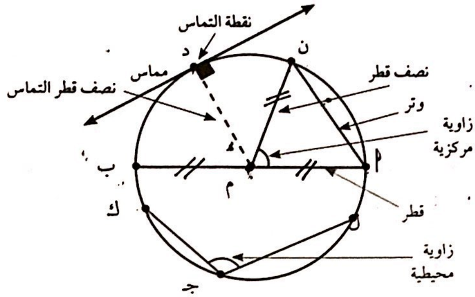
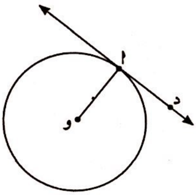
٦ – ١ (أ) الدائرة



نظرية (١) كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.

مماس الدائرة



المماس للدائرة هو مستقيم في المستوي يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة.

نقطة التقاطع تسمى نقطة التماس.

$\overleftrightarrow{\text{أد}}$ مماس.

$\overrightarrow{\text{أد}}$ شعاع مماس.

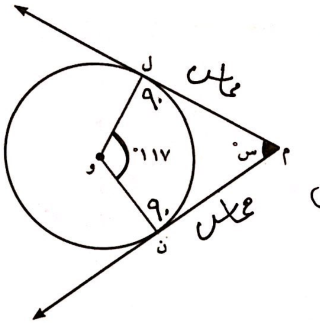
$\overline{\text{أد}}$ قطعة مماسية

$\overline{\text{أو}}$ نصف قطر التماس

نظرية (٢) المماس عمودي على نصف قطر التماس.

في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ مماسان للدائرة التي مركزها و.

أوجد قياس الزاوية ل م̂ ن.



البرهان

∵ $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس ، $\overline{\text{و ل}}$ نصف قطر التماس

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ل}} \perp \overline{\text{و ل}}$

∴ ق(ل̂) = ٩٠° نظرية

∵ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ مماس ، $\overline{\text{و ن}}$ نصف قطر التماس

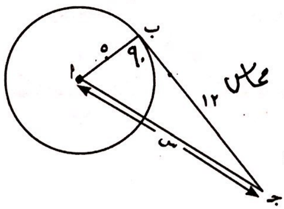
∴ $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \overline{\text{و ن}}$

∴ ق(ن̂) = ٩٠° نظرية

∴ ق(م̂) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ١١٧°) = ٦٣°

لأن مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

$\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ مماس للدائرة. أوجد قيمة س.



البرهان

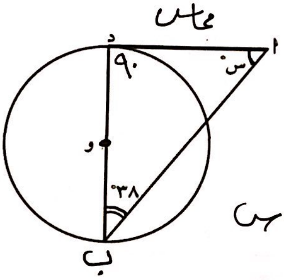
∵ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ مماس ، $\overline{\text{ب أ}}$ نصف قطر التماس

∴ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}} \perp \overline{\text{ب أ}}$

∴ ق(ب̂) = ٩٠° نظرية

من نظرية فيثاغورث

أ جـ = $\sqrt{(١٢)^2 + (٥)^2}$ = ١٣ سم.



في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ مماس للدائرة التي مركزها و.

أوجد قيمة س°.

البرهان

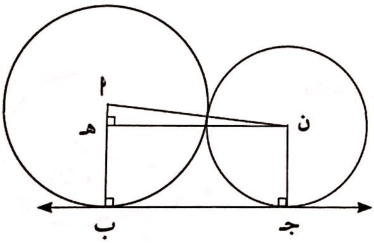
∵ $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ مماس ، دو نصف قطر التماس

∴ $\overleftrightarrow{\text{أد}} \perp \overline{\text{دو}}$

∴ ق(د̂) = ٩٠° نظرية

س° = ١٨٠° − (٩٠° + ٣٨°) = ٥٢°

لأن مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°



يمثل الشكل المقابل مقطعًا لأسطوانتين في معمل الورق.

أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$ إذا كانت الدائرتان متماستين

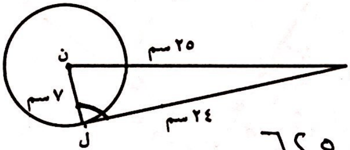
وطول نصف قطريهما ٥٠ سم، ٤٠ سم على الترتيب.

معلق

نظرية (٣) المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماسًا لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

٩٠°

في الشكل المقابل، ن ل = ٧ سم ، ل م = ٢٤ سم ، ن م = ٢٥ سم.
أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة التي مركزها ن.



البرهان

$(\text{م ن})^2 = (25)^2 = 625$

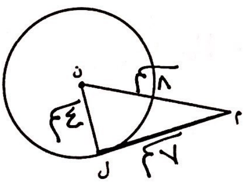
$(\text{م ل})^2 + (\text{ل ن})^2 = (24)^2 + (7)^2 = 625$

$\because (\text{م ن})^2 = (\text{م ل})^2 + (\text{ل ن})^2$

$\therefore \triangle$ م ل ن قائم الزاوية في ل

$\therefore \overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة.

في الشكل المقابل، إذا كان ن ل = ٤ ، ل م = ٧ ، ن م = ٨،
فهل $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة؟ فسّر إجابتك.



البرهان

$(\text{م ن})^2 = (8)^2 = 64$

$(\text{م ل})^2 + (\text{ل ن})^2 = (7)^2 + (4)^2 = 65$

$\because (\text{م ن})^2 \neq (\text{م ل})^2 + (\text{ل ن})^2$

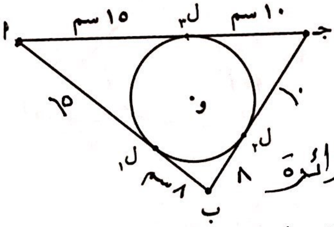
$\therefore \triangle$ م ل ن ليس قائم الزاوية في ل.

$\therefore \overleftrightarrow{\text{م ل}}$ ليس مماساً للدائرة

نظرية (٤)

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

في الشكل المقابل، أوجد محيط المثلث أب جـ.



البرهان

∵ أل١ ، أل٣ قطعتان مماستان للدائرة

∴ أل١ = أل٣ = ١٥ سم نظرية

∵ بل١ ، بل٢ قطعتان مماستان للدائرة

∴ بل١ = بل٢ = ٨ سم نظرية

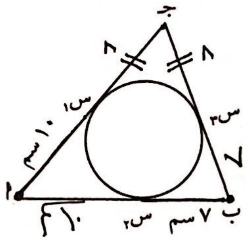
∵ جـل٢ ، جـل٣ قطعتان مماستان للدائرة

∴ جـل٢ = جـل٣ = ١٠ سم

∴ محيط △ أبجـ = ١٥ + ١٠ + ١٠ + ٨ + ٨ + ١٥

= ٦٦ سم.

في الشكل المقابل إذا كان محيط المثلث أ ب جـ = ٥٠ سم، فأوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$.



البرهان

∵ $\overline{\text{أ س}_1}$ ، $\overline{\text{أ س}_2}$ قطعتان مماستان للدائرة

∴ أ س١ = أ س٢ = ١٠ سم

∵ $\overline{\text{ب س}_2}$ ، $\overline{\text{ب س}_3}$ قطعتان مماستان للدائرة

∴ ب س٢ = ب س٣ = ٧ سم

∵ $\overline{\text{جـ س}_1}$ ، $\overline{\text{جـ س}_3}$ قطعتان مماستان للدائرة

∴ جـ س١ = جـ س٣ = $\frac{٥٠ - (١٠ + ١٠ + ٧ + ٧)}{٢}$

= ٨ سم

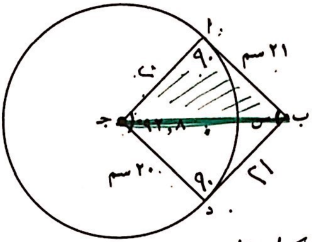
∴ ب جـ = ٨ + ٧ = ١٥ سم

$\overleftrightarrow{بأ}$ ، $\overleftrightarrow{بد}$ مماسان للدائرة.

(أ) أوجد قيمة س.

(ب) أوجد محيط الشكل الرباعي ب أ جـ د.

(جـ) أوجد ب جـ.



البرهان

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس ، $\overline{أجـ}$ نصف قطر التماس

∴ $\overline{أجـ} \perp \overleftrightarrow{أب}$

∴ ق ($\hat{أ}$) = ٩٠° نظرية

∵ $\overleftrightarrow{بد}$ مماس ، $\overline{جـد}$ نصف قطر التماس

∴ $\overleftrightarrow{بد} \perp \overline{جـد}$

∴ ق ($\hat{د}$) = ٩٠°

∴ س = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٩٢٫٨°) = ٨٧٫٢°

∵ $\overline{بأ}$ ، $\overline{بد}$ قطعتان مماستان للدائرة

∴ ب أ = ب د = ٢١ سم نظرية

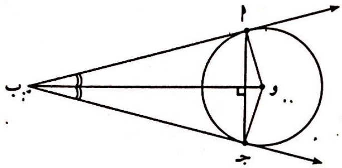
∵ جـ د = جـ أ = ٢٠ سم (أنصاف أقطار)

∴ محيط الشكل = ٢١ + ٢١ + ٢٠ + ٢٠ = ٨٢ سم

من نظرية فيثاغورث.

ب جـ = $\sqrt{(٢١)^٢ + (٢٠)^٢}$ = ٢٩ سم

نتائج النظرية



Δ ب أ جـ متطابق الضلعين من النظرية السابقة.

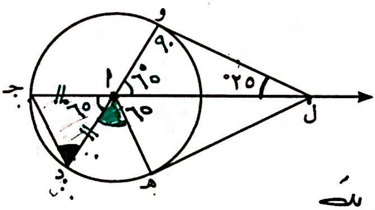
١ ب←و منصف الزاوية أ ب̂ جـ

٢ و←ب منصف الزاوية أ و̂ جـ

٣ $\overline{\text{و ب}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$

في الشكل المقابل، أوجد ق(أ̂د جـ)، ق(هـ أ̂ د)

إذا كانت ل و ، ل هـ تمسان الدائرة حيث و د قطر للدائرة.



البرهان

∵ ل و مماس ، أ و نصف قطر التماس

∴ ل←و ⊥ أ و

∴ ق(و̂) = ٩٠° نظرية

∴ ق(و أ̂ ل) = ١٨٠° − (٩٠° + ٢٥°) = ٦٥°

∴ ق(جـ أ̂ د) = ٦٥° بالتقابل بالرأس

∵ أ جـ = أ د (أنصاف أقطار)

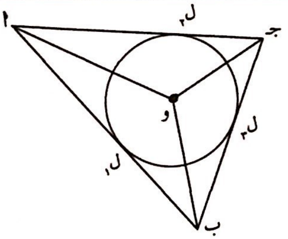
∴ ق(جـ̂) = ق(د̂) = $\frac{١٨٠° - ٦٥°}{٢}$ = ٥٧,٥°

∵ ل و ، ل هـ قطعتان مماستان للدائرة

∴ ق(و أ̂ ل) = ق(هـ أ̂ ل) = ٦٥° نتيجة

∴ ق(هـ أ̂ د) = ١٨٠° − (٦٥° + ٦٥°) = ٥٠°

الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة)



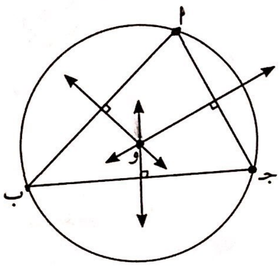
هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث

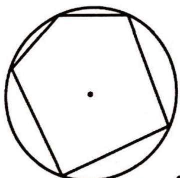
الدائرة المحيطة لمثلث (الخارجة)

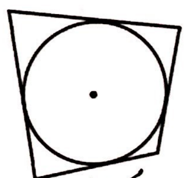
هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث (نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث).

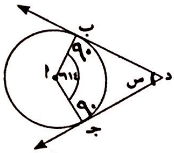


حدّد ما إذا كانت الدائرة محاطة بمضلع (داخلة) أو محيطة بمضلع (خارجة).



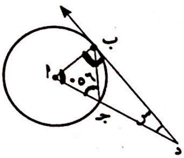


في التمارين (٨–١١)، اختر الإجابة الصحيحة:



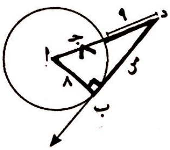
(٨) إذا كان $\overleftarrow{دب}$، $\overleftarrow{دجـ}$ مماسان للدائرة. فإن س =

(أ) ٢٦° [redacted] ٥٧° (جـ) ٦٦° (د) ١١٤°



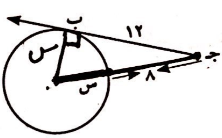
(٩) إذا كان $\overleftarrow{دب}$ مماس للدائرة. فإن س =

[redacted] ٢٢° (ب) ٢٨° (جـ) ٣٤° (د) ٤٠°



(١٠) إذا كان $\overleftarrow{دب}$ مماس للدائرة. فإن س = $\sqrt{(١٧)^٢ - (٨)^٢} =$

(أ) ٨ (ب) ٩ [redacted] ١٥ (د) ١٧



(١١) إذا كان $\overleftarrow{جـب}$ مماس للدائرة. فإن س =

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ [redacted] ٥

٨+س

$$(س+٨)^٢ = س^٢ + (١٢)^٢$$

$$١٤٤ + \cancel{س^٢} = ٦٤ + ١٦س + \cancel{س^٢}$$

$$١٤٤ = ٦٤ + ١٦س$$

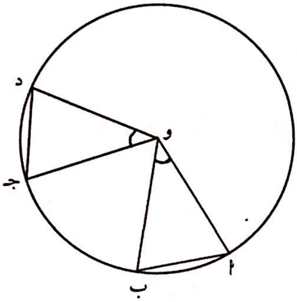
$$١٤٤ - ٦٤ = ١٦س$$

$$\frac{٨٠}{١٦} = \frac{\cancel{١٦}س}{\cancel{١٦}}$$

$$س = ٥$$

٦ – ٢ الأوتار والأقواس

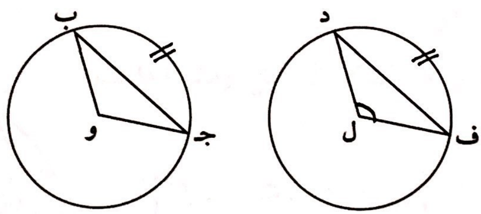
نظرية (١)



في دائرة أو في دوائر متطابقة:

1. **للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.**
2. **الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.**
3. **للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة.**

في الشكل المقابل الدائرتان متطابقتان، ب جـ ≅ د ف . ماذا تستنتج؟



م(لْ) = م(وْ)

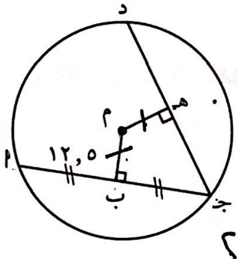
د ف = ب جـ

نظرية (٢)

١ الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.

٢ الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.

في الشكل المقابل ليكن م مركز الدائرة. م ب = م هـ ، أوجد طول جـ د. فسّر.



البرهان

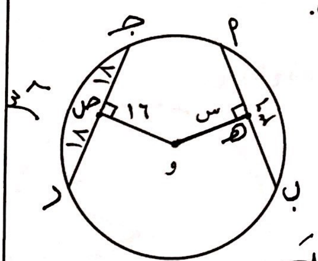
∵ م ب = م هـ

∴ أ جـ = د جـ نظرية

∴ د جـ = ١٢,٥ + ١٢,٥ = ٢٥

دائرة مركزها و.

أوجد قيمة س في الشكل المقابل، وفسّر إجابتك.



البرهان

∵ أ ب = جـ د = ٣٦

∴ و هـ = و ص = ١٦

نظرية

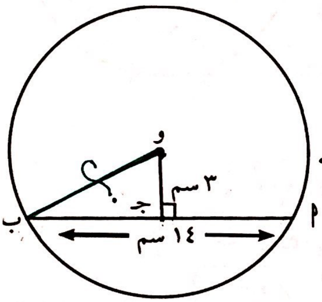
نظرية (٣)

١ القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلًّا من قوسيه.

٢ القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) في دائرة يكون عموديًّا على هذا الوتر.

٣ العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة.

في الشكل المقابل، أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و.



البرهان

∵ $\overline{وجـ} \perp \overline{أب}$

∴ جـ منتصف $\overline{أب}$

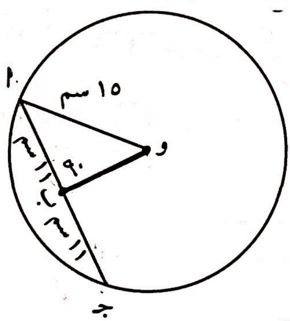
∴ أجـ = جـ ب = ٧ سم نظرية

من نظرية فيثاغورث

وب = $\sqrt{(٧)^٢ + (٣)^٢} = \sqrt{٥٨}$

= ٧,٦ سم.

في الشكل المقابل أوجد البعد بين مركز الدائرة والوتر.



البرهان

∵ ب منتصف $\overline{أجـ}$

∴ $\overline{وب} \perp \overline{أجـ}$

من نظرية فيثاغورث

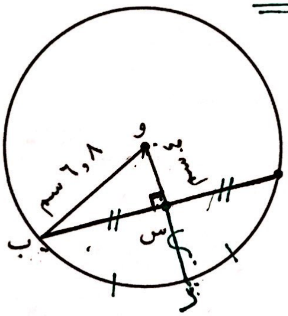
وب = $\sqrt{(١٥)^٢ - (١١)^٢} = ٢\sqrt{٢٦}$

= ١٠,١٩ سم

استخدم الشكل المقابل لإيجاد:

أ طول الوتر $\overline{أب}$.

ب المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر $\overset{\frown}{أب}$.



البرهان

من نظرية فيثاغورث

$بس = \sqrt{(٦٫٨)^٢ - (٤)^٢} = ٥٫٤٩$ سم

$\because \overline{وس} \perp \overline{أب}$

$\therefore$ س منتصف $\overline{أب}$

$أس = سب = ٥٫٤٩$ سم

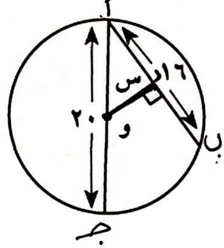
$\therefore أب = ٥٫٤٩ + ٥٫٤٩ = ١٠٫٩٨$ سم

$\because$ ود = وب = ٦٫٨ (انصاف أقطار)

$\therefore$ س د = ٦٫٨ − ٤ = ٢٫٨ سم

أوجد قيمة س في الأشكال التالية:

(أ)



البرهان

$\because \overline{ود} \perp \overline{أب}$

$\therefore$ د منتصف $\overline{أب}$

$\therefore$ أد = دب = ٨ سم نظرية

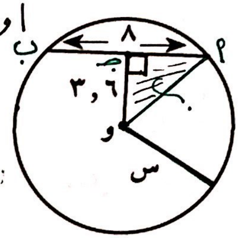
$\because$ أو = وجـ = ١٠ سم انصاف أقطار

من نظرية فيثاغورث

$\therefore ود = \sqrt{(١٠)^٢ - (٨)^٢} = ٦$ سم

تابع بند (٦-٢)

(ب) أوجد قيمة س



البرهان

∵ وجـ $\perp$ $\overline{أب}$

∴ جـ منتصف $\overline{أب}$

∴ أجـ = جـب = ٤ سم

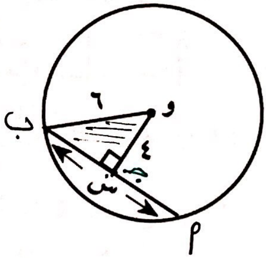
نظرية

من نظرية فيثاغورث

أو = $\sqrt{(٤)^{٢} + (٣,٦)^{٢}}$ = ٥,٣٨ سم

∴ س = ٥,٣٨ سم

(جـ)



البرهان

من نظرية فيثاغورث

باجـ = $\sqrt{(٦)^{٢} - (٤)^{٢}}$

= ٤,٤٧ سم

∵ وجـ $\perp$ $\overline{أب}$

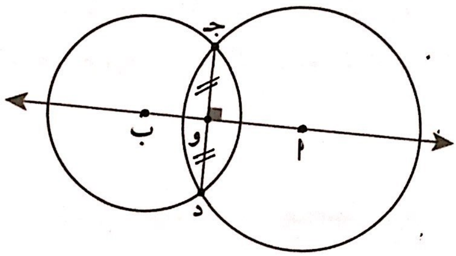
∴ جـ منتصف $\overline{أب}$

∴ أجـ = جـب = ٤,٤٧ سم

∴ أب = ٤,٤٧ + ٤,٤٧ = ٨,٩٤ سم

نتيجة

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًّا على الوتر المشترك بينهما وينصفه.

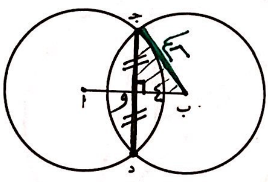


معلق

دائرتان مركزاهما على الترتيب أ، ب تتقاطعان بالنقطتين جـ ، د.

وطول نصف قطر كل دائرة ٦ سم.

أوجد طول جـ د إذا كان طول أب يساوي ٨ سم.



البرهان

معلق

٦ ـ ٣ الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

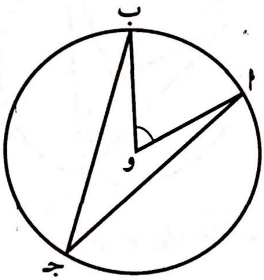
تعريف:

① الزاوية التي رأسها مركز الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى بالزاوية المركزية.

② الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى بالزاوية المحيطية.

نظرية (١)

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة.

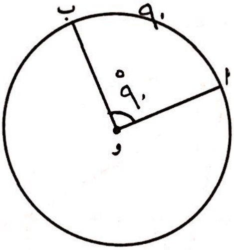


نظرية (٢)

في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

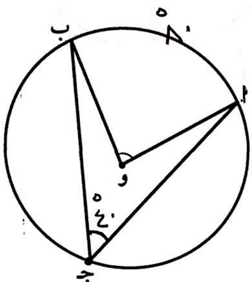
قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.

في الشكل المقابل دائرة مركزها و. إذا كان ق(⌒أب) = ٩٠°.



ق(∠أوب) المركزية = ق(⌒أب) = ٩٠°

في الشكل المقابل: إذا كان ق(⌒أب) = ٨٠° فأوجد ق(∠أجب).

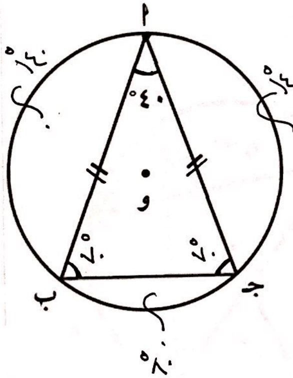


ق(∠أجب) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(⌒أب)

∴ ق(∠أجب) = $\frac{٨٠}{٢}$ = ٤٠°

في الشكل المقابل أب جـ مثلث متطابق الضلعين حيث أ، ب، جـ نقاط على الدائرة التي مركزها و، ق(∠بأجـ) = ٤٠°.

أوجد قياس كل من الأقواس ⌒أب، ⌒بجـ، ⌒أجـ.



البرهان

∵ أب = أجـ

∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) = $\frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢}$ = ٧٠°

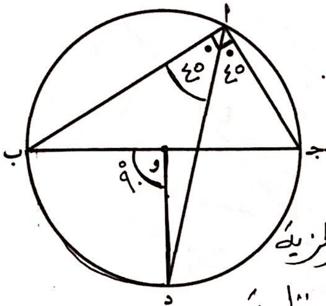
ق(∠أ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(⌒بجـ)

∴ ق(⌒بجـ) = ٤٠° × ٢ = ٨٠°

بالمثل ق(⌒أجـ) = ٧٠° × ٢ = ١٤٠°

ق(⌒أب) = ٧٠° × ٢ = ١٤٠°

في الشكل المقابل دائرة مركزها و. أثبت أن $\overline{دو} \perp \overline{بج}$.



البرهان

∵ أد ينصف ب $\hat{أ}$ ج

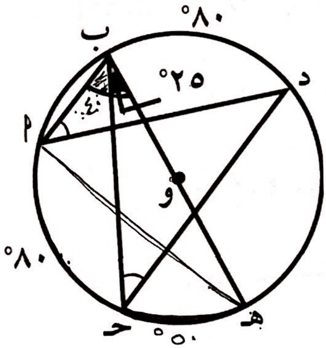
∴ ق (ب $\hat{أ}$ د) = ق (ج $\hat{أ}$ د) = ٤٥°

∵ ق (ب $\hat{أ}$ د) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (ب $\hat{و}$ د) المركزية

∴ ق (ب $\hat{و}$ د) = $٤٥^\circ \times ٢ = ٩٠^\circ$ نظرية

∴ $\overline{و د} \perp \overline{ب ج}$

أوجد قياسات الزوايا والأقواس التالية مستخدمًا الرسم المقابل:



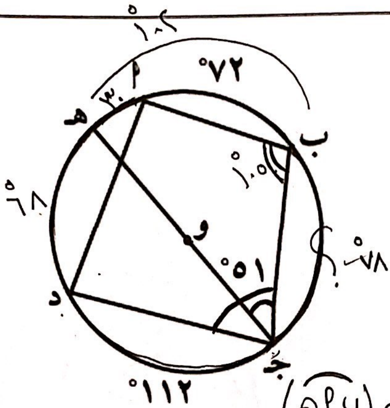
(أ) ق($\hat{أ}$). = ٤٠°

(ب) ق($\overset{\frown}{جهـ}$). = ٥٠°

(ج) ق($\hat{ج}$). = ٤٠°

(د) ق(أ$\hat{ب}$هـ). = ٦٥°

في الشكل المقابل، أوجد قياس كل من:



(أ) القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$.

(ب) ق($\hat{\text{ب}}$).

(جـ) ق(ب $\hat{\text{جـ}}$ د).

الحل

∵ ق(ب $\hat{\text{جـ}}$ هـ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{ب أ هـ}}$)

∴ ق($\overset{\frown}{\text{ب أ هـ}}$) = ٥١° × ٢ = ١٠٢° نظرية

∵ $\overline{\text{جـ هـ}}$ قطر

∴ ق($\overset{\frown}{\text{جـ ب هـ}}$) = ١٨٠°

∴ ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) = ١٨٠° − ١٠٢° = ٧٨° (١)

∵ ق($\hat{\text{ب}}$) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{أ هـ جـ}}$)

∴ ق($\hat{\text{ب}}$) = $\frac{٢١٠°}{٢}$ = ١٠٥° (٢)

∵ ق(ب $\hat{\text{جـ}}$ د) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{ب أ د}}$)

∴ ق(ب $\hat{\text{جـ}}$ د) = $\frac{١٧٠°}{٢}$ = ٨٥° (٣)

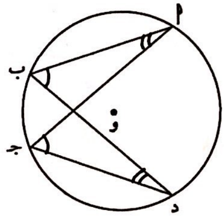
نتائج

١) كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.

٢) كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.

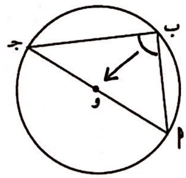
٣) كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة)، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.

٤) في الشكل إذا تطابقت الزاويتان أ̂، د̂ المرسومات على القاعدة ب جـ وفي جهة واحدة منها. كان الشكل أ ب جـ د رباعيًّا دائريًّا.



أبّد ، أجّد تحصران ⌒أد

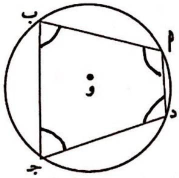
∴ ق(أبّد) = ق(أجّد)



أبّجـ تحصر ⌒أجـ (نصف دائرة)

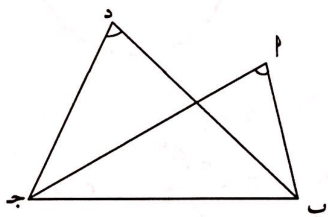
∴ ق(أبّجـ) = ٩٠°

(أبّجـ) زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة وهي زاوية قائمة



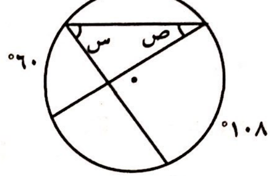
ق(أ̂) + ق(جـ̂) = ١٨٠°

ق(ب̂) + ق(د̂) = ١٨٠°



أوجد قياسات الزوايا والأقواس المجهولة في كلّ من الأشكال الهندسية التالية:

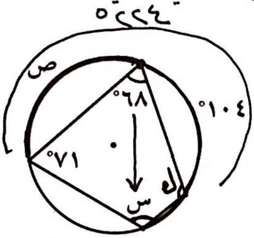
(أ)



س = $\frac{١٠٨^\circ}{٢}$ = ٥٤°

ص = $\frac{٦٠^\circ}{٢}$ = ٣٠°

(ب)

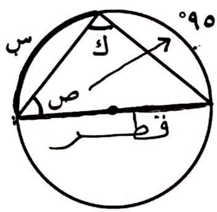


س = ١٨٠° − ٦٨° = ١١٢°

ك = ١٨٠° − ٧١° = ١٠٩°

ص = ٢٢٤ − ١٠٤ = ١٢٠°

(جـ)

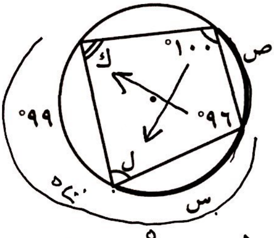


ك = ٩٠°

ص = $\frac{٩٥^\circ}{٢}$ = ٤٧,٥°

س = ١٨٠° − ٩٥° = ٨٥°

(د)



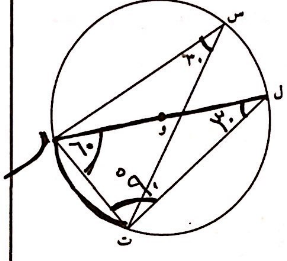
ل = ١٨٠° − ١٠٠° = ٨٠°

ك = ١٨٠° − ٩٦° = ٨٤°

س = ٢٠٠ − ٩٩° = ١٠١°

ص = ١٦٨ − ١٠١

= ٦٧°



مستخدمًا معطيات الشكل المقابل حيث و مركز الدائرة:

(أ) ما نوع المثلث ر ل ت؟ ثلاثيني ستيني

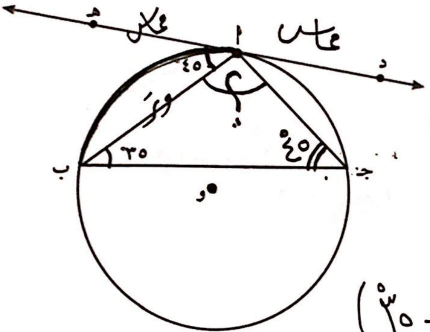
(ب) أوجد ق(ل رْت). ٦٠°

(جـ) أوجد محيط Δر ل ت بدلالة نق. ٣٧ نق

نظرية (٣) (١) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.

(٢) قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

في الشكل المقابل إذا كان $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماسًّا للدائرة عند أ، فأوجد ق(جـ أ̂ ب).



البرهان

ق (جـ) = ق (هـ أ̂ ب) = ٤٥°

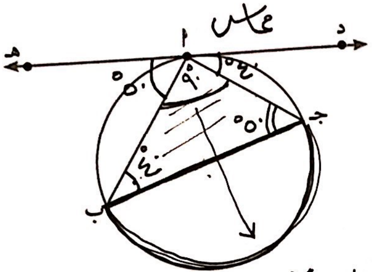
مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$

∴ ق (جـ أ̂ ب) = ١٨٠° − (٤٥° + ٣٥°)

= ١٠٠°

لأن مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

في الشكل المقابل، لدينا: ق(د$\hat{أ}$ج) = ٤٠°، ق(ه$\hat{أ}$ب) = ٥٠°.



أ أوجد قياسات زوايا المثلث اب ج.

ب أثبت أن $\overline{\text{جـ ب}}$ قطر للدائرة.

البرهان

ق($\hat{ب}$) = ق(د$\hat{أ}$ج) = ٤٠°

مشتركتان في أج نظرية

ق($\hat{ج}$) = ق(ه$\hat{أ}$ب) = ٥٠°

مشتركتان في أب

∴ ق(ج$\hat{أ}$ب) = ١٨٠° − (٥٠° + ٤٠°) = ٩٠°

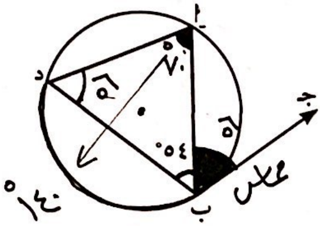
لأن مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

∵ ق(ج$\hat{أ}$ب) = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{\text{بج}}$)

∴ ق($\overset{\frown}{\text{باج}}$) = ٩٠° × ٢ = ١٨٠°

∴ باج قطر في الدائرة.

في الشكل المقابل، إذا كان ق(ب د⌒) = ١٤٠°، فإن ق(أب̂ جـ) =



البرهان

ق(أ̂) = $\frac{١}{٢}$ ق(ب د⌒)

ق(أ̂) = $\frac{١٤٠°}{٢}$ = ٧٠°

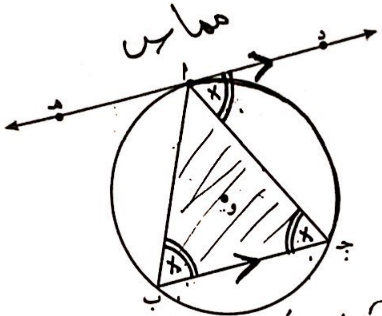
ق(د̂) = ١٨٠° − (٧٠° + ٥٤°) = ٥٦°

لأن مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

ق(أب̂ جـ) = ق(د̂) = ٥٦° مشتركتان في أب⌒

في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{دهـ}$ مماس للدائرة عند النقطة أ، $\overline{ب جـ}$ وتر في الدائرة موازٍ للمماس $\overleftrightarrow{دهـ}$.

أثبت أن المثلث أب جـ متطابق الضلعين.



البرهان

∵ ق(بَ) = ق(دأجـ) مشتركتان في أجـ

∵ ق(جـَ) = ق(دأجـ) بالتبادل والتوازي

∴ ق(بَ) = ق(جـَ)

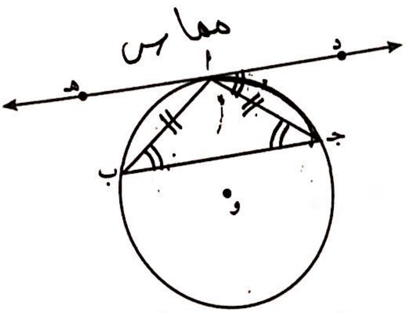
∴ أجـ = أب

∴ △ أب جـ متطابق الضلعين

في الشكل المقابل، إذا كان لدينا دهـ↔ مماس للدائرة عند النقطة أ.

المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين (أب = أجـ).

أثبت أن دهـ↔ // ب جـ



البرهان

∵ ق(د أ̂ جـ) = ق(ب̂) مشتركتان في أجـ

∵ أب = أجـ

∴ ق(جـ̂) = ق(ب̂)

∴ ق(د أ̂ جـ) = ق(جـ̂) وهما متبادلتان

∴ دهـ↔ // ب جـ

٦ ـ ٤ الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس

تقاطع الأوتار داخل الدائرة

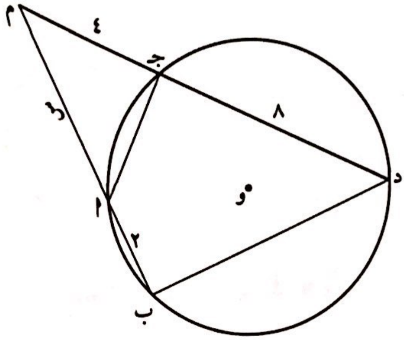
نظرية (١)

إذا تقاطع وتران داخل دائرة

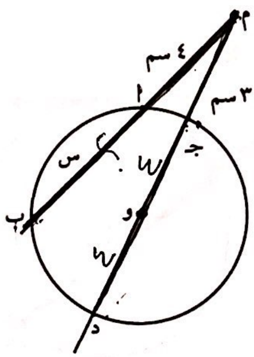
نتيجة (١)

تقاطع الأوتار خارج الدائرة

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.

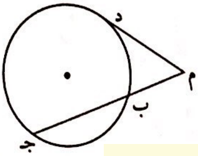


في الشكل المقابل، دائرة مركزها و. طول نصف قطرها يساوي ٤ سم.
أوجد قيمة س.



تقاطع مماس وقاطع الدائرة من نقطة خارج دائرة

نتيجة (٢)



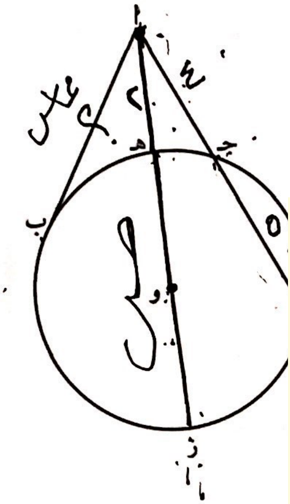
إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.

(م د)^{٢} = م ب × م جـ .

سم.

المعطيات: أ جـ = ٤ سم، أ د = ٩ سم، أب قطعة مماسية.

المطلوب: إيجاد طول $\overline{أب}$.



أوجد طول نصف قطر الدائرة إذا كانت أ هـ = ٢ سم.

الوحدة السابعة (المصفوفات) ← مصفوفة

٧-١ تنظيم البيانات في مصفوفات

تعريف

المصفوفة هي تنظيم من الأعداد المرتبة في صفوف وأعمدة.

الأعداد المكونة للمصفوفة تسمى عناصر

رتبة المصفوفة

نرمز إلى المصفوفة بأحد حروف الهجاء ونضع تحته خطًّا، نكتب أ ونقرأ **المصفوفة أ**.

عدد الصفوف (م) وعدد الأعمدة (ن) يحددان **رتبة المصفوفة** وتكتب م × ن.

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ٧ & ٦ \end{bmatrix} = \underline{أ}$$

المصفوفة أ هي من **الرتبة ٢ × ٣**.

ملاحظة: لكتابة رتبة المصفوفة نكتب أولًا عدد الصفوف يليه عدد الأعمدة.

اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٤ \\ ٧- & ٣- & ٢ \\ ٩ & ٠ & ١ \end{bmatrix} = \underline{أ}$$

٣ × ٣

$$\begin{bmatrix} ٣- & \frac{٢}{٣} & ٤- \end{bmatrix} = \underline{ب}$$

١ × ٣

$$\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ ٠,٥ \end{bmatrix} = \underline{ج}$$

٤ × ١

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٥ & ٤ \\ ٧ & ٠,٥ & ٢- \end{bmatrix} = \underline{أ}$$

٢ × ٣

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ٨- \end{bmatrix} = \underline{ب}$$

١ × ٣

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١٠ \\ ٥- & ١- \\ ٩ & ٠,٦ \end{bmatrix} = \underline{ج}$$

٣ × ٢

ترميز عناصر المصفوفة

يحدد أي عنصر في المصفوفة بدلالة رقمي الصف والعمود الواقع فيهما.

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{bmatrix}$$

العنصر في الصف الأول والعمود الثالث: $أ_{٣١}$

في المصفوفة: $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ١ & ١٢ \\ ٣,٥ & ٢ & ٦ & ٢ \\ ٤- & ١ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ **اكتب قيمة كل عنصر مما يلي:**

أ $ب_{٢٢} = ٦$ **ب** $ب_{١٣} = ١$ **ج** $ب_{١١} = ١٢$

المصفوفات: المربعة، الأفقية، العمودية

صنّف كلًّا من المصفوفات التالية:

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & ٥- & ١ \\ ٧ & ٤ & ٠ \\ ٨ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ مربعة

$\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٠,٢ \end{bmatrix}$ عمودية

$\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٥- & ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ أفقية

$\underline{د} = \begin{bmatrix} ١,٤ & ٣ & ٢- \\ ٥ & ٨ & ١٢ \end{bmatrix}$ مستطيلة

المصفوفات المتساوية:

تكون مصفوفتان متساويتين إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية والعكس صحيح.

إذا كانت: $\begin{bmatrix} ٢س - ٥ & ٤ \\ ٣ & ٣ص + ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٤ \\ ٣ & ص + ١٨ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

٢س − ٥ = ٢٥

٢س = ٢٥ + ٥

$\frac{\cancel{٢}س}{\cancel{٢}} = \frac{٣٠}{٢}$

س = ١٥

٣ص + ١٢ = ص + ١٨

٣ص − ١ص = ١٨ − ١٢

$\frac{\cancel{٢}ص}{\cancel{٢}} = \frac{٦}{٢}$

ص = ٣

إذا كانت $\begin{bmatrix} ٣٨ & ٥ \\ ٣ & ٤ص - ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س + ٨ & ٥ \\ ٣ & -ص \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

س + ٨ = ٣٨

س = ٣٨ − ٨

س = ٣٠

٤ص − ١٠ = −ص

٤ص + ص = ١٠

$\frac{\cancel{٥}ص}{\cancel{٥}} = \frac{١٠}{٥}$

ص = ٢

٣×١ ٣×١

إذا كانت [٣س   س + ص   س − ص] = [−٩   ٤   −١٠] فأوجد قيمة كل من س، ص.

٣س = −٩

$\frac{\text{٣س}}{\text{٣}} = \frac{\text{−٩}}{\text{٣}}$

س = −٣

س + ص = ٤

−٣ + ص = ٤

ص = ٤ + ٣

ص = ٧

أوجد قيم كل من س، ص.

$$\begin{bmatrix} \text{٤} & \text{٩} \\ \text{٥ص} & \text{−٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٤} & \text{س}^{\text{٢}} \\ \text{ص}^{\text{٢}} & \text{−٢} \end{bmatrix}$$

$\text{س}^{\text{٢}}$ = ٩

س = $\pm\sqrt{\text{٩}}$

س = ±٣

$\text{ص}^{\text{٢}}$ = ٥ص

$\text{ص}^{\text{٢}}$ − ٥ص = ٠

أ = ١   ب = −٥   جـ = ٠

الحاسبة

ص = ٥ أو ص = ٠

٧-٢ جمع وطرح المصفوفات

لجمع مصفوفتين أ، ب يجب أن تكونا من الرتبة نفسها.

نجمع كل عنصرين لهما الموقع نفسه في أ، ب. مصفوفة الجمع لها رتبة كل من المصفوفتين أ، ب.

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 7 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ (٢×٣)، ب $= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ (٣×٢)، ج $= \begin{bmatrix} -3 & 9 & 3 \\ 12 & 6 & -9 \end{bmatrix}$ (٢×٣)

فأوجد إن أمكن:

أ) أ + ب لا يمكن

ب) أ + ج

وإذا لم يكن الجمع ممكنًا، فاذكر السبب.

أ + ج $= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 7 & -5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 9 & 3 \\ 12 & 6 & -9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 19 & 1 & -6 \end{bmatrix}$

أ − ج $= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 7 & -5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 9 & 3 \\ 12 & 6 & -9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & -11 & -2 \\ -5 & -11 & 12 \end{bmatrix}$

أوجد ناتج ما يلي: $\begin{bmatrix} 24 & -12 \\ 5 & -3 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -5 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & -15 \\ 9 & -8 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

خواص جمع المصفوفات

إذا كان أ ، ب ، جـ مصفوفات من الرتبة م × ن فإن:

- **أ + ب هي من الرتبة م × ن** — خاصية الإقفال (الانغلاق)
- **أ + ب = ب + أ** — خاصية الإبدال **Commutative**
- **(أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ)** — خاصية التجميع **Associative**
- **وم×ن + أ = أ + وم×ن = أ** — المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد الجمعي من الرتبة م × ن
- **أ + (−أ) = وم×ن** — خاصية المعكوس الجمعي (النظير الجمعي).

طرح المصفوفات

$$\text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ١ \\ ٤ & ٢ & ٢- \end{bmatrix} \quad ، \quad \begin{bmatrix} ٤ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ & ١- \end{bmatrix} = \text{أ}$$

أوجد أ − ب ، ب − أ

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ١ \\ ٤ & ٢ & ٢- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ & ١- \end{bmatrix} = \text{أ} - \text{ب}$$

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢- & ٢ \\ ٤- & ٢ & ١ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ & ١- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ١ \\ ٤ & ٢ & ٢- \end{bmatrix} = \text{ب} - \text{أ}$$

$$\begin{bmatrix} ١- & ٢ & ٢- \\ ٤ & ٢- & ١- \end{bmatrix} =$$

$$\text{أ} - \text{ب} \neq \text{ب} - \text{أ}$$

$$\text{أ} + \text{ب} = \text{ب} + \text{أ}$$

أوجد ناتج كل مما يلي:

أ

$$\begin{bmatrix} ٧ & ١٢- & ١٠ \\ ٢- & ٤- & ٨- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ٤- \\ ١٠ & ٥ & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & ٩- & ٦ \\ ٨ & ١ & ٢- \end{bmatrix}$$

ب

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ١٤ & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٣- \\ ٤- & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ١٠ & ١- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٧ \\ ٢- & ٣ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٦ & ٣- \\ ٧ & ٥- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \\ ٧ & ٦ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٧ \\ ٢- & ٣ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ١٠ & ١- \\ ١٤ & ١ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٦- \\ ١٢ & ٤- \\ ١٠ & ٢- \end{bmatrix} =$$

حل المعادلات المصفوفية

حل المعادلة المصفوفية التالية:

$$\underline{س} - \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٩ & ٨ \end{bmatrix}$$

$$\underline{س} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٩ & ٨ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$\underline{س} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١١ & ١١ \end{bmatrix}$$

أوجد $\underline{س}$ حيث:

$$\underline{س} + \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ١٠ \\ ٤ & -٤ \end{bmatrix}$$

$$\underline{س} = \begin{bmatrix} ٧ & ١٠ \\ ٤ & -٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\underline{س} = \begin{bmatrix} ٧ & ١١ \\ -١ & -٦ \end{bmatrix}$$

٣-٧ ضرب المصفوفات

ضرب مصفوفة في عدد

الضرب القياسي هو عملية ضرب مصفوفة أ في عدد حقيقي ك : ك ≠ ٠.

الناتج هو المصفوفة ك أ.

نحصل على المصفوفة ك أ بضرب كل عنصر من أ في ك.

إذا كان ك = ٠، يكون الناتج مصفوفة صفرية.

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & -١ & -٢ \end{bmatrix}$

٣×٢ $\qquad$ ٣×٢

فأوجد:

٥أ − ٣ب $= ٥ \begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix} - ٣ \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & -١ & -٢ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -٢٠ & ١٥ & ١٠ \\ ١٥ & ٢٠ & ٢٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ٠ \\ ٩ & -٣ & -٦ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -٢٦ & ١٢ & ١٠ \\ ٦ & ٢٣ & ٣١ \end{bmatrix}$

٥ب − ٤أ $= \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & -١ & -٢ \end{bmatrix} - ٤ \begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & -١ & -٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -١٦ & ١٢ & ٨ \\ ١٢ & ١٦ & ٢٠ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ١٨ & -١١ & -٨ \\ -٩ & -١٧ & -٢٢ \end{bmatrix}$

معادلة مصفوفية

حل المعادلة: $4\text{س} + 2\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$$4\text{س} + \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$4\text{س} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{\frac{1}{4}} \times \cancel{4}\text{س} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$\frac{4}{1} \rightarrow \frac{1}{4}$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\text{س} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} \times \cancel{2}\text{س} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات

بفرض $\underline{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

حدّد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب: $\underline{أ} \times \underline{ب}$، $\underline{ب} \times \underline{أ}$ معرّفة أو غير معرّفة.

الحل

$\underline{أ} \times \underline{ب}$: $3 \times 2 = 2 \times 2$ معرفة

$\underline{ب} \times \underline{أ}$: $2 \times 2 \neq 3 \times 2$ غير معرفة

$$\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 8 \\ 2 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ -5 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 \times 2 + 2 \times 3 & 0 \times 2 + -5 \times 3 \\ 8 \times -1 + 2 \times 8 & 0 \times -1 + -5 \times 8 \\ 8 \times 4 + 2 \times 0 & 0 \times 4 + -5 \times 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & -15 \\ 8 & -40 \\ 32 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد ناتج ضرب كلّ مما يلي:

$$\begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١\times-٣ + ٢\times٤ & ٠\times-٣ + -٣\times٤ \\ ١\times٥ + ٢\times٢ & ٠\times٥ + -٣\times٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٥ & -١٢ \\ ٩ & -٦ \end{bmatrix}$$

إذا كانت $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$. أوجد: $\underline{ب}^٢$ ، $\underline{ب}^٣$.

$\underline{ب}^٢ = \underline{ب} \times \underline{ب}$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ -٦ & ١٥ \end{bmatrix}$$

$\underline{ب}^٣ =$

معلق

$=$

$=$

٧ ـ ٤ مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)

مصفوفة الوحدة

المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي ١، وبقية العناصر صفر تسمى **مصفوفة الوحدة**

$$\underline{و}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \qquad \underline{و}_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\underline{أ} \times \underline{و} = \underline{و} \times \underline{أ} = \underline{أ}$$

النظير الضربي

إذ كانت $\underline{أ}$، $\underline{س}$ مصفوفتين مربعتين من الرتبة نفسها بحيث يكون $\underline{أ} \times \underline{س} = \underline{و}$، فإن $\underline{س}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ}$.
ويرمز إليها بِ $\underline{أ}^{-١}$.

إذًا $\underline{أ} \times \underline{أ}^{-١} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{أ} = \underline{و}$

أثبت أن $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ **هي النظير الضربي للمصفوفة** $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$.

$$\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢\times٢ + ٣\times-١ & ٢\times-٣ + ٣\times٢ \\ ١\times٢ + ٢\times-١ & ١\times-٣ + ٢\times٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \underline{و}$$

∴ $\underline{ب}$ نظير ضربي $\underline{أ}$

محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} ج & أ \\ د & ب \end{bmatrix}$ هو أ د − ب جـ

نكتب $|أ| = \begin{vmatrix} ج & أ \\ د & ب \end{vmatrix} =$ أ د − ب جـ

تسمى المصفوفة التي محددها يساوي الصفر **بالمصفوفة المنفردة**

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية: $أ = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٠ & س \\ س & ٠ \end{bmatrix}$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٤ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{vmatrix} = (-٣ \times -٥) - (٤ \times ٢) = ٧$$

$$|ب| = \begin{vmatrix} -٣ & ٢ \\ -٢ & ٣ \end{vmatrix} = (٢ \times -٢) - (-٣ \times ٣) = ٥$$

$$|جـ| = \begin{vmatrix} ٠ & س \\ س & ٠ \end{vmatrix} = (س \times س) - (٠ \times ٠)$$

$$= س^٢ - ٠$$

$$= س^٢$$

خاصية

بفرض أن: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$ إذا كان أ د − ب جـ ≠ ٠ ، فإن $\underline{أ}$ لها نظير ضربي $\underline{أ}^{-1}$ حيث:

$$\underline{أ}^{-1} = \frac{1}{|\underline{أ}|} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$$

$$\underline{أ}^{-1} = \frac{1}{أ د - ب جـ} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$$

حدّد أي مصفوفة مما يلي لها نظير (معكوس) ضربي، ثم أوجده.

أ $\underline{م} = \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

① $|\underline{م}| = \begin{vmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{vmatrix}$

$= (-٢ \times -٤) - (٢ \times ٥)$

$= -٢ \neq$ صفر

∴ يوجد نظير ضربي

② $\underline{م}^{-1} = \frac{1}{-٢} \begin{bmatrix} -٤ & -٢ \\ -٥ & -٢ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ \frac{٥}{٢} & ١ \end{bmatrix}$

ب $\underline{ن} = \begin{bmatrix} ٣ & ٩ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

① $|\underline{ن}| = \begin{vmatrix} ٣ & ٩ \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix}$

$= (٣ \times ٦) - (٩ \times ٢)$

= صفر

∴ لا يوجد نظير ضربي

إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} س & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س.

∵ أ منفردة

∴ |أ| = صفر

(س × ٦) − (٤ × ١٢) = صفر

٦س − ٤٨ = صفر

$\frac{\cancel{٦}\,س}{\cancel{٦}} = \frac{٤٨}{٦}$ ← س = ٨

إذا كانت المصفوفة ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ ٢س & -٤ \end{bmatrix}$ منفردة، أوجد قيمة س.

∵ ب منفردة

∴ |ب| = صفر

(٥ × ٢س) − (١٠ × −٤) = صفر

١٠س − −٤٠ = صفر

١٠س + ٤٠ = ٠

$\frac{\cancel{١٠}\,س}{\cancel{١٠}} = \frac{-٤٠}{١٠}$

س = −٤

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام:

٣س + ٢ص = −٦

−٤س − ٣ص − ٧ = ٠

معلق

دلتا

① ≠ ٠

② ٤

③ ٣

④

⑤

استخدام قاعدة كرامر (المحددات) لحل معادلتين خطيتين:

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام:

٤س − ٥ص + ٧ = ٠

٣ص − ٦س + ٣ = ٠

الحل

معلق

① ... ≠ ٠

② Δ

③ Δد ... ٥

④ س

⑤ ص

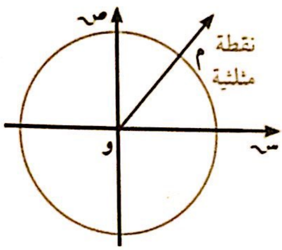
٨ – ١ دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)

دائرة الوحدة

هي دائرة مركزها نقطة الأصل و، وطول نصف قطرها واحد وحدة.

النقطة المثلثية

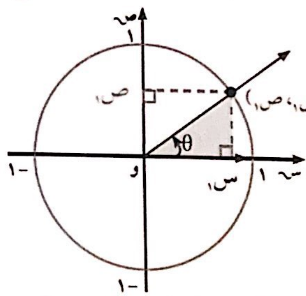
هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة.



ملاحظة: تكون النقطة (س، ص) نقطة مثلثية إذا وفقط إذا كان س^{٢} + ص^{٢} = ١

سوف نستخدم الرمز θ لنرمز إلى قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي.

النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ



جتاθ = س$_{١}$ جاθ = ص$_{١}$

ظاθ = $\dfrac{ص_{١}}{س_{١}}$ ، س$_{١}$ ≠ ٠   ظتاθ = $\dfrac{س_{١}}{ص_{١}}$ ، ص$_{١}$ ≠ ٠

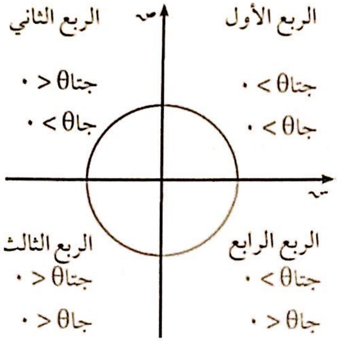
قاθ = $\dfrac{١}{س_{١}}$ ، س$_{١}$ ≠ ٠   قتاθ = $\dfrac{١}{ص_{١}}$ ، ص$_{١}$ ≠ ٠

إذا كانت θ في الربع الأول فإن: جاθ > ٠، جتاθ > ٠

إذا كانت θ في الربع الثاني فإن: جاθ > ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الثالث فإن: جاθ < ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الرابع فإن: جاθ < ٠، جتاθ > ٠



θ (ثيتا)

حدّد إشارة جاθ، جتاθ في كل مما يلي:

أ θ = ١٣٥°

∵ θ تقع في الربع الثاني

جاθ > ٠

جتاθ < ٠

ظاθ < ٠

ب θ = $\frac{٧\pi}{٦}$

θ = $\frac{١٨٠° \times ٧}{٦}$

= ٢١٠°

∴ θ تقع في الربع الثالث

جاθ < ٠

جتاθ < ٠

ظاθ > ٠

ج θ = ٣٠٥°

∵ θ تقع في الربع الرابع

جاθ < ٠

جتاθ > ٠

ظاθ < ٠

(٢) (٣)

أ إذا كانت ٩٠° < θ < ٢٧٠°. ما هي إشارة جتاθ؟ جتاθ < ٠

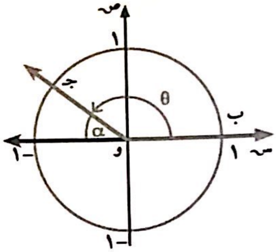
ب إذا كانت ٠° < θ < π. ما هي إشارة جاθ؟ جاθ > ٠

π = ١٨٠°

(٢) (١)

زاوية الإسناد

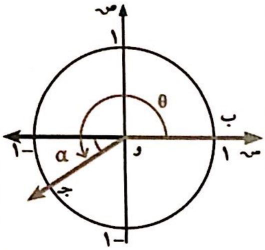
زاوية الإسناد للزاوية الموجهة ($\overrightarrow{\text{وب}}$، $\overrightarrow{\text{وجـ}}$) التي في وضع قياسي
هي الزاوية **الحادة** α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات.
فإذا كان α زاوية الإسناد فإن: $٠^\circ < \alpha < ٩٠^\circ$



عندما θ تقع في الربع الثاني

$\alpha^\circ = ١٨٠^\circ - \theta^\circ$

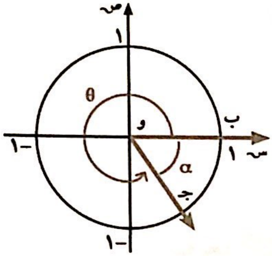
$\alpha^{د} = \pi - \theta^{د}$



عندما θ تقع في الربع الثالث

$\alpha^\circ = \theta^\circ - ١٨٠^\circ$

$\alpha^{د} = \theta^{د} - \pi$



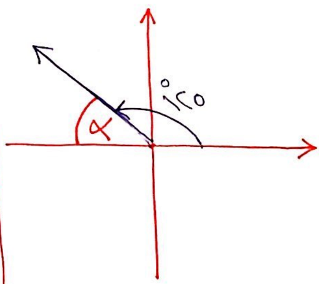
عندما θ تقع في الربع الرابع

$\alpha^\circ = ٣٦٠^\circ - \theta^\circ$

$\alpha^{د} = ٢\pi - \theta^{د}$

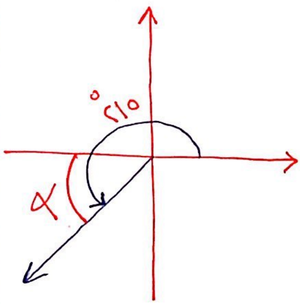
ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة في وضع قياسي، ثم عيّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها لكل مما يلي:

أ ١٢٥°



$\alpha = ١٨٠^\circ - ١٢٥^\circ = ٥٥^\circ$

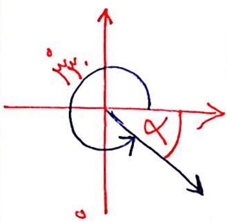
ب ٢١٥°



$\alpha = ٢١٥^\circ - ١٨٠^\circ$
$= ٣٥^\circ$

جـ $\frac{١١\pi}{٦}$

$= \frac{١٨٠^\circ \times ١١}{٦}$
$= ٣٣٠^\circ$



$\alpha = ٣٦٠^\circ - ٣٣٠^\circ$
$= ٣٠^\circ$

٨-٢ العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

تسمى جاθ، جتاθ، ظاθ النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ وتدعى النسب المثلثية الأساسية

علمًا بأن -١ ≤ جتاθ ≤ ١

-١ ≤ جاθ ≤ ١

ظاθ ∋ ح

النسب المثلثية للزاويتين θ، $-\theta$.

قانون:

جتا($-\theta$) = جتاθ

جا($-\theta$) = $-$جاθ

وبالتالي ظا($-\theta$) = $-$ظاθ بشرط أن يكون ظاθ معرّف.

أكمل إذا كان:

أ) جا م = ٣,٠ فإن جا($-$ م) = ... $-$جا م = $-$ ٣,٠

ب) جتا ل = ٣٨,٠ فإن جتا($-$ ل) = ... جتا ل = ٣٨,٠

ج) ظا س = ٣,١٤ فإن ظا($-$ س) = ... $-$ ظا س = $-$١٤,٣

د) جتا($-$ ص) = $\frac{1}{4}$ فإن جتا ص = ... $\frac{1}{٤}$

جتا ص = $\frac{1}{٤}$

النسب المثلثية للزاويتين θ ، $(\pi - \theta)$.

قانون:

جتا$(\pi - \theta)$ = −جتاθ

جا$(\pi - \theta)$ = جاθ

وبالتالي ظا$(\pi - \theta)$ = −ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

بدون استخدام الآلة الحاسبة. إذا كان:

أ جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ، فأوجد جا ١٥٠°.

ب جتاس = $\frac{٤}{٥}$ ، فأوجد جتا(π − س).

ج ظا $\frac{\pi}{١٢}$ = ٢ − $\sqrt{٣}$، فأوجد ظا $\frac{١١\pi}{١٢}$.

ظا ١٥° = ٢ − $\sqrt{٣}$

أ جا ١٥٠° = جا (١٨٠° − ٣٠°) = + جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

جا ١٣٥° = جا (١٨٠° − ٤٥°) = + جا ٤٥° = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

ب جتا (π − س) = − جتا س = − $\frac{٤}{٥}$

ج ظا $\frac{١١\pi}{١٢}$ = ظا $\frac{١١ \times ١٨٠}{١٢}$ =

= ظا ١٦٥

= ظا (١٨٠ − ١٥) = − ظا ١٥

= − (٢ − $\sqrt{٣}$)

النسب المثلثية للزاويتين θ، $(\pi + \theta)$.

قانون:

جتا$(\pi + \theta)$ = −جتاθ

جا$(\pi + \theta)$ = −جاθ

وبالتالي ظا$(\pi + \theta)$ = ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان:

أ جا ٣٠° = $\frac{1}{2}$، فأوجد جا ٢١٠°.

جا ٢١٠ = جا (١٨٠ + ٣٠°) ③

= − جا ٣٠°

= − $\frac{1}{2}$

ب ظا $\frac{\pi}{8}$ = −١ + $\sqrt{2}$، فأوجد ظا $\frac{9\pi}{8}$.

ظا $\frac{\pi}{8}$ = ظا $\frac{180°}{8}$ = ظا ٢٢,٥ = −١ + $\sqrt{2}$

ظا $\frac{9\pi}{8}$ = ظا $\frac{180 \times 9}{8}$° = ظا ٢٠٢,٥

= ظا (١٨٠ + ٢٢,٥) ③

= + ظا ٢٢,٥

= −١ + $\sqrt{2}$

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جتا ٤٠° ≃ ٠,٧٦٦ . فأوجد جتا ٢٢٠°.

جتا ٢٢٠ = جتا (١٨٠ + ٤٠°) ③

= − جتا ٤٠

= − ٠,٧٦٦

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$

قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = −جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = −ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

الدوال المثلثية (الدائرية) على ح

إذا كان ك عددًا صحيحًا فإن:

جا(θ + ٢ك π) = جاθ

جتا(θ + ٢ك π) = جتاθ

ظا(θ + ك π) = ظاθ حيث ظاθ معرّف

بدون استخدام الآلة الحاسبة، أكمل:

جا٣٩٠° = جا(٣٠° + ٣٦٠°) = جا ٣٠ = $\frac{1}{2}$

جتا٧٦٥° = جتا(٤٥° + ٧٢٠°) = جتا ٤٥ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

ظا$\left(\frac{-11\pi}{3}\right)$ = ظا($\frac{\pi}{3}$ + ٤π) = ظا $\frac{\pi}{3}$ = $\sqrt{3}$

بسط التعبير التالي لأبسط صورة:

جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° − س).

= جا س + (+ جتا س) + (− جا س) + (+ جتا س)

= ~~جا س~~ + جتا س − ~~جا س~~ + جتا س

= ٢ جتا س

بسّط التعبيرات التالية لأبسط صورة:

(أ) جتا$(\pi - \theta)$ − جتا$(-\theta)$ + جا$(\pi + \theta)$ + جتا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

= − جتا θ − جتا θ + (− جا θ) + (+ جا θ)

= − جتا θ − جتا θ − ~~جا~~ θ + ~~جا~~ θ

= − ٢ جتا θ

(ب) جا$(\pi + \theta)$ − جتا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ + جتا$(\pi - \theta)$ + جا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$.

جا$(\pi + \theta)$ − جتا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ + جتا$(\pi - \theta)$ + جا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

= − جا θ − (− جا θ) + (− جتا θ) + (+ جتا θ)

= − ~~جا~~ θ + ~~جا~~ θ − ~~جتا~~ θ + ~~جتا~~ θ

= صفر

حل معادلات مثلثية

حل المعادلة: جتا س = جتاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = −θ + ٢ك π (ك ∈ ص)

لاحظ أن جيب تمام الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع.

حل كلًّا من المعادلتين:

أ جتا س = $\frac{١}{٢}$ > ٠

ب ٢ جتا س − $\sqrt{٣}$ = ٠

معلق

حل المعادلة : $\sqrt{٢}$ جتا س = ١ .

معلق

حل المعادلة: ٢جا س - ١ = ٠

معلق

حل المعادلة جا س = جا θ

هو س = θ + ٢ك π أو س = (π − θ) + ٢ك π ، (ك $\in$ ص)

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني.

حل كلًّا من المعادلتين:

أ) جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ب) ٢ جا س = $\sqrt{٢}$

معلق

حل المعادلة ظا س = ظاθ هو س = θ + ك π، (ك $\in$ ص)

لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث.

حل المعادلة: $\sqrt{3}$ ظا س = ١.

الحل

معلق

٨–٣ العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

المتطابقات المثلثية الأساسية

ظاθ = $\dfrac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ ، ظتاθ = $\dfrac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$ ، ظتاθ = $\dfrac{١}{\text{ظا}\theta}$ حيث المقام ≠ ٠

قاθ = $\dfrac{١}{\text{جتا}\theta}$ ، قتاθ = $\dfrac{١}{\text{جا}\theta}$

متطابقات فيثاغورث

جا^{٢} θ + جتا^{٢} θ = ١ تسمى متطابقة فيثاغورث

١ + ظا^{٢} θ = قا^{٢} θ

١ + ظتا^{٢} θ = قتا^{٢}θ

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جا$\theta = \frac{٣}{٥}$ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$ (٩٠°) فأوجد جتاθ، ظاθ.

الحل

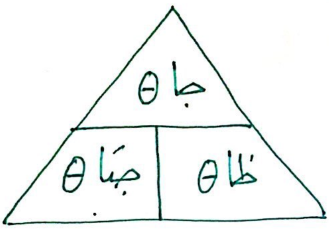
$$\text{جتا}^2\theta = ١ - \text{جا}^2\theta$$

$$\text{جتا}^2\theta = ١ - \left(\frac{٣}{٥}\right)^2 = \frac{١٦}{٢٥}$$

$$\text{جتا}\,\theta = \pm\sqrt{\frac{١٦}{٢٥}} = \pm\frac{٤}{٥}$$

∵ θ تقع في الربع الاول

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{٤}{٥}$$



$$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$$

$$\text{ظا}\,\theta = \frac{٣}{٥} \div \frac{٤}{٥} = \frac{٣}{٤}$$

جا$\theta = \frac{٣}{٥}$	جتا$\theta = \frac{٤}{٥}$	ظا$\theta = \frac{٣}{٤}$
قتا$\theta = \frac{٥}{٣}$	قا$\theta = \frac{٥}{٤}$	ظتا$\theta = \frac{٤}{٣}$

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جتاθ = ٠,٤ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$ (٩٠°).

أ أوجد جاθ.

ب استنتج ظاθ.

الحل

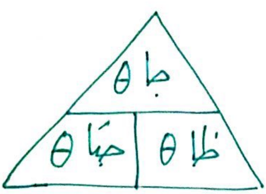
$$\text{جا}^2\theta = ١ - \text{جتا}^2\theta$$

$$\text{جا}^2\theta = ١ - (٠,٤)^2 = ٠,٨٤$$

$$\text{جا}\,\theta = \pm\sqrt{٠,٨٤} = \pm\ ٠,٩١٦$$

θ تقع فى الربع الأول

$$\text{جا}\,\theta = ٠,٩١٦$$



$$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$$

$$\text{ظا}\,\theta = ٠,٩١٦ \div ٠,٤ = ٢,٢٩$$

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظاθ = $\frac{٣}{٤}$ ، جا θ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

الحل

قا²θ = ظا²θ + ١

قا²θ = $(\frac{٣}{٤})^{٢}$ + ١ = $\frac{٢٥}{١٦}$

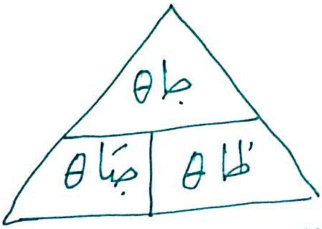
قاθ = ± $\sqrt{\frac{٢٥}{١٦}}$ = ± $\frac{٥}{٤}$

جتاθ = ± $\frac{٤}{٥}$

∵ ظاθ > ٠ ، جاθ < ٠

∴ θ تقع في الربع الثالث

جتاθ = $\frac{-٤}{٥}$



جاθ = ظاθ × جتاθ

جاθ = $\frac{٣}{٤}$ × $\frac{-٤}{٥}$ = $\frac{-٣}{٥}$

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظاθ = $\frac{١٢}{٥}$ ، جاθ > ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

الحل

$$\text{قا}^{٢}\theta = \text{ظا}^{٢}\theta + ١$$

$$\text{قا}^{٢}\theta = \left(\frac{١٢}{٥}\right)^{٢} + ١ = \frac{١٦٩}{٢٥}$$

$$\text{قا}\theta = \pm\sqrt{\frac{١٦٩}{٢٥}} = \pm\frac{١٣}{٥}$$

$$\text{جتا}\theta = \pm\frac{٥}{١٣}$$

$$\text{ظا}\theta > ٠ \text{ ، } \text{جا}\theta > ٠$$

θ تقع في الربع الاول

$$\therefore \text{جتا}\theta = \frac{٥}{١٣}$$

$$\text{جا}\theta = \text{ظا}\theta \times \text{جتا}\theta$$

$$\text{جا}\theta = \frac{١٢}{٥} \times \frac{٥}{١٣} = \frac{١٢}{١٣}$$

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظتاθ = $\frac{٥}{٨}$، جتاθ > ٠ فأوجد جاθ.

الحل

قتا$^{٢}\theta$ = ظتا$^{٢}\theta$ + ١

قتا$^{٢}\theta$ = $\left(\frac{٥}{٨}\right)^{٢}$ + ١ = $\frac{٨٩}{٦٤}$

قتاθ = $\pm\sqrt{\frac{٨٩}{٦٤}}$ = $\pm\frac{\sqrt{٨٩}}{٨}$

جاθ = $\pm\frac{٨}{\sqrt{٨٩}}$

∵ ظتاθ > ٠ ، جتاθ > ٠

∴ θ تقع فى الربع الاول

∴ جاθ = $\frac{٨}{\sqrt{٨٩}}$

٩-١ المستوى الإحداثي

المسافة بين نقطتين

قانون:

المسافة بين أي نقطتين أ (س$_١$، ص$_١$)، ب (س$_٢$، ص$_٢$) تساوي $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

أوجد المسافة بين ك (١، −٥) ، ل(٣، −٢).

س$_١$ ص$_١$ س$_٢$ ص$_٢$

معلق

نقطة المنتصف

قانون:

إذا كانت أ$(س_١ ، ص_١)$، ب$(س_٢ ، ص_٢)$، فإن إحداثيات نقطة المنتصف هي م$(س، ص)$ حيث س $= \frac{س_١ + س_٢}{٢}$ ، ص $= \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$.

أوجد نقطة منتصف $\overline{جـ د}$ حيث جـ $(\overset{س_١}{-١} ، \overset{ص_١}{٥})$، د $(\overset{س_٢}{٣} ، \overset{ص_٢}{٠})$.

معلق

٩-٢ تقسيم قطعة مستقيمة

التقسيم من الداخل

معلق

إذا كان أ (٢، ٤)، ب (٥، ٩)،

ويراد تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل من جهة ب في نقطة جـ بنسبة ٣:٥.

أوجد إحداثيات النقطة جـ.

الحل

لتك

٩-٣ (أ) ميل الخط المستقيم

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغيير الرأسي}}{\text{التغيير الأفقي}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} \text{ ، } \text{س}_٢ - \text{س}_١ \neq ٠$$

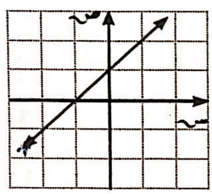
أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ(−٢، ١) ، ب(٥، ٧).

الحل

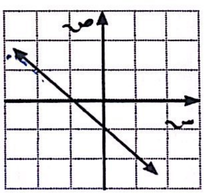
$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{أب}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

$$= \frac{٧ - ١}{٥ - {}^{-}٢}$$

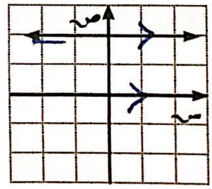
$$= \frac{٦}{٧}$$



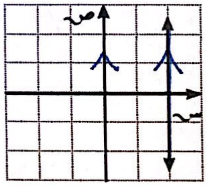
ميل المستقيم موجب



ميل المستقيم سالب



ميل المستقيم الأفقي يساوي صفرًا



المستقيم الرأسي ليس له ميل

أثبت أن النقاط أ(٢، −١) ، ب(−١، ٥) ، جـ(٣، −٣) على استقامة واحدة.

الحل

أ $(\underset{}{\overset{س_١}{٢}} ، \overset{ص_١}{-١})$ ، ب $(\overset{س_٢}{-١} ، \overset{ص_٢}{٥})$

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{٥ - -١}{-١ - ٢} = -٢ \checkmark$$

أ $(\overset{س_١}{٢} ، \overset{ص_١}{-١})$ ، جـ $(\overset{س_٢}{٣} ، \overset{ص_٢}{-٣})$

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{أجـ} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{-٣ - -١}{٣ - ٢} = -٢ \checkmark$$

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{أجـ}$

∴ أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة

٩-٣ (ب) معادلة الخط المستقيم

تكون معادلة المستقيم: $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$.

اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{٣}{٢}$ و يمر بالنقطة (٤، −١).

الحل

$م = \frac{٣}{٢}$ ، $(\overset{س_{١}}{٤} ، \overset{ص_{١}}{-١})$

∴ معادلة المستقيم هي

$ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - -١ = \frac{٣}{٢}(س - ٤)$

$ص + ١ = \frac{٣}{٢}س - ٦$

$ص = \frac{٣}{٢}س - ٦ - ١$

$ص = \frac{٣}{٢}س - ٧$

١ اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{-٢}{٣}$ ويمر بالنقطة (−٦، ٥).

$م = \frac{-٢}{٣}$ ، $(\overset{س_١}{-٦}، \overset{ص_١}{٥})$

معادلة المستقيم هي

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ٥ = \frac{-٢}{٣}(س - -٦)$

$ص - ٥ = \frac{-٢}{٣}(س + ٦)$

$ص - ٥ = \frac{-٢}{٣}س - ٤$ ←

$ص = \frac{-٢}{٣}س \underbrace{- ٤ + ٥}$

$ص = \frac{-٢}{٣}س + ١$

أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين جـ $(\overset{س_١}{٣}، \overset{ص_١}{-١})$ ، د$(\overset{س_٢}{٢}، \overset{ص_٢}{-٢})$.

الحل

$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-٢ - -١}{٢ - ٣} = ١$

$م = ١$ ، $(\overset{س}{٣}، \overset{ص_١}{-١})$

∴ معادلة المستقيم هي

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - -١ = ١(س - ٣)$

$ص + ١ = س - ٣$

$ص = س \underline{- ٣ - ١}$

$ص = س - ٤$

٣ إذا كان المستقيم ك: ٣ص + س + ٣ = ٠، فأوجد:

أ معادلة المستقيم م الموازي للمستقيم ك والذي يمر بالنقطة (−٣، ٢).

ب معادلة المستقيم ز العمودي على المستقيم ك والذي يمر بالنقطة (١، ٤).

أ

٣ص + س + ٣ = ٠

$\frac{٣ص}{٣} = \frac{-س}{٣} - \frac{٣}{٣}$

ص = $\frac{-١}{٣}$ س − ١

∵ ميل المستقيم ك = $\frac{-١}{٣}$

∵ المستقيم م // المستقيم ك

∴ ميل المستقيم م = $\frac{-١}{٣}$

م = $\frac{-١}{٣}$ ، ($\overset{س_١}{-٣}$، $\overset{ص_١}{٢}$)

معادلة المستقيم م هي

ص − ص$_١$ = م (س − س$_١$)

ص − ٢ = $\frac{-١}{٣}$ (س + ٣)

ص − ٢ = $\frac{-١}{٣}$ س − ١

ص = $\frac{-١}{٣}$ س − ١ + ٢

ص = $\frac{-١}{٣}$ س + ١

ب

ميل المستقيم ك = $\frac{-١}{٣}$

∵ المستقيم ز ⊥ المستقيم ك

∴ ميل المستقيم ز = $\frac{٣}{١}$ = ٣

م = ٣ ، ($\overset{س_١}{١}$، $\overset{ص_١}{٤}$)

∴ معادلة المستقيم ز هي

ص − ص$_١$ = م (س − س$_١$)

ص − ٤ = ٣ (س − ١)

ص − ٤ = ٣س − ٣

ص = ٣س − ٣ + ٤

ص = ٣س + ١