t^7 + 20t^4 + 3t^7}{2\sqrt{t^3 + 2}}$$

$$= \frac{13t^7 + 20t^4}{2\sqrt{t^3 + 2}}$$

$$f(t) = (t^3 + 2) \sqrt{t} \quad \text{b}$$

$$f'(t) = (t^3 + 2)' \sqrt{t} + (t^3 + 2) (\sqrt{t})' = (3t^2) \sqrt{t} + (t^3 + 2) \times \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\text{نوجد المقامات} = \frac{2\sqrt{t} \times (3t^2 \sqrt{t})}{2\sqrt{t} \times 1} + \frac{t^3 + 2}{2\sqrt{t}}$$

$$= \frac{6t^3 + t^3 + 2}{2\sqrt{t}} = \frac{7t^3 + 2}{2\sqrt{t}}$$

تمرين (8) 178 a $f(t) = (t^4 + 2)\sqrt{t^2 + 1}$

المشتق $f'(t) = (t^4 + 2)' \sqrt{t^2 + 1} + (t^4 + 2) (\sqrt{t^2 + 1})'$

$$= (4t^3) \sqrt{t^2 + 1} + (t^4 + 2) \left(\frac{2t}{2\sqrt{t^2 + 1}} \right)$$

نوصفها حات $= \frac{\sqrt{t^2 + 1} \times (4t^3 \sqrt{t^2 + 1})}{1 \times \sqrt{t^2 + 1}} + \frac{t^5 + 2t}{\sqrt{t^2 + 1}}$

$$= \frac{4t^3(t^2 + 1) + t^5 + 2t}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

$$= \frac{4t^5 + 4t^3 + t^5 + 2t}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{5t^5 + 4t^3 + 2t}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

b $f(t) = \sqrt{t} \left(t^{\frac{4}{3}} + 3 \right)$

$f'(t) = (\sqrt{t})' (t^{\frac{4}{3}} + 3) + \sqrt{t} (t^{\frac{4}{3}} + 3)'$

$$= \frac{1}{2\sqrt{t}} (t^{\frac{4}{3}} + 3) + \sqrt{t} \left(\frac{4}{3} t^{\frac{1}{3}} \right)$$

$$= \frac{t^{\frac{4}{3}} + 3}{2\sqrt{t}} + \frac{4}{3} t^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{t^{\frac{4}{3}} + 3}{2\sqrt{t}} + \frac{4}{3} t^{\frac{5}{6}}$$

تمرين (9) a $f(u) = \frac{u^2 + 1}{u^2 + 4}$ المشتق

و قاعدة لافيت $f'(u) = \frac{2u(u+4) - 1(u^2+4) + 4}{(u+4)^2}$

$$= \frac{2u^2 + 8u - u^2 - 1}{(u+4)^2} = \frac{u^2 + 8u - 1}{(u+4)^2}$$

b $f(u) = \frac{u^3}{(u^2 + 4)^2}$

$$f'(u) = \frac{3u^2(u^2 + 4)^2 - u^3 [2(u^2 + 4)^1 (2u)]}{(u^2 + 4)^4}$$

(البسط $u^2 + 4$ على طرفتي) $= \frac{(u^2 + 4) [3u^2(u^2 + 4) - u^3 (2(2u))]}{(u^2 + 4)^3 (u^2 + 4)^3}$

$$= \frac{3u^4 + 12u^2 - 4u^4}{(u^2 + 4)^3}$$

$$= \frac{12u^2 - u^4}{(u^2 + 4)^3}$$

معرني (10) ص 178 [a] $f(u) = \frac{u^2-1}{u^2+1}$ المتحول u

قاعدة لافيت $f'(u) = \frac{2u(u^2+1) - 2u(u^2-1)}{(u^2+1)^2}$
 $= \frac{2u^3+2u-2u^3+2u}{(u^2+1)^2} = \frac{4u}{(u^2+1)^2}$

[b] $f(u) = \frac{u^2+4}{(u^3)^2}$

$f(u) = \frac{u^2+4}{u^6} \rightarrow f'(u) = \frac{2u(u^6) - 6u^5(u^2+4)}{(u^6)^2}$
 $= \frac{2u^7 - 6u^7 - 24u^5}{(u^6)^2} = \frac{-4u^7 - 24u^5}{u^{12}}$
 $= \frac{u^5(-4u^2-24)}{u^{12}} = \frac{-4u^2-24}{u^7}$

معرني (11) [a] $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ المتحول x
 $g'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot x}{(\sqrt{x^2+1})^2}$

$= \frac{\sqrt{x^2+1} \times \sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \times \sqrt{x^2+1}}{(\sqrt{x^2+1})^2}$
 اضرب كل طرفي السبعة والبقا $\sqrt{x^2+1}$

$= \frac{(x^2+1) - x^2}{\sqrt{x^2+1} (x^2+1)} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$
 $(x^2+1)^{\frac{1}{2}} (x^2+1)^1 = (x^2+1)^{\frac{1}{2}+1}$

[b] $g(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$
 $g'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1} \right)' = \frac{1(x^2+1) - 2x \cdot x}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{2\sqrt{x}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

$(x^2+1)^2 \div (x^2+1)^{\frac{1}{2}} = (x^2+1)^{2-\frac{1}{2}} = (x^2+1)^{\frac{3}{2}}$

ضربنا السبعة والبقا $(x^2+1)^2$

المحول x مركز (12) ص 178 [a] $g(x) = x^2 \cdot \sqrt{x+1}$

$$g'(x) = 2x(\sqrt{x+1}) + x^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right)$$

نوصم القامات $= \frac{2\sqrt{x+1} \times 2x\sqrt{x+1}}{1 \times 2\sqrt{x+1}} + \frac{x^2}{2\sqrt{x+1}}$

$$= \frac{4x(\sqrt{x+1})^2 + x^2}{2\sqrt{x+1}} = \frac{4x^2 + 4x + x^2}{2\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{5x^2 + 4x}{2\sqrt{x+1}}$$

[b] $g(x) = \sqrt{(x^2+1)}(\sqrt{x+1})^3$

$$g'(x) = \frac{(2x)(\sqrt{x+1})^3 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x^2+1)}{2\sqrt{(x^2+1)}(\sqrt{x+1})^3}$$

تبسيطه بطول

المحول w [a] $h(w) = \frac{6}{\sqrt{w^2+4}} = 6(w^2+4)^{-\frac{1}{2}}$ مركز (13)

$$h'(w) = 6 \left(-\frac{1}{2}\right)(w^2+4)^{-\frac{1}{2}-1} (w^2+4)'$$

$$= -3(w^2+4)^{-\frac{3}{2}} (2w)$$

$$= -6w(w^2+4)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-6w}{(w^2+4)^{\frac{3}{2}}}$$

[b] $h(w) = \frac{\sqrt{w^2+4}}{6} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{w^2+4}$

$$h'(w) = \frac{1}{6} \times \frac{\frac{2w}{2\sqrt{w^2+4}}}{1} = \frac{w}{6\sqrt{w^2+4}}$$

المحول w $h(w) = \frac{(w^3+4)^5}{8} = \frac{1}{8}(w^3+4)^5$ [a] (14) مركز

$$h'(w) = \frac{1}{8} (5)(w^3+4)^4 (w^3+4)'$$

$$= \frac{5}{8} (w^3+4)^4 (3w^2) = \frac{15w^2}{8} (w^3+4)^4$$

[b] $h(w) = \frac{8}{(w^3+4)^5} = 8(w^3+4)^{-5}$

$$h'(w) = 8(-5)(w^3+4)^{-5-1} (w^3+4)' = -40(w^3+4)^{-6} (3w^2)$$

$$= -120w^2 (w^3+4)^{-6}$$

تمرين (15) ص 178 [a] $f(x) = (\sqrt{x^3+2} + 2x)^{-2}$ المطلوب

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 (\sqrt{x^3+2} + 2x)^{-2-1} (\sqrt{x^3+2} + 2x)' \\ &= -2 (\sqrt{x^3+2} + 2x)^{-3} \left(\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+2}} + 2 \right) \\ &= \frac{-2}{(\sqrt{x^3+2} + 2x)^3} \left(\frac{3x^2 + 2(2\sqrt{x^3+2})}{2\sqrt{x^3+2}} \right) \\ &= \frac{-(3x^2 + 4\sqrt{x^3+2})}{(\sqrt{x^3+2} + 2x)^3 \times \sqrt{x^3+2}} \end{aligned}$$

[b] $f(x) = \sqrt{x^3+2} + 2x^{-2}$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 4x^{-3}}{2\sqrt{x^3+2} + 2x^{-2}}$$

تمرين (16) [a] $f(x) = \sqrt{4x^2 + (8-x^2)^2}$ المطلوب

نفسه البرهان $f(x) = \sqrt{4x^2 + 64 - 16x^2 + x^4} = \sqrt{x^4 - 12x^2 + 64}$

$$f'(x) = \frac{4x^3 - 24x}{2\sqrt{x^4 - 12x^2 + 64}} = \frac{2x^3 - 12x}{\sqrt{x^4 - 12x^2 + 64}}$$

[b] $f(x) = (\sqrt{4x^2 + 8} - x^2)^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 (\sqrt{4x^2 + 8} - x^2)^1 (\sqrt{4x^2 + 8} - x^2)' \\ &= 2 (\sqrt{4x^2 + 8} - x^2) \left(\frac{48x}{2\sqrt{4x^2 + 8}} - 2x \right) \end{aligned}$$

تمرين (17) باستخدام النظرية (5.2) ، f لها معكوس $f^{-1} = g$ المطلوب [a] g'

[5.2] $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$

$f(x) = x^3 + 4x - 1$ ، $a = -1$

1. $-1 = x^3 + 4x - 1 \Rightarrow x^3 + 4x = 0$

2. حل المعادلة السابقة : نلاحظ $x = 0$

3. $f'(x) = 3x^2 + 4$

$f'(0) = 3(0)^2 + 4 = 4$

4. $g'(-1) = \frac{1}{4}$

1. نضع a نفرضه مكان $f(x)$

2. نحل المعادلة لنحصل على x

3. نوجد f' ونفرضه

النتيجة السابقة في x

4. $g'(a) = \frac{1}{f'(g(a))}$ جواب بقية 3

تمرين (18) ص 178 f لها عقولس g ولعلونا استخدام نظرية 5.2 لإيجاد $g'(a)$

$$f(x) = x^5 + 4x - 2 \quad , \quad a = -2$$

$$-2 = x^5 + 4x - 2 \Rightarrow x^5 + 4x = 0 \quad \bullet 1$$

حل هذه المعادلة نجد لها حل وحيد $x = 0$ • 2

$$f'(x) = 5x^4 + 4 \quad \bullet 3$$

$$f'(0) = 5(0)^4 + 4 = 4$$

$$g'(-2) = \frac{1}{4} \quad \bullet 4$$

استخدام نظرية (5.2) أوجد $g'(5)$

تمرين (19) ص 178 $f(x) = x^5 + 3x^3 + x$, $a = 5$

$$5 = x^5 + 3x^3 + x \quad \bullet 1$$

$$x^5 + 3x^3 + x - 5 = 0$$

حل هذه المعادلة (بالآلة أو بالتجريب) عند البحث عن أصفار $x^5 + 3x^3 + x - 5$ نبدأ بالتجريب تدريجياً $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

وأي قيمة بعد التوقيف بالآلة نكتب صفرنا أخيراً

نجد أن الحل الوحيد لها هو $x = 1$ • 2

$$f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 1 \quad \bullet 3$$

$$f'(1) = 5(1)^4 + 9(1)^2 + 1 = 15$$

$$g'(5) = \frac{1}{15} \quad \bullet 4$$

استخدام نظرية 5.2 أوجد $g'(-2)$

$$g'(-2)$$

تمرين (20) $f(x) = x^3 + 2x + 1$, $a = -2$

$$-2 = x^3 + 2x + 1 \Rightarrow x^3 + 2x + 3 = 0 \quad \bullet 1$$

حل هذه المعادلة : نجد لها حل وحيد $x = -1$ • 2

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \quad \bullet 3$$

$$f'(-1) = 3(-1)^2 + 2 = 5$$

$$g'(-2) = \frac{1}{5} \quad \bullet 4$$

تمرين (21) م 78 (2) $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x + 4}$, $a = 2$ (مطلوب $g(a)$)

باستخدام نظرية (5.2) أوجد $g'(2)$

$$2 = \sqrt{x^3 + 2x + 4} \xrightarrow{\text{نربع الطرفين}} x^3 + 2x + 4 = 4$$

$$x^3 + 2x = 0$$

حل هذه المعادلة نجد لها حل وحيد $x = 0$

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 2}{2\sqrt{x^3 + 2x + 4}}$$

$$f'(0) = \frac{3(0)^2 + 2}{2\sqrt{0^3 + 2(0) + 4}} = \frac{1}{2}$$

$$g'(2) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

باستخدام نظرية (5.2) أوجد $g'(3)$

تمرين (22) م 9 (3) $f(x) = \sqrt{x^5 + 4x^3 + 3x + 1}$, $a = 3$

$$3 = \sqrt{x^5 + 4x^3 + 3x + 1} \xrightarrow{\text{نربع الطرفين}} x^5 + 4x^3 + 3x + 1 = 9$$

$$x^5 + 4x^3 + 3x - 8 = 0$$

حل هذه المعادلة بالآلة (أو بتجريب الأعداد) نجد $x = 1$ لها حل وحيد:

$$f'(x) = \frac{5x^4 + 12x^2 + 3}{2\sqrt{x^5 + 4x^3 + 3x + 1}}$$

$$f'(1) = \frac{5(1)^4 + 12(1)^2 + 3}{2\sqrt{1^5 + 4(1)^3 + 3(1) + 1}} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

$$g'(3) = \frac{1}{\frac{10}{3}} = \frac{3}{10}$$

تمرين (23) مطلوب ذكر القاعدة المستخدمة أولاً (السلسلة، الضرب، القسمة) ثم ذكر القواعد التالية المستخدمة بالترتيب (دون حل)

$$f(x) = \sqrt[3]{x\sqrt{x^4 + 2x} \sqrt[4]{\frac{8}{x+2}}}$$

1. استخدام قاعدة السلسلة ثم نطبق قواعد الاشتقاق

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x^3 + 4x}}{(x^3 + 4)(\sqrt{x^2 + 2})} \quad (24)$$

أولاً قاعدة ناتج القسمة ثم قاعدة السلسلة ونطبق قواعد الاشتقاق

مَرَبِن (25) $f(t) = \sqrt{t^2 + \frac{4}{3}} \left(\frac{8t+5}{2t-1} \right)^3$

نستخدم قاعدة الضرب

ثم نستخدم قاعدة السلسلة وقواعد الاشتقاق

مَرَبِن (26) ص 179 $f(t) = \left(3t + \frac{4\sqrt{t^2+1}}{t-5} \right)^3$

نستخدم قاعدة السلسلة (أنا الضرب أو دالة مركبة لاسيما)
ثم قواعد الاشتقاق

مَرَبِن (27) ص 179 $f(x) = \sqrt{x^2+16}$ $q=3$ مطلوب ص 179 $q=3$

$x_1 = 3 \rightarrow y_1 = f(3) = \sqrt{3^2+16} = 5$

نقطة التماس (3, 5)

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} \rightarrow m = \frac{3}{\sqrt{3^2+16}} = \frac{3}{5}$

معادلة المماس: $y = m(x - x_1) + y_1$

$y = \frac{3}{5}(x - 3) + 5 \rightarrow y = \frac{3}{5}x - \frac{9}{5} + 5$

$y = \frac{3}{5}x - \frac{16}{5}$

مَرَبِن (28) $f(x) = \frac{6}{x^2+4}$ $q=-2$ مطلوب ص 179 $q=-2$

$x_1 = -2 \rightarrow y_1 = f(-2) = \frac{6}{(-2)^2+4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$f'(x) = \frac{0 - 2x(6)}{(x^2+4)^2} \rightarrow m = \frac{-12(-2)}{((-2)^2+4)^2} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$

معادلة المماس: $y = \frac{3}{8}(x + 2) + \frac{3}{4}$

مَرَبِن (29) $S(t) = \sqrt{t^2+8}$ $t=2$ المطلوب سرعة السيارة باتجاه عند $t=2$

$v(t) = S'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+8}}$

$v(2) = \frac{2}{\sqrt{2^2+8}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (أو $\frac{\sqrt{3}}{3}$)

مَرَبِن (30) $S(t) = \frac{60t}{\sqrt{t^2+1}}$ $v(t) = S'(t) = \frac{60(\sqrt{t^2+1}) - \frac{60t}{\sqrt{t^2+1}} \times 60t}{(\sqrt{t^2+1})^2}$

$v(2) = \frac{60\sqrt{2^2+1} - \frac{60(2)^2}{\sqrt{2^2+1}}}{2^2+1} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

تمرين (31) ص 179 المطلوب إثبات صحة : $h(x) = f(g(x)) \rightarrow (h'(1))$

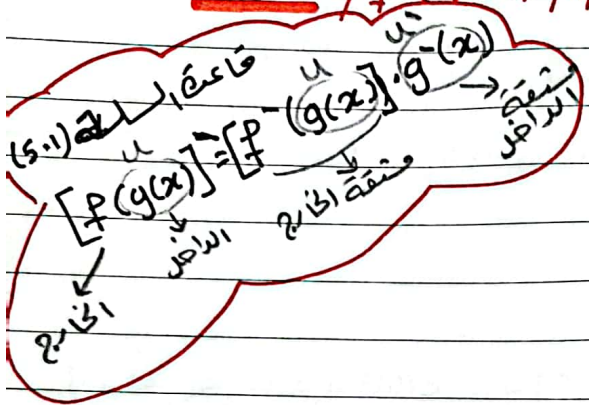
معطى: $f'(2) = 3 / f'(1) = 4 / f(1) = 3 / g(1) = 2 / g'(1) = -2 / g'(3) = 5$

$$h'(1) = [f(g(1))]'$$

$$= [f'(g(1))] \cdot g'(1)$$

$$= [f'(2)] \cdot (-2)$$

$$= [3](-2) = -6$$



تمرين (32) مطلوب $h'(2)$ حيث: $f'(3) = -3 / f'(2) = -1 / f(2) = 1 / g(2) = 3 / g'(1) = 2 / g'(2) = 4$

$$h'(2) = [f(g(2))]'$$

$$= [f'(g(2))] g'(2)$$

$$= [f'(3)] (4)$$

$$= [-3] \cdot (4) = -12$$

مطلوب $g = f'$ فردية

معطى f فردية

تمرين (33) 1 المطلوب بيان أن مشتقة الدالة الزوجية

بفرض $f(x)$ زوجية أي: $f(-x) = f(x)$ معطى

لتفرض: مشتقتها: $g(x) = f'(x)$

$$[f(-x)]' = [f(x)]'$$

$$f'(-x) \cdot (-x)' = f'(x)$$

$$f'(-x) \cdot (-1) = f'(x)$$

$$-f'(-x) = f'(x)$$

$$-g(-x) = g(x)$$

لأن: $g = f'$

وهذا يعني أن g دالة فردية

(2)

المطلوب بيان أن مشتقة الدالة الفردية

هي دالة زوجية

مطلوب $g = f'$ زوجية

معطى f فردية

في الصفحة التالية:

فردية f زوجية
 $f(-x) = f(x)$
لا تتغير الدالة لو بدلتنا x بـ $-x$

فردية f فردية
 $f(-x) = -f(x)$
تتغير إشارة الدالة لو بدلتنا x بـ $-x$

تأجيل: تمرين (33) ص 179 f فردية $\rightarrow$ المطلوب $f' = g$ زوجية

$$f(-x) = -f(x)$$

بفرض f فردية

$$f(-x) = -f(x) \xrightarrow{\text{نشتق}} [f(-x)]' = [-f(x)]'$$

$$f'(-x)(-x)' = -f'(x)$$

$$f'(-x) \cdot (-1) = -f'(x)$$

$$-f'(-x) = -f'(x) \quad (x \text{ لا ظرين})$$

$$f'(-x) = f'(x)$$

$$g(-x) = g(x) \leftarrow f' = g \text{ دالة زوجية وهو المطلوب}$$

تمرين (34) إذا كانت الدالة $f(x)$ متناظرة حول $x=a$

فكيفية f' المتناظرة حول $x=a$ ؟

$$f(a+x) = f(a-x) \quad \leftarrow \text{المتناظر لـ } f(x) \text{ حول } x=0$$

$$[f(a+x)]' = [f(a-x)]' \quad \text{نشتق}$$

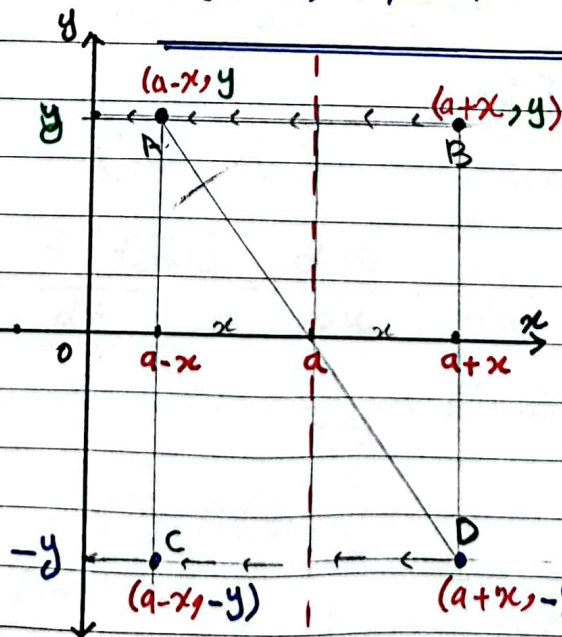
وحسب قاعدة المثلث:

$$f'(a+x) \cdot (a+x)' = f'(a-x) \cdot (a-x)'$$

$$f'(a+x) \cdot 1 = f'(a-x) \cdot (-1)$$

$$f'(a+x) = -f'(a-x)$$

f' متناظرة حول النقطة $(a, 0)$



ملاحظة: حول تمرين 34

f متناظرة حول مستقيم رأسي $x=a$

$$y = f(a+x) = f(a-x)$$

أي نقط A و B

f متناظرة حول نقطة $(a, 0)$

$$f(a+x) = -f(a-x)$$

$$y = -(-y)$$

أي نقط A و D

$x=a$
محور

تمرين (35) المطلوب إيجاد المشتقة $\frac{179}{f(x^2)}$ [a]

$$x^2 = u \rightarrow f(u)$$

$$\frac{d[f(x^2)]}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= f'(u) \cdot (2x)$$

$$= f'(x^2) \cdot (2x)$$

قاعدة القوة [b]

$$\frac{d}{dx} [f(x)]^2 = 2[f(x)]^1 \cdot f'(x)$$

$$= 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$$

قاعدة لـ $f(f(x))$ [c]

$$u = f(x) \rightarrow f(u)$$

$$\frac{d[f(f(x))]}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= f'(u) \cdot f'(x)$$

$$= f'(f(x)) \cdot f'(x)$$

تمرين (36) المطلوب إيجاد المشتقة $f(\sqrt{x})$ [a]

$$\sqrt{x} = u \rightarrow f(u)$$

$$\frac{d[f(\sqrt{x})]}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= f'(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

[b] $\sqrt{f(x)}$, $f(x) = u \rightarrow \sqrt{u}$

$$\frac{d[\sqrt{f(x)}]}{dx} = \frac{d\sqrt{u}}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$$

[c] $f(x \cdot f(x))$

$$\frac{d[x \cdot f(x)]}{dx} = f'(x \cdot f(x)) \cdot [1 \cdot f(x) + f'(x) \cdot x]$$

$$= f'(x \cdot f(x)) \left[f(x) + x \cdot f'(x) \right]$$

تمرین (37) پ 179 ادیب الی شفاء

a $f\left(\frac{1}{x}\right)$

$u = \frac{1}{x} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{-1}{x^2}$

$$\frac{d\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]}{dx} = f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{du}{dx} = f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2}$$

b $\frac{1}{f(x)}$

$u = \frac{1}{f(x)} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$

$$\frac{d\left[\frac{1}{f(x)}\right]}{dx} = \frac{d(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 1 \times \frac{du}{dx} = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$$

c $f\left(\frac{x}{f(x)}\right)$

$u = \frac{x}{f(x)} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{f(x) - f'(x) \cdot x}{[f(x)]^2}$

$$\frac{d f(u)}{dx} = \frac{d f(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= f'(u) \cdot \frac{f(x) - f'(x) \cdot x}{[f(x)]^2}$$

$$= f'\left(\frac{x}{f(x)}\right) \cdot \frac{f(x) - f'(x) \cdot x}{[f(x)]^2}$$

a $1 + f(x^2)$

تمرین (38) الی شفاء

$$\frac{d[1 + f(x^2)]}{dx} = 0 + \frac{d f(x^2)}{dx} = \frac{d f(u)}{dx} = \frac{d f(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= f'(u) \cdot (2x) = [f'(x^2)] \cdot 2x$$

b $[1 + f(x)]^2$

$$\frac{d[1 + f(x)]^2}{dx} = \text{منقعة فتوسر مرفوع لا}$$

$$= 2[1 + f(x)]^1 \cdot \frac{d[1 + f(x)]}{dx}$$

$$= 2[1 + f(x)] [0 + f'(x)] = 2f'(x)[1 + f(x)]$$

c $f(1 + f(x))$

$u = 1 + f(x) \rightarrow \frac{du}{dx} = f'(x)$

$$\frac{d[f(1 + f(x))]}{dx} = \frac{d f(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot f'(x)$$

$$= f'(1 + f(x)) \cdot f'(x)$$

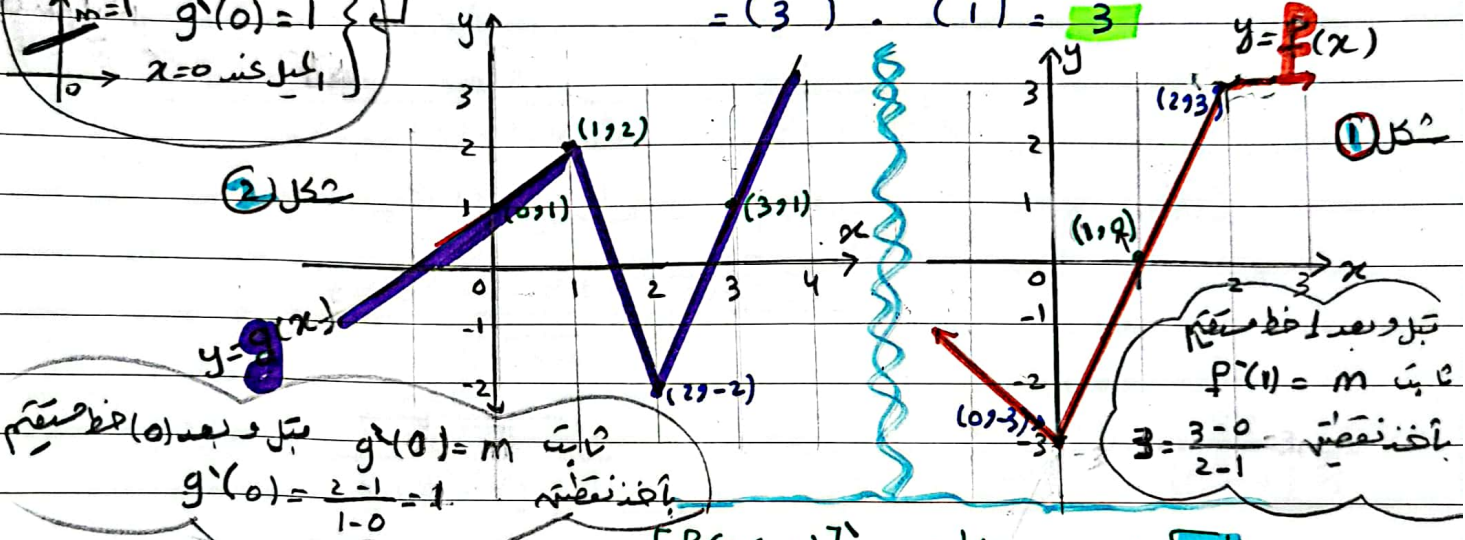
تمرین (39) صد 171 المطلوب و متقته $f(g(x))$ عند

ا. $x=0$ حيث رسم في الرسم 1 المجاور بيان $y=f(x)$ من الرسم 1
 المطلوب: $[f(g(x))]'$

نظرية $= f'(g(0)) \cdot g'(0)$
 $= f'(1) \cdot (1)$

2 $g(0)=1$ من الرسم

$m=1$ $g'(0)=1$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{الميل عند } x=0 \end{array} \right.$



ثابت $g'(0)=m$ قبل وبعد (0) خط مستقيم
 $g'(0) = \frac{2-0}{1-0} = 2$

ثابت $f'(1)=m$ قبل وبعد (1) خط مستقيم
 $f'(1) = \frac{3-0}{2-1} = 3$

ب. $x=1$ المطلوب $[f(g(1))]'$

$= f'(g(1)) \times g'(1)$
 $= f'(2) \times ?$ غير موجود $g'(1)$

(ركن أو زاوية في رسم 2 عند $x=1$ في الرسم 2 للدالة g)

ج. $x=3$ المطلوب $[f(g(3))]'$

$= f'(g(3)) \times g'(3)$
 $= f'(1) \times 3$
 $= 3 \times 3 = 9$

ثابت $g'(3)=m$
 $m = \frac{1-(-2)}{3-2} = 3$

تمرین (40) المطلوب و متقته $g(f(x))$ عند

ا. $x=0$ $[g'(f(0))] \cdot f'(0) = g'(-3) \cdot f'(0)$

$f'(0)$ غير موجود (ركن أو زاوية عند $x=0$ في الرسم 1 للدالة f)

ب. $x=1$ $[g'(f(1))] \cdot f'(1) = g'(0) \cdot f'(1) = 1 \times 3 = 3$

ج. $x=3$ $[g'(f(3))] \cdot f'(3) = [g'(3)] \cdot f'(3)$

$= [3] \times 0 = 0$

عند $x=3$ f مستقيم أفقي عليه ثابت $0 \leftarrow f'(3)=0$

تمرين (41) ص 179 [a] المطلوب الحقة من الرتبة الثانية $f(x) = \sqrt{x^2+4}$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$f''(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+4} - \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \cdot x}{(\sqrt{x^2+4})^2} = \frac{\sqrt{x^2+4} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}}{(x^2+4)}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+4} \times \sqrt{x^2+4} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}} \times \sqrt{x^2+4}}{(x^2+4) \times \sqrt{x^2+4}}$$

$$= \frac{x^2+4 - x^2}{(x^2+4)^{3/2}} = \frac{4}{(x^2+4)^{3/2}}$$

مطلوب $f''(t)$ $f(t) = \frac{2}{\sqrt{t^2+4}}$ [b]

$$f'(t) = \frac{0 \times \sqrt{t^2+4} - 2 \times \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}}{(\sqrt{t^2+4})^2}$$

$$f'(t) = \frac{-2t}{(t^2+4)^{3/2}} = \frac{-2t}{(t^2+4)^{1/2} \times (t^2+4)^1} = \frac{-2t}{(t^2+4)^{3/2}}$$

تمرين (42) [a] $h(t) = (t^3+3)^2$ $f'(t) = -2t(t^2+4)^{-3/2}$

$$f''(t) = -2(t^2+4)^{-3/2} + (-2t) \left[-\frac{3}{2}(t^2+4)^{-3/2-1} (2t) \right]$$

$$= -2(t^2+4)^{-3/2} + 3t(t^2+4)^{-5/2} (2t)$$

$$= -2(t^2+4)^{-3/2} + 6t^2(t^2+4)^{-5/2}$$

يمكن إضاحه كصا مفرقة $(t^2+4)^{-3/2}$

(توجد طريقة أخرى لكل بالاشتقاق بقاعدة أسية)

تمرين (42) [a] $h(t) = (t^3+3)^2$ $h''(t)$ مطلوب

$$h'(t) = 2(t^3+3)^1 (t^3+3)' = 2(t^3+3)(3t^2) = 6t^5 + 18t^2$$

$$h''(t) = 30t^4 - 36t$$

[b] $g(s) = \frac{3}{(s^2+1)^2}$ $g(s) = 3(s^2+1)^{-2} \Rightarrow g'(s) = 3(-2)(s^2+1)^{-3}(2s)$
 $= -12s(s^2+1)^{-3}$

$$g''(s) = [-12(s^2+1)^{-3}]' - 12s[-3(s^2+1)^{-4}(2s)]$$

$$= \frac{-12}{(s^2+1)^3} + \frac{72s^2}{(s^2+1)^4}$$

توجد طريقة أخرى لكل (مشتقة مستمرة)

تمرين (43) 179.0 a مطلوب قيم x التي تجعل f غير قابل الاستقلال
(مع الوصف البياني لذلك)

$$f(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x)^{\frac{1}{3}}$$

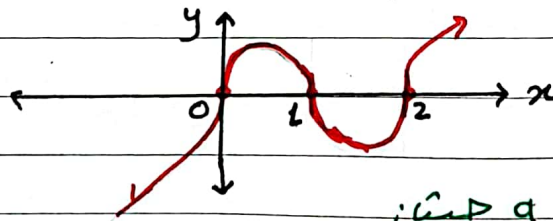
$$f'(x) = \frac{1}{3} (x^3 - 3x^2 + 2x)^{\frac{1}{3}-1} (x^3 - 3x^2 + 2x)'$$

$$= \frac{1}{3} (x^3 - 3x^2 + 2x)^{-\frac{2}{3}} (3x^2 - 6x + 2)$$

$$= \frac{3x^2 - 6x + 2}{3 (x^3 - 3x^2 + 2x)^{\frac{2}{3}}}$$

غير موجودة عندما المقام = 0 أي عندما: $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$
حل المعادلة (يمكن بالآلة أو بالتفصيل حيث لا عامل مشترك)

$x = 0$ أو $x = 2$ أو $x = -1$ نجد
أي أن أصل المحاك عند هذه النقطة غير صفر (خطوط رأسية)
ملاحظة: لو رسمنا بياني هذه الدالة (برامج الرسم مثلاً) الملاحظات



b نفس المطلوب q حيث:

$$f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x}$$

$$f'(x) = \frac{4x^3 - 9x^2 + 6x - 1}{2\sqrt{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x}} \quad (\text{غير موجودة عندما المقام} = 0)$$

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = 0$$

$$x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0 \quad \text{حل المعادلة}$$

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad x = 1$$

عند هذه النقطة لا يمكن المشتقة (أصل المحاك غير صفر عندها):

ولا حظ أن مجال الدالة هو قيم x بحيث $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x \geq 0$

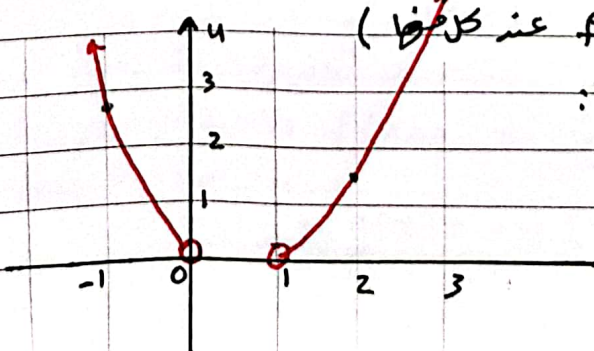
والمشتقة موجودة عندما: $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x > 0$

x	0	1
g	++	--
g	--	++

وهذا تحقق عندما $x > 1$ أو $x < 0$

ملاحظة: (يوجد انقطاع - قفزة - عند كل من $x = 0$ و $x = 1$)
ولا توجد قيمة لـ f' عند كل من $x = 0$ و $x = 1$

لا حظ الرسم البياني لهذه الدالة:



تمرين (44) ص 179 ما هو الذي لم يوثق في اثبات قاعدة السلسلة بشكل جيد

وأيضا استخدمنا $g'(x) \neq 0$

في ص 174 الإثبات موجود

وفي خطوة الضرب للبطء وللقاوم

يجب إضافة أن: $g(x+h) - g(x) \neq 0$ حيث $h \neq 0$

وهنا نستخدم افتراض $g'(x) \neq 0$

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad (\Rightarrow g'(x) \neq 0)$$

مشتقة داخل القوس الأول

تمرين (45) $f(x) = (x^2+3)^2 (2x)$ أوجد g بحيث: $g'(x) = f(x)$

لاحظ: $(x^2+3)' = 2x$

وعند الاشتقاق عادة ينقص الأس 1 (هنا أصبح 2 وبالنسبة قبل الاشتقاق

كان 3

لكن 3 غير موجودة (نقسم على 3)

$$g'(x) = (x^2+3)^2 (2x)$$

$$\rightarrow g(x) = \frac{1}{3} (x^2+3)^3$$

مشتقة داخل القوس الثاني

تمرين (46) $f(x) = 2^2 (x^3+4)^{\frac{2}{3}}$

$$3(x^2) = (x^3+4)'$$

لاحظ الأس ينقص 1 فيصبح $\frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \rightarrow \text{نقسم على}$$

$$\left(\frac{5}{3}\right) \text{ أي مضروب بـ } \left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\rightarrow g(x) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} (x^3+4)^{\frac{5}{3}}$$

• لاحظ مشتقة كانت الجذر 2

تمرين (47) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

غير موجودة (نقسم على 2)

وعند الاشتقاق الجذر الرئيسي • ونصفت الجذر عادة يكون في المقام (2)

غير موجودة مضروب بـ 2

$$f(x) = \frac{x/x}{x\sqrt{x^2+1}} \rightarrow \text{مشتقة كانت الجذر } x^2 \text{ الجذر}$$

$$\rightarrow g(x) = \sqrt{x^2+1}$$

مشتقة القوس 2 (غير موجودة نقسم على 2)

تمرين (48) $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$

الأس 2 - (كان 1) طرفنا

لا يوجد (-) فنيها

$$\rightarrow g(x) = -\frac{1}{2} (x^2+1)^{-1}$$