EOT1 *Math Grade 12* Adv

أسئلة واجابات هيكل(الرياضيات) الثاني عشر المتقدم

2025/2026

With Answers

مع الإجابات كما وردت بدليل المعلم

مع اسئلة وزارية سابقة من نفس أسئلة
ومخرجات التعلم المدرجة بالهيكل والمنهاج

عزيزي الطالب:

اجتهد في فهم المنهاج الدراسي جيدا وفي فهم الهيكل واستيعاب أفكاره وليس حفظ المسائل

لأنه وردت بعض الأسئلة في امتحانات السنوات السابقة أدرجت مسائل مثلها بالهيكل ولكن ليس هي بالنص وتم تغيير طفيف في صياغة السؤال في بعض الأسئلة.

"وفقنا الله جميعا لما يحب ويرضى"

Mr. Abdalla Abouelnaga

Grade 12 Advanced : The curriculum which included in the Final Exam Term1 (2025.2026)

أسئلة اختيار من متعدد الكترونية

Q	Learning Outcome***	Example/Exercise	Page
1	Estimate an arc length of a given function.	(7-12)	68
2	Find a limit algebraically or graphically, if it exists.	(7-8)	75
3	Find limits of polynomial, rational, and trigonometric functions using theorems.	(21-28)	85
4	Use the squeeze theorem to find limits	(29-32)	85
5	Use the continuity properties to study the continuity of a function or a composition of functions at a given point.	(21-28)	95
6	Find horizontal, vertical, and slant asymptotes using limits.	(23-32)	106
7	b) Find limits at infinity and limits that are infinite.	(9-22)	106
8	Link and interpret the slope of a secant line and tangent line	Ex3	136
9	Find the derivative of a function at a given point	(Ex3)	145
10	Understand the relationship between continuity and differentiability	13-18	151
11	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems.	21-24	161
12	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems.	37-42	161
13	Apply the chain rule for differentiation	31-38	177
14	Find the derivative of an inverse function using the Chain Rule.	17-22	176
15	Find the derivatives of trigonometric functions using differentiation rules	9-18	184
16	Find the derivatives of natural logarithmic functions	39-44	194
17	Find the derivatives of exponential functions	1-14	193
18	Use implicit differentiation to find derivatives of inverse trigonometric functions	29-32	204
19	Learn Rolle's Theorem and use it in applications	Ex1	214
20	Learn the Mean Value Theorem and use it in applications	Ex5	219

عزيزي الطالب
تعليمات هامة

المادة: رياضيات Math
الصف: 12 متقدم 12 Adv
تاريخ الاختبار: 12/2025.
مدة الامتحان : 150 دقيقة
مدة الامتحان الالكتروني: 60 دقيقة
مدة الامتحان الورقي: 90 دقيقة
عدد الأسئلة : 26 سؤال
عدد الأسئلة الموضوعية : 20 سؤال
عدد الأسئلة المقالية : 6 أسئلة
درجة السؤال الموضوعي : 3 درجات
درجات السؤال المقالي: 4 -10درجات
الدرجة الكلية: 100 درجة
نوع الأسئلة : مقالي / اختيار من متعدد
التنفيذ: ورقي/ الكتروني باستخدام برنامج سويفت اسيس

مع أطيب التمنيات للجميع بالنجاح والتفوق

أ.عبد الله أبوالنجا
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Grade 12 Advanced : The curriculum which included in the Final Exam Term1 (2025.2026)

أسئلة مقالية ورقية

Q	Learning Outcome***	Example/Exercise	Page
21	a) Determine the continuity of a function at a given point. b) Find limits at infinity and limits that are infinite.	(39-41) (33-37)	96 106
22	Apply the Product Rule on derivatives	(25-30)	169
23	Solve real-life problems using derivatives of exponential and logarithmic functions	(25-30)	194
24	Find derivatives implicitly	Ex4	199
25	Use implicit differentiation to find derivatives of inverse trigonometric functions	(29-32)	204
26	Understand the Mean Value Theorem and use it in applications.	(30-40)	119

EOT Questions_(2025/2026) _Term 1 _12Adv_ Math

Unit 2

Lesson	Questions
Lesson 2.1	1
Lesson 2.2	2
Lesson 2.3	3,4
Lesson 2.4	5,21
Lesson 2.5	6,7,21

Unit 3

Lesson	Questions
Lesson 3.1	8
Lesson 3.2	9,10
Lesson 3.3	11,12
Lesson 3.4	22
Lesson 3.5	13,14

Lesson	Questions
Lesson 3.6	15
Lesson 3.7	16,17,23
Lesson 3.8	18,24,25
Lesson 3.10	19,20,26

عزيزي الطالب
تعليمات هامة

المادة: رياضيات Math
الصف: 12 متقدم 12 Adv
تاريخ الاختبار: 12/2025
مدة الامتحان : 150 دقيقة
مدة الامتحان الالكتروني: 60 دقيقة
مدة الامتحان الورقي: 90 دقيقة
عدد الأسئلة : 26 سؤال
عدد الأسئلة الموضوعية : 20 سؤال
عدد الأسئلة المقالية : 6 أسئلة
درجة السؤال الموضوعي : 3 درجات
درجات السؤال المقالي: 4 -10درجات
الدرجة الكلية: 100 درجة
نوع الأسئلة : مقالي / اختيار من متعدد
التنفيذ: ورقي/ الكتروني باستخدام برنامج سويفت اسيس

مع أطيب التمنيات للجميع بالنجاح والتفوق

أ.عبد الله أبوالنجا
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
1	Estimate an arc length for a given function تقدير طول القوس على منحنى دالة معطاة	Exercises (7-12) Lesson 2.1	68

7) *Estimate the arc length of the curve* $f(x)$ on the interval *using* $n = 2$ *line segments.*

قدر طول قوس المنحنى $f(x)$ في الفترةالمحددة باستخدام n=2 من القطع المستقيمة.

$$f(x) = \cos x \quad , 0 \leq x \leq {}^{\pi}/_{2}$$

A	1.906	B	1.305	C	1.214	D	2.321

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
1	Estimate an arc length for a given function تقدير طول القوس على منحنى دالة معطاة	Exercises (7-12) Lesson 2.1	68

8) *Estimate the arc length of the curve* $f(x)$ on the interval *using* $n = 2$ *line segments.*

قدر طول قوس المنحنى $f(x)$ في الفترةالمحددة باستخدام n=2 من القطع المستقيمة.

$$f(x) = \sin x \quad , 0 \leq x \leq {}^{\pi}/_{2}$$

A	2.895	B	1.935	C	1.910	D	1.895

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
1	Estimate an arc length for a given function تقدير طول القوس على منحنى دالة معطاة	Exercises (7-12) Lesson 2.1	68

9) *Estimate the arc length of the curve* $f(x)$ on the interval *using* $n = 3$ *line segments.*

قدر طول قوس المنحنى $f(x)$ في الفترةالمحددة باستخدام n=3 من القطع المستقيمة.

$$f(x) = \sqrt{x+1}, \quad 0 \leq x \leq 3$$

A	1.166	B	2.166	C	3.166	D	3.965

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
1	Estimate an arc length for a given function تقدير طول القوس على منحنى دالة معطاة	Exercises (7-12) Lesson 2.1	68

10) *Estimate the arc length of the curve* $f(x)$ on the interval *using* $n = 3$ *line segments*.

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad 1 \leq x \leq 2$$

قدر طول قوس المنحنى $f(x)$ في الفترةالمحددة باستخدام n=3 من القطع المستقيمة.

A	1.13	B	2.13	C	1.65	D	2.65

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
1	Estimate an arc length for a given function تقدير طول القوس على منحنى دالة معطاة	Exercises (7-12) Lesson 2.1	68

11) *Estimate the arc length of the curve* $f(x)$ on the interval *using* $n = 4$ *line segments.*

قدر طول قوس المنحنى $f(x)$ في الفترةالمحددة باستخدام n=4 من القطع المستقيمة.

$$f(x) = x^2 + 1, \quad -2 \le x \le 2$$

A	$2\sqrt{2}+2\sqrt{10}$	B	$\sqrt{2}+\sqrt{10}$	C	$3\sqrt{2}+3\sqrt{10}$	D	$2\sqrt{2}+3\sqrt{10}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
1	Estimate an arc length for a given function تقدير طول القوس على منحنى دالة معطاة	Exercises (7-12) Lesson 2.1	68

12) *Estimate the arc length of the curve* $f(x)$ on the interval *using* $n = 3$ *line segments.*

قدر طول قوس المنحنى $f(x)$ في الفترةالمحددة باستخدام n=2 من القطع المستقيمة.

$$f(x) = x^3 + 2, \quad -1 \le x \le 1$$

A	$2\sqrt{2}$	B	$\sqrt{2}$	C	2	D	$3\sqrt{2}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830
Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
1	Estimate an arc length for a given function تقدير طول القوس على منحنى دالة معطاة	Exercises (7-12) Lesson 2.1	68

Full Answer for questions in the cases a) n=4 , b) n=8

In exercises 7–12, estimate the length of the curve $y = f(x)$ on the given interval using (a) $n = 4$ and (b) $n = 8$ line segments. (c) If you can program a calculator or computer, use larger n's and conjecture the actual length of the curve.

7. $f(x) = \cos x, 0 \le x \le \pi/2$

8. $f(x) = \sin x, 0 \le x \le \pi/2$

9. $f(x) = \sqrt{x+1}, 0 \le x \le 3$

10. $f(x) = 1/x, 1 \le x \le 2$

11. $f(x) = x^2 + 1, -2 \le x \le 2$

12. $f(x) = x^3 + 2, -1 \le x \le 1$

7. (a) For the x-values of our points here we use (approximations of) $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}$, and $\frac{\pi}{2}$.

Left	Right	Length
(0, 1)	(0.393, 0.92)	0.400
(0.393, 0.92)	(0.785, 0.71)	0.449
(0.785, 0.71)	(1.18, 0.383)	0.509
(1.18, 0.383)	(1.571, 0)	0.548
	Total	1.906

(b) For the x-values of our points here we use (approximations of) $0, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{16}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{16}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{16}$, and $\frac{\pi}{2}$.

Left	Right	Length
(0, 1)	(0.196, 0.98)	0.197
(0.196, 0.98)	(0.393, 0.92)	0.204
(0.393, 0.92)	(0.589, 0.83)	0.217
(0.589, 0.83)	(0.785, 0.71)	0.232
(0.785, 0.71)	(0.982, 0.56)	0.248
(0.982, 0.56)	(1.178, 0.38)	0.262
(1.178, 0.38)	(1.37, 0.195)	0.272
(1.37, 0.195)	(1.571, 0)	0.277
	Total	1.909

(c) Actual length approximately 1.9101.

8. (a) For the x-values of our points here we use (approximations of) $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}$, and $\frac{\pi}{2}$.

Left	Right	Length
(0, 0)	(0.393, 0.38)	0.548
(0.393, 0.38)	(0.785, 0.71)	0.509
(0.785, 0.71)	(1.18, 0.924)	0.449
(1.18, 0.924)	(1.57, 1)	0.400
	Total	1.906

(b) For the x-values of our points here we use (approximations of) $0, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{16}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{16}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{16}$, and $\frac{\pi}{2}$.

Left	Right	Length
(0, 0)	(0.196, 0.2)	0.277
(0.196, 0.2)	(0.39, 0.38)	0.272
(0.39, 0.38)	(0.589, 0.56)	0.262
(0.589, 0.56)	(0.785, 0.71)	0.248
(0.785, 0.71)	(0.982, 0.83)	0.232
(0.982, 0.83)	(1.18, 0.924)	0.217
(1.18, 0.924)	(1.374, 0.98)	0.204
(1.374, 0.98)	(1.571, 1)	0.197
	Total	1.909

(c) Actual length approximately 1.9101.

9. (a)

Left	Right	Length
(0, 1)	(0.75, 1.323)	0.817
(0.75, 1.323)	(1.5, 1.581)	0.793
(1.5, 1.581)	(2.25, 1.803)	0.782
(2.25, 1.803)	(3, 2)	0.776
	Total	3.167

(b)

Left	Right	Length
(0, 1)	(0.375, 1.17)	0.413
(0.375, 1.17)	(0.75, 1.323)	0.404
(0.75, 1.323)	(1.125, 1.46)	0.399
(1.125, 1.46)	(1.5, 1.58)	0.395
(1.5, 1.58)	(1.88, 1.696)	0.392
(1.88, 1.696)	(2.25, 1.80)	0.390
(2.25, 1.80)	(2.63, 1.904)	0.388
(2.63, 1.904)	(3, 2)	0.387
	Total	3.168

(c) Actual length approximately 3.168.

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
1	Estimate an arc length for a given function تقدير طول القوس على منحنى دالة معطاة	Exercises (7-12) Lesson 2.1	68

Full Answer

10. (a)

Left	Right	Length
(1, 1)	(1.25, 0.8)	0.3202
(1.25, 0.8)	(1.5, 0.67)	0.2833
(1.5, 0.67)	(1.75, 0.571)	0.2675
(1.75, 0.571)	(2, 0.5)	0.2600
	Total	1.1310

(b)

Left	Right	Length
(1, 1)	(1.125, 0.89)	0.167
(1.125, 0.89)	(1.25, 0.8)	0.153
(1.25, 0.8)	(1.375, 0.73)	0.145
(1.375, 0.73)	(1.5, 0.67)	0.139
(1.5, 0.67)	(1.625, 0.62)	0.135
(1.625, 0.62)	(1.75, 0.57)	0.133
(1.75, 0.57)	(1.875, 0.53)	0.131
(1.875, 0.53)	(2, 0.5)	0.129
	Total	1.132

(c) Actual length approximately 1.1321.

11. (a)

Left	Right	Length
(-2, 5)	(-1, 2)	3.162
(-1, 2)	(0, 1)	1.414
(0, 1)	(1, 2)	1.414
(1, 2)	(2, 5)	3.162
	Total	9.153

(b)

Left	Right	Length
(-2, 5)	(-1.5, 3.25)	1.820
(-1.5, 3.25)	(-1, 2)	1.346
(-1, 2)	(-0.5, 1.25)	0.901
(-0.5, 1.25)	(0, 1)	0.559
(0, 1)	(0.5, 1.25)	0.559
(0.5, 1.25)	(1, 2)	0.901
(1, 2)	(1.5, 3.25)	1.346
(1.5, 3.25)	(2, 5)	1.820
	Total	9.253

(c) Actual length approximately 9.2936.

12. (a)

Left	Right	Length
(-1, 1)	(-0.5, 1.875)	1.0078
(-0.5, 1.875)	(0, 2)	0.5154
(0, 2)	(0.5, 2.125)	0.5154
(0.5, 2.125)	(1, 3)	1.0078
	Total	3.0463

(b)

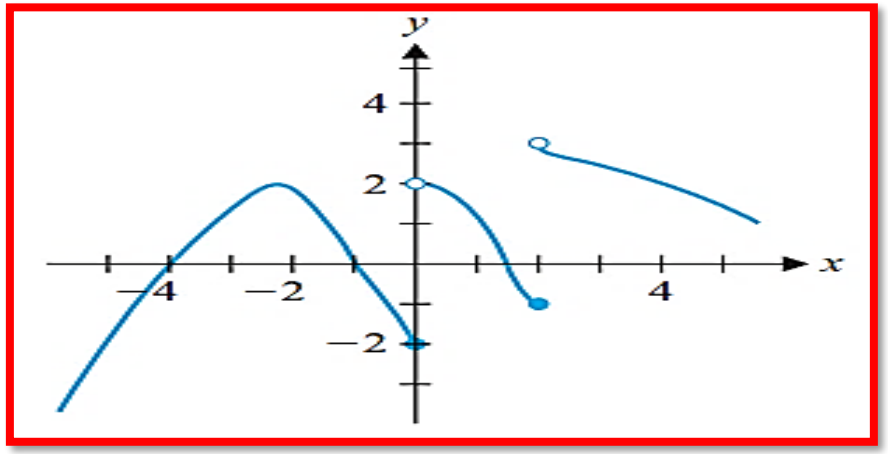
Left	Right	Length
(-1, 1)	(-0.75, 1.58)	0.630
(-0.75, 1.58)	(-.5, 1.88)	0.388
(-.5, 1.88)	(-0.25, 1.98)	0.273
(-0.25, 1.98)	(0, 2)	0.251
(0, 2)	(0.25, 2.016)	0.251
(0.25, 2.016)	(0.5, 2.13)	0.273
(0.5, 2.13)	(0.75, 2.42)	0.388
(0.75, 2.42)	(1, 3)	0.630
	Total	3.084

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله ابوالنجا
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
2	Find a limit algebraically or graphically, if it exists. إيجاد قيمة نهاية دالة عند نقطة جبريا وبيانيا ان وجدت	Exercises (7-8) Lesson 2.2	75

7) *Use the graph to detrmine the limit, if it exist.*

استخدم التمثيل البياني لتحديد نهاية الدالة ان وجدت



$a)\quad \lim_{x\to 0^-} f(x)$

A	-2	B	0	C	2	D	Does not exist

$b)\ \lim_{x\to 0^+} f(x) =.....$ $c)\ \lim_{x\to 0} f(x)=.....$ $d)\ \lim_{x\to -2^-} f(x)=....$ $e)\ \lim_{x\to -2^+} f(x)=....$

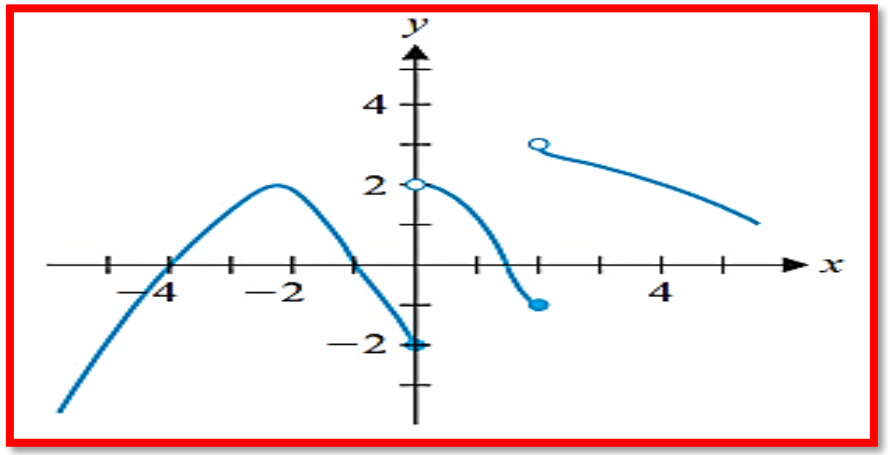
$f)\ \lim_{x\to -2} f(x)=.....$ $g)\ \lim_{x\to -1} f(x)=.....$ $h)\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=.....$

Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Final Revision Grade12 Adv
0505114830
الأستاذ عبدالله ابوالنجا
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
2	Find a limit algebraically or graphically, if it exists. إيجاد قيمة نهاية دالة عند نقطة جبريا وبيانيا ان وجدت	Exercises (7-8) Lesson 2.2	75

8) *Use the graph to detrmine the limit, if it exist.*



استخدم التمثيل البياني
لتحديد نهاية الدالة ان وجدت

$a)\ \lim_{x\to 1^-} f(x)$

A	1	B	0	C	2	D	Does not exist

$b)\ \lim_{x\to 1^+} f(x) =$.....

$c)\ \lim_{x\to 1} f(x)$=.....

$d)\ \lim_{x\to 2^-} f(x)$=....

$e)\ \lim_{x\to -2^+} f(x)$=....

$f)\ \lim_{x\to 2} f(x)$=.....

$g)\ \lim_{x\to 3^-} f(x)$=.....

$h)\ \lim_{x\to -3} f(x)$=.....

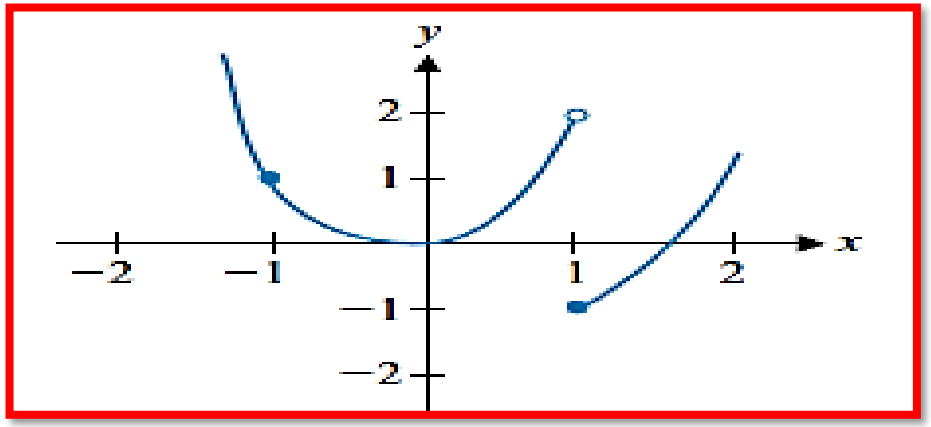
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Final Revision Grade12 Adv
0505114830
الأستاذ عبدالله ابوالنجا
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
2	Find a limit algebraically or graphically, if it exists. إيجاد قيمة نهاية دالة عند نقطة جبريا وبيانيا ان وجدت	Exercises (7-8) Lesson 2.2	75

Use the graph to detrmine the limit, if it exist.

استخدم التمثيل البياني
لتحديد نهاية الدالة ان وجدت



$a)\quad \lim_{x\to 1^-} f(x)$

A	1	B	0	C	2	D	Does not exist

$b)\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \ldots\ldots$ $c)\ \lim_{x\to 1} f(x) = \ldots\ldots$ $d)\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = \ldots\ldots$ $e)\ \lim_{x\to -1} f(x) = \ldots\ldots$

Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
2	Find a limit algebraically or graphically, if it exists. إيجاد قيمة نهاية دالة عند نقطة جبريا وبيانيا ان وجدت	Exercises (7-8) Lesson 2.2	75

Full Answer

7. (a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -2$

(b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$

(c) $\lim_{x\to 0} f(x)$ Does not exist.

(d) $\lim_{x\to -2^-} f(x) = 2$

(e) $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 2$

(f) $\lim_{x\to -2} f(x) = 2$

(g) $\lim_{x\to -1} f(x) = 0$

(h) $\lim_{x\to -3} f(x) = 1$

8. (a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$

(b) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

(c) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

(d) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -1$

(e) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$

(f) $\lim_{x\to 2} f(x)$ does not exist.

(g) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2.5$

(h) $\lim_{x\to -3} f(x) = 1.5$

a Abouelnaga
114830
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
3	Find limits of polynomial, rational, and trigonometric functions using theorems. إيجاد نهاية الدوال كثيرة الحدود والنسبية والمثلثية باستخدام نظريات النهايات	Exercises (21-28) Lesson 2.3	85

أوجد قيمة نهاية الدالة ان وجدت

Evaluate the limit, if it exist.

21. $\lim_{x\to 2} f(x)$, where $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } x < 2 \\ x^2 & \text{if } x \geq 2 \end{cases}$

A	4	B	-4	C	2	D	DNE

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
3	Find limits of polynomial, rational, and trigonometric functions using theorems. إيجاد نهاية الدوال كثيرة الحدود والنسبية والمثلثية باستخدام نظريات النهايات	Exercises (21-28) Lesson 2.3	85

أوجد قيمة نهاية الدالة ان وجدت

Evaluate the limit, if it exist.

22. $\lim_{x \to -1} f(x)$, where $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{if } x < -1 \\ 3x + 1 & \text{if } x \geq -1 \end{cases}$

A	2	B	-2	C	-1	D	DNE

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
3	Find limits of polynomial, rational, and trigonometric functions using theorems. إيجاد نهاية الدوال كثيرة الحدود والنسبية والمثلثية باستخدام نظريات النهايات	Exercises (21-28) Lesson 2.3	85

أوجد قيمة نهاية الدالة ان وجدت

Evaluate the limit, if it exist.

23. $\lim_{x \to -1} f(x)$, where $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{if } x < -1 \\ 3 & \text{if } -1 < x < 1 \\ 2x+1 & \text{if } x > 1 \end{cases}$

A	-1	B	3	C	-3	D	DNE

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
3	Find limits of polynomial, rational, and trigonometric functions using theorems. إيجاد نهاية الدوال كثيرة الحدود والنسبية والمثلثية باستخدام نظريات النهايات	Exercises (21-28) Lesson 2.3	85

أوجد قيمة نهاية الدالة ان وجدت

Evaluate the limit, if it exist.

24. $\lim_{x\to 1} f(x)$, where $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{if } x < -1 \\ 3 & \text{if } -1 < x < 1 \\ 2x+1 & \text{if } x > 1 \end{cases}$

A	-1	B	3	C	-3	D	DNE

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830
Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
3	Find limits of polynomial, rational, and trigonometric functions using theorems. إيجاد نهاية الدوال كثيرة الحدود والنسبية والمثلثية باستخدام نظريات النهايات	Exercises (21-28) Lesson 2.3	85

أوجد قيمة نهاية الدالة ان وجدت

Evaluate the limit, if it exist.

25. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^2-4}{h}$

A	4	B	3	C	-3	D	DNE

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
3	Find limits of polynomial, rational, and trigonometric functions using theorems. إيجاد نهاية الدوال كثيرة الحدود والنسبية والمثلثية باستخدام نظريات النهايات	Exercises (21-28) Lesson 2.3	85

أوجد قيمة نهاية الدالة ان وجدت

Evaluate the limit, if it exist.

26. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^3-1}{h}$

A	-1	B	3	C	-3	D	DNE

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
3	Find limits of polynomial, rational, and trigonometric functions using theorems. إيجاد نهاية الدوال كثيرة الحدود والنسبية والمثلثية باستخدام نظريات النهايات	Exercises (21-28) Lesson 2.3	85

Evaluate the limit, if it exist.

أوجد قيمة نهاية الدالة ان وجدت

27. $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 4}$

A	-1	B	1	C	-3	D	DNE

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
3	Find limits of polynomial, rational, and trigonometric functions using theorems. إيجاد نهاية الدوال كثيرة الحدود والنسبية والمثلثية باستخدام نظريات النهايات	Exercises (21-28) Lesson 2.3	85

أوجد قيمة نهاية الدالة ان وجدت

Evaluate the limit, if it exist.

28. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{5x}$

A	$1/5$	B	5	C	0	D	DNE

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
3	Find limits of polynomial, rational, and trigonometric functions using theorems. إيجاد نهاية الدوال كثيرة الحدود والنسبية والمثلثية باستخدام نظريات النهايات	Exercises (21-28) Lesson 2.3	85

Full Answer

In exercises 1–28, evaluate the indicated limit, if it exists.
Assume that $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

21. $\lim_{x\to 2} f(x)$, where $f(x)=\begin{cases}2x & \text{if } x<2\\ x^2 & \text{if } x\geq 2\end{cases}$

22. $\lim_{x\to -1} f(x)$, where $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{if } x<-1\\ 3x+1 & \text{if } x\geq -1\end{cases}$

23. $\lim_{x\to -1} f(x)$, where $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{if } x<-1\\ 3 & \text{if } -1<x<1\\ 2x+1 & \text{if } x>1\end{cases}$

24. $\lim_{x\to 1} f(x)$, where $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{if } x<-1\\ 3 & \text{if } -1<x<1\\ 2x+1 & \text{if } x>1\end{cases}$

25. $\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h}$ 26. $\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-1}{h}$

27. $\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}$ 28. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{5x}$

في التمارين 1-28، أوجد قيمة النهاية المشار إليها، إذا وُجدت.
على فرض أنّ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

21. $\lim_{x\to 2} f(x)$، حيث $f(x)=\begin{cases}2x & , & x<2\\ x^2 & , & x\geq 2\end{cases}$

22. $\lim_{x\to -1} f(x)$، حيث $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & , & x<-1\\ 3x+1 & , & x\geq -1\end{cases}$

23. $\lim_{x\to -1} f(x)$، حيث $f(x)=\begin{cases}2x+1 & , & x<-1\\ 3 & , & -1<x<1\\ 2x+1 & , & x>1\end{cases}$

24. $\lim_{x\to 1} f(x)$، حيث $f(x)=\begin{cases}2x+1 & , & x<-1\\ 3 & , & -1<x<1\\ 2x+1 & , & x>1\end{cases}$

25. $\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h}$ 26. $\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-1}{h}$

27. $\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}$ 28. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{5x}$

Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
3	Find limits of polynomial, rational, and trigonometric functions using theorems. إيجاد نهاية الدوال كثيرة الحدود والنسبية والمثلثية باستخدام نظريات النهايات	Exercises (21-28) Lesson 2.3	85

Full Answer

21. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 2x = 2(2) = 4$
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} x^2 = 2^2 = 4$
$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$

22. Undefined. The limit from the left is 2, but the limit from the right is -2.

23. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (2x+1)$
$= 2(-1)+1 = -1$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} 3 = 3$
Therefore $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ does not exist.

24. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3,$
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2x+1 = 3,$
Therefore $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3.$

25. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^2 - 4}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(4+4h+h^2) - 4}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4h+h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 4 + h = 4$

26. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^3 - 1}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1+3h+3h^2+h^3-1}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(3+3h+h^2)}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0} 3+3h+h^2 = 3$

27. Consider $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ and a polynomial $p(x) = x^2 - 4$ such that $p(2) = 0$.

Also $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Therefore by the theorem 3.4(viii),

$\lim\limits_{x\to a} f(p(x)) = L$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x^2-4)}{x^2-4} = 1.$

28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{5x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{5x\cos x}$
$= \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{5}\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{\cos x}\right)$
$= \dfrac{1}{5}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\right)$
$= \dfrac{1}{5}(1)(1) = \dfrac{1}{5}$

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
4	Use the squeeze theorem to find limits استخدم نظرية الشطيرة لا يجاد النهايات	Exercises (29-32) Lesson 2.3	85

29) *Evaluate the limit using Squeeze Theorem, if it exist .* $\lim_{x\to 0} x^2\sin(1/x)$

أوجد قيمة نهاية الدالة
باستخدام نظرية الشطيرة ان وجدت

A	0	B	1	C	-1	D	DNE

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
4	Use the squeeze theorem to find limitsاستخدم نظرية الشطيرة لا يجاد النهايات	Exercises (29-32) Lesson 2.3	85

30) *Why can't you use the Squeeze Theorem to prove that* $\lim_{x\to 0} x^2 \sec(1/x) = 0$

لماذا لا نستطيع استخدام نظرية الشطيرة في اثبات نهاية الدالة

A	because the secant function is not bounded by -1 , 1	B	because the secant function is bounded by −1 , 1	C	because the secant function is not bounded by −2 , 2	D	because the secant function is bounded by −2 , 2

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
4	Use the squeeze theorem to find limits استخدم نظرية الشطيرة لا يجاد النهايات	Exercises (29-32) Lesson 2.3	85

31)

أوجد قيمة نهاية الدالة
باستخدام نظرية الشطيرة ان وجدت

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\sqrt{x}\,\cos^2\left({}^{1}/_{x}\right)\right]$$

A	0	B	1	C	−1	D	DNE

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
4	Use the squeeze theorem to find limits استخدم نظرية الشطيرة لا يجاد النهايات	Exercises (29-32) Lesson 2.3	85

32)

أوجد قيمة نهاية الدالة
باستخدام نظرية الشطيرة ان وجدت

$$\lim_{x\to 0} x^2 f(x)\,, \qquad where\ |f(x)| \le M$$

A	$-M$	B	M	C	0	D	DNE

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
4	Use the squeeze theorem to find limits استخدم نظرية الشطيرة لا يجاد النهايات	Exercises (29-32) Lesson 2.3	85

أوجد قيمة نهاية الدالة
باستخدام نظرية الشطيرة ان وجدت

using Squeeze Theorem, if it exist
.Evaluate the limit

$$\lim_{x\to 2} h(x)\,, \qquad where\ |h(x)-4| \le 2(2-x)\ \ for\ all\ x$$

A	4	B	0	C	−4	D	DNE

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
4	Use the squeeze theorem to find limits استخدم نظرية الشطيرة لا يجاد النهايات	Exercises (29-32) Lesson 2.3	85

Full Answer

29. Use numerical and graphical evidence to conjecture the value of $\lim_{x\to 0} x^2 \sin(1/x)$. Use the Squeeze Theorem to prove that you are correct: identify the functions f and h, show graphically that $f(x) \le x^2 \sin(1/x) \le h(x)$ and justify $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x)$.

30. Why can't you use the Squeeze Theorem as in exercise 29 to prove that $\lim_{x\to 0} x^2 \sec(1/x) = 0$? Explore this limit graphically.

31. Use the Squeeze Theorem to prove that $\lim_{x\to 0^+} [\sqrt{x}\cos^2(1/x)] = 0$. Identify the functions f and h, show graphically that $f(x) \le \sqrt{x}\cos^2(1/x) \le h(x)$ for all $x > 0$, and justify $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ and $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0$.

32. Suppose that $f(x)$ is bounded: that is, there exists a constant M such that $|f(x)| \le M$ for all x. Use the Squeeze Theorem to prove that $\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$.

29. استخدم أدلة عددية وبيانية لتخمين قيمة $\lim_{x\to 0} x^2 \sin(1/x)$.
استخدم نظرية الشطيرة لإثبات أنّك على صواب: عرّف الدالتين f و h. ووضّح بيانيًا أنّ $f(x) \le x^2 \sin(1/x) \le h(x)$ وعلّل أنّ $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x)$.

30. لماذا لا تستطيع استخدام نظرية الشطيرة كما في المثال 29 لإثبات أنّ $\lim_{x\to 0} x^2 \sec(1/x) = 0$؟ استكشف هذه النهاية بيانيًا.

31. استخدم نظرية الشطيرة لإثبات أنّ $\lim_{x\to 0^+} [\sqrt{x}\cos^2(1/x)] = 0$.
وعرّف الدالتين f و h. ووضّح بيانيًا أن $f(x) \le \sqrt{x}\cos^2(1/x) \le h(x)$ لجميع قيم $x > 0$. وعلل أنّ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0$.

32. افترض أنّ $f(x)$ محدودة: بمعنى أن هناك M ثابتةً بحيث تكون $|f(x)| \le M$ لجميع قيم x. استخدم نظرية الشطيرة لإثبات أنّ $\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$.

bdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
4	Use the squeeze theorem to find limits استخدم نظرية الشطيرة لا يجاد النهايات	Exercises (29-32) Lesson 2.3	85

Full Answer

29.

x^2	$x^2 \sin(1/x)$
-0.1	0.0054
-0.01	5×10^{-5}
-0.001	-8×10^{-7}
0.1	-0.005
0.01	-5×10^{-5}
0.001	8×10^{-7}

Conjecture: $\lim_{x\to 0} x^2 \sin(1/x) = 0$.

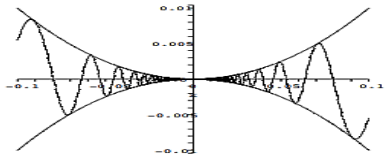
Let $f(x) = -x^2, h(x) = x^2$.

Then $f(x) \le x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le h(x)$

$\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0, \lim_{x\to 0}(x^2) = 0$

Therefore, by the Squeeze Theorem,

$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$



30. You cannot use the Squeeze Theorem as in exercise 29 because the secant function is not bounded between -1 and 1 like the sine function is. This is difficult to investigate graphically because of the infinitely many vertical asymptotes as x approaches 0.

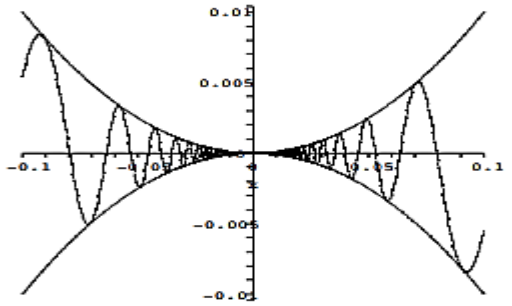
31. Let $f(x) = 0$, $h(x) = \sqrt{x}$. We see that

$f(x) \le \sqrt{x}\cos^2(1/x) \le h(x)$,

$\lim_{x\to 0^+} 0 = 0, \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$

Therefore, by the Squeeze Theorem,

$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$



32. Saying that $|f(x)| \le M$ for all x is the same as saying $-M \le f(x) \le M$ for all x.

This implies that

$-Mx^2 \le x^2 f(x) \le Mx^2$.

Since $\pm Mx^2 \to 0$ as $x \to 0$, the Squeeze Theorem shows that $\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$.

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
5	Use the continuity properties to study the continuity of a function or a composition of functions at a given point استخدم خصائص الاتصال لدراسة اتصال الدالة أو مجموعة الدوال عند نقطة معينة	Exercises (21-28) Lesson 2.3	95

21) Detrmine where the function is is continuous? $f(x) = \sqrt{x+3}$

حدد الفترات التي تكون عندها الدالة متصلة

A	$[-3, \infty)$	B	$(3, -1]$	C	$(-3, \infty)$	D	$(-\infty, \infty)$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
5	Use the continuity properties to study the continuity of a function or a composition of functions at a given point استخدم خصائص الاتصال لدراسة اتصال الدالة أو مجموعة الدوال عند نقطة معينة	Exercises (21-28) Lesson 2.3	95

22) Detrmine where the function is is continuous?

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

حدد الفترات التي تكون عندها الدالة متصلة

A	$(-2, \infty)$	B	$(-2,2]$	C	$(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$	D	$(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
5	Use the continuity properties to study the continuity of a function or a composition of functions at a given point استخدم خصائص الاتصال لدراسة اتصال الدالة أو مجموعة الدوال عند نقطة معينة	Exercises (21-28) Lesson 2.3	95

23) Detrmine where the function is is continuous? $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$

حدد الفترات التي تكون عندها الدالة متصلة

A	$(-2, \infty)$	B	$(-\infty, 2]$	C	$(-\infty, \infty)$	D	$[-3, \infty)$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
5	Use the continuity properties to study the continuity of a function or a composition of functions at a given point استخدم خصائص الاتصال لدراسة اتصال الدالة أو مجموعة الدوال عند نقطة معينة	Exercises (21-28) Lesson 2.3	95

24) Detrmine where the function is is continuous?

$f(x) = (x-1)^{3/2}$

حدد الفترات التي تكون عندها الدالة متصلة

A	$(1, \infty)$	B	$(-\infty, -1]$	C	$[1, \infty)$	D	$(-\infty, \infty)$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
5	Use the continuity properties to study the continuity of a function or a composition of functions at a given point استخدم خصائص الاتصال لدراسة اتصال الدالة أو مجموعة الدوال عند نقطة معينة	Exercises (21-28) Lesson 2.3	95

25) Detrmine where the function is $f(x) = \sin^{-1}(x+2)$ is continuous?

حدد الفترات التي تكون عندها الدالة متصلة

A	$(-1, \infty)$	B	$[-3, -1]$	C	$(-3, -1)$	D	$[-2, -1]$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
5	Use the continuity properties to study the continuity of a function or a composition of functions at a given point استخدم خصائص الاتصال لدراسة اتصال الدالة أو مجموعة الدوال عند نقطة معينة	Exercises (21-28) Lesson 2.3	95

26) Detrmine where the function is is continuous? $f(x) = \ln(\sin x)$

حدد الفترات التي تكون عندها الدالة متصلة

A	$(2n\pi, (2n+1)\pi)$ For all integer values of n.	B	$(n\pi, (n+1)\pi)$ For all integer values of n.	C	$(n\pi, (2n-1)\pi)$ For all integer values of n.	D	$(2n\pi, (2n+0.5)\pi)$ For all integer values of n.

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
5	Use the continuity properties to study the continuity of a function or a composition of functions at a given point استخدم خصائص الاتصال لدراسة اتصال الدالة أو مجموعة الدوال عند نقطة معينة	Exercises (21-28) Lesson 2.3	95

27) Detrmine where the function is $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}+e^x}{x^2-2}$ is continuous?

حدد الفترات التي تكون عندها الدالة متصلة

A	$[1,\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},\infty)$	B	$(-1,\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},\infty)$	C	$[-1,\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},\infty)$	D	$(1,\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},\infty)$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
5	Use the continuity properties to study the continuity of a function or a composition of functions at a given point استخدم خصائص الاتصال لدراسة اتصال الدالة أو مجموعة الدوال عند نقطة معينة	Exercises (21-28) Lesson 2.3	95

28) Detrmine where the function is is continuous?

$$f(x)=\frac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x^2-2x}}$$

حدد الفترات التي تكون عندها الدالة متصلة

A	$(-1,\infty)$	B	$(-\infty,-1]$	C	$(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$	D	$(-\infty,-1]\cup[2,\infty)$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
5	Use the continuity properties to study the continuity of a function or a composition of functions at a given point استخدم خصائص الاتصال لدراسة اتصال الدالة أو مجموعة الدوال عند نقطة معينة	Exercises (21-28) Lesson 2.3	95

Full Answer

In exercises 21–28, determine the intervals on which f is continuous.

21. $f(x) = \sqrt{x+3}$

22. $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

23. $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$

24. $f(x) = (x-1)^{3/2}$

25. $f(x) = \sin^{-1}(x+2)$

26. $f(x) = \ln(\sin x)$

27. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}+e^x}{x^2-2}$

28. $f(x) = \dfrac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x^2-2x}}$

في التمارين 21–28، حدّد الفترات التي تكون عندها f ما

21. Continuous where $x + 3 > 0$, i.e. on $(-3, \infty)$

22. Continuous where $x^2 - 4 > 0$, i.e. on $(\infty, -2)$ and $(2, \infty)$.

23. Continuous everywhere, i.e. on $(-\infty, \infty)$.

24. Continuous where $x - 1 > 0$, i.e. on $(1, \infty)$.

25. $\sin^{-1}(x + 2)$ is continuous on interval [-3, -1].

26. $\ln(\sin x)$ is continuous whenever $\sin x > 0$, that is on the interval $(2k\pi,\ (2k + 1)\pi)$ for all integral values of k.
$\ldots, (-2\pi, -\pi), (0, \pi), (2\pi, 3\pi), (4\pi, 5\pi), \ldots$

27. $f(x)$ is continuous, on interval [-1, ∞) whenever $x \neq \sqrt{2}$.

28. $f(x)$ is continuous on the intervals $(-\infty, -1)$ and $(2, \infty)$

Abdalla Ab
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
6	Find horizontal, vertical, and slant asymptotes using limits. إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية والمائلة باستخدام النهايات	Exercises (23-32) Lesson 2.5	106

2024/2025

Find the horizontal asymptotes of. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}$

أوجد خطوط التقارب الأفقية لـ.

A	$y = -2, 3$	B	$x = -1, 1$	C	$y = -1, 1$	D	$x = -2, 3$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830
Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
6	Find horizontal, vertical, and slant asymptotes using limits. إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية والمائلة باستخدام النهايات	Exercises (23-32) Lesson 2.5	106

2023/2024

Determine all vertical and slant asymptotes of $f(x) = \frac{x^3}{x^2+x-6}$.

حدّد كل خطوط التقارب الرأسية والمائلة لـ $f(x) = \frac{x^3}{x^2+x-6}$.

A	$x=-2, x=3, y=x-1$	B	$x=-3, x=2, y=x+1$	C	$x=-2, x=3, y=x+1$	D	$x=-3, x=2, y=x-1$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
6	Find horizontal, vertical, and slant asymptotes using limits. إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية والمائلة باستخدام النهايات	Exercises (23-32) Lesson 2.5	106

23a)Determine all vertical and horizontal Asympyotes for the function $y = \frac{x}{4 - x^2}$

حدد كل خطوط التقارب الرأسية والأفقية ان وجدت للدالة

A	VA: x=2,-2 , HA: y =0	B	VA: x=2 , HA: y =0	C	VA: x=-2 , HA: y=-1	D	VA: None , HA: y =-2,2

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
6	Find horizontal, vertical, and slant asymptotes using limits. إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية والمائلة باستخدام النهايات	Exercises (23-32) Lesson 2.5	106

23b)Determine all vertical and horizontal Asympyotes for the function $y = \frac{x^2}{4 - x^2}$

حدد كل خطوط التقارب الرأسية والأفقية ان وجدت للدالة

A	VA: x=2,-2 , HA: y =-1	B	VA: x=2 , HA: y =-1	C	VA: x=-2 , HA: y=0	D	VA: None , HA: y =-2,2

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
6	Find horizontal, vertical, and slant asymptotes using limits. إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية والمائلة باستخدام النهايات	Exercises (23-32) Lesson 2.5	106

24a) Determine all vertical and horizontal Asympyotes for the function $y = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

حدد كل خطوط التقارب الرأسية والأفقية ان وجدت للدالة

A	VA: None , HA: y =1,-1	B	VA: x=1 , HA: y =1,-1	C	VA: x=-1 , HA: None	D	VA: None , HA: y =1

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
6	Find horizontal, vertical, and slant asymptotes using limits. إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية والمائلة باستخدام النهايات	Exercises (23-32) Lesson 2.5	106

24b)Determine all vertical and horizontal Asympyotes for the function $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

حدد كل خطوط التقارب الرأسية والأفقية ان وجدت للدالة

A	VA: x = 2,-2, HA: None	B	VA: x = 2, HA: y=None	C	VA: x = -2,1, HA: y=1	D	VA: x = 2,-2, HA: y=0

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
6	Find horizontal, vertical, and slant asymptotes using limits. إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية والمائلة باستخدام النهايات	Exercises (23-32) Lesson 2.5	106

25) Determine all vertical and horizontal Asympyotes for the function $y = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3}$

حدد كل خطوط التقارب الرأسية والأفقية ان وجدت للدالة

A	VA: x = -1,3, HA: y=3	B	VA: x = -1,3 , HA: y=1	C	VA: x = -2,1, HA: y=3	D	VA: x =1, HA :none

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
6	Find horizontal, vertical, and slant asymptotes using limits. إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية والمائلة باستخدام النهايات	Exercises (23-32) Lesson 2.5	106

26) Determine all vertical and horizontal Asympyotes for the function $y = \frac{1-x}{x^2+x-2}$

حدد كل خطوط التقارب الرأسية والأفقية ان وجدت للدالة

A	VA: x = -2, HA: y=0	B	VA: x = 2, HA: y=1	C	VA: x = -2,1, HA: y=0	D	VA: x =1, HA :none

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبو النجا
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
6	Find horizontal, vertical, and slant asymptotes using limits. إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية والمائلة باستخدام النهايات	Exercises (23-32) Lesson 2.5	106

27) Determine all vertical and horizontal Asympyotes for the function $f(x) = 4tan^{-1}x - 1$

حدد كل خطوط التقارب الرأسية والأفقية ان وجدت للدالة

A	$Y=2\pi - 1, Y=-2\pi - 1$ And No Vertical Asymptotes لا يوجد خطوط تقارب رأسية ويوجد خطوط تقارب افقية هي $Y=2\pi - 1, Y=-2\pi - 1$	B	$x=2\pi - 1, x=-2\pi - 1$ And No Horizontal Asymptotes لا يوجد خطوط تقارب أفقية ويوجد خطوط تقارب رأسية هي $x=2\pi - 1, x=-2\pi - 1$
C	$Y=2\pi, Y=-2\pi$ And No Vertical Asymptotes لا يوجد خطوط تقارب رأسية ويوجد خطوط تقارب افقية هي $Y=2\pi, Y=-2\pi$	D	$x=2\pi, x=-2\pi$ And No Horizontal Asymptotes لا يوجد خطوط تقارب أفقية ويوجد خطوط تقارب رأسية هي $x=2\pi, x=-2\pi$

Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
6	Find horizontal, vertical, and slant asymptotes using limits. إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية والمائلة باستخدام النهايات	Exercises (23-32) Lesson 2.5	106

28) Determine all vertical and horizontal Asymptotes for the function $y = \ln(1 - cosx)$

حدد كل خطوط التقارب الرأسية والأفقية ان وجدت للدالة

A	VA: $x = 2n\pi$, HA: None	B	VA: $x = n\pi$, HA: None	C	VA: $x = 2n\pi$, HA: y=1	D	VA: $x = (2n+1)\pi$, HA :y = 0

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
6	Find horizontal, vertical, and slant asymptotes using limits. إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية والمائلة باستخدام النهايات	Exercises (23-32) Lesson 2.5	106

29) Determine all vertical and slant Asymptotes for the function $y = \frac{x^3}{4 - x^2}$

حدد كل خطوط التقارب الرأسية والمائلة للدالة

A	Vertical asymptotes at $x=\pm 2$ Slant asymptotes is $y=-x$	B	Vertical asymptotes at $x=2$ Slant asymptotes is $y=-x$	C	Vertical asymptotes at $x=-2$ Slant asymptotes is $y=x$	D	Vertical asymptotes at $x=-2$ Slant asymptotes is $y=-x$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
6	Find horizontal, vertical, and slant asymptotes using limits. إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية والمائلة باستخدام النهايات	Exercises (23-32) Lesson 2.5	106

30) Determine all vertical and slant Asymptotes for the function $y = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$

حدد كل خطوط التقارب الرأسية والمائلة للدالة

A	Vertical asymptotes at x=2 Slant asymptotes is y=x+2	B	Vertical asymptotes at x=2 Slant asymptotes is y=x-2	C	Vertical asymptotes at x=−2 Slant asymptotes is y=x+2	D	Vertical asymptotes at x=2 Slant asymptotes is y=-x+2

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
6	Find horizontal, vertical, and slant asymptotes using limits. إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية والمائلة باستخدام النهايات	Exercises (23-32) Lesson 2.5	106

31) Determine all vertical and slant Asymptotes for the function $y = \frac{x^3}{x^2 + x - 4}$

حدد كل خطوط التقارب الرأسية والمائلة للدالة

A	$X=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$, $y = x-1$	B	$X=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, $y = x+1$	C	$X=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, $y = x$	D	$X=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$, $y = x-2$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
6	Find horizontal, vertical, and slant asymptotes using limits. إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية والمائلة باستخدام النهايات	Exercises (23-32) Lesson 2.5	106

32) Determine all vertical and slant Asymptotes for the function $y = \frac{x^4}{x^3 + 2}$

حدد كل خطوط التقارب الرأسية والمائلة للدالة

A	$X=-\sqrt[3]{2}$, $y = x$	B	$X=-2$, $y = x+1$	C	$X=\sqrt[3]{2}$, $y = x$	D	$X=-\sqrt[3]{2}$, $y = -x$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
6	Find horizontal, vertical, and slant asymptotes using limits. إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية والمائلة باستخدام النهايات	Exercises (23-32) Lesson 2.5	106

Full Answer

In exercises 23–28, determine all horizontal and vertical asymptotes. For each side of each vertical asymptote, determine whether $f(x) \to \infty$ or $f(x) \to -\infty$.

23. (a) $f(x) = \dfrac{x}{4-x^2}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2}{4-x^2}$

24. (a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

25. $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^2-2x-3}$ 26. $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2+x-2}$

27. $f(x) = 4\tan^{-1}x - 1$ 28. $f(x) = \ln(1-\cos x)$

In exercises 29–32, determine all vertical and slant asymptotes.

29. $y = \dfrac{x^3}{4-x^2}$ 30. $y = \dfrac{x^2+1}{x-2}$

31. $y = \dfrac{x^3}{x^2+x-4}$ 32. $y = \dfrac{x^4}{x^3+2}$

في التمارين 23–28، حدّد كل خطوط التقارب الأفقية والرأسية. ثم لكل جانب من جوانب خط التقارب الرأسي، حدد إذا كانت $f(x) \to \infty$ أم $f(x) \to -\infty$.

23. (a) $f(x) = \dfrac{x}{4-x^2}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2}{4-x^2}$

24. (a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

25. $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^2-2x-3}$ 26. $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2+x-2}$

27. $f(x) = 4\tan^{-1}x - 1$ 28. $f(x) = \ln(1-\cos x)$

في التمارين 29–32، حدّد كل خطوط التقارب الرأسية والمائلة

29. $y = \dfrac{x^3}{4-x^2}$ 30. $y = \dfrac{x^2+1}{x-2}$

31. $y = \dfrac{x^3}{x^2+x-4}$ 32. $y = \dfrac{x^4}{x^3+2}$

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
6	Find horizontal, vertical, and slant asymptotes using limits. إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية والمائلة باستخدام النهايات	Exercises (23-32) Lesson 2.5	106

Full Answer

23. (a) $4 - x^2 = 0 \Rightarrow 4 = x^2$ so we have vertica asymptotes at $x = \pm 2$.

$f(x) \to \infty$ as $x \to -2^-$

$f(x) \to -\infty$ as $x \to -2^+$
$f(x) \to \infty$ as $x \to 2^-$
$f(x) \to -\infty$ as $x \to 2^+$

Again, we have

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{4-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2\left(\frac{4}{x^2}-1\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x\left(\frac{4}{x^2}-1\right)} = 0.$$

So there is a horizontal asymptote at $y = 0$.

(b) Vertical asymptotes at $x = \pm 2$.
$f(x) \to \infty$ as $x \to 2^-$ and $x \to -2^+$.
$f(x) \to -\infty$ as $x \to 2^+$ and $x \to -2^-$.
Horizontal asymptote at $y = -1$.

24. (a) Since $4 + x^2$ is never 0, there are no vertical asymptotes. We have

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

and

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}} = \frac{-1}{\sqrt{1}} = -1,$$

so there are horizontal asymptotes at $y = 1$ and $y = -1$.

(b) The function is only defined in $(-2, 2)$. Two one-sided vertical asymptotes at $x = \pm 2$. $f(x) \to \infty$ as $x \to 2^-$, and $f(x) \to -\infty$ as $x \to -2^+$.
No horizontal asymptotes.

25. The denominator factors:

$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$.

Since neither $x = 3$ nor $x = -1$ are zeros of the numerator, we see that $f(x)$ has vertical asymptotes at $x = 3$ and $x = -1$.
$f(x) \to -\infty$ as $x \to 3^-$,
$f(x) \to \infty$ as $x \to 3^+$,
$f(x) \to \infty$ as $x \to -1^-$, and
$f(x) \to -\infty$ as $x \to -1^+$.

We have

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3+1/x^2}{1-2/x-3/x^2} = 3.$$

So there is a horizontal asymptote at $y = 3$.

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
6	Find horizontal, vertical, and slant asymptotes using limits. إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية والمائلة باستخدام النهايات	Exercises (23-32) Lesson 2.5	106

Full Answer

26. Vertical asymptote at $x = -2$.

$f(x) \to \infty$ as $x \to -2^-$.
$f(x) \to -\infty$ as $x \to -2^+$ and $x \to -2^-$.
Again, we have

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-x}{x^2+x-2} = 0$$

So there is a horizontal asymptote at $y = 0$.

27. The function is continuous for all x, so no vertical asymptotes. We have

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} 4\tan^{-1}x - 1 &= 4(\lim_{x\to\infty} \tan^{-1}x) - 1\\ &= 4(\pi/2) - 1\\ &= 2\pi - 1\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} 4\tan^{-1}x - 1 &= 4(\lim_{x\to-\infty} \tan^{-1}x) - 1\\ &= 4(-\pi/2) - 1\\ &= -2\pi - 1,\end{aligned}$$

so there are horizontal asymptotes at $y = 2\pi - 1$ and $y = -2\pi - 1$.

28. The function $\ln x$ has a one-sided vertical asymptote at $x = 0$, so $f(x) = \ln(1 - \cos x)$ will have a vertical asymptote whenever

$1 - \cos x = 0$, i.e., whenever $\cos x = 1$.

This happens when $x = 2k\pi$ for any integer k. Since $1 - \cos x \geq 0$ for all x, $f(x)$ is defined at all points except for these vertical asymptotes. Thus as $f(x)$ approaches any of these asymptotes (from either side), it behaves like $\ln x$ approaching 0 from the right, so $f(x) \to -\infty$ as x approaches any of these asymptotes from either side.

29. Vertical asymptotes at $x = \pm 2$.

The slant asymptote is $y = -x$.

30. Vertical asymptote at $x = 2$.

The slant asymptote is $y = x + 2$.

31. Vertical asymptotes at $x = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$.

The slant asymptote is $y = x - 1$.

32. Vertical asymptote at $x = -\sqrt[3]{2}$.

The slant asymptote is $y = x$.

Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
7	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول الى اللانهاية والنهاية عند اللانهاية	Exercises (9-22) Lesson 2.5	106

9) *Evaluate the limit, if it exist.* $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3x-2}{3x^2+4x-1}$

أوجد قيمة نهاية الدالة ان وجدت

A	$1/3$	B	3	C	-3	D	$-1/3$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
7	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول الى اللانهاية والنهاية عند اللانهاية	Exercises (9-22) Lesson 2.5	106

10) *Evaluate the limit, if it exist.* $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^2 - 3x - 1}$

أوجد قيمة نهاية الدالة ان وجدت

A	$-1/2$	B	$1/2$	C	-2	D	DNE

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
7	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول الى اللانهاية والنهاية عند اللانهاية	Exercises (9-22) Lesson 2.5	106

11) *Evaluate the limit, if it exist.* . $\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{\sqrt{4+x^2}}$

أوجد قيمة نهاية الدالة ان وجدت

A	-1	B	1	C	-2	D	DNE

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830
Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
7	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول الى اللانهاية والنهاية عند اللانهاية	Exercises (9-22) Lesson 2.5	106

12) *Evaluate the limit, if it exist.* $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{4x^3-5x-1}$

أوجد قيمة نهاية الدالة ان وجدت

A	-1	B	1	C	-3	D	DNE

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
7	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول الى اللانهاية والنهاية عند اللانهاية	Exercises (9-22) Lesson 2.5	106

13) *Evaluate the limit, if it exist.* $\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x-3}\right)$

أوجد قيمة نهاية الدالة ان وجدت

A	∞	B	$-\infty$	C	0	D	DNE

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
7	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول الى اللانهاية والنهاية عند اللانهاية	Exercises (9-22) Lesson 2.5	106

14) *Evaluate the limit, if it exist.* $\lim_{x\to 0^+} \ln(x \sin x)$

أوجد قيمة نهاية الدالة ان وجدت

A	∞	B	$-\infty$	C	0	D	DNE

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
7	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول الى اللانهاية والنهاية عند اللانهاية	Exercises (9-22) Lesson 2.5	106

15) *Evaluate the limit, if it exist.* $\lim_{x\to 0^+} e^{-2/x^3}$

أوجد قيمة نهاية الدالة ان وجدت

A	∞	B	$-\infty$	C	0	D	DNE

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
7	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول الى اللانهاية والنهاية عند اللانهاية	Exercises (9-22) Lesson 2.5	106

16) *Evaluate the limit, if it exist.* $\lim_{x\to\infty} e^{-(x+1)/(x^2+2)}$

أوجد قيمة نهاية الدالة ان وجدت

A	-1	B	1	C	0	D	DNE

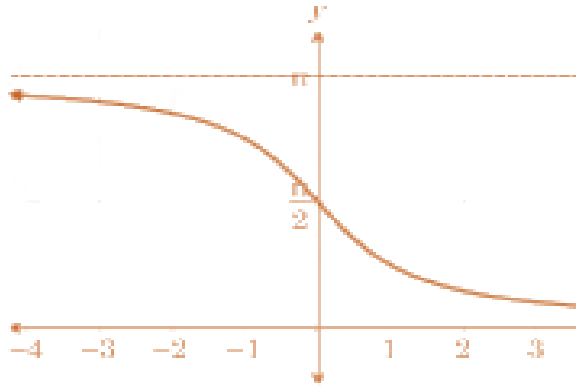
Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
7	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول الى اللانهاية والنهاية عند اللانهاية	Exercises (9-22) Lesson 2.5	106

17) *Evaluate the limit, if it exist.* $\lim_{x\to\infty} \cot^{-1} x$

أوجد قيمة نهاية الدالة ان وجدت

A	π	B	$\pi/2$	C	0	D	DNE



Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
7	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول الى اللانهاية والنهاية عند اللانهاية	Exercises (9-22) Lesson 2.5	106

18) *Evaluate the limit, if it exist.* $\lim_{x\to\infty} \sec^{-1} \frac{x^2+1}{x+1}$

أوجد قيمة نهاية الدالة ان وجدت

A	π	B	$\pi/2$	C	0	D	DNE

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
7	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول الى اللانهاية والنهاية عند اللانهاية	Exercises (9-22) Lesson 2.5	106

19) *Evaluate the limit, if it exist.* $\lim_{x\to 0} \sin(e^{-1/x^2})$

أوجد قيمة نهاية الدالة ان وجدت

A	-1	B	0	C	1	D	DNE

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
7	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول الى اللانهاية والنهاية عند اللانهاية	Exercises (9-22) Lesson 2.5	106

20) *Evaluate the limit, if it exist.* $\lim_{x\to\infty} \sin(\tan^{-1} x)$

أوجد قيمة نهاية الدالة ان وجدت

A	-1	B	1	C	-3	D	DNE

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
7	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول الى اللانهاية والنهاية عند اللانهاية	Exercises (9-22) Lesson 2.5	106

21) *Evaluate the limit, if it exist.* $\lim_{x\to\pi/2} e^{-\tan x}$

أوجد قيمة نهاية الدالة ان وجدت

A	0	B	1	C	-1	D	DNE

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
7	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول الى اللانهاية والنهاية عند اللانهاية	Exercises (9-22) Lesson 2.5	106

22) *Evaluate the limit, if it exist.* $\lim_{x\to 0^+} \tan^{-1}(\ln x)$

أوجد قيمة نهاية الدالة ان وجدت

A	π	B	$\pi/2$	C	$-\pi/2$	D	DNE

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
7	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول الى اللانهاية والنهاية عند اللانهاية	Exercises (9-22) Lesson 2.5	106

Full Answer

في التمارين 22–5، حدّد كل نهاية (أجب حسب الاقتضاء، بعدد أو ∞ أو ∞− أو غير موجودة).

9. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-2}{3x^2+4x-1}$

10. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x+1}{4x^2-3x-1}$

11. $\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{\sqrt{4+x^2}}$

12. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{4x^3-5x-1}$

13. $\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x-3}\right)$

14. $\lim_{x\to0^+} \ln(x\sin x)$

15. $\lim_{x\to0^+} e^{-2/x^3}$

16. $\lim_{x\to\infty} e^{-(x+1)/(x^2+2)}$

17. $\lim_{x\to\infty} \cot^{-1} x$

18. $\lim_{x\to\infty} \sec^{-1} \frac{x^2+1}{x+1}$

19. $\lim_{x\to0} \sin(e^{-1/x^2})$

20. $\lim_{x\to\infty} \sin(\tan^{-1} x)$

21. $\lim_{x\to\pi/2} e^{-\tan x}$

22. $\lim_{x\to0^+} \tan^{-1}(\ln x)$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
7	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول الى اللانهاية والنهاية عند اللانهاية	Exercises (9-22) Lesson 2.5	106

Full Answer

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-2}{3x^2+4x-1}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{1}{3}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{4x^2-3x-1}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{4x^2-3x-1}\left(\dfrac{1/x^2}{1/x^2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-1/x+1/x^2}{4-3/x-1/x^2}=\dfrac{1}{2}.$

11. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{\sqrt{4+x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{-x\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{1}}=1$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{4x^3-5x-1}=0.$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x-3}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)\right]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)\right]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln x\right]=\infty$

14. $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x\sin x)$

$\lim\limits_{x\to0^+}\left[\ln\left(x\sin x\right)\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x\right)=-\infty$

15. $\lim\limits_{x\to0^+}e^{-2/x^3}$

$\lim\limits_{x\to0^+}e^{-\frac{2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
7	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول الى اللانهاية والنهاية عند اللانهاية	Exercises (9-22) Lesson 2.5	106

Full Answer

16. $\lim_{x\to\infty} e^{-(x+1)/(x^2+2)}$

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{-(x+1)}{(x^2+2)}} = \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{-x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\left[\frac{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}\right]} = 1$$

17. $\lim_{x\to\infty} \cot^{-1} x$

$$\lim_{x\to\infty} \cot^{-1} x = 0.$$

(Compare Example 5.8) We are looking for the angle that θ must approach as $\cot\theta$ goes to ∞. Look at the graph of $\cot\theta$. To define the inverse cotangent, you must pick one branch of this graph, and the standard choice is the branch immediately to the right of the y-axis. Then as $\cot\theta$ goes to ∞, the angle goes to 0.

18. $\lim_{x\to\infty} \sec^{-1} \frac{x^2+1}{x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \sec^{-1}\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sec^{-1}\left[\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sec^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$$

19. $\lim_{x\to 0} \sin(e^{-1/x^2})$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sin\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sin\left(e^{x}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}(\sin x) = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\sin\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\sin\left(e^{x}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}(\sin x) = 0$$

and hence

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\sin\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)\right) = 0.$$

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
7	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول الى اللانهاية والنهاية عند اللانهاية	Exercises (9-22) Lesson 2.5	106

Full Answer

20. $\lim_{x\to\infty} \sin(\tan^{-1} x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x) = 1.$

21. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} e^{-\tan x} = \lim_{x\to\infty} e^{-x}$

$= \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0,$ but

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} e^{-\tan x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}$

$= \lim_{x\to\infty} e^{x} = \infty,$

so the limit does not exist.

22. $\lim_{x\to0^+} \tan^{-1}(\ln x) = \lim_{x\to-\infty} \tan^{-1} x$

$= -\frac{\pi}{2}.$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

الأستاذ عبدالله أبوالنجا
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
8	Link and interpret the slope of a secant line and tangent line ربط وتفسير ميل الخط القاطع والخط المماس	Ex 3 Lesson 3.1	136

Graphically and numerically approximate the slope of the tangent line to $y = \frac{x-1}{x+1}$ $at\ x = 0$

أوجد الميل لـ

A	1	B	2	C	0	D	-2

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
8	Link and interpret the slope of a secant line and tangent line ربط وتفسير ميل الخط القاطع والخط المماس	Ex 3 Lesson 3.1	136

Find the slope of the tangent line to $y = x^3 + 4$ $at\ x = 3$ أوجد الميل لـ

A	-27	B	27	C	9	D	-9

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830
Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
8	Link and interpret the slope of a secant line and tangent line ربط وتفسير ميل الخط القاطع والخط المماس	Ex 3 Lesson 3.1	136

Find the slope of the tangent line to $y = x^2 + x$ $at\ x = 4$ أوجد الميل لـ

A	$f'(4) = 8$	B	$f'(4) = 9$	C	$f'(4) = -9$	D	$f'(4) = -8$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
8	Link and interpret the slope of a secant line and tangent line ربط وتفسير ميل الخط القاطع والخط المماس	Ex 3 Lesson 3.1	136

Full Answer

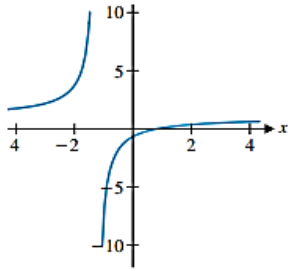


FIGURE 2.10a
$y = \frac{x-1}{x+1}$

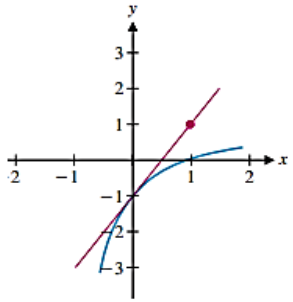


FIGURE 2.10b
Tangent line

EXAMPLE 1.3 Graphical and Numerical Approximation of Tangent Lines

Graphically and numerically approximate the slope of the tangent line to $y = \frac{x-1}{x+1}$ at $x = 0$.

Solution A graph of $y = \frac{x-1}{x+1}$ is shown in Figure 2.10a. We sketch the tangent line at the point $(0, -1)$ in Figure 2.10b, where we have zoomed in to provide better detail. To approximate the slope, we estimate the coordinates of one point on the tangent line other than $(0, -1)$. In Figure 2.10b, it appears that the tangent line passes through the point $(1, 1)$. An estimate of the slope is then $m_{\tan} \approx \frac{1-(-1)}{1-0} = 2$. To approximate the slope numerically, we choose several points near $(0, -1)$ and compute the slopes of the secant lines. For example, rounding the y-values to four decimal places, we have

Second Point	m_{sec}	*Second Point*	m_{sec}
$(1, 0)$	$\frac{0-(-1)}{1-0} = 1$	$(-0.5, -3)$	$\frac{-3-(-1)}{-0.5-0} = 4.0$
$(0.1, -0.8182)$	$\frac{-0.8182-(-1)}{0.1-0} = 1.818$	$(-0.1, -1.2222)$	$\frac{-1.2222-(-1)}{-0.1-0} = 2.222$
$(0.01, -0.9802)$	$\frac{-0.9802-(-1)}{0.01-0} = 1.98$	$(-0.01, -1.0202)$	$\frac{-1.0202-(-1)}{-0.01-0} = 2.02$

In both columns, as the second point gets closer to $(0, -1)$, the slope of the secant line gets closer to 2. A reasonable estimate of the slope of the tangent line at the point $(0, -1)$ is then 2. ■

مثال 1.3 التقريب البياني والعددي لميل المماس

قرّب ميل المماس لـ $y = \frac{x-1}{x+1}$ عند $x = 0$ بيانيًا وعدديًا.

الحل التمثيل البياني لـ $y = \frac{x-1}{x+1}$ موضح في الشكل 3.10a. نرسم المماس عند النقطة $(0, -1)$ كما في الشكل 3.10b حيث قمنا بالتكبير لتوفير تفاصيل أفضل. لتقريب الميل، نقوم بتقدير إحداثيات نقطة واحدة على المماس على ألا تكون $(0, -1)$. في الشكل 3.10b يبدو أن المماس يمر بالنقطة $(1, 1)$. يكون تقدير الميل إذًا $m_{\tan} \approx \frac{1-(-1)}{1-0} = 2$. لتقريب الميل عدديًا، نقوم باختيار عدة نقاط قريبة من $(0, -1)$ ونحسب ميول الخطوط القاطعة. على سبيل المثال، عند تقريب قيم y لأربع منازل عشرية، نحصل على

m_{sec}	النقطة الثانية	m_{sec}	النقطة الثانية
$\frac{-3-(-1)}{-0.5-0} = 4.0$	$(-0.5, -3)$	$\frac{0-(-1)}{1-0} = 1$	$(1, 0)$
$\frac{-1.2222-(-1)}{-0.1-0} = 2.222$	$(-0.1, -1.2222)$	$\frac{-0.8182-(-1)}{0.1-0} = 1.818$	$(0.1, -0.8182)$
$\frac{-1.0202-(-1)}{-0.01-0} = 2.02$	$(-0.01, -1.0202)$	$\frac{-0.9802-(-1)}{0.01-0} = 1.98$	$(0.01, -0.9802)$

في كلا العمودين، كلما اقتربت النقطة الثانية من $(0, -1)$، اقترب ميل القاطع الى 2. إذاً يكون التقدير المعقول لميل المماس عند النقطة $(0, -1)$ هو 2. ■

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
9	Find the derivative of a function at a given point إيجاد المشتقة للدالة عند نقطة معينة	Ex 3 Lesson 3.2	145

Find the derivative to $f(x)=\frac{1}{x}\ ,x\neq 0$ أوجد المشتقة للدالة

using $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ باستخدام

A	$f'(x)=-1/x^2$	B	$f'(x)=1/x^2$	C	$f'(x)=-2/x^2$	D	$f'(x)=2/x^2$

Or

A	$f'(x)=-x^{-2}$	B	$f'(x)=x^{-2}$	C	$f'(x)=-x^2$	D	$f'(x)=-x^{-1}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
9	Find the derivative of a function at a given point إيجاد المشتقة للدالة عند نقطة معينة	Ex 3 Lesson 3.2	145

Find the derivative to $f(x)=\frac{3}{x-2}$, $x\neq 2$ أوجد المشتقة للدالة

A	$f'(x)=-3/(x-2)^2$	B	$f'(x)=3/(x-2)^2$	C	$f'(x)=-3/(x+2)^2$	D	$f'(x)=-3/(x-2)^3$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
9	Find the derivative of a function at a given point إيجاد المشتقة للدالة عند نقطة معينة	Ex 3 Lesson 3.2	145

Compute $f'(2)$ *for* $f(x) = x^2 + 3x + 1$ احسب قيمة $f'(2)$ للدالة

A	$f'(2) = 7$	B	$f'(2) = -7$	C	$f'(2) = 8$	D	$f'(2) = -8$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
9	Find the derivative of a function at a given point إيجاد المشتقة للدالة عند نقطة معينة	Ex 3 Lesson 3.2	145

$Compute\ f'(x)\ for\ f(x)=\sqrt{2x+3}\ \ at\ the\ point(1,3)$ احسب قيمة $f'(x)$ للدالة عندالنقطة

A	$f'(1)=\frac{\sqrt{5}}{5}$	B	$f'(1)=\frac{-\sqrt{5}}{5}$	C	$f'(1)=\frac{\sqrt{7}}{5}$	D	$f'(1)=\frac{-\sqrt{7}}{5}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
9	Find the derivative of a function at a given point إيجاد المشتقة للدالة عند نقطة معينة	Ex 3 Lesson 3.2	145

Full Answer

EXAMPLE 2.3 Finding the Derivative of a Simple Rational Function

If $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, find $f'(x)$.

Solution We have

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right)}{h} \quad \text{Since } f(x+h) = \frac{1}{x+h}.$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right]}{h} \quad \text{Add fractions and cancel.}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} \quad \text{Cancel } h\text{'s.}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2},$$

so that $f'(x) = -x^{-2}$. ■

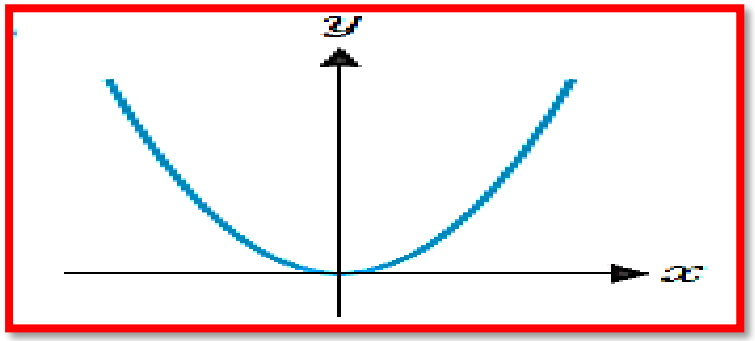
مثال 2.3 إيجاد مشتقة دالّة نسبية بسيطة

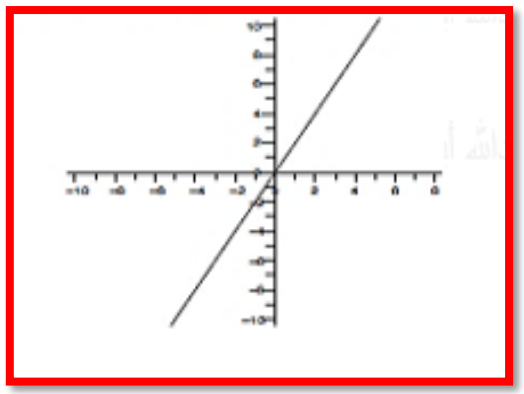
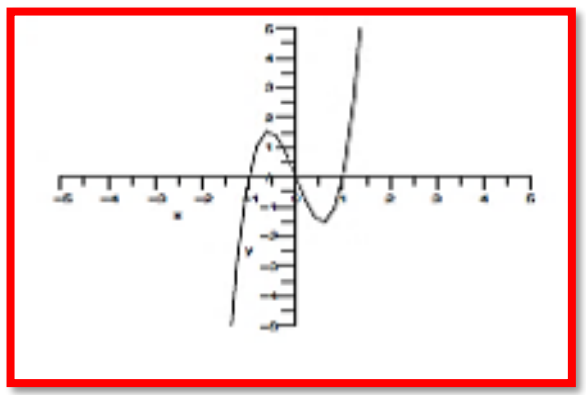
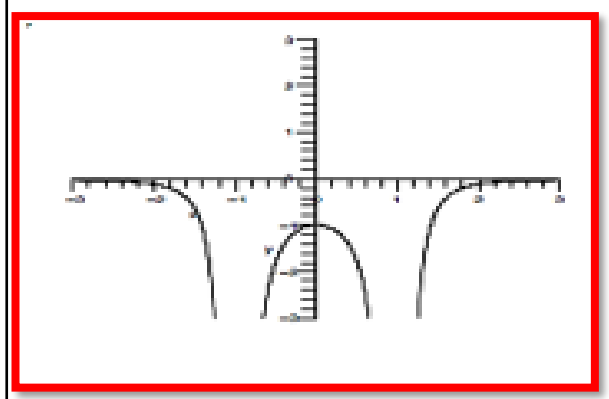
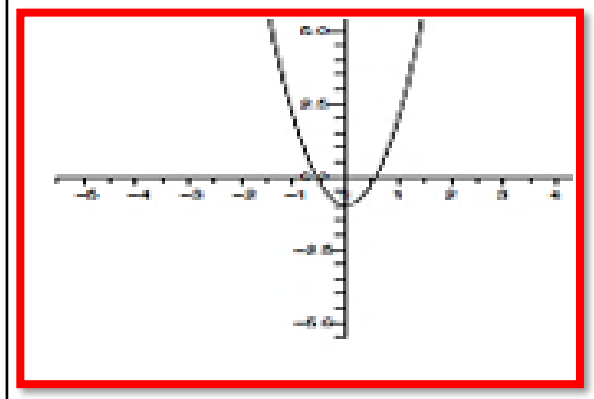
Abdalla Abouelnaga

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
10	Understand the relationship between continuity and differentiability فهم العلاقة بين الاتصال والاشتقاق	Exercises (13-18)	151

13a) Use the graph of f to sketch the graph of f'

استخدم التمثيل البياني للدالة f لرسم f'



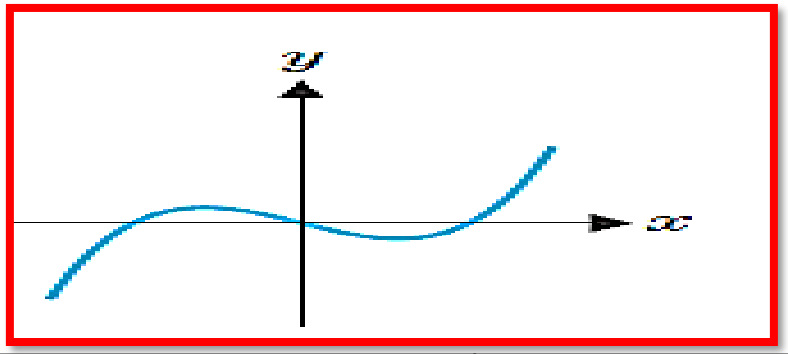
A	B	C	D
			

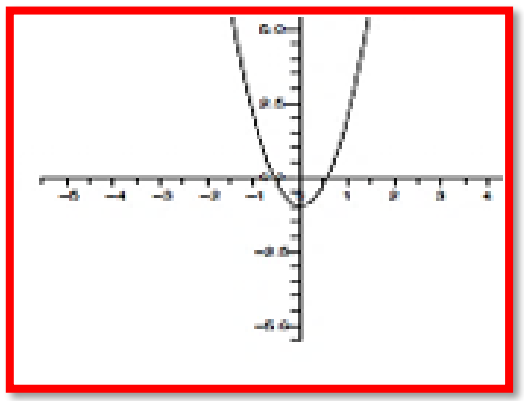
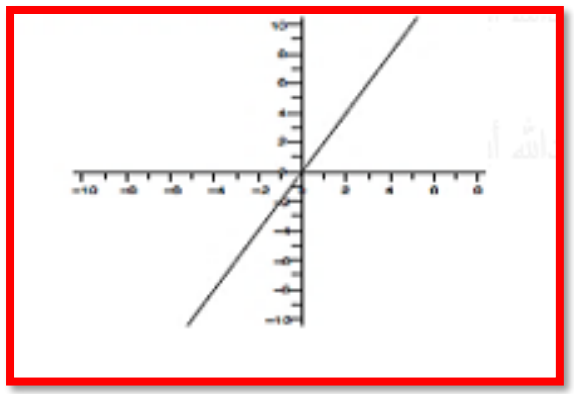
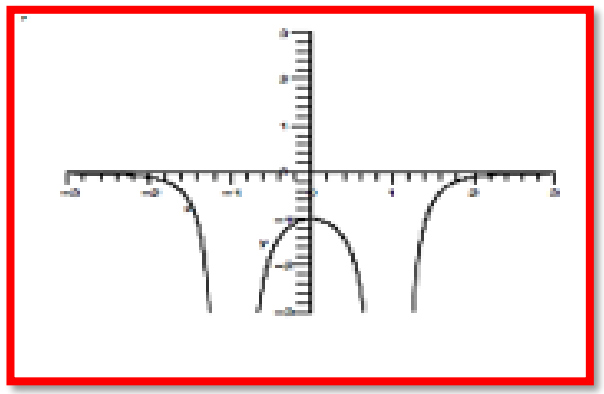
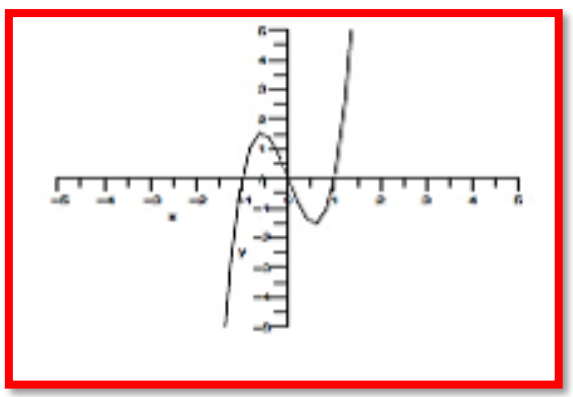
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
10	Understand the relationship between continuity and differentiability فهم العلاقة بين الاتصال والاشتقاق	Exercises (13-18)	151

13b)Use the graph of f to sketch the graph of f'

استخدم التمثيل البياني للدالة f لرسم f'

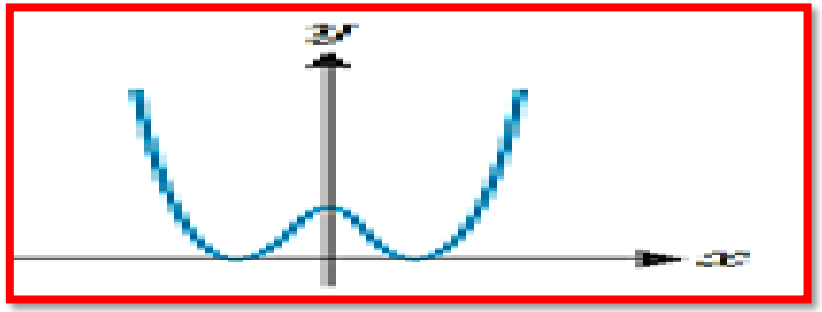


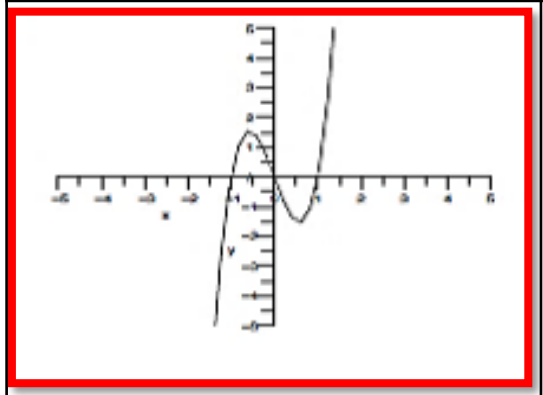
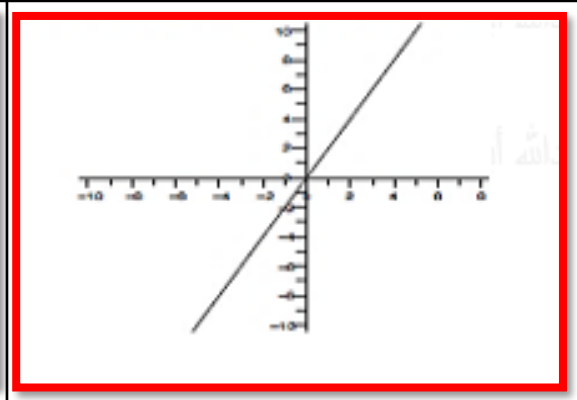
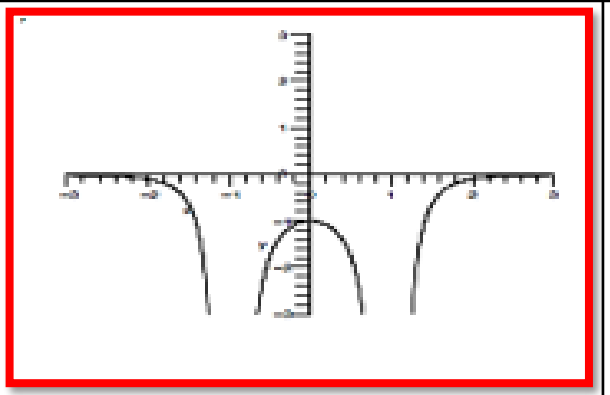
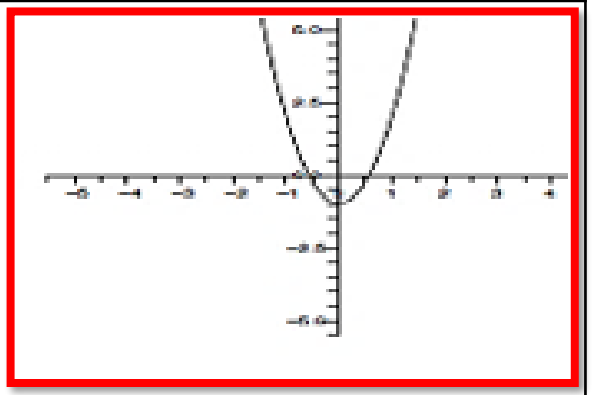
A	B	C	D
			

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
10	Understand the relationship between continuity and differentiability فهم العلاقة بين الاتصال والاشتقاق	Exercises (13-18)	151

14a) Use the graph of f to sketch the graph of f'

استخدم التمثيل البياني للدالة f لرسم f'



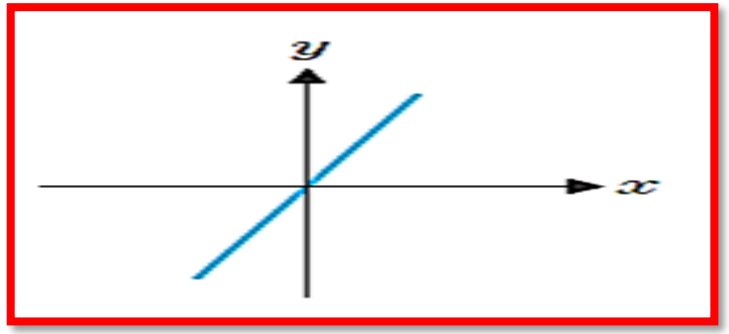
A	B	C	D
			

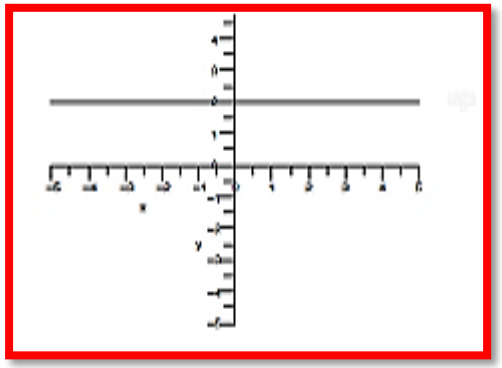
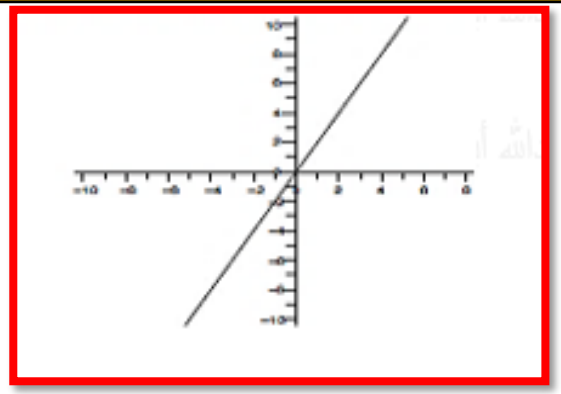
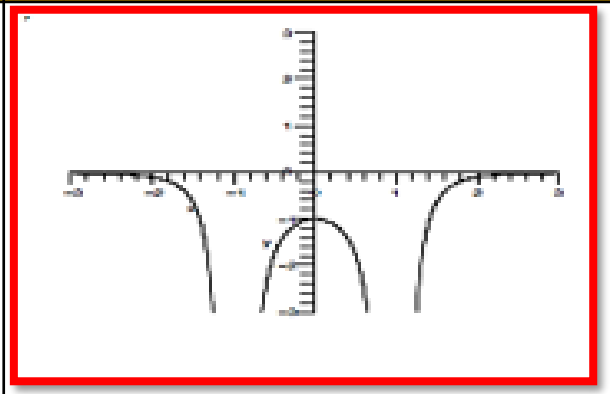
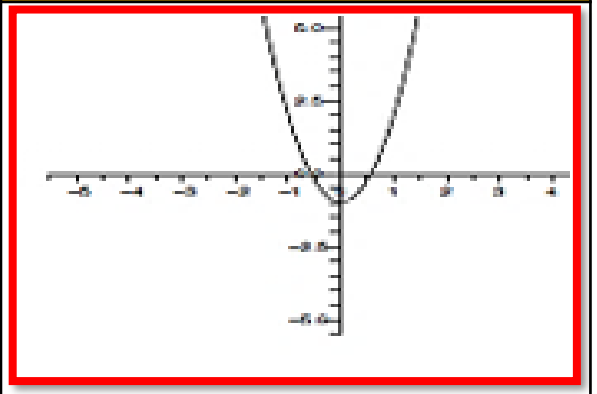
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
10	Understand the relationship between continuity and differentiability فهم العلاقة بين الاتصال والاشتقاق	Exercises (13-18)	151

14b)Use the graph of f to sketch the graph of f'

استخدم التمثيل البياني للدالة f لرسم f'



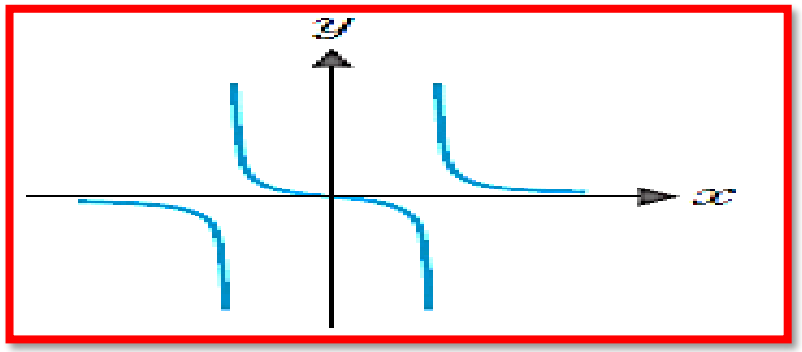
A	B	C	D
			

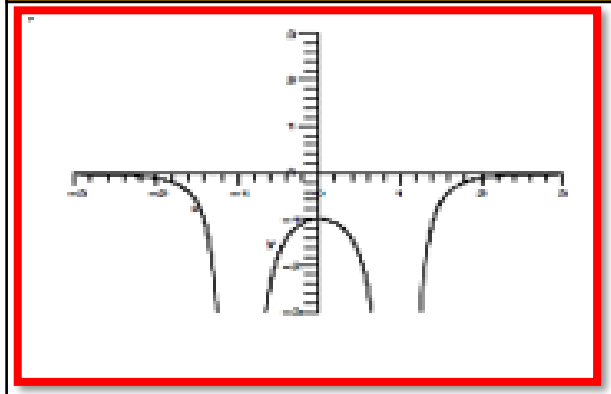
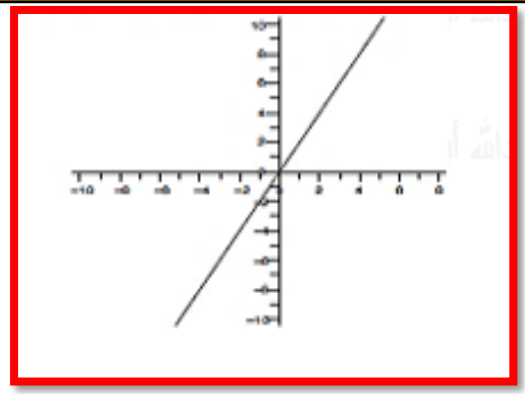
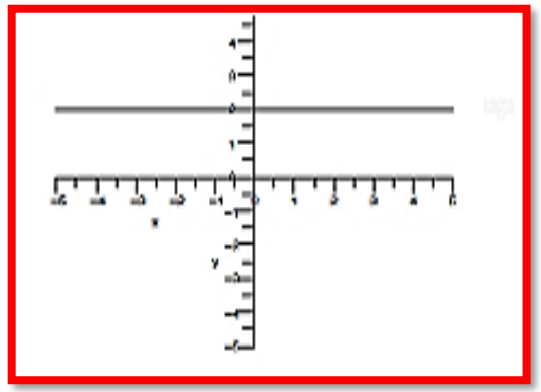
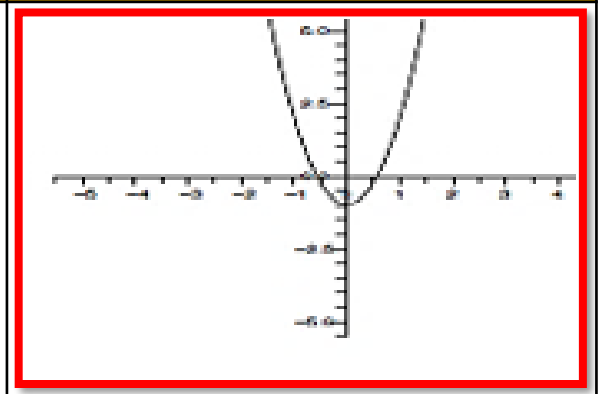
Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
10	Understand the relationship between continuity and differentiability فهم العلاقة بين الاتصال والاشتقاق	Exercises (13-18)	151

15a) Use the graph of f to sketch the graph of f'

استخدم التمثيل البياني للدالة f لرسم f'

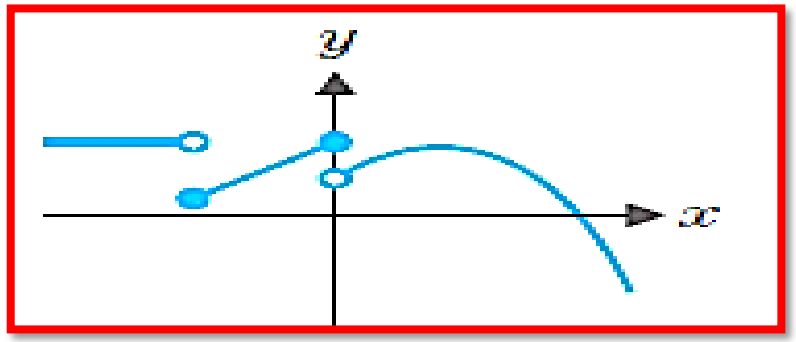


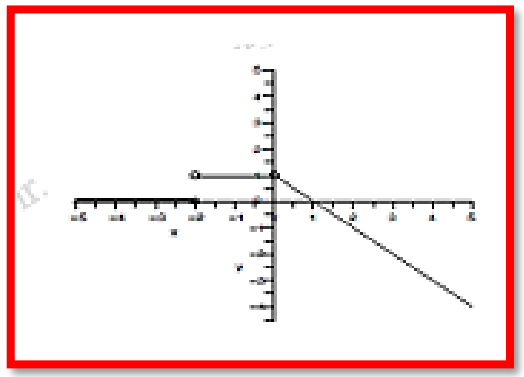
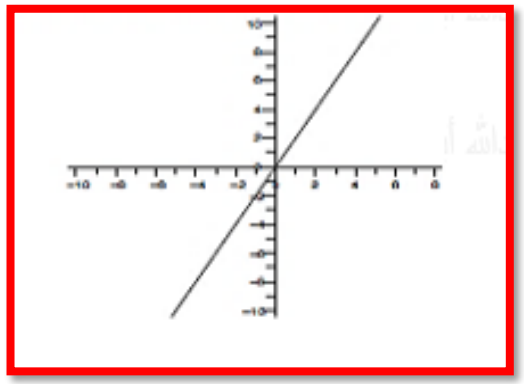
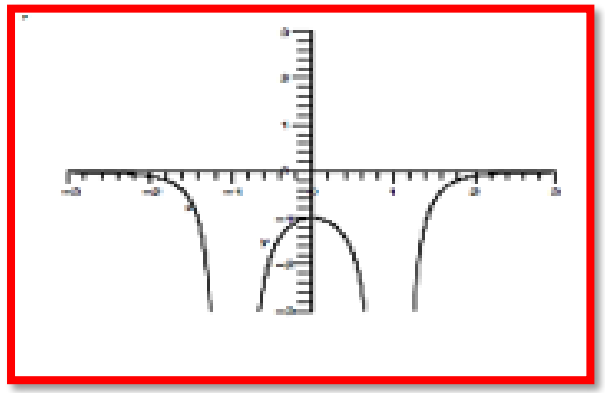
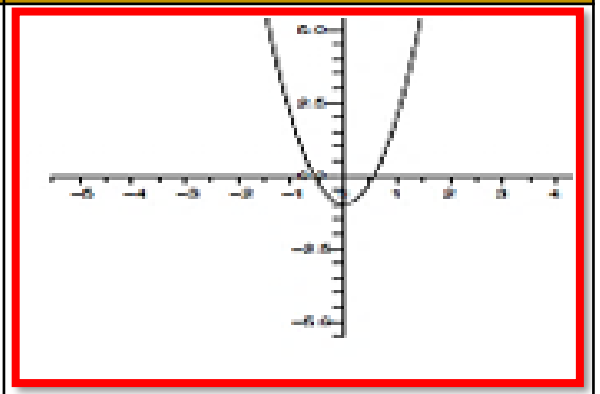
A	B	C	D
			

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
10	Understand the relationship between continuity and differentiability فهم العلاقة بين الاتصال والاشتقاق	Exercises (13-18)	151

15b)Use the graph of f to sketch the graph of f'

استخدم التمثيل البياني للدالة f لرسم f'

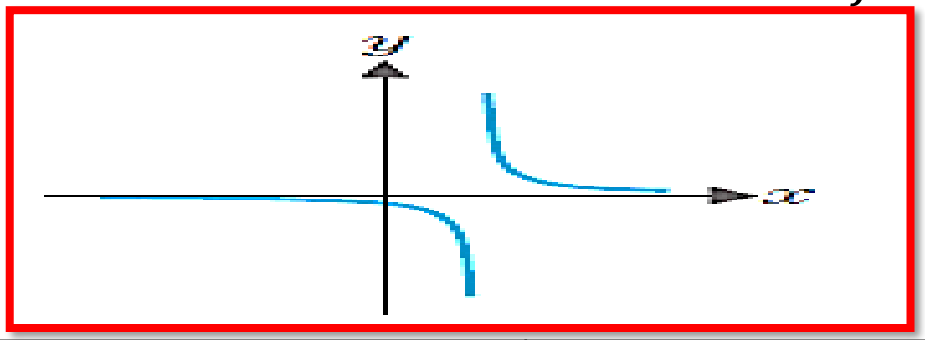


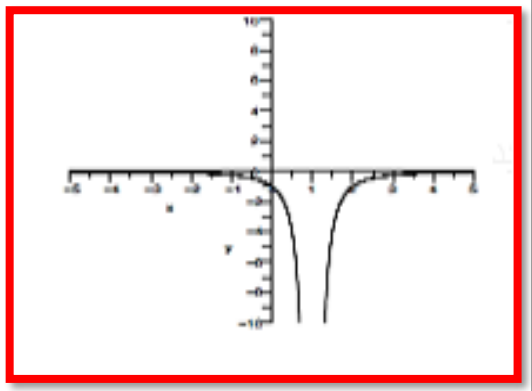
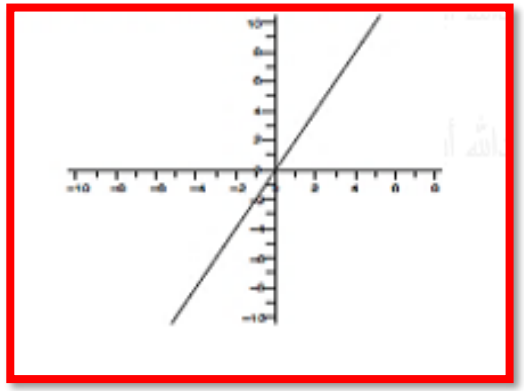
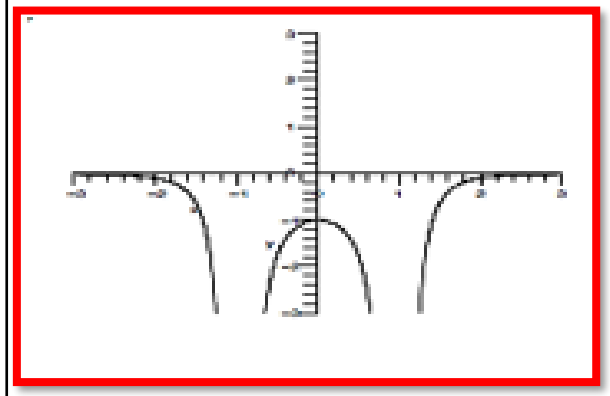
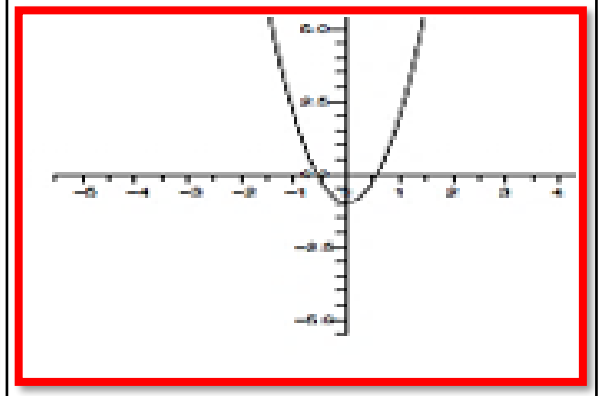
A	B	C	D
			

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
10	Understand the relationship between continuity and differentiability فهم العلاقة بين الاتصال والاشتقاق	Exercises (13-18)	151

16a) Use the graph of f to sketch the graph of f'

استخدم التمثيل البياني للدالة f لرسم f'



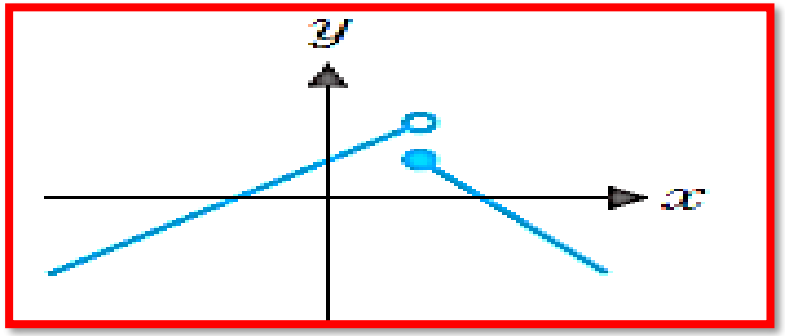
A	B	C	D
			

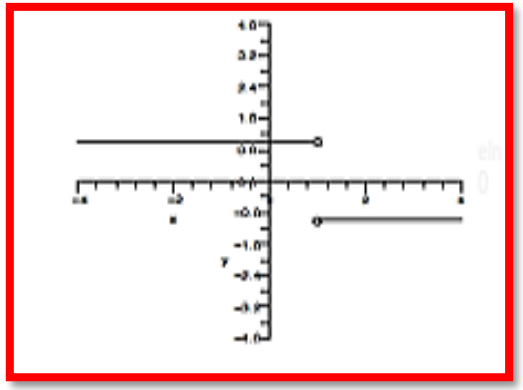
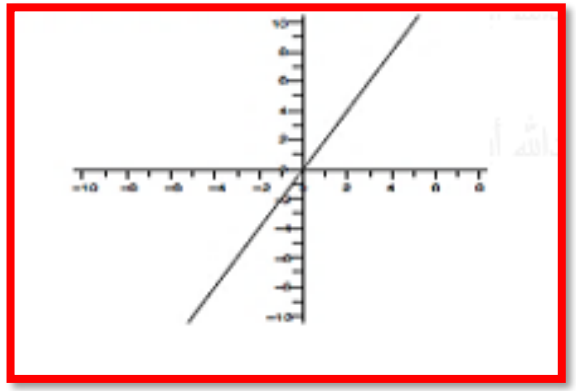
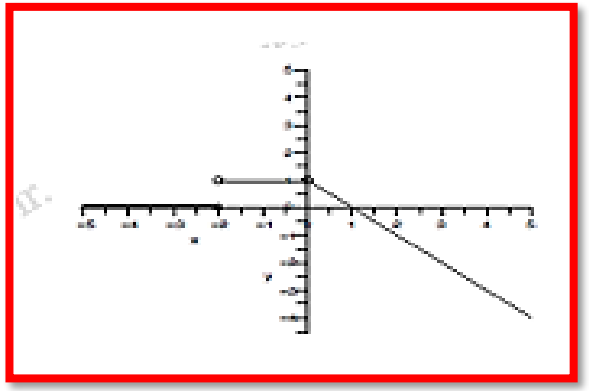
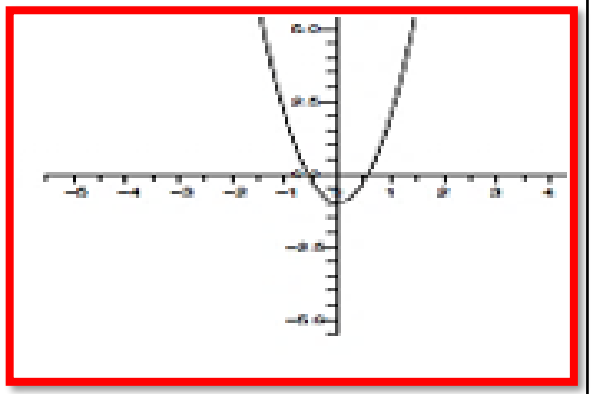
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
10	Understand the relationship between continuity and differentiability فهم العلاقة بين الاتصال والاشتقاق	Exercises (13-18)	151

16b)Use the graph of f to sketch the graph of f'

استخدم التمثيل البياني للدالة f لرسم f'

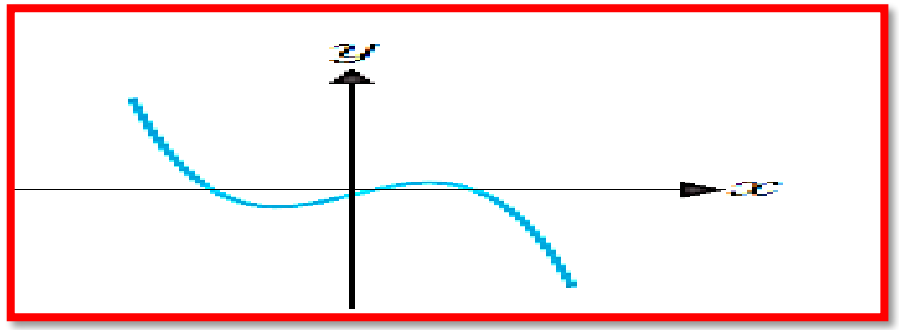


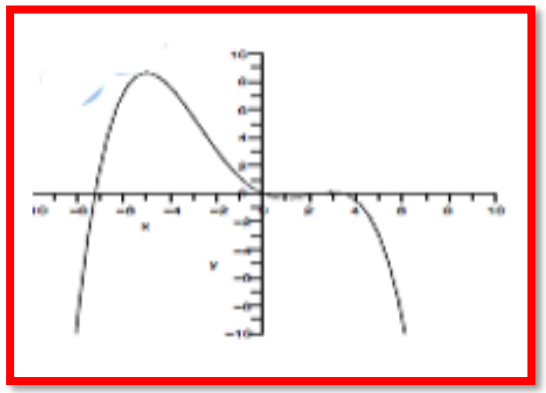
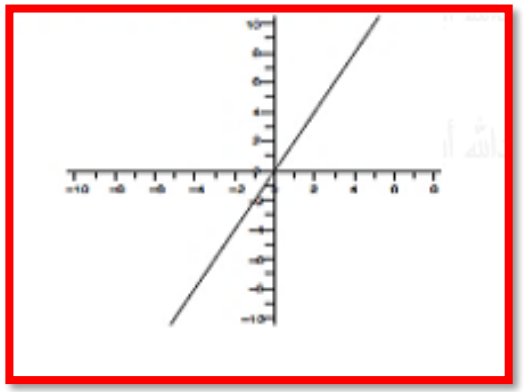
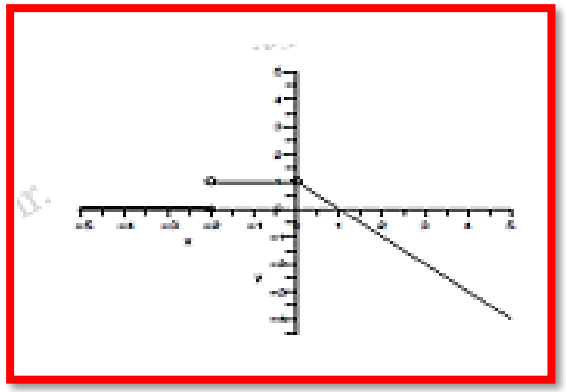
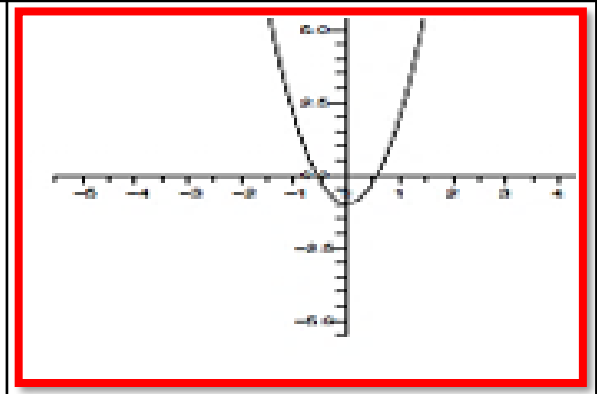
A	B	C	D
			

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
10	Understand the relationship between continuity and differentiability فهم العلاقة بين الاتصال والاشتقاق	Exercises (13-18)	151

17a) Use the graph of f' to sketch the graph of f

استخدم التمثيل البياني للمشتقة f' لرسم الدالة f

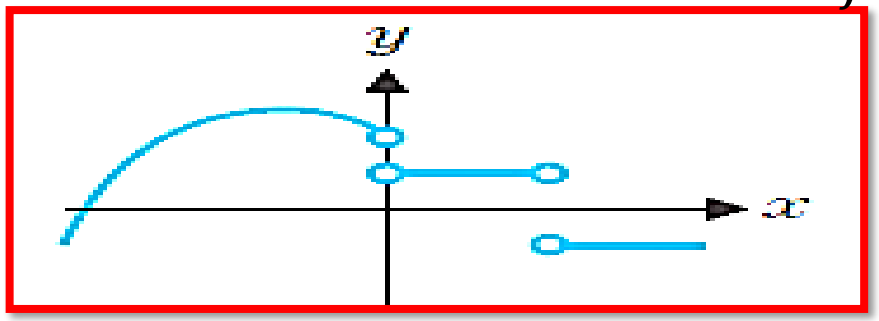


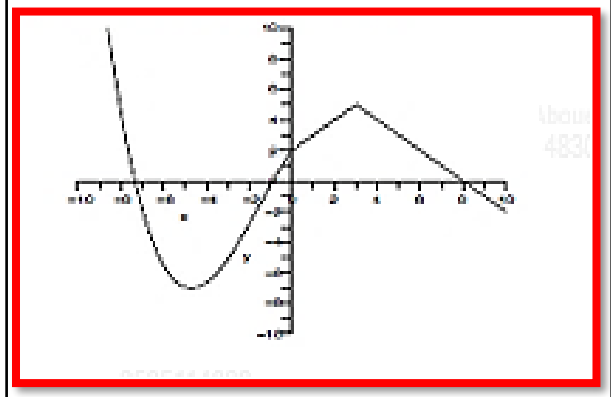
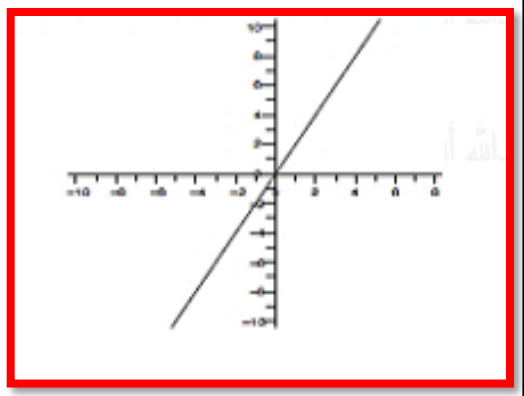
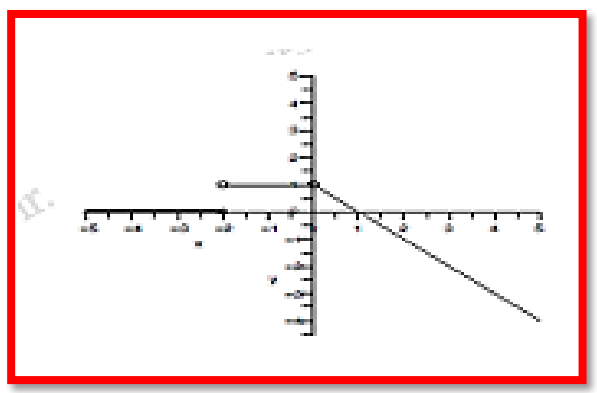
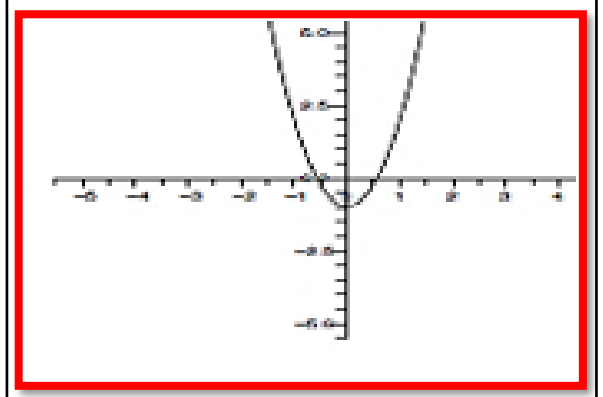
A	B	C	D
			

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
10	Understand the relationship between continuity and differentiability فهم العلاقة بين الاتصال والاشتقاق	Exercises (13-18)	151

17b) Use the graph of f' to sketch the graph of f

استخدم التمثيل البياني للمشتقة f' لرسم الدالة f

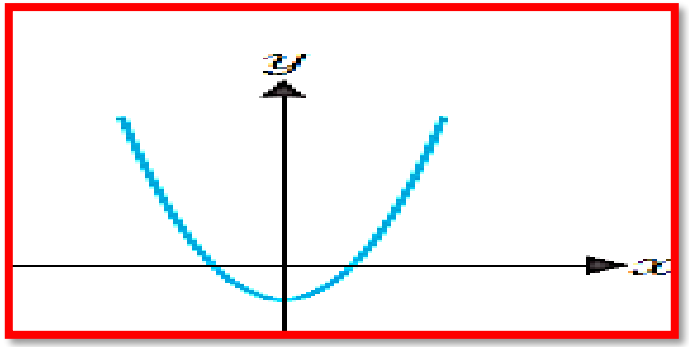


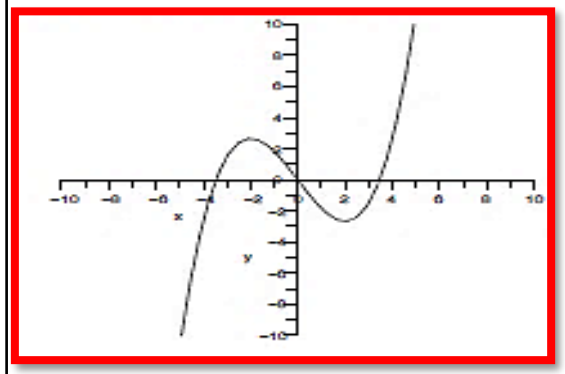
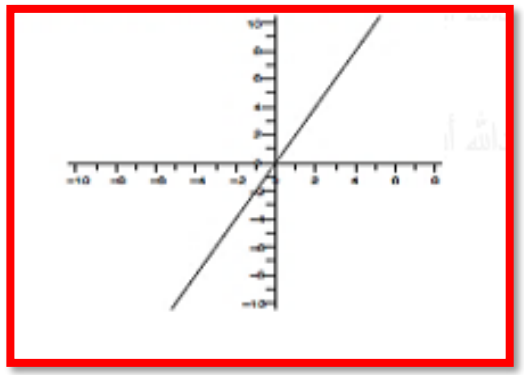
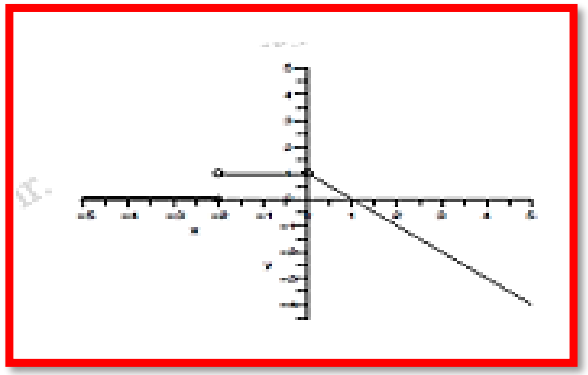
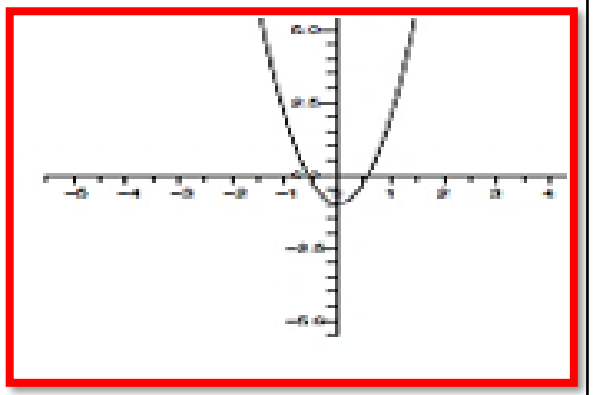
A	B	C	D
			

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
10	Understand the relationship between continuity and differentiability فهم العلاقة بين الاتصال والاشتقاق	Exercises (13-18)	151

18a) Use the graph of f' to sketch the graph of f

استخدم التمثيل البياني للمشتقة f' لرسم الدالة f

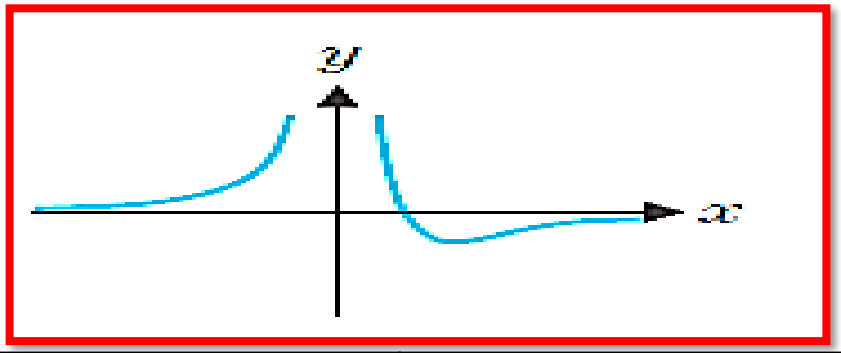


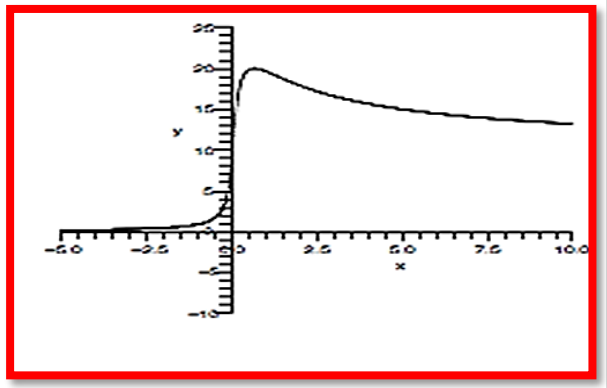
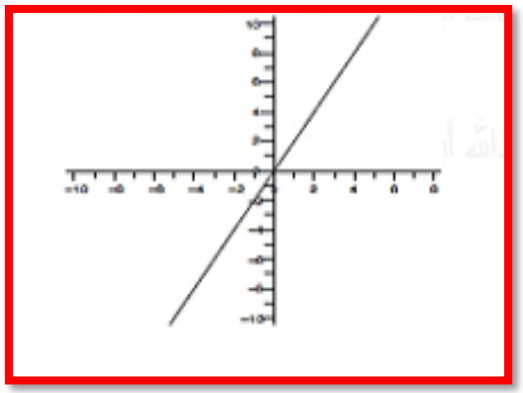
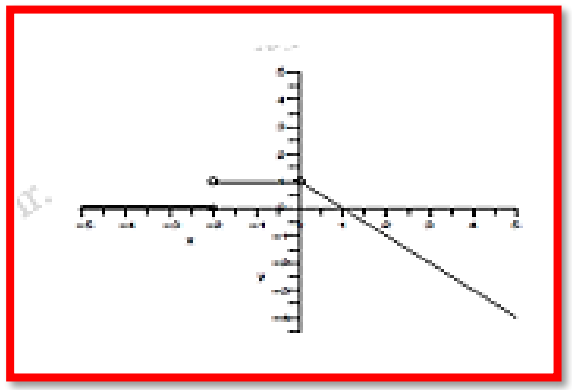
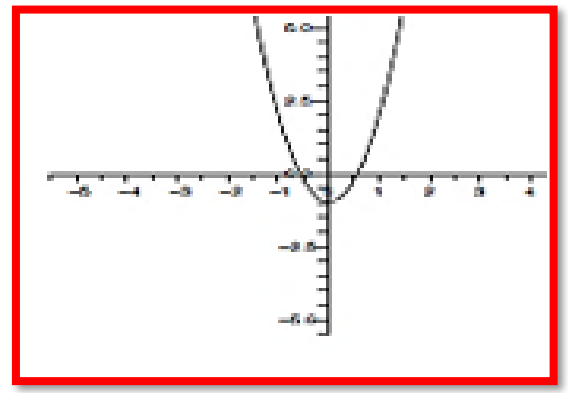
A	B	C	D
			

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
10	Understand the relationship between continuity and differentiability فهم العلاقة بين الاتصال والاشتقاق	Exercises (13-18)	151

18b) Use the graph of f' to sketch the graph of f

استخدم التمثيل البياني للمشتقة f' لرسم الدالة f



A	B	C	D
			

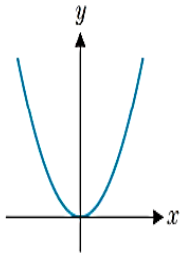
Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
10	Understand the relationship between continuity and differentiability فهم العلاقة بين الاتصال والاشتقاق	Exercises (13-18)	151

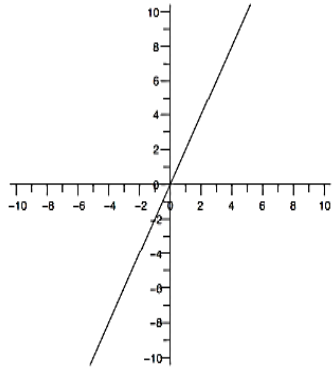
Full Answer

In exercises 13–16, use the graph of f to sketch a graph of f'.

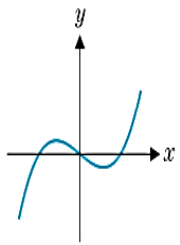
13. (a)



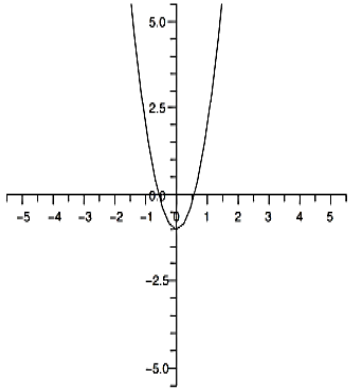
(a) The derivative should look like:



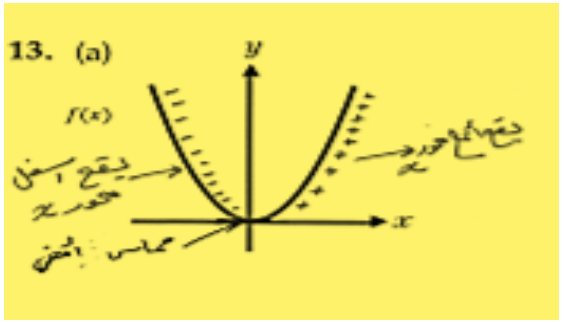
(b)



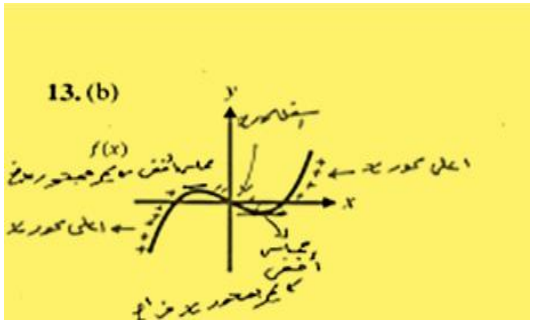
(b) The derivative should look like:



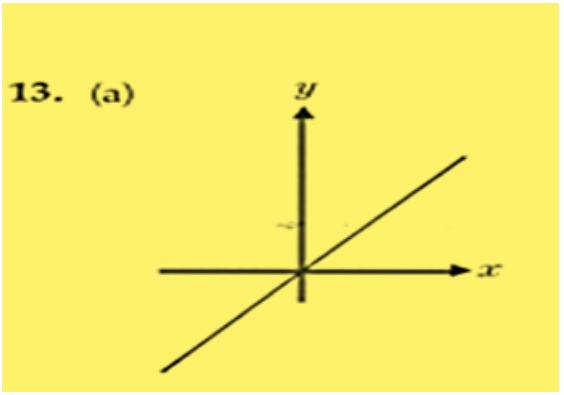
13. (a)



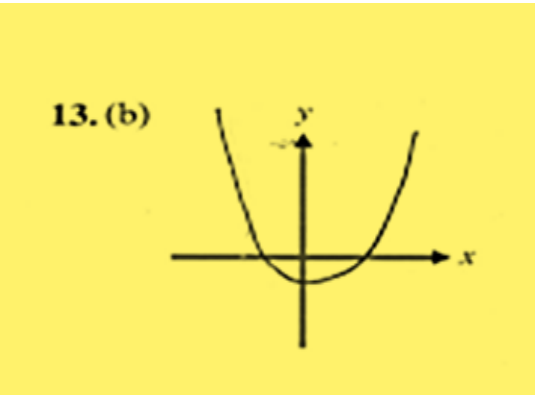
13. (b)



13. (a)



13. (b)



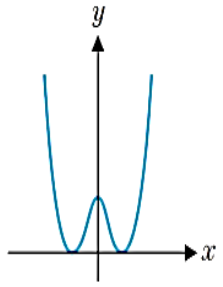
Abdalla Abouelnaga
0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

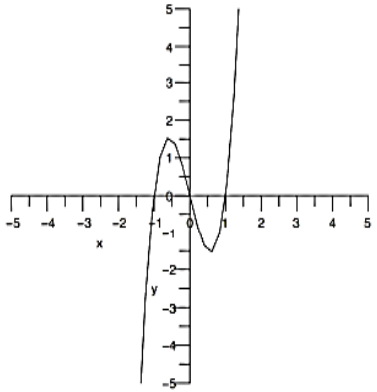
Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
10	Understand the relationship between continuity and differentiability فهم العلاقة بين الاتصال والاشتقاق	Exercises (13-18)	151

Full Answer

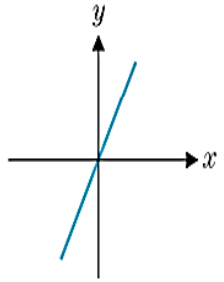
14. (a)



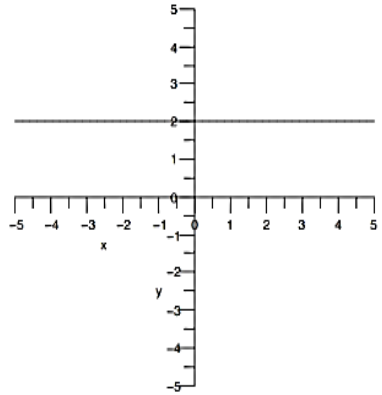
(a) The derivative should look like:

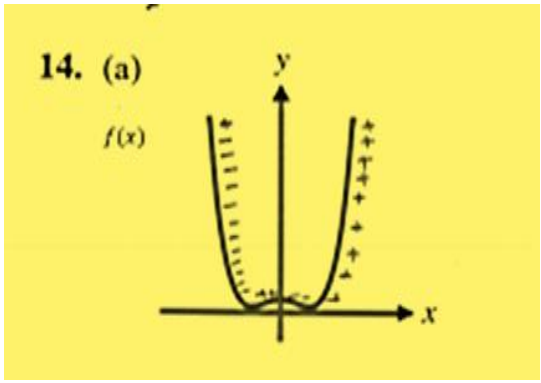


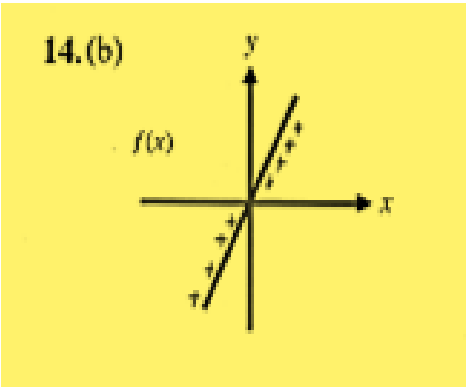
(b)

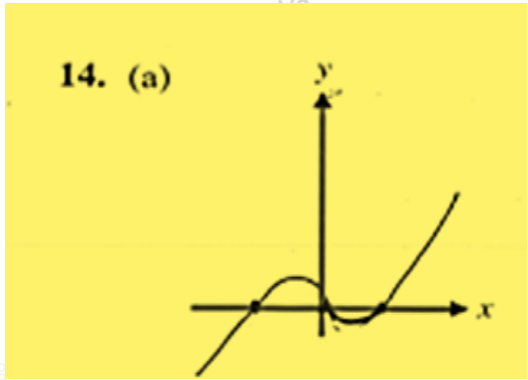


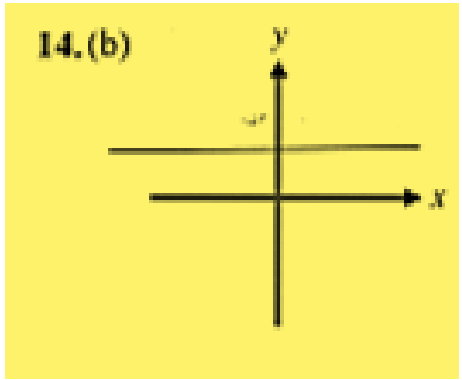
(b) The derivative should look like:









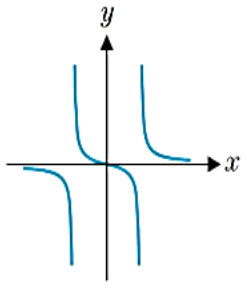


Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
10	Understand the relationship between continuity and differentiability فهم العلاقة بين الاتصال والاشتقاق	Exercises (13-18)	151

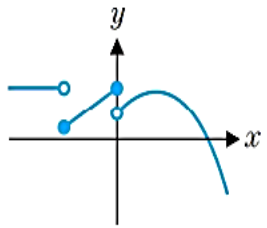
Full Answer

In exercises 13–16, use the graph of f to sketch a graph of f'.

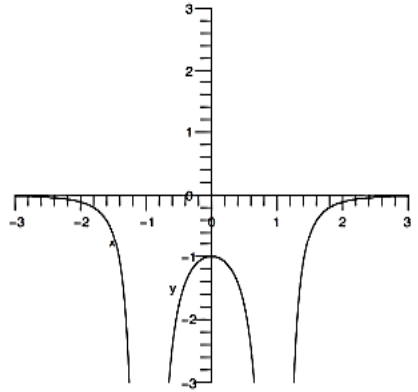
15. (a)



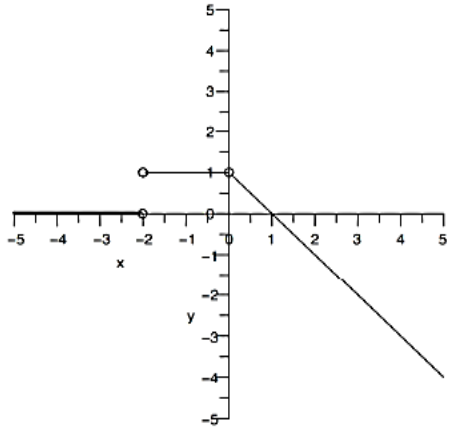
(b)

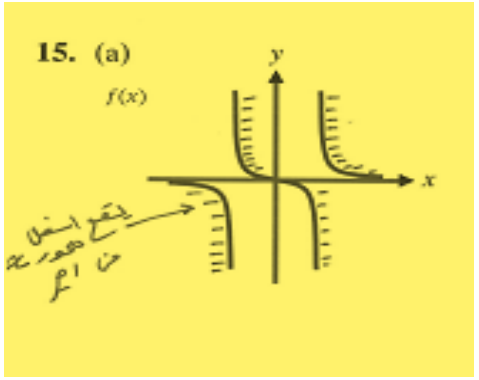


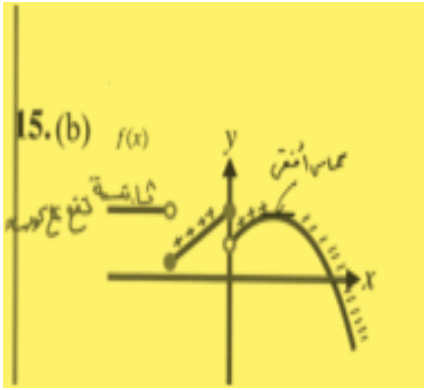
(a) The derivative should look like:

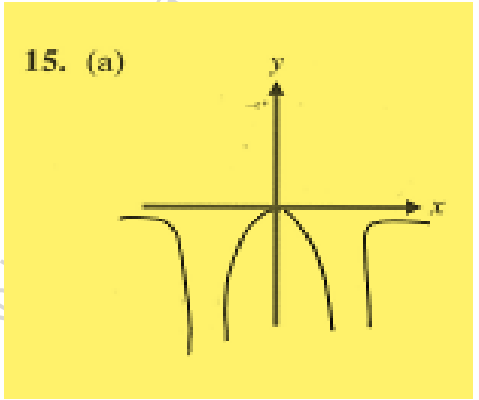


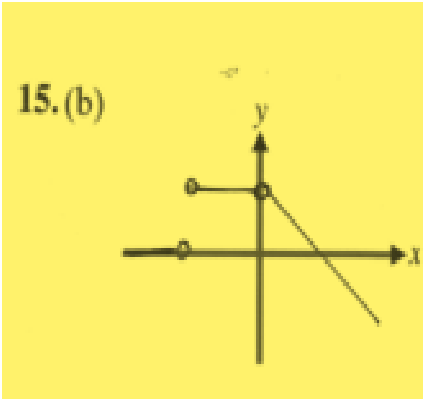
(b) The derivative should look like:









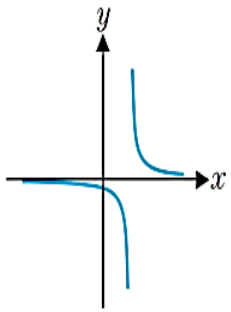


Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
10	Understand the relationship between continuity and differentiability فهم العلاقة بين الاتصال والاشتقاق	Exercises (13-18)	151

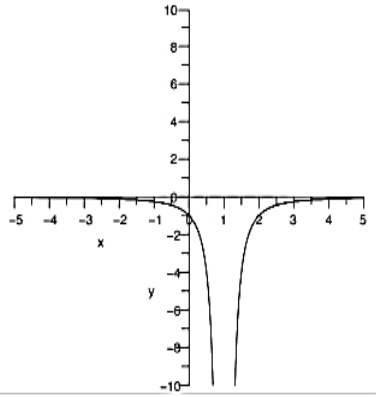
Full Answer

In exercises 13–16, use the graph of f to sketch a graph of f'.

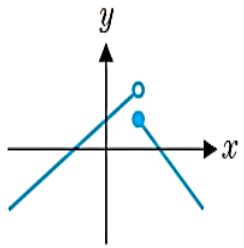
16. (a)



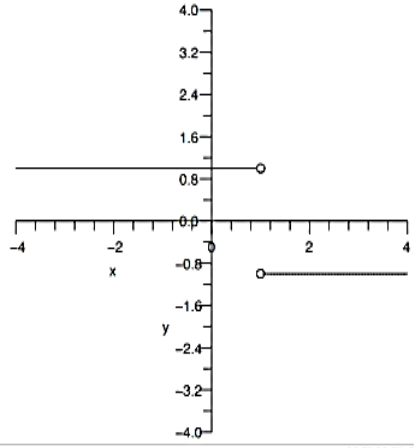
(a) The derivative should look like:

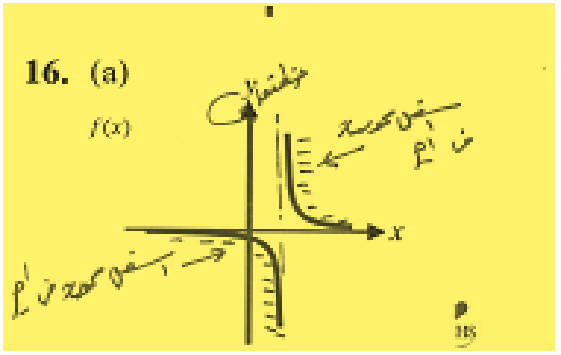


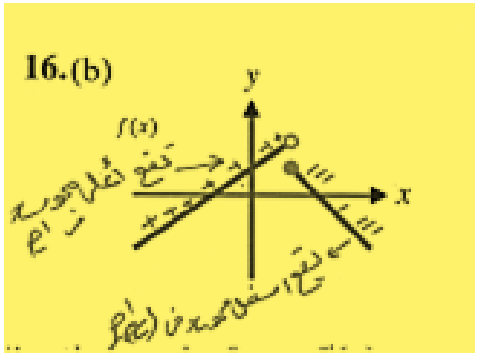
(b)

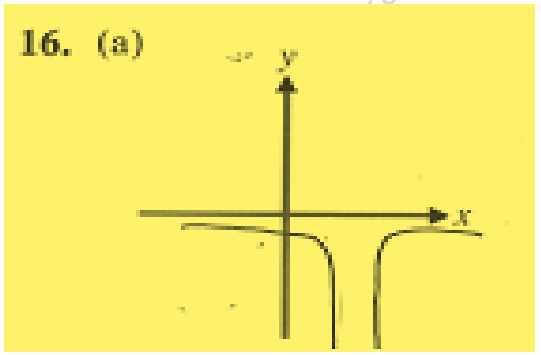


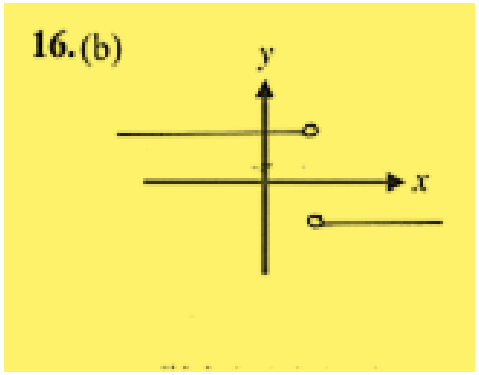
(b) The derivative should look like:









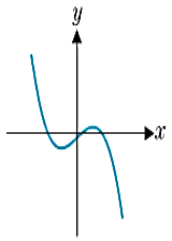


Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
10	Understand the relationship between continuity and differentiability فهم العلاقة بين الاتصال والاشتقاق	Exercises (13-18)	151

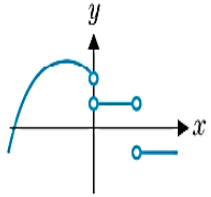
Full Answer

In exercises 17 and 18, use the given graph of f' to sketch a plausible graph of a continuous function f.

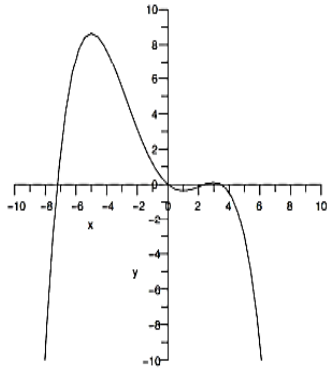
17. (a)



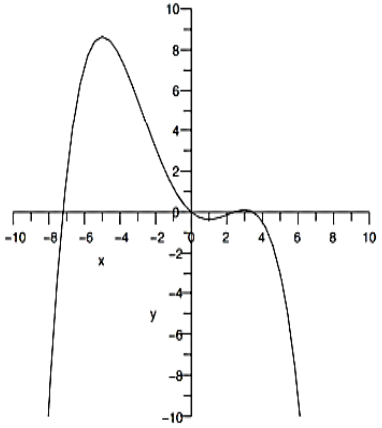
(b)

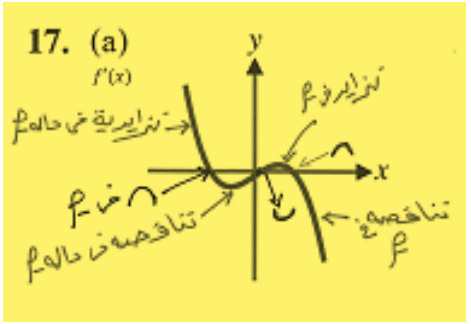


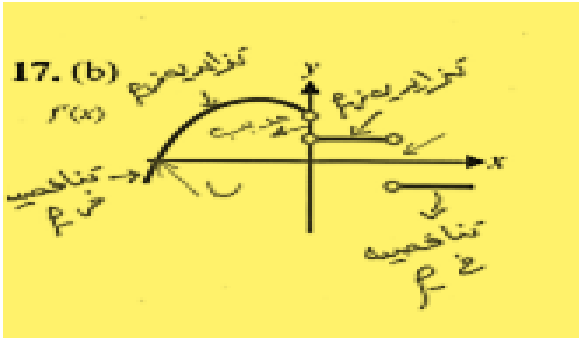
(a) The function should look like:

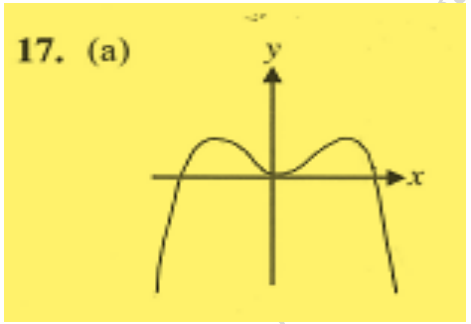


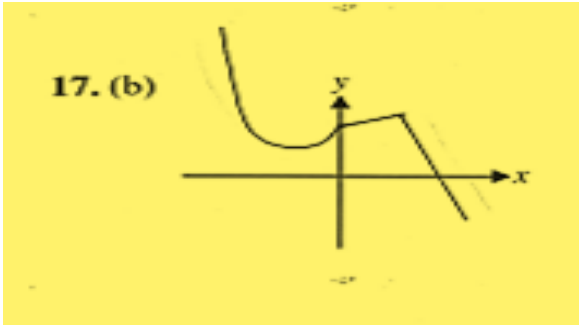
(b) The derivative should look like:











r. Abdalla Abouelnaga
0505114830

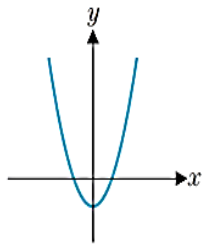
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
10	Understand the relationship between continuity and differentiability فهم العلاقة بين الاتصال والاشتقاق	Exercises (13-18)	151

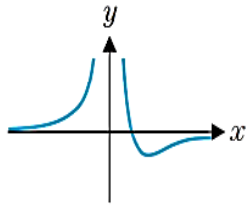
Full Answer

In exercises 17 and 18, use the given graph of f' to sketch a plausible graph of a continuous function f.

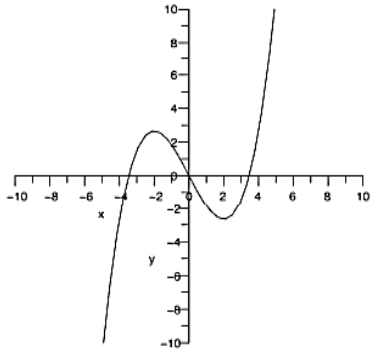
18. (a)



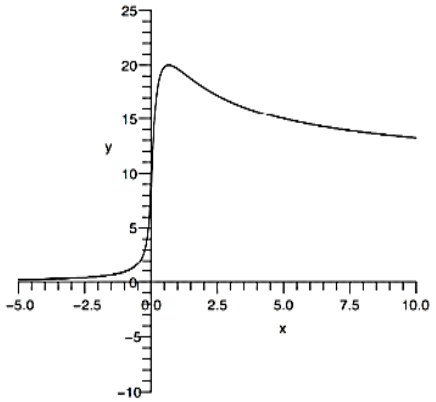
(b)

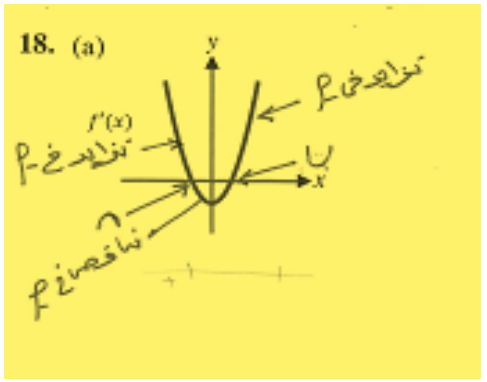


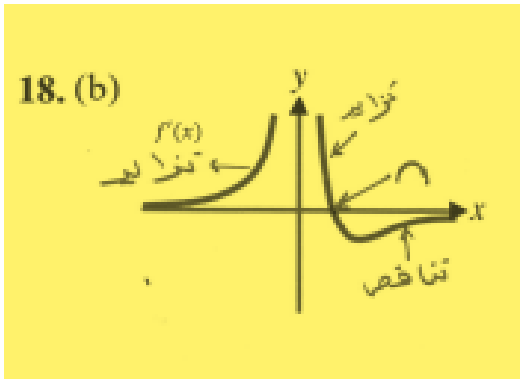
18. (a) The function should look like:

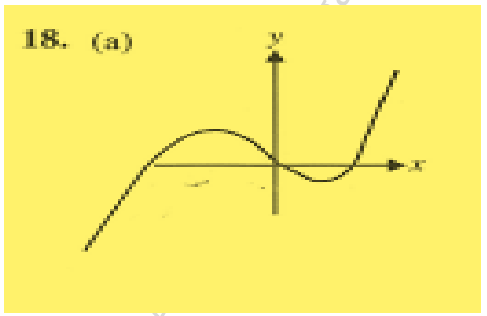


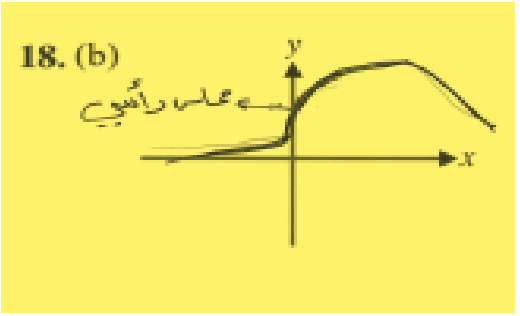
(b) The derivative should look like:











Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
11	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems. استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية	Exercise (21-24) Lesson 3.3	161

2024/2025

The function $s(t) = \sqrt{4t+16} - 4$ represents the position of an object. Find the acceleration function.

$s(t) = \sqrt{4t+16} - 4$ تمثل الدالة دالة الموقع لجسم ما. أوجد دالة التسارع.

A	$a(t) = -\frac{4}{\sqrt{(4t+16)}}$	B	$a(t) = -\frac{4}{\sqrt{(4t+16)^3}}$	C	$a(t) = 4\sqrt{(4t+16)^3}$	D	$a(t) = \frac{1}{\sqrt{(4t+16)^3}}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
11	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems. استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية	Exercise (21-24) Lesson 3.3	161

2023/2024

The function $s(t) = 2\sqrt{t} + 2t^2$ represents the position of an object.
Find the acceleration function.

$s(t) = 2\sqrt{t} + 2t^2$ تمثل الدالة
دالة الموقع لجسم ما.
أوجد دالة التسارع.

A	$a(t) = \frac{1}{2}t^{(3/2)} + 4$	B	$a(t) = -\frac{1}{2}t^{(-3/2)} + 4$	C	$a(t) = t^{(-1/2)} + 4t$	D	$a(t) = t^{(1/2)} + 4t$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
11	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems. استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية	Exercise (21-24) Lesson 3.3	161

21)The function $s(t) = -16t^2 + 40t + 10$ represent the position of an object
Find acceleration function.

تمثل الدالة $s(t) = -16t^2 + 40t + 10$ دالة الموقع لجسم ما .
أوجد دالة التسارع.

A	a(t)=32	B	a(t)=-32	C	a(t)=-64	D	a(t)=64

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
11	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems. استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية	Exercise (21-24) Lesson 3.3	161

22)The function $s(t) = -4.9t^2 + 12t - 3$ represent the position of an object
Find acceleration function.

تمثل الدالة $s(t) = -4.9t^2 + 12t - 3$ دالة الموقع لجسم ما .
أوجد دالة التسارع.

A	$s''(t)=-9.8$	B	$s''(t)=9.8$	C	$s''(t)=-9.8t+12$	D	$s''(t)=-9.8t-12$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
11	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems. استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية	Exercise (21-24) Lesson 3.3	161

23)use the position function to find the velocity and acceleration functions

استخدم دالة الموقع المعطاة لإيجاد السرعة المتجهة والتسارع

$$S(t) = \sqrt{t} + 2t^2$$

A	$v(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2$ $a(t) = \frac{-1}{4\sqrt{t^3}} + 2$	B	$v(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} + 4t$ $a(t) = \frac{1}{4\sqrt{t}} + 4$	C	$v(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 4t$ $a(t) = \frac{-1}{4\sqrt{t^3}} + 4$	D	$v(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} + 4t$ $a(t) = \frac{1}{4\sqrt{t^3}} + 4$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
11	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems. استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية	Exercise (21-24) Lesson 3.3	161

24)The function $s(t) = 10 - \frac{10}{t}$ represent the position of an object
Find acceleration function.

تمثل الدالة $s(t) = 10 - \frac{10}{t}$ دالة الموقع لجسم ما .
أوجد دالة التسارع.

A	$a(t) = -20\,t^{-3}$	B	$a(t) = 20\,t^{-3}$	C	$a(t) = -20\,t^{-2}$	D	$a(t) = -20\,t^{3}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
11	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems. استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية	Exercise (21-24) Lesson 3.3	161

Full Answer

In exercises 21–24, use the given position function to find the velocity and acceleration functions.

في التمارين 21–24، استخدم دالّة الموقع المعطاة لإيجاد دالتي السرعة المتجهة والتسارع.

21. $s(t) = -16t^2 + 40t + 10$

22. $s(t) = -4.9t^2 + 12t - 3$

23. $s(t) = \sqrt{t} + 2t^2$

24. $s(t) = 10 - \dfrac{10}{t}$

21. $s(t) = -16t^2 + 40t + 10$
$v(t) = s'(t) = -32t + 40$
$a(t) = v'(t) = s''(t) = -32$

22. $s(t) = -4.9t^2 + 12t - 3$
$v(t) = s'(t) = -9.8t + 12$
$a(t) = v'(t) = s''(t) = -9.8$

23. $s(t) = \sqrt{t} + 2t^2 = t^{1/2} + 2t^2$
$v(t) = s'(t) = \dfrac{1}{2}t^{-1/2} + 4t$
$a(t) = v'(t) = s''(t) = -\dfrac{1}{4}t^{-3/2} + 4$

24. $s(t) = 10 - 10t^{-1}$ $v(t) = s'(t) = 10t^{-2}$
$a(t) = s''(t) = -20t^{-3}$

Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
12	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems.. استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية	Exercise (37-42) Lesson 3.3	161 2023/2024

Find all values of x for which the tangent line to $y = 3x^4 - 6x^2 + 1$ is horizontal.

أوجد جميع قيم x التي عندها يكون المماس على $y = 3x^4 - 6x^2 + 1$ أفقيًا.

A	$x = -1, x = 0, x = 1$	B	$x = -2, x = 0, x = 2$	C	$x = -\sqrt{2}, x = 0, x = \sqrt{2}$	D	$x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
12	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems.. استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية	Exercise (37-42) Lesson 3.3	161 2021/2022

37a) Find all value(s) of x for which the tangent line to $f(x) = x^3 - 3x + 1$ is at angle of $45°$ with the x axis, assuming that the angles measured counterclockwise.

أوجد جميع قيم x والتي يشكل عندها المماس على منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 3x + 1$ زاوية قياسها 45° مع المحور X.
على فرض أن الزاوية تقاس باتجاه معاكس لعقارب الساعة.

A	$x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$	B	$x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$	C	$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	D	$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
12	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems.. استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية	Exercise (37-42) Lesson 3.3	161

37b) Find all value(s) of x for which the tangent line to $f(x) = x^3 - 3x + 1$ is at angle $30°$ with the x axis, assuming that the angles measured counterclockwise.

أوجد جميع قيم x والتي يشكل عندها المماس على منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 3x + 1$ زاوية قياسها 30° مع المحور X.
على فرض أن الزاوية تقاس باتجاه معاكس لعقارب الساعة.

A	$x = \pm\sqrt{1 + \frac{1}{3\sqrt{3}}}$	B	$x = \sqrt{1 + \frac{1}{3\sqrt{3}}}$	C	$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	D	$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
12	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems.. استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية	Exercise (37-42) Lesson 3.3	161

38. Find all values of x for which the tangent lines to $y = x^3 + 2x + 1$ and $y = x^4 + x^3 + 3$ are (a) parallel·

أوجد جميع قيم x التي عندها تكون المستقيمات المماسة للمنحنيين $y = x^3 + 2x + 1$ و $y = x^4 + x^3 + 3$ متوازية.

A	$x = \pm\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	B	$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	C	$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	D	$x = \sqrt{2}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
12	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems.. استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية	Exercise (37-42) Lesson 3.3	161

38. Find all values of x for which the tangent lines to $y = x^3 + 2x + 1$ and $y = x^4 + x^3 + 3$ are
(b) perpendicular.

أوجد جميع قيم x التي عندها تكون المستقيمات المماسة للمنحنيين $y = x^3 + 2x + 1$ و $y = x^4 + x^3 + 3$ متعامدة.

A	$x = -0.83$	B	$x = 0.83$	C	$x = 1$	D	$x = -1$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
12	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems.. استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية	Exercise (37-42) Lesson 3.3	161

39. Find a second-degree polynomial of the form $ax^2 + bx + c$ such that

(a) $f(0) = -2, f'(0) = 2$ and $f''(0) = 3$

أوجد كثيرة حدود من الدرجة الثانية على الصورة $ax^2 + bx + c$ بحيث

$f(0) = -2$، $f'(0) = 2$ و $f''(0) = 3$.

A	$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x - 2$	B	$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x - 2$	C	$f(x) = x^2 + 2x + 2$	D	$f(x) = x^2 + 2x - 2$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
12	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems.. استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية	Exercise (37-42) Lesson 3.3	161

39. Find a second-degree polynomial of the form $ax^2 + bx + c$ such that

(b) $f(0) = 0, f'(0) = 5$ and $f''(0) = 1$.

أوجد كثيرة حدود من الدرجة الثانية على الصورة $ax^2 + bx + c$ بحيث:

$f(0) = 0, f'(0) = 5$ and $f''(0) = 1$.

A	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x$	B	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x$	C	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$	D	$f(x) = 2x^2 + 5x$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
12	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems.. استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية	Exercise (37-42) Lesson 3.3	161

40. Find a general formula for the nth derivative $f^{(n)}(x)$ for (a) $f(x) = \sqrt{x}$

.40 أوجد صيغةً عامةً لإيجاد المشتقة من الرتبة $f^{(n)}(x)$ لـ (a) $f(x) = \sqrt{x}$

A	$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}.\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}.x^{\frac{-(2n-1)}{2}}$	B	$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}.\frac{(2n+2)!}{2^{2n-1}(n+1)!}.x^{\frac{-(2n-1)}{2}}$
C	$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}.\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}.x^{\frac{-(2n-1)}{2}}$	D	$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}.\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}.x^{\frac{(2n-1)}{2}}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
12	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems.. استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية	Exercise (37-42) Lesson 3.3	161

40. Find a general formula for the nth derivative $f^{(n)}(x)$ for (b) $f(x) = \frac{2}{x}$

40. أوجد صيغةً عامةً لإيجاد المشتقة من الرتبة $f^{(n)}(x)$ لـ (b) $f(x) = \frac{2}{x}$

A	$f^{(n)}(x) = (-1)^n.(n+1)!.x^{-n-2}$	B	$f^{(n)}(x) = (1)^n(n+1)!.x^{-n-2}$
C	$f^{(n)}(x) = (n+1)!.x^{-n+2}$	D	$f^{(n)}(x) = (-1)^n x^{-n-2}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
12	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems.. استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية	Exercise (37-42) Lesson 3.3	161

41. Find the area of the triangle bounded by $x = 0, y = 0$ and the tangent line to $y = \frac{1}{x}$ at $x = 1$.

أوجد مساحة المثلث المحصور بين $x = 0$، $y = 0$، والخط المماس للمنحنى $y = \frac{1}{x}$ عند $x = 1$

A	2	B	1	C	3	D	4

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
12	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems.. استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية	Exercise (37-42) Lesson 3.3	161

41. Find the area of the triangle bounded by $x = 0, y = 0$ and the tangent line to $y = \frac{1}{x}$ at $x = 2$.

أوجد مساحة المثلث المحصور بين $x = 0$ ، $y = 0$ ، والخط المماس للمنحنى $y = \frac{1}{x}$ at $x = 2$.

A	2	B	1	C	3	D	4

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
12	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems.. استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية	Exercise (37-42) Lesson 3.3	161

41. Find the area of the triangle bounded by $x = 0, v = 0$ and the tangent line to $y = \frac{1}{x}$ at $x = a > 0$.

أوجد مساحة المثلث المحصور بين $x = 0$، $y = 0$، والخط المماس للمنحنى $y = \frac{1}{x}$ at $x = a > 0$.

A	$A = \frac{1}{2}(\frac{2}{a})(2a)$	B	$A = (\frac{2}{a})(2a)$	C	$A = \frac{1}{2}(\frac{2}{a})(a)$	D	$A = \frac{1}{2}(2a)$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
12	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems.. استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية	Exercise (37-42) Lesson 3.3	161

42. Find the area of the triangle bounded by $x = 0, y = 0$ and the tangent line to $y = \frac{1}{x^2}$ at $x = 2$.

$y = \frac{1}{x^2}$ at $x = 2$. أوجد مساحة المثلث المحصور بين $x = 0$ ، $y = 0$ ، والخط المماس للمنحنى

A	$\frac{9}{8}$	B	$\frac{3}{8}$	C	$\frac{3}{4}$	D	$\frac{1}{8}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
12	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems.. استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية	Exercise (37-42) Lesson 3.3	161

Full Answer

37. Find all values of x for which the tangent line to $y = x^3 - 3x + 1$ is (a) at an angle of $45°$ with the x-axis; (b) at an angle of $30°$ with the x-axis, assuming that the angles are measured counterclockwise.

38. Find all values of x for which the tangent lines to $y = x^3 + 2x + 1$ and $y = x^4 + x^3 + 3$ are (a) parallel; (b) perpendicular.

39. Find a second-degree polynomial (of the form $ax^2 + bx + c$) such that (a) $f(0) = -2$, $f'(0) = 2$ and $f''(0) = 3$. (b) $f(0) = 0$, $f'(0) = 5$ and $f''(0) = 1$.

40. Find a general formula for the nth derivative $f^{(n)}(x)$ for

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (b) $f(x) = \frac{2}{x}$

41. Find the area of the triangle bounded by $x = 0$, $y = 0$ and the tangent line to $y = \frac{1}{x}$ at $x = 1$. Repeat with the triangle bounded by $x = 0$, $y = 0$ and the tangent line to $y = \frac{1}{x}$ at $x = 2$. Show that you get the same area using the tangent line to $y = \frac{1}{x}$ at any $x = a > 0$.

42. Show that the result of exercise 41 does not hold for $y = \frac{1}{x^2}$. That is, the area of the triangle bounded by $x = 0$, $y = 0$ and the tangent line to $y = \frac{1}{x^2}$ at $x = a > 0$ does depend on the value of a.

37. أوجد جميع قيم x والتي يشكّل عندها المماس على منحنى $y = x^3 - 3x + 1$ (a) زاوية قياسها $45°$ مع المحور x ؛ (b) زاوية قياسها $30°$ مع المحور x . على فرض أن الزاويتين تقاسان باتجاهٍ معاكسٍ لعقارب الساعة.

38. أوجد جميع قيم x التي عندها يكون المماسان على $y = x^3 + 2x + 1$ و $y = x^4 + x^3 + 3$ (a) متوازيين.

39. أوجد كثيرة الحدود من الدرجة الثانية (بالصيغة $ax^2 + bx + c$) بحيث يكون (a) $f(0) = -2, f'(0) = 2$ و $f''(0) = 3$.

(b) $f(0) = 0, f'(0) =$ و $f''(0) = 1$.

40. أوجد صيغةً عامةً لإيجاد المشتقة من الرتبة $f^{(n)}(x)$ لـ

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (b) $f(x) = \frac{2}{x}$

41. أوجد مساحة المثلث الذي يحدّده $x = 0, y = 0$ والمماس على $y = \frac{1}{x}$ عند $x = 1$. كرّر الأمر نفسه بالنسبة لمثلثٍ يحدّده $x = 0, y = 0$ والمماس على $y = \frac{1}{x}$ عند $x = 2$. وضّح أنك تحصل على المساحة نفسها باستخدام المماس على $y = \frac{1}{x}$ عند أيّ قيمة $x = a > 0$.

42. وضّح أن نتيجة التمرين 41 لا تنطبق على $y = \frac{1}{x^2}$. أي أن مساحة المثلث المحدود بـ $x = 0, y = 0$ والمماس على $y = \frac{1}{x^2}$ عند $x = a > 0$ لا تعتمد على قيمة a .

Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
12	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems.. استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية	Exercise (37-42) Lesson 3.3	161

Full Answer

37. **(a)** $y = x^3 - 3x + 1$
$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$
The tangent line to $y = f(x)$ intersects the x-axis at a 45° angle when
$f'(x) = 1$
$\Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 1$
$\Leftrightarrow x^2 = 1 + \frac{1}{3}$
$\Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ or $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

(b) The tangent line to $y = f(x)$ intersects the x-axis at a 30° angle when
$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
$\Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\Leftrightarrow x^2 = 1 + \frac{1}{3\sqrt{3}}$
$\Leftrightarrow x = \left(1 + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^{1/2}$ or
$x = -\left(1 + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^{1/2}$

38. Answers depend on CAS.

39. $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f(0) = c$
$f'(x) = 2ax + b$, $f'(0) = b$
$f''(x) = 2a$, $f''(0) = 2a$
Given $f''(0) = 3$, we learn $2a = 3$, or $a = 3/2$. Given $f'(0) = 2$ we learn $2 = b$, and given $f(0) = -2$, we learn $c = -2$. In the end
$f(x) = ax^2 + bx + c = \frac{3}{2}x^2 + 2x - 2$

40. **(a)** $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$
$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$
$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2}$
$f'''(x) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)x^{-5/2}$
$f^{(n)}(x)$
$= (-1)^{n-1}\frac{1.3.5...(2n-3)}{2^n}x^{-(2n-1)/2}$
$= (-1)^{n-1}.\frac{1.2.3...(2n-2)}{2^n.2.4...(2n-2)}x^{-(2n-1)/2}$
$= (-1)^{n-1}.\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}x^{-(2n-1)/2}$

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
12	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems.. استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية	Exercise (37-42) Lesson 3.3	161

Full Answer

(b) $f'(x) = -2x^{-3}$
$f''(x) = 6x^{-4}$
$f'''(x) = -24x^{-5}$
The pattern is
$f^{(n)}(x) = (-1)^n(n+1)!x^{-n-2}$

41. For $y = \frac{1}{x}$, we have $y' = -\frac{1}{x^2}$. Thus, the slope of the tangent line at $x = a$ is $-\frac{1}{a^2}$. When $a = 1$, the slope of the tangent line at $(1, 1)$ is -1, and the equation of the tangent line is $y = -x + 2$. The tangent line intersects the axes at $(0, 2)$ and $(2, 0)$. Thus, the area of the triangle is $\frac{1}{2}(2)(2) = 2$.
When $a = 2$, the slope of the tangent line at $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ is $-\frac{1}{4}$, and the equation of the tangent line is $y = -\frac{1}{4}x + 2$. The tangent line intersects the axes at $(0, 1)$ and $(4, 0)$. Thus, the area of the triangle is $\frac{1}{2}(4)(1) = 2$.
In general, the equation of the tangent line is $y = -\left(\frac{1}{a^2}\right)x + \frac{2}{a}$. The tangent line intersects the axes at $(0, \frac{2}{a})$ and $(2a, 0)$. Thus, the area of the triangle is $\frac{1}{2}(2a)\left(\frac{2}{a}\right) = 2$.

42. For $y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$, we have
$f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$
Thus, the slope of the tangent line at $x = a$ is $-\frac{2}{a^3}$.
When $a = 1$, the slope of the tangent line at $(1, 1)$ is -2, and the equation of the tangent line is $y = -2x + 3$. The tangent line intersects the axes at $(0, 3)$ and $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Thus the area of the triangle is $\frac{1}{2}(3)(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}$.
When $a = 2$, the slope of the tangent line at $\left(2, \frac{1}{4}\right)$ is $-\frac{1}{4}$, and the equation of the tangent line is $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$. The tangent line intersects the axes at $(0, \frac{3}{4})$ and $(3, 0)$. Thus the area of the triangle is $\frac{1}{2}(\frac{3}{4})(3) = \frac{9}{8}$.
Since $\frac{9}{4} \neq \frac{9}{8}$, we see that the result for exercise 41 does not hold here.

Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
13	Apply the chain rule for differentiation تطبيق قاعدة السلسلة في الاشتقاق	Exercise (31-38) Lesson 3.5	177

2024/2025

Given that the function $h(x) = g(f(x))$, use relevant information to compute $h'(2)$.

على فرض أن الدالة $h(x) = g(f(x))$، استخدم المعلومات ذات الصلة لحساب $h'(2)$.

$$f'(3) = 3, f'(2) = -1, f(2) = 2$$
$$g'(1) = 5, g'(2) = -2, g(2) = 2$$

A	$h'(2) = 6$	B	$h'(2) = -2$	C	$h'(2) = 2$	D	$h'(2) = -4$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
13	Apply the chain rule for differentiation تطبيق قاعدة السلسلة في الاشتقاق	Exercise (31-38) Lesson 3.5	177

31) Given that the function $h(x) = g(f(x))$, use relevant information to compute $h'(1)$, where $f(1) = 3, g(1) = 2, f'(1) = 4, f'(2) = 3, g'(1) = -2$ and $g'(3) = 5$

على فرض أن الدالة $h(x) = g(f(x))$، استخدم المعلومات ذات الصلة لحساب $h'(1)$.

A	-6	B	6	C	3	D	-3

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
13	Apply the chain rule for differentiation تطبيق قاعدة السلسلة في الاشتقاق	Exercise (31-38) Lesson 3.5	177

32) Given that the function $h(x) = g(f(x))$, use relevant information to compute $h'(2)$, where $f(2) = 1, g(2) = 3, f'(2) = -1, f'(3) = -3,$ $g'(1) = 2$ and $g'(2) = 4$

على فرض أن الدالة $h(x) = g(f(x))$، استخدم المعلومات ذات الصلة لحساب $h'(2)$.

A	-12	B	12	C	6	D	-6

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
13	Apply the chain rule for differentiation تطبيق قاعدة السلسلة في الاشتقاق	Exercise (31-38) Lesson 3.5	177

33) A function f is an even function if $f(-x) = f(x)$ for all x, and it is an odd function if $f(-x) = -f(x)$ for all x.

Which statement is true

A	The derivative of an even function is odd, and the derivative of an odd function is even.
B	The derivative of an even function is even, and the derivative of an odd function is odd.
C	The derivative of an even function is even, and the derivative of an odd function is even.
D	The derivative of an even function is odd, and the derivative of an odd function is odd.

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
13	Apply the chain rule for differentiation تطبيق قاعدة السلسلة في الاشتقاق	Exercise (31-38) Lesson 3.5	177

34) If the graph of a differentiable function f is symmetric about the line, $x = a$ then f' is symmetric about

إذا كان التمثيل البياني للدالة f القابلة للاشتقاق متماثلًا حول المستقيم $x = a$ فإن f' متماثلة حول

A	(a , 0)	B	(0 , a)	C	(-a , 0)	D	(0 , -a)

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
13	Apply the chain rule for differentiation تطبيق قاعدة السلسلة في الاشتقاق	Exercise (31-38) Lesson 3.5	177

35a) *Find the derivative of* $f(x^2)$ أوجد مشتقة

A	$f'(x^2)$	B	$2x\,f'(x^2)$	C	$f'(2x)$	D	$xf'(x)$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
13	Apply the chain rule for differentiation تطبيق قاعدة السلسلة في الاشتقاق	Exercise (31-38) Lesson 3.5	177

35b) *Find the derivative of* $[f(x)]^2$ أوجد مشتقة

A	$2f(x)f'(x)$	B	$2f(x)f'(x^2)$	C	$2f(x^2)f'(x)$	D	$f(x)f'(x)$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
13	Apply the chain rule for differentiation تطبيق قاعدة السلسلة في الاشتقاق	Exercise (31-38) Lesson 3.5	177

35c) *Find the derivative of* $f(f(x))$ أوجد مشتقة

A	$f'(f(x))\,f'(x)$	B	$(f(x))\,f'(x)$	C	$f'(f(x))$	D	$2f'(f(x))\,f'(x)$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
13	Apply the chain rule for differentiation تطبيق قاعدة السلسلة في الاشتقاق	Exercise (31-38) Lesson 3.5	177

36a) *Find the derivative of* $f(\sqrt{x})$ أوجد مشتقة

A	$f'(\sqrt{x})\ \frac{1}{2\sqrt{x}}$	B	$f'(\sqrt{x})\ \frac{1}{2x}$	C	$f'(x)\ \frac{1}{\sqrt{x}}$	D	$f'(\sqrt{x})\ \frac{1}{\sqrt{x}}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
13	Apply the chain rule for differentiation تطبيق قاعدة السلسلة في الاشتقاق	Exercise (31-38) Lesson 3.5	177

36b) *Find the derivative of* $\sqrt{f(x)}$ أوجد مشتقة

A	$\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}f'(x)$	B	$\frac{1}{\sqrt{f(x)}}f'(x)$	C	$\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}f'(\sqrt{x})$	D	$\sqrt{f(x)}f'(x)$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
13	Apply the chain rule for differentiation تطبيق قاعدة السلسلة في الاشتقاق	Exercise (31-38) Lesson 3.5	177

36c) *Find the derivative of* $f(xf(x))$

أوجد مشتقة

A	$f'(xf(x)) \cdot (f(x) + xf'(x))$	B	$f'(x)f(xf(x))$	C	$f(x) + xf'(x)$	D	$f'(xf(x))$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830
Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
13	Apply the chain rule for differentiation تطبيق قاعدة السلسلة في الاشتقاق	Exercise (31-38) Lesson 3.5	177

37a) *Find the derivative of* $f(1/x)$ أوجد مشتقة

A	$f'(\frac{1}{x}) \cdot \frac{-1}{x^2}$	B	$f'(\frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{x^2}$	C	$f'(\frac{1}{x}) \cdot \frac{-1}{x}$	D	$f'(x) \cdot \frac{-1}{x^2}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
13	Apply the chain rule for differentiation تطبيق قاعدة السلسلة في الاشتقاق	Exercise (31-38) Lesson 3.5	177

37b) *Find the derivative of* $\frac{1}{f(x)}$ أوجد مشتقة

A	$\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$	B	$\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$	C	$\frac{-f(x)}{(f(x))^2}$	D	$\frac{f'(x)}{f(x)}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
13	Apply the chain rule for differentiation تطبيق قاعدة السلسلة في الاشتقاق	Exercise (31-38) Lesson 3.5	177

37c) *Find the derivative of* $f\left(\frac{x}{f(x)}\right)$ أوجد مشتقة

A	$\frac{1}{f(x)}f'\left(\frac{x}{f(x)}\right)$	B	$f'\left(\frac{x}{f(x)}\right)$	C	$\frac{f(x)-xf'(x)}{[f(x)]^2}$	D	$f'\left(\frac{x}{f(x)}\right)\cdot\frac{f(x)-xf'(x)}{[f(x)]^2}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

D

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
13	Apply the chain rule for differentiation تطبيق قاعدة السلسلة في الاشتقاق	Exercise (31-38) Lesson 3.5	177

38a) *Find the derivative of* $1 + f(x^2)$ أوجد مشتقة

A	$1 + 2xf'(x)$	B	$2xf'(x^2)$	C	$f'(x^2)$	D	$f'(x^2)$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
13	Apply the chain rule for differentiation تطبيق قاعدة السلسلة في الاشتقاق	Exercise (31-38) Lesson 3.5	177

38b) *Find the derivative of* $[1 + f(x)]^2$ أوجد مشتقة

A	$2[1 + f(x)]f'(x)$	B	$2[1 + f(x)]$	C	$1 + [f'(x)]^2$	D	$2f'(x)$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
13	Apply the chain rule for differentiation تطبيق قاعدة السلسلة في الاشتقاق	Exercise (31-38) Lesson 3.5	177

38c) *Find the derivative of* $f(1+f(x))$ أوجد مشتقة

A	$f'(x)f'(1+f(x))$	B	$f'(1+f(x))$	C	$1+f'(x)$	D	$f(1+f'(x))$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
13	Apply the chain rule for differentiation تطبيق قاعدة السلسلة في الاشتقاق	Exercise (31-38) Lesson 3.5	177

Full Answer

في التمرينين 31 و 32، استخدم المعلومات ذات الصلة لحساب المشتقة $h(x) = f(g(x))$.

31. $h'(1)$. حيث:

$$f'(2)=3, f'(1)=4, g(1)=2, f(1)=3, g'(1)=-2, g'(3)=5$$

32. $h'(2)$. حيث:

$$f'(3)=-3, f'(2)=-1, g(2)=3, f(2)=1, g'(1)=2, g'(2)=4$$

الدالّة f تكون **دالّة زوجية** إذا كان $f(-x) = f(x)$ لكل x وتكون **دالّة فردية** إذا كان $f(-x) = -f(x)$ لكل x. اثبت أن مشتقة دالّة الزوجية هي دالة فردية. وأن مشتقة دالّة الفردية هي دالة زوجية.

إذا كان التمثيل البياني للدالّة القابلة للإشتقاق f متماثلًا حول المستقيم $x = a$. فماذا يمكنك القول عن تماثل التمثيل البياني لـ f'؟

في التمارين 35–38 أوجد المشتقة للدالة f.

35. (a) $f(x^2)$ (b) $[f(x)]^2$ (c) $f(f(x))$

36. (a) $f(\sqrt{x})$ (b) $\sqrt{f(x)}$ (c) $f(xf(x))$

37. (a) $f(1/x)$ (b) $1/f(x)$ (c) $f\left(\frac{x}{f(x)}\right)$

38. (a) $1+f(x^2)$ (b) $[1+f(x)]^2$ (c) $f(1+f(x))$

Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
13	Apply the chain rule for differentiation تطبيق قاعدة السلسلة في الاشتقاق	Exercise (31-38) Lesson 3.5	177

Full Answer

31. $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$
$h'(1) = f'(g(1))g'(1) = f'(2) \cdot (-2) = -6$

32. $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$
$h'(2) = f'(g(2))g'(2) = f'(3) \cdot (4) = -12$

33. As a temporary device given any f, set $g(x) = f(-x)$. Then by the chain rule,

$$g'(x) = f'(-x)(-1) = -f'(-x).$$

In the even case ($g = f$) this reads $f'(-x) = -f'(x)$ and shows f' is odd.
In the odd case ($g = -f$ and therefore $g' = -f'$), this reads $-f'(x) = -f'(-x)$ or $f'(x) = f'(-x)$ and shows f' is even.

34. To say that $f(x)$ is symmetric about the line $x = a$ is the same as saying that $f(a+x) = f(a-x)$. Taking derivatives (using the chain rule), we have

$$\frac{d}{dx} f(a+x) = f'(a+x)$$

$$\frac{d}{dx} f(a-x) = f'(a-x)(-1) = -f'(a-x).$$

Thus, $f'(a+x) = -f'(a-x)$ and the graph of $f'(x)$ is symmetric through the point $(a, 0)$.

Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
13	Apply the chain rule for differentiation تطبيق قاعدة السلسلة في الاشتقاق	Exercise (31-38) Lesson 3.5	177

Full Answer

35. **(a)** Chain rule gives,

$$\frac{d}{dx}f\left(x^2\right) = f'\left(x^2\right)\frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$
$$= f'\left(x^2\right)(2x)$$
$$= 2xf'\left(x^2\right).$$

(b) Chain rule gives,

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^2 = 2f(x)\frac{d}{dx}f(x)$$
$$= 2f(x)f'(x).$$

(c) Chain rule gives,

$$\frac{d}{dx}f\left(f(x)\right) = f'\left(f(x)\right)\frac{d}{dx}f(x)$$
$$= f'\left(f(x)\right)f'(x).$$

36. **(a)** Chain rule gives,

$$\frac{d}{dx}f\left(\sqrt{x}\right) = f'\left(\sqrt{x}\right)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)$$
$$= f'\left(\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(b) Chain rule gives,

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{f\left(x\right)}\right) = \frac{1}{2\sqrt{f\left(x\right)}}\frac{d}{dx}f\left(x\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{f\left(x\right)}}f'\left(x\right).$$

(c) Chain rule gives,

$$\frac{d}{dx}\left[f\left(xf(x)\right)\right]$$
$$= f'\left(xf(x)\right)\frac{d}{dx}\left(xf(x)\right)$$

and product rule gives

$$= f'\left(xf(x)\right)\left(f(x) + x\frac{d}{dx}f(x)\right)$$
$$= f'\left(xf(x)\right)\left(f(x) + xf'(x)\right).$$

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
13	Apply the chain rule for differentiation تطبيق قاعدة السلسلة في الاشتقاق	Exercise (31-38) Lesson 3.5	177

Full Answer

37. **(a)** Chain rule gives,

$$\frac{d}{dx}\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right] = f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= -\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot f'\left(\frac{1}{x}\right).$$

(b) Chain rule gives,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \left(-\frac{1}{f(x)^2}\right)\cdot\frac{d}{dx}f(x)$$
$$= \left(-\frac{1}{f(x)^2}\right)\cdot f'(x).$$

(c) Chain rule gives,

$$\frac{d}{dx}\left[f\left(\frac{x}{f(x)}\right)\right]$$
$$= f'\left(\frac{x}{f(x)}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{f(x)}\right)$$

and quotient rule gives,

$$= f'\left(\frac{x}{f(x)}\right)\left(\frac{f(x)-xf'(x)}{[f(x)]^2}\right).$$

38. **(a)** Chain rule gives,

$$\frac{d}{dx}\left(1+f(x^2)\right) = f'(x^2)\frac{d}{dx}(x^2)$$
$$= f'(x^2)(2x) = 2xf'(x^2).$$

(b) Chain rule gives,

$$\frac{d}{dx}[1+f(x)]^2$$
$$= 2[1+f(x)]\frac{d}{dx}(1+f(x))$$
$$= 2[1+f(x)]f'(x) = 2f'(x)[1+f(x)].$$

(c) Chain rule gives,

$$\frac{d}{dx}[f(1+f(x))]$$
$$= f'(1+f(x))\cdot\frac{d}{dx}(1+f(x))$$
$$= f'(1+f(x))f'(x)$$
$$= f'(x)f'(1+f(x)).$$

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
14	Find the derivative of an inverse function using the Chain Rule. إيجاد مشتقة معكوس دالة باستخدام قاعدة السلسلة	Exercise (17-22) Lesson 3.5	176

2017/2018

$Given\ that\ f(x) = x^3 + 2x + 1$ has an inverse function g(x), find $g'(-2)$.

$f(x)$ على فرض ان الدالة
g(x) لها دالة عكسية

احسب $g'(-2)$

A	5	B	$\frac{1}{5}$	C	-5	D	$-\frac{1}{5}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
14	Find the derivative of an inverse function using the Chain Rule. إيجاد مشتقة معكوس دالة باستخدام قاعدة السلسلة	Exercise (17-22) Lesson 3.5	176

2024/2025

Given that the function $f(x) = x^5 + 2x^3 - 1$ has an inverse function g, compute $g'(2)$.

على فرض أن الدالّة $f(x) = x^5 + 2x^3 - 1$ لها دالة عكسية g، احسب $g'(2)$.

A	- 1	B	0	C	$\frac{1}{11}$	D	$\frac{1}{5}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
14	Find the derivative of an inverse function using the Chain Rule. إيجاد مشتقة معكوس دالة باستخدام قاعدة السلسلة	Exercise (17-22) Lesson 3.5	176

17) *Given that* $f(x) = x^3 + 4x - 1$ has an inverse function g(x), find $g'(-1)$.

$f(x)$ على فرض ان الدالة
g(x) لها دالة عكسية
احسب $g'(-1)$

A	4	B	$\frac{1}{4}$	C	-4	D	$-\frac{1}{4}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
14	Find the derivative of an inverse function using the Chain Rule. إيجاد مشتقة معكوس دالة باستخدام قاعدة السلسلة	Exercise (17-22) Lesson 3.5	176

18) *Given that* $f(x) = x^5 + 4x - 2$ has an inverse function g(x), find $g'(-2)$.

على فرض ان الدالة $f(x)$ لها دالة عكسية g(x)
احسب $g'(-2)$

A	4	B	$\frac{1}{4}$	C	-4	D	$-\frac{1}{4}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
14	Find the derivative of an inverse function using the Chain Rule. إيجاد مشتقة معكوس دالة باستخدام قاعدة السلسلة	Exercise (17-22) Lesson 3.5	176

19) *Given that* $f(x) = x^5 + 3x^3 + x$ has an inverse function g(x), find $g'(5)$.

على فرض ان الدالة $f(x)$ لها دالة عكسية g(x)
احسب $g'(5)$

A	$\frac{-1}{15}$	B	$\frac{1}{15}$	C	$\frac{1}{5}$	D	$\frac{-1}{5}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
14	Find the derivative of an inverse function using the Chain Rule. إيجاد مشتقة معكوس دالة باستخدام قاعدة السلسلة	Exercise (17-22) Lesson 3.5	176

20) *Given that* $f(x) = x^3 + 2x + 1$ has an inverse function g(x), find $g'(-2)$.

على فرض ان الدالة $f(x)$ لها دالة عكسية g(x)
احسب $g'(-2)$

A	5	B	$\frac{1}{5}$	C	-5	D	$-\frac{1}{5}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
14	Find the derivative of an inverse function using the Chain Rule. إيجاد مشتقة معكوس دالة باستخدام قاعدة السلسلة	Exercise (17-22) Lesson 3.5	176

21) *Given that* $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x + 4}$ has an inverse function g(x), find $g'(2)$.

على فرض ان الدالة $f(x)$ لها دالة عكسية g(x)
احسب $g'(2)$

A	5	B	$\frac{1}{5}$	C	-5	D	$-\frac{1}{5}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
14	Find the derivative of an inverse function using the Chain Rule. إيجاد مشتقة معكوس دالة باستخدام قاعدة السلسلة	Exercise (17-22) Lesson 3.5	176

22) *Given that* $f(x) = \sqrt{x^5 + 4x^3 + 3x + 1}$ has an inverse function g(x), find $g'(3)$.

على فرض ان الدالة $f(x)$ لها دالة عكسية g(x)
احسب $g'(3)$

A	3	B	$\frac{3}{10}$	C	-3	D	$-\frac{3}{10}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
14	Find the derivative of an inverse function using the Chain Rule. إيجاد مشتقة معكوس دالة باستخدام قاعدة السلسلة	Exercise (17-22) Lesson 3.5	176

Full Answer

In exercises 17–22, f has an inverse g. Use Theorem 5.2 to find $g'(a)$.

في التمارين 17–22، f لها معكوس g. استخدم النظرية 5.2 لإيجاد $g'(a)$.

17. $f(x) = x^3 + 4x - 1, a = -1$

18. $f(x) = x^5 + 4x - 2, a = -2$

19. $f(x) = x^5 + 3x^3 + x, a = 5$

20. $f(x) = x^3 + 2x + 1, a = -2$

21. $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x + 4}, a = 2$

22. $f(x) = \sqrt{x^5 + 4x^3 + 3x + 1}, a = 3$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
14	Find the derivative of an inverse function using the Chain Rule. إيجاد مشتقة معكوس دالة باستخدام قاعدة السلسلة	Exercise (17-22) Lesson 3.5	176

Full Answer

17. $f(x) = x^3 + 4x - 1$ is a one-to-one function with $f(0) = -1$ and $f'(0) = 4$. Therefore $g(-1) = 0$ and

$$g'(-1) = \frac{1}{f'(g(-1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4}.$$

18. $f(x) = x^5 + 4x - 2$ is a one-to-one function with $f(0) = -2$ and $f'(0) = 4$. Therefore $g(-2) = 0$ and

$$g'(-2) = \frac{1}{f'(g(-2))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4}$$

.

19. $f(x) = x^5 + 3x^3 + x$ is a one-to-one function with $f(1) = 5$ and $f'(1) = 5 + 9 + 1 = 15$. Therefore $g(5) = 1$ and

$$g'(5) = \frac{1}{f'(g(5))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{15}.$$

20. $f(x) = x^3 + 2x + 1$ is a one-to-one function with $f(-1) = -2$ and $f'(-1) = 5$. Therefore $g(-2) = -1$ and

$$g'(-2) = \frac{1}{f'(g(-2))} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{5}.$$

21. $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x + 4}$ is a one-to-one function and $f(0) = 2$ so $g(2) = 0$. Meanwhile,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 2x + 4}}(3x^2 + 2)$$

$$f'(0) = 1/2$$

$$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(0)} = 2.$$

22. $f(x) = \sqrt{x^5 + 4x^3 + 3x + 1}$ is a one-to-one function and $f(1) = 3$ so $g(3) = 1$. Meanwhile,

$$f'(x) = \frac{5x^4 + 12x^2 + 3}{2\sqrt{x^5 + 4x^3 + 3x + 1}}$$

$$f'(1) = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

$$g'(3) = \frac{1}{f'(g(3))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{3}{10}.$$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
15	Find the derivatives of trigonometric functions using differentiation rules إيجاد مشتقات الدوال المثلثية باستخدام قواعد التفاضل	Exercises(9-18) Lesson 3.6	184

9) *Find the derivative of the function* $f(t) = \sin 3t \sec 3t$ أوجد مشتقة الدالة

A	$f'(t)=2\sec^2 3t$	B	$f'(t)=3\sec^2 3t$	C	$f'(t)=2\tan^2 3t$	D	$f'(t)=-3\sec^2 3t$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
15	Find the derivatives of trigonometric functions using differentiation rules إيجاد مشتقات الدوال المثلثية باستخدام قواعد التفاضل	Exercises(9-18) Lesson 3.6	184

10) *Find the derivative of the function* $f(x) = \sqrt{\cos 5t \sec 5t}$ أوجد مشتقة الدالة

A	$f'(x)=0$	B	$f'(x)=1$	C	$f'(x)=-1$	D	$f'(x)=2$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
15	Find the derivatives of trigonometric functions using differentiation rules إيجاد مشتقات الدوال المثلثية باستخدام قواعد التفاضل	Exercises(9-18) Lesson 3.6	184

11) *Find the derivative of the function* $f(w) = \frac{1}{\sin 4w}$ أوجد مشتقة الدالة

A	$f'(w) = \frac{-4\cos 4x}{\sin^2 4w}$	B	$f'(w) = \frac{4\cos 4x}{\sin^2 4w}$	C	$f'(w) = \frac{-\sin 4x}{\sin^2 4w}$	D	$f'(w) = \frac{\sin 4x}{\sin^2 4w}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
15	Find the derivatives of trigonometric functions using differentiation rules إيجاد مشتقات الدوال المثلثية باستخدام قواعد التفاضل	Exercises(9-18) Lesson 3.6	184

12) *Find the derivative of the function* $f(w) = w^2 \sec^2 3w$ أوجد مشتقة الدالة

A	$f'(w)=6w^2sec^2 3w \tan 3w+2wsec^2 3w$	B	$f'(w)=w^2sec^2 3w \tan 3w - 2wsec^2 3w$
C	$f'(w)= - 6w^2sec^2 3w \tan 3w+2wsec^2 3w$	D	$f'(w)=2w^2sec^2 3w \tan 3w-3wsec^2 3w$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
15	Find the derivatives of trigonometric functions using differentiation rules إيجاد مشتقات الدوال المثلثية باستخدام قواعد التفاضل	Exercises(9-18) Lesson 3.6	184

13) *Find the derivative of the function* $f(x) = 2\sin 2x \cos 2x$ أوجد مشتقة الدالة

A	$f'(x) = 4\cos^2 2x - 4\sin^2 2x$	B	$f'(x) = -4\cos^2 2x + 4\sin^2 2x$
C	$f'(x) = 2\cos^2 2x - 2\sin^2 2x$	D	$f'(x) = -2\cos^2 2x - 2\sin^2 2x$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
15	Find the derivatives of trigonometric functions using differentiation rules إيجاد مشتقات الدوال المثلثية باستخدام قواعد التفاضل	Exercises(9-18) Lesson 3.6	184

14) *Find the derivative of the function* $f(x) = 4sin^2 3x + 4cos^2 3x$

أوجد مشتقة الدالة

A	$f'(x)=2$	B	$f'(x)=-2$	C	$f'(x)=0$	D	$f'(x)=1$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
15	Find the derivatives of trigonometric functions using differentiation rules إيجاد مشتقات الدوال المثلثية باستخدام قواعد التفاضل	Exercises(9-18) Lesson 3.6	184

15) *Find the derivative of the function* $f(x) = tan\sqrt{x^2+1}$ أوجد مشتقة الدالة

A	$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}sec^2\sqrt{x^2+1}$	B	$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}sec^2\sqrt{x^2+1}$	C	$f'(x)=sec^2\sqrt{x^2+1}$	D	$f'(x)=sin\sqrt{x^2+1}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
15	Find the derivatives of trigonometric functions using differentiation rules إيجاد مشتقات الدوال المثلثية باستخدام قواعد التفاضل	Exercises(9-18) Lesson 3.6	184

16) *Find the derivative of the function* $f(x) = 4x^2 \sin x \sec 3x$ أوجد مشتقة الدالة

A	$f'(x) = 8x\ sinx \sec 3x + 4x^2(cosx\ sec3x + 3sinx\ sec3x tan3x)$	B	$f'(x) = -8x\ sinx \sec 3x + 4x^2(cosx\ sec3x + 3sinx\ sec3x tan3x)$
C	$f'(x) = 8x\ sinx \sec 3x - 4x^2(cosx\ sec3x + 3sinx\ sec3x tan3x)$	D	$f'(x) = -8x\ sinx \sec 3x - 4x^2(cosx\ sec3x + 3sinx\ sec3x tan3x)$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
15	Find the derivatives of trigonometric functions using differentiation rules إيجاد مشتقات الدوال المثلثية باستخدام قواعد التفاضل	Exercises(9-18) Lesson 3.6	184

17) *Find the derivative of the function* $f(x) = \sin^3\left(\cos\sqrt{x^3+2x^2}\right)$ أوجد مشتقة الدالة

A	$3\sin^2(\cos\sqrt{x^3+2x^2})\cos(\cos\sqrt{x^3+2x^2})$	B	$-\frac{3x(3x+4)\sin^2(\cos\sqrt{x^3+2x^2})\cos(\cos\sqrt{x^3+2x^2})\sin\sqrt{x^3+2x^2}}{2\sqrt{x^3+2x^2}}$
C	$-\frac{3x^2\sin^2(\cos\sqrt{x^3+2x^2})\sin\sqrt{x^3+2x^2}}{2\sqrt{x^3+2x^2}}$	D	$\frac{3\sin^2(\cos\sqrt{x^3+2x^2})\cos\sqrt{x^3+2x^2}}{2\sqrt{x^3+2x^2}}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
15	Find the derivatives of trigonometric functions using differentiation rules إيجاد مشتقات الدوال المثلثية باستخدام قواعد التفاضل	Exercises(9-18) Lesson 3.6	184

18) *Find the derivative of the function* $f(x) = \tan^4(\sin^2(x^3 + 2x))$ أوجد مشتقة الدالة

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830
Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
15	Find the derivatives of trigonometric functions using differentiation rules إيجاد مشتقات الدوال المثلثية باستخدام قواعد التفاضل	Exercises(9-18) Lesson 3.6	184

Full Answer

في التمارين 1–18، أوجد مشتقة كل دالّة.

In exercises 1–18, find the derivative of each function.

9. $f(t) = \sin 3t \sec 3t$

10. $f(t) = \sqrt{\cos 5t \sec 5t}$

11. $f(w) = \dfrac{1}{\sin 4w}$

12. $f(w) = w^2 \sec^2 3w$

13. $f(x) = 2 \sin 2x \cos 2x$

14. $f(x) = 4 \sin^2 3x + 4 \cos^2 3x$

15. $f(x) = \tan \sqrt{x^2 + 1}$

16. $f(x) = 4x^2 \sin x \sec 3x$

17. $f(x) = \sin^3 \left(\cos \sqrt{x^3 + 2x^2}\right)$

18. $f(x) = \tan^4(\sin^2(x^3 + 2x))$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
15	Find the derivatives of trigonometric functions using differentiation rules إيجاد مشتقات الدوال المثلثية باستخدام قواعد التفاضل	Exercises(9-18) Lesson 3.6	184

Full Answer

3.6 Derivatives of Trigonometric Functions

9. $f(t) = \sin 3t \sec 3t = \tan 3t$

$$f'(t) = \frac{d}{dt}[\tan(3t)] = \sec^2(3t)(3)$$
$$= 3\sec^2(3t)$$

10. $f(t) = \sqrt{\cos 5t \sec 5t}$

$$= \sqrt{\cos 5t \cdot \frac{1}{(\cos 5t)}} = 1$$
$$f'(t) = \frac{d}{dt}(1) = 0$$

11. $f(w) = \frac{1}{\sin 4w}$

$$f'(w) = \frac{-1}{(\sin 4w)^2}\cos 4w\,(4)$$
$$= \frac{-4\cos 4w}{\sin^2 4w}$$

12. $f(w) = w^2\sec^2 3w$

$$f'(w) = w^2(2\sec 3w)(\sec 3w \tan 3w)(3) + \sec^2(3w)(2w)$$
$$= 6w^2\sec^2 3x \tan 3w + 2w\sec^2 3w$$

13. $f(x) = 2\sin(2x)\cos(2x)$

$$f'(x) = 2\{\sin(2x)[-\sin(2x)](2) + \cos(2x)[\cos(2x)](2)\}$$
$$= -4\sin^2(2x) + 4\cos^2(2x)$$
$$= 4\cos^2(2x) - 4\sin^2(2x)$$

14. $f(x) = 4\sin^2(3x) + 4\cos^2(3x)$

$$= 4[\sin^2(3x) + \cos^2(3x)] = 4$$
$$f'(x) = \frac{d}{dx}(4) = 0$$

15. $f(x) = \tan\sqrt{x^2+1}$

$$f'(x) = (\sec^2\sqrt{x^2+1}) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)(x^2+1)^{-1/2}(2x)$$
$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\sec^2\sqrt{x^2+1}$$

16. $f(x) = 4x^2\sin x \sec 3x$

$$f'(x) = 8x\sin x \sec 3x + 4x^2[\cos x \sec 3x + \sin x \sec 3x \tan 3x(3)]$$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
15	Find the derivatives of trigonometric functions using differentiation rules إيجاد مشتقات الدوال المثلثية باستخدام قواعد التفاضل	Exercises(9-18) Lesson 3.6	184

Full Answer

17. $f(x) = \sin^3\left(\cos\sqrt{x^3+2x^2}\right)$

$$f'(x) = 3\sin^2\left(\cos\sqrt{x^3+2x^2}\right)$$
$$\cdot \cos\left(\cos\sqrt{x^3+2x^2}\right)$$
$$\cdot \left(-\sin\sqrt{x^3+2x^2}\right)$$
$$\cdot \frac{1}{2}\left(x^3+2x^2\right)^{-1/2}\left(3x^2+4x\right)$$
$$= \frac{3}{2}\left(3x^2+4x\right)\left(x^3+2x^2\right)^{-1/2}$$
$$\cdot \sin^2\left(\cos\sqrt{x^3+2x^2}\right)$$
$$\cdot \cos\left(\cos\sqrt{x^3+2x^2}\right)$$
$$\cdot \left(-\sin\sqrt{x^3+2x^2}\right)$$

18. $f(x) = \tan^4\left[\sin^2\left(x^3+2x\right)\right]$

$$f'(x) = 4\left[\tan^3\left(\sin^2\left(x^3+2x\right)\right)\right]$$
$$\cdot \left[\sec^2\left(\sin^2\left(x^3+2x\right)\right)\right]$$
$$\cdot \left[2\sin\left(x^3+2x\right)\right]$$
$$\cdot \left[\cos\left(x^3+2x\right)\right]\cdot\left(3x^2+2\right)$$

Abdalla Abouel
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
16	Find derivatives of natural logarithmic functions إيجاد مشتقات الدوال اللوغاريتمية الطبيعية	Exercises(39- 44) Lesson 3.7	194

39) Use *logarithmic differentiation to find derivative of the*

$$f(x) = x^{\sin x}$$

استخدم تفاضل اللوغاريتم لإيجاد مشتقة الدالة

A	$f'(x) = x^{\sin x} .(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x})$	B	$f'(x) = (\sin x)^{x} .(x \cot x + \ln(\sin x))$
C	$f'(x) = (\sin x)^{x} .(2x + \ln(\sin x))$	D	$f'(x) = x^{\sin x} .(\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x})$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
16	Find derivatives of natural logarithmic functions إيجاد مشتقات الدوال اللوغاريتمية الطبيعية	Exercises(39- 44) Lesson 3.7	194

2023/2024

40) Use *logarithmic differentiation to find derivative of the*

$$f(x) = x^{4-x^2}$$

استخدم تفاضل اللوغاريتم لإيجاد مشتقة الدالة

A	$f'(x)=x^{4-x^2}\left(-2x\ln x+\frac{4-x^2}{x}\right)$	B	$f'(x)=\left(-2x\ln x+\frac{4-x^2}{x}\right)$
C	$f'(x)=x^{4-x^2}\left(-2x\ln x+(4-x^2)\right)$	D	$f'(x)=x^{4-x^2}\left(-2x\ln x-\frac{4-x^2}{x}\right)$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
16	Find derivatives of natural logarithmic functions إيجاد مشتقات الدوال اللوغاريتمية الطبيعية	Exercises(39- 44) Lesson 3.7	194

41) Use *logarithmic differentiation to find derivative of the*

استخدم تفاضل اللوغاريتم لإيجاد مشتقة الدالة

$$f(x) = (sinx)^x$$

A	$f'(x) = (sinx)^x \cdot (x \cot x)$	B	$f'(x) = (sinx)^x \cdot (x \cot x + ln(\sin x))$
C	$f'(x) = (sinx)^x \cdot (x + ln(\sin x))$	D	$f'(x) = (x \cot x + ln(\sin x))$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
16	Find derivatives of natural logarithmic functions إيجاد مشتقات الدوال اللوغاريتمية الطبيعية	Exercises(39- 44) Lesson 3.7	194

42)Use *logarithmic differentiation to find derivative of the*

$$f(x) = (x^2)^{4x}$$

استخدم تفاضل اللوغاريتم لإيجاد مشتقة الدالة

A	$f'(x) = (x^2)^x.(8\ln x + 8)$	B	$f'(x) = (x^2)^{4x}.(8\ln x + 8)$
C	$f'(x) = (x^2)^{4x}.(8\ln x - 8)$	D	$f'(x) = (8\ln x + 8)$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
16	Find derivatives of natural logarithmic functions إيجاد مشتقات الدوال اللوغاريتمية الطبيعية	Exercises(39- 44) Lesson 3.7	194

43) *Use logarithmic differentiation to find derivative of the*

$$f(x) = x^{lnx}$$

استخدم تفاضل اللوغاريتم لإيجاد مشتقة الدالة

A	$x^{lnx}.\frac{2lnx}{x}$	B	$2x^{lnx+1}.lnx$	C	$x^{lnx-1}.lnx$	D	$x^{lnx}.\frac{lnx}{x}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
16	Find derivatives of natural logarithmic functions إيجاد مشتقات الدوال اللوغاريتمية الطبيعية	Exercises(39- 44) Lesson 3.7	194

44) Use *logarithmic differentiation to find derivative of the*

$$f(x) = x^{\sqrt{x}}$$

استخدم تفاضل اللوغاريتم لإيجاد مشتقة الدالة

A	$x^{\sqrt{x}}(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ lnx + \frac{1}{\sqrt{x}})$	B	$x^{\sqrt{x}}(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ lnx - \frac{1}{\sqrt{x}})$	C	$(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ lnx + \frac{1}{\sqrt{x}})$	D	$x^{\sqrt{x}}(\frac{1}{\sqrt{x}}\ lnx + \frac{1}{\sqrt{x}})$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
16	Find derivatives of natural logarithmic functions إيجاد مشتقات الدوال اللوغاريتمية الطبيعية	Exercises(39- 44) Lesson 3.7	194

Full Answer

In exercises 39–44, use logarithmic differentiation to find the derivative.

في التمارين 39-44 استخدم تفاضل اللوغاريتم لإيجاد المشتقة.

39. $f(x) = x^{\sin x}$

40. $f(x) = x^{4-x^2}$

41. $f(x) = (\sin x)^x$

42. $f(x) = (x^2)^{4x}$

43. $f(x) = x^{\ln x}$

44. $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
16	Find derivatives of natural logarithmic functions إيجاد مشتقات الدوال اللوغاريتمية الطبيعية	Exercises(39- 44) Lesson 3.7	194

Full Answer

39. $f(x)=x^{\sin x}$

$\ln f(x)=\sin x.\ln x$

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{d}{dx}(\sin x.\ln x)$

$=\cos x.\ln x+\frac{\sin x}{x}$

$f'(x)=x^{\sin x}\left(\frac{x\cos x.\ln x+\sin x}{x}\right)$

40. $f(x)=x^{4-x^2}$

$\ln f(x)=(4-x^2)\ln x$

$\frac{f'(x)}{f(x)}=-2x\ln x+(4-x^2)\frac{1}{x}$

$f'(x)=x^{4-x^2}\left(-2x\ln x+(4-x^2)\frac{1}{x}\right)$

1. $f(x)=(\sin x)^x$

$f(x)=(\sin x)^x$

$\ln f(x)=x.\ln(\sin x)$

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{d}{dx}(x.\ln(\sin x))$

$=\frac{x\cos x}{\sin x}+\ln(\sin x)$

$=x\cot x+\ln(\sin x)$

$f'(x)=(\sin x)^x.(x\cot x+\ln(\sin x))$

42. $f(x)=(x^2)^{4x}$

$f(x)=(x^2)^{4x}$

$\ln f(x)=8x\ln x$

$\frac{f'(x)}{f(x)}=8\ln x+8x\frac{1}{x}$

$f'(x)=(x^2)^{4x}(8\ln x+8)$

43. $f(x)=x^{\ln x}$

$\ln f(x)=\ln x.\ln x=\ln^2 x$

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{d}{dx}(\ln^2 x)=\frac{2\ln x}{x}$

$f'(x)=x^{\ln x}\left[\frac{2\ln x}{x}\right]=2x^{[(\ln x)-1]\ln x}$

44. $f(x)=x^{\sqrt{x}}$

$\ln f(x)=\sqrt{x}\ln x$

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\sqrt{x}\frac{1}{x}$

$f'(x)=x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Abdalla Abouelnaga

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
17	Find the derivatives of exponential functions إيجاد مشتقات الدوال الأسية	Exercises(1- 14) Lesson 3.7	193

1) *Find the derivative of the function* $f(x) = x^3e^x$ أوجد مشتقة الدالة

A	$x^2e^x(x+3)$	B	$x^2e^x(x-3)$	C	$x^2(x+3)$	D	$e^x(x+3)$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
17	Find the derivatives of exponential functions إيجاد مشتقات الدوال الأسية	Exercises(1- 14) Lesson 3.7	193

2) *Find the derivative of the function* $f(x) = e^{2x}\cos 4x$ أوجد مشتقة الدالة

A	$f'(x) = 2e^{2x}\cos 4x + e^{2x}(-\sin 4x)\cdot 4$	B	$f'(x) = e^{2x}\cos 4x + 2e^{2x}\sin 4x$	C	$f'(x) = 2e^{2x}\sin 4x + e^{2x}(4\cos 4x)$	D	$f'(x) = e^{2x}\cos 4x - 2e^{2x}\sin 4x$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
17	Find the derivatives of exponential functions إيجاد مشتقات الدوال الأسية	Exercises(1- 14) Lesson 3.7	193

3)*Find the derivative of the function* $f(t) = t + 2^t$ أوجد مشتقة الدالة.

A	$f'(t) = 1 + 2^t$	B	$f'(t) = 1 + 2^t \ln 2$	C	$f'(t) = t + 2^t \ln 2$	D	$f'(t) = 1 + \ln 2$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
17	Find the derivatives of exponential functions إيجاد مشتقات الدوال الأسية	Exercises(1- 14) Lesson 3.7	193

4) *Find the derivative of the function* $f(t) = t\,4^{3t}$ أوجد مشتقة الدالة

A	$4^{3t}(1+3t \ln 4)$	B	$4^{3t}(1- 3t \ln 4)$	C	$4^{3t}(1+t \ln 4)$	D	$4^{3t}(1+ \ln 4)$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830
Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
17	Find the derivatives of exponential functions إيجاد مشتقات الدوال الأسية	Exercises(1- 14) Lesson 3.7	193

5) *Find the derivative of the function* $f(x) = 2e^{4x+1}$ أوجد مشتقة الدالة

A	$2e^{4x+1}$	B	e^{4x+1}	C	$-8e^{4x+1}$	D	$8e^{4x+1}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
17	Find the derivatives of exponential functions إيجاد مشتقات الدوال الأسية	Exercises(1- 14) Lesson 3.7	193

6) *Find the derivative of the function* $f(x) = (1/e)^x$

أوجد مشتقة الدالة

A	e^{-x}	B	$2e^{-x}$	C	$-e^{-x}$	D	$3e^{-x}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
17	Find the derivatives of exponential functions إيجاد مشتقات الدوال الأسية	Exercises(1- 14) Lesson 3.7	193

7) *Find the derivative of the function*

أوجد مشتقة الدالة

$$h(x) = (1/3)^{x^2}$$

A	$-2x \cdot \ln(3).(\frac{1}{3})^{x^2}$	B	$-2x \cdot \ln(\frac{1}{3}).(3)^{x^2}$	C	$2x \cdot \ln(3).(\frac{1}{3})^{x^2}$	D	$\cdot \ln(3).(\frac{1}{3})^{x^2}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
17	Find the derivatives of exponential functions إيجاد مشتقات الدوال الأسية	Exercises(1- 14) Lesson 3.7	193

8) *Find the derivative of the function* $h(x) = 4^{-x^2}$ أوجد مشتقة الدالة

A	$-2x\,.4^{-x^2}.\ln(4)$	B	$2x.\,4^{-x^2}.\ln(4)$	C	$x\,.4^{-x^2}.\ln(4)$	D	$-2x.\,4^{x^2}.\ln(4)$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
17	Find the derivatives of exponential functions إيجاد مشتقات الدوال الأسية	Exercises(1- 14) Lesson 3.7	193

9) *Find the derivative of the function* $f(u) = e^{u^2+4u}$ أوجد مشتقة الدالة

A	$e^{u^2+4u}.(u+4)$	B	$e^{u^2+4u}.(2u+2)$	C	$e^{u^2+4u}.(2u-4)$	D	$e^{u^2+4u}.(2u+4)$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830
Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

D

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
17	Find the derivatives of exponential functions إيجاد مشتقات الدوال الأسية	Exercises(1- 14) Lesson 3.7	193

10) *Find the derivative of the function* $f(u) = 3e^{\tan u}$ أوجد مشتقة الدالة

A	$3e^{\tan u} sec^2 u$	B	$3e^{\tan u} \sec u \tan u$	C	$3e^{\tan u} \ln 3\, sec^2 u$	D	$3e^{sec^2 u} sec^2 u$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
17	Find the derivatives of exponential functions إيجاد مشتقات الدوال الأسية	Exercises(1- 14) Lesson 3.7	193

11) *Find the derivative of the function* $f(w) = \frac{e^{4w}}{w}$

أوجد مشتقة الدالة

A	$\frac{e^{4w}(4w-1)}{w^2}$	B	$-\frac{e^{4w}(4w-1)}{w^2}$	C	$\frac{e^{4w}(4w+1)}{w^2}$	D	$\frac{e^{4w}(w-1)}{w^2}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
17	Find the derivatives of exponential functions إيجاد مشتقات الدوال الأسية	Exercises(1- 14) Lesson 3.7	193

12) *Find the derivative of the function* $f(w) = \frac{w}{e^{6w}}$

أوجد مشتقة الدالة

A	$\frac{(1-6w)}{e^{6w}}$	B	$\frac{(1+6w)}{e^{6w}}$	C	$\frac{(1-3w)}{e^{6w}}$	D	$\frac{(1-6w)}{e^{3w}}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
17	Find the derivatives of exponential functions إيجاد مشتقات الدوال الأسية	Exercises(1- 14) Lesson 3.7	193

13) *Find the derivative of the function* $f(x) = \ln 2x$ أوجد مشتقة الدالة

A	$\frac{1}{x}$	B	$\frac{1}{2x}$	C	$\frac{-1}{x}$	D	$\frac{-1}{2x}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
17	Find the derivatives of exponential functions إيجاد مشتقات الدوال الأسية	Exercises(1- 14) Lesson 3.7	193

14) *Find the derivative of the function* $f(x) = \ln \sqrt{8x}$ أوجد مشتقة الدالة

A	$\frac{1}{2x}$	B	$-\frac{1}{2x}$	C	$\frac{1}{x}$	D	$-\frac{1}{x}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830
Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
17	Find the derivatives of exponential functions إيجاد مشتقات الدوال الأسية	Exercises(1- 14) Lesson 3.7	193

In exercises 1–24, differentiate each function

في التمارين 1-24، أوجد مشتقة كل دالّة.

1. $f(x) = x^3 e^x$
2. $f(x) = e^{2x} \cos 4x$
3. $f(t) = t + 2^t$
4. $f(t) = t4^{3t}$
5. $f(x) = 2e^{4x+1}$
6. $f(x) = (1/e)^x$
7. $h(x) = (1/3)^{x^2}$
8. $h(x) = 4^{-x^2}$
9. $f(u) = e^{u^2+4u}$
10. $f(u) = 3e^{\tan u}$
11. $f(w) = \dfrac{e^{4w}}{w}$
12. $f(w) = \dfrac{w}{e^{6w}}$
13. $f(x) = \ln 2x$
14. $f(x) = \ln \sqrt{8x}$

Abdalla Abouelnaga

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
17	Find the derivatives of exponential functions إيجاد مشتقات الدوال الأسية	Exercises(1- 14) Lesson 3.7	193

Full Answer

3.7 Derivatives of Exponential and Logarithmic Functions

1. $f'(x) = 3x^2.e^x + x^3.e^x = x^2e^x(x+3)$

2. $f'(x) = 2e^{2x}\cos 4x + e^{2x}(-\sin 4x)4$

3. $f(t) = t + 2^t$
$f'(t) = 1 + 2^t \log 2$

4. $f(t) = t4^{3t}$
$f'(t) = 4^{3t} + t4^{3t}(\ln 4)\,3 = 4^{3t}(1 + 3t\ln 4)$

5. $f'(x) = 2e^{4x+1}(4) = 8e^{4x+1}$

6. $f'(x) = e^{-x}$, so $f'(x) = -e^{-x}$.

7. $h(x) = (\frac{1}{3})^{x^2}$
$h'(x) = \ln(\frac{1}{3}) \cdot 2x \cdot (\frac{1}{3})^{x^2}$
$= 2x \cdot \ln(\frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{3})^{x^2}$
$= -2x \cdot \ln(3) \cdot (\frac{1}{3})^{x^2}$

8. $h(x) = 4^{-x^2}$
$h'(x) = 4^{-x^2} \cdot \ln(4) \cdot (-2x)$
$= -2x \cdot 4^{-x^2} \cdot \ln(4)$

9. $f(u) = e^{u^2+4u}$
$f'(u) = e^{u^2+4u} \cdot \frac{d}{du}(u^2+4u)$
$= e^{u^2+4u} \cdot (2u+4)$

10. $f(x) = 3e^{\tan x}$
$f'(x) = 3e^{\tan x} \cdot \frac{d}{dx}(\tan x)$
$= 3e^{\tan x}\sec^2 x$

11. $f(w) = \frac{e^{4w}}{w}$
$f'(w) = \frac{w \cdot 4e^{4w} - e^{4w} \cdot 1}{w^2}$
$= \frac{e^{4w}(4w-1)}{w^2}$

12. $f(w) = \frac{w}{e^{6w}}$
$f'(w) = \frac{1 \cdot e^{6w} - w \cdot e^{6w} \cdot 6}{(e^{6w})^2}$
$= \frac{e^{6w} - 6we^{6w}}{(e^{6w})^2} = \frac{(1-6w)}{e^{6w}}$

13. $f'(x) = \frac{1}{2x}.(2) = \frac{1}{x}$

14. $f(x) = \frac{1}{2}\ln 8 + \frac{1}{2}\ln x$
$f'(x) = \frac{1}{2x}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
18	Use implicit differentiation to find derivatives of inverse trigonometric functions استخدام الاشتقاق الضمني في إيجاد مشتقات الدوال المثلثية العكسية	Exercises(29-32)	204

29a) Find The derivative of $f(x) = \sin^{-1}(x^3 + 1)$ أوجد مشتقة

A	$\frac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}}$	B	$\frac{x^2}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}}$	C	$\frac{3x^2}{\sqrt{1+(x^3+1)^2}}$	D	$\frac{-x^2}{\sqrt{1+(x^3+1)^2}}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830
Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
18	Use implicit differentiation to find derivatives of inverse trigonometric functions استخدام الاشتقاق الضمني في إيجاد مشتقات الدوال المثلثية العكسية	Exercises(29-32)	204

29b) Find The derivative of $f(x) = \sin^{-1}(\sqrt{x})$ أوجد مشتقة

A	$\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$	B	$\frac{2}{\sqrt{x-x^2}}$	C	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	D	$\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
18	Use implicit differentiation to find derivatives of inverse trigonometric functions استخدام الاشتقاق الضمني في إيجاد مشتقات الدوال المثلثية العكسية	Exercises(29-32)	204

30a)Find The derivative of $f(x) = \cos^{-1}(x^2 + x)$

أوجد مشتقة الدالة

A	$\frac{-(2x+1)}{\sqrt{1-(x^2+x)^2}}$	B	$\frac{(x+1)}{\sqrt{1-(x^2+x)^2}}$	C	$\frac{-(2x+1)}{\sqrt{1+(x^2+x)^2}}$	D	$\frac{-(x+1)}{\sqrt{1-(x^2+x)^2}}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
18	Use implicit differentiation to find derivatives of inverse trigonometric functions استخدام الاشتقاق الضمني في إيجاد مشتقات الدوال المثلثية العكسية	Exercises(29-32)	204

30b) Find The derivative of $f(x) = \cos^{-1}(2/x)$ أوجد مشتقة الدالة

A	$\frac{2}{x\sqrt{x^2+4}}$	B	$\frac{-2}{x\sqrt{x^2-4}}$	C	$\frac{2}{x\sqrt{x^2-4}}$	D	$\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
18	Use implicit differentiation to find derivatives of inverse trigonometric functions استخدام الاشتقاق الضمني في إيجاد مشتقات الدوال المثلثية العكسية	Exercises(29-32)	204

31a) Find The derivative of $f(x) = \tan^{-1}(\sqrt{x})$

أوجد مشتقة الدالة

A	$\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$	B	$\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$	C	$\frac{1}{2\,(1-x)}$	D	$\frac{-1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
18	Use implicit differentiation to find derivatives of inverse trigonometric functions استخدام الاشتقاق الضمني في إيجاد مشتقات الدوال المثلثية العكسية	Exercises(29-32)	204

31b)Find The derivative of $\tan^{-1}(1/x)$

أوجد مشتقة الدالة

A	$\frac{-1}{x^2+1}$	B	$\frac{1}{x^2+1}$	C	$\frac{-1}{x^2-1}$	D	$\frac{1}{x^2-1}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
18	Use implicit differentiation to find derivatives of inverse trigonometric functions استخدام الاشتقاق الضمني في إيجاد مشتقات الدوال المثلثية العكسية	Exercises(29-32)	204

32a) Find The derivative of $f(x) = \sqrt{2 + \tan^{-1} x}$

أوجد مشتقة الدالة

A	$\frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{2+\tan^{-1} x}}$	B	$\frac{-1}{2(1+x^2)\sqrt{2+\tan^{-1} x}}$	C	$\frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{2-\tan^{-1} x}}$	D	$\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{2+\tan^{-1} x}}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830
Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
18	Use implicit differentiation to find derivatives of inverse trigonometric functions استخدام الاشتقاق الضمني في إيجاد مشتقات الدوال المثلثية العكسية	Exercises(29-32)	204

32b)Find The derivative of $f(x) = e^{\tan^{-1} x}$

أوجد مشتقة الدالة

A	$\frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2}$	B	$\frac{e^{\tan^{-1} x}}{1-x^2}$	C	$\frac{e^{\tan^{-1} x}}{x^2}$	D	$\frac{e^{\tan^{-1} x}}{x^2-1}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
18	Use implicit differentiation to find derivatives of inverse trigonometric functions استخدام الاشتقاق الضمني في إيجاد مشتقات الدوال المثلثية العكسية	Exercises(29-32)	204

In exercises 29–34, find the derivative of the given function.

في التمارين 29 - 34, أوجد مشتقة كل دالة.

29. (a) $f(x) = \sin^{-1}(x^3 + 1)$ (b) $f(x) = \sin^{-1}(\sqrt{x})$

30. (a) $f(x) = \cos^{-1}(x^2 + x)$ (b) $f(x) = \cos^{-1}(2/x)$

31. (a) $f(x) = \tan^{-1}(\sqrt{x})$ (b) $f(x) = \tan^{-1}(1/x)$

32. (a) $f(x) = \sqrt{2 + \tan^{-1} x}$ (b) $f(x) = e^{\tan^{-1} x}$

Abdalla A
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830
Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
18	Use implicit differentiation to find derivatives of inverse trigonometric functions	Exercises(29-32)	204

Full Answer

29. (a) $f(x) = \sin^{-1}(x^3+1)$

Diffrentiating with respect to x,

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\sin^{-1}(x^3+1)\right]$.

By the Chain rule we get,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}}\frac{d}{dx}(x^3+1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}}(3x^2)$$

$$= \frac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}}.$$

(b) $f(x) = \sin^{-1}(\sqrt{x})$

Diffrentiating with respect to x,

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\sin^{-1}(\sqrt{x})\right]$.

By the Chain rule, we get

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

30. (a) $f(x) = \cos^{-1}(x^2+x)$

Diffrentiating with respect to x,

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\cos^{-1}(x^2+x)\right]$.

By using Chain rule,

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-(x^2+x)^2}}\frac{d}{dx}(x^2+x)$$

$$= \frac{-(2x+1)}{\sqrt{1-(x^2+x)^2}}$$

(b) $f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)$

Diffrentiating with respect to x,

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\cos^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)\right]$

By using Chain rule,

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{x}\right)^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{x^2}\right)}}\left(\frac{-2}{x^2}\right)$$

$$= \frac{2}{x\sqrt{x^2-4}}$$

31. (a) $f(x) = \tan^{-1}(\sqrt{x})$

Diffrentiating with respect to x,

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}(\sqrt{x})\right]$.

By the Chain rule,

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{(1+x)}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
18	Use implicit differentiation to find derivatives of inverse trigonometric functions	Exercises(29-32)	204

Full Answer

(b) $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

Diffrentiating with respect to x,

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$.

By the Chain rule,

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$
$$= \frac{-1}{(x^2+1)}$$

32. (a) $f(x) = \sqrt{2+\tan^{-1}x}$

Diffrentiating with respect to x,

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{2+\tan^{-1}x}\right)$.

By the Chain rule,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+\tan^{-1}x}}\frac{d}{dx}\left(2+\tan^{-1}x\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2+\tan^{-1}x}}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{2+\tan^{-1}x}}$$

(b) $f(x) = e^{\tan^{-1}x}$

Diffrentiating with respect to x,

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{\tan^{-1}x}\right)$.

By the Chain rule,

$$f'(x) = \left(e^{\tan^{-1}x}\right)\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$
$$= \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$$

Abdalla Abouelnaga 0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
19	Learn Rolle's Theorem and use it in applications فهم نظرية رول واستخدمها في التطبيقات	Ex 1 Lesson 3.10	214

EXAMPLE 10.1 An Illustration of Rolle's Theorem

Find a value of c satisfying the conclusion of Rolle's Theorem for

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

on the interval $[0, 1]$.

Solution First, we verify that the hypotheses of the theorem are satisfied: f is differentiable and continuous for all x [since $f(x)$ is a polynomial and all polynomials are continuous and differentiable everywhere]. Also, $f(0) = f(1) = 2$. We have

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2.$$

We now look for values of c such that

$$f'(c) = 3c^2 - 6c + 2 = 0.$$

By the quadratic formula, we get $c = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 1.5774$ [not in the interval $(0, 1)$] and $c = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0.42265 \in (0, 1)$. ■

مثال 10.1 توضيح لنظرية رول

أوجد قيمة c التي تحقق نظرية رول للدالة:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

في الفترة $[0, 1]$.

الحل نثبت أولًا أنه تم استيفاء فرضيات النظرية: f قابلة للإشتقاق ومتصلة لكل قيم x [بما أن $f(x)$ كثيرة حدود وجميع كثيرات الحدود متصلة وقابلة للإشتقاق دائمًا]. كذلك، $f(0) = f(1) = 2$. لدينا

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

ثم سنحاول إيجاد قيم c حيث إن

$$f'(c) = 3c^2 - 6c + 2 = 0$$

وباستخدام القانون العام، نجد أن $c = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 1.5774$ [ليست في الفترة $(0, 1)$] و $c = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0.42265 \in (0, 1)$. ■

Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
19	Learn Rolle's Theorem and use it in applications فهم نظرية رول واستخدمها في التطبيقات	Ex 1 Lesson 3.10	214

Find a value of c satisfying the conclusion of Rolle's Theorem for

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

on the interval $[0, 1]$.

أوجد قيمة c التي تحقق نظرية رول للدالة:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

في الفترة $[0, 1]$.

A	1.5774	B	0.42265	C	-1.5774	D	-0.42265

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
19	Learn Rolle's Theorem and use it in applications فهم نظرية رول واستخدمها في التطبيقات	Ex 1 Lesson 3.10	214

Find a value of c satisfying the conclusion of Rolle's Theorem for

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

on the interval $[0, 1]$.

أوجد قيمة c التي تحقق نظرية رول للدالة:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

في الفترة $[0, 1]$.

A	$1+\frac{1}{3}\sqrt{3}$	B	$1-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	C	$-1+\frac{1}{3}\sqrt{3}$	D	$-1-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
19	Learn Rolle's Theorem and use it in applications فهم نظرية رول واستخدمها في التطبيقات	Ex 1 Lesson 3.10	214

Determine the interval where the function $f(x)=x^2-x+1$ satisfies Rolle's theorem and find the value of c.

2018/2019

A	$[-1,1], c=\frac{1}{2}$	B	$[0,1], c=\frac{1}{2}$	C	$[-2,2], c=0$	D	$[0,1], c=2$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
20	Learn the Mean Value Theorem and use it in applications فهم نظرية القيمة المتوسطة واستخدمها في التطبيقات	Ex 5 Lesson 3.10	219

EXAMPLE 10.5 Proving an Inequality for sin x

Prove that $|\sin a| \le |a|$ for all a.

Solution First, note that $f(x) = \sin x$ is continuous and differentiable on any interval and that for any a,

$$|\sin a| = |\sin a - \sin 0|,$$

since $\sin 0 = 0$. From the Mean Value Theorem, we have that (for $a \neq 0$)

$$\frac{\sin a - \sin 0}{a - 0} = f'(c) = \cos c, \qquad (10.6)$$

for some number c between a and 0. Notice that if we multiply both sides of (10.6) by a and take absolute values, we get

$$|\sin a| = |\sin a - \sin 0| = |\cos c|\,|a - 0| = |\cos c|\,|a|. \qquad (10.7)$$

But, $|\cos c| \le 1$, for all real numbers c and so, from (10.6), we have

$$|\sin a| = |\cos c|\,|a| \le (1)\,|a| = |a|,$$

as desired. ■

مثال 10.5 إثبات متباينة لـ $\sin x$

أثبت أن $|\sin a| \le |a|$ for all a

الحل أولًا، لاحظ أن $f(x) = \sin x$ متصلة وقابلة للإشتقاق على أي فترة ولكل a،

$$|\sin a| = |\sin a - \sin 0|$$

بما أن: $\sin 0 = 0$. باستخدام نظرية القيمة المتوسطة، نجد أنه (إذا كان $a \neq 0$)

$$\frac{\sin a - \sin 0}{a - 0} = f'(c) = \cos c \qquad (10.6)$$

للعدد c بين a و0. لاحظ أنه، إذا قمنا بضرب الطرفين من (10.6) في a وأخذنا القيم المطلقة، فسوف نحصل على

$$|\sin a| = |\sin a - \sin 0| = |\cos c|\,|a - 0| = |\cos c|\,|a| \qquad (10.7)$$

ولكن، $|\cos c| \le 1$، لكل الأعداد الحقيقية c؛ إذًا باستخدام (10.6)، نجد أن

$$|\sin a| = |\cos c|\,|a| \le (1)\,|a| = |a|$$

وهو المطلوب. ■

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
20	Learn the Mean Value Theorem and use it in applications فهم نظرية القيمة المتوسطة واستخدمها في التطبيقات	Ex 5 Lesson 3.10	219

أثبت أن $|\sin a| \leq |a|$ الجميع القيم الحقيقية a.
أي من الطرق التالية يمكن استخدامها لإثبات هذه المتباينة؟

Prove that $|\sin a| \leq |a|$ for all real numbers a. Which of the following methods correctly proves this inequality?

A	By applying the **Mean Value Theorem** to $f(x) = \sin x$ on the interval $[0, a]$	B	By noting that $\sin a$ is always less than 1.	C	By differentiating both sides of the inequality $\sin a \leq a$.	D	By using the identity $sin^2 a + cos^2 a = 1$.

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
20	Learn the Mean Value Theorem and use it in applications فهم نظرية القيمة المتوسطة واستخدمها في التطبيقات	Ex 5 Lesson 3.10	219

Prove that $|\sin a| \leq |a|$ for all real numbers a.Which of the following methods correctly proves this inequality?

أثبت أن $|\sin a| \leq |a|$ لجميع القيم الحقيقية a.
أي من الطرق التالية يمكن استخدامها لإثبات هذه المتباينة؟

A	Using the **Mean Value Theorem** on the function $f(x) = \sin x$.	B	Using the **Taylor expansion** of the function $\sin x$	C	By comparing the **slope** of $\sin x$with the slope of $y = x$ at $x = 0$.	D	Using a **geometric inequality** from the right triangle in the unit circle.

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
20	Learn the Mean Value Theorem and use it in applications فهم نظرية القيمة المتوسطة واستخدمها في التطبيقات	Ex 5 Lesson 3.10	219

Which of the following statements correctly **proves or explains** why $|\sin a| \leq |a|$ for all real numbers a?

أي من العبارات التالية تفسر أو تبرهن بشكل صحيح لماذا $|\sin a| \leq |a|$ لكل القيم الحقيقية a؟

A	Since the **slope of** $\sin x$,which is $\cos x$,is always between $-1$and 1, the change in $\sin x$ is always less than or equal to the change in x.	B	Because $\sin a$ is always less than 1, we have $\|\sin a\| \leq \|a\|$for all $a > 1$.	C	Because $\sin x$ and x are **parallel lines** when $x \to 0$.	D	Since $sin^2 a + cos^2 a = 1$,the inequality follows directly.

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
20	Learn the Mean Value Theorem and use it in applications فهم نظرية القيمة المتوسطة واستخدمها في التطبيقات	Ex 5 Lesson 3.10	219

find the value of C *that satisfying the conclusion of the mean value thereom for* $f(x) = x^2 + 2$ on [0, 2]

أوجد قيمة C التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة على الفترة المعطاة

2019/2020 2021/2022

A	C=1	B	C=2	C	C=0.5	D	C=0

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
20	Learn the Mean Value Theorem and use it in applications فهم نظرية القيمة المتوسطة واستخدامها في التطبيقات	Ex 5 Lesson 3.10	219

find the value of C *that satisfying the conclusion of the mean value thereom for* $f(x) = x^3 + x$ on [-1, 0]

أوجد قيمة C التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة على الفترة المعطاة

2023/2024

A	C=1	B	C=2	C	C=0.5	D	C=0

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
20	Learn the Mean Value Theorem and use it in applications فهم نظرية القيمة المتوسطة واستخدامها في التطبيقات	Ex 5 Lesson 3.10	219

Check the hypotheses of the Mean Value Theorem then find a value of c that makes the appropriate conclusion of the theorem true for the function.

$$f(x) = \sin x \ , [0, \pi/2]$$

تحقق من فرضيات نظرية القيمة المتوسطة ثم أوجد قيمة c التي تجعل الاستنتاج الخاص بالنظرية صحيحًا للدالة.

2024/2025

A	C=0.88	B	C=2	C	C=1	D	C=0

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
21-a	Determine the continuity of a function at a given point. البحث في اتصال دالة عند نقطة معطاة	(39-41) Lesson 2.4	96

Paper based الجزء الكتابي

In exercises 39–41, determine values of a and b that make the given function continuous.

في التمارين 41–39، حدّد قيم a و b التي تجعل الدالة المعطاة متصلة.

Solution

39. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sin x}{x} & \text{if } x < 0 \\ a & \text{if } x = 0 \\ b\cos x & \text{if } x > 0 \end{cases}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
21-a	Determine the continuity of a function at a given point. البحث في اتصال دالة عند نقطة معطاة	(39-41) Lesson 2.4	96

Paper based الجزء الكتابي

In exercises 39–41, determine values of a and b that make the given function continuous.

في التمارين 41–39، حدّد قيم a و b التي تجعل الدالة المعطاة متصلة.

40. $f(x) = \begin{cases} ae^x + 1 & \text{if } x < 0 \\ \sin^{-1}\frac{x}{2} & \text{if } 0 \le x \le 2 \\ x^2 - x + b & \text{if } x > 2 \end{cases}$

Solution

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
21-a	Determine the continuity of a function at a given point. البحث في اتصال دالة عند نقطة معطاة	(39-41) Lesson 2.4	96

Paper based الجزء الكتابي

In exercises 39–41, determine values of a and b that make the given function continuous.

في التمارين 41–39، حدّد قيم a و b التي تجعل الدالة المعطاة متصلة.

Solution

41. $f(x) = \begin{cases} a(\tan^{-1} x + 2) & \text{if } x < 0 \\ 2e^{bx} + 1 & \text{if } 0 \le x \le 3 \\ \ln(x-2) + x^2 & \text{if } x > 3 \end{cases}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
21-a	Determine the continuity of a function at a given point. البحث في اتصال دالة عند نقطة معطاة	(39-41) Lesson 2.4	96

Paper based الجزء الكتابي

2024/2025

a) Determine Values of a and b that make the function continuous.

a) حدد قيم a و b التي تجعل الدالة متصلة.

$$f(x)=\begin{cases}2 & , & x\le -1\\ ax+b & , & -1<x<3\\ -2 & , & x\ge 3\end{cases}$$

Solution

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
21-a	Determine the continuity of a function at a given point. البحث في اتصال دالة عند نقطة معطاة	(39-41) Lesson 2.4	96

Full Answer

39. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 2\dfrac{\sin x}{x}$

$= 2 \lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 2$

Hence a must equal 2 if f is continuous.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} b\cos x$

$= b \lim_{x\to 0^-} \cos x = b,$

so b and a must equal 2 if f is continuous.

40. We need $ae^0 + 1 = \sin^{-1} 0$, so $a = -1$.

We need $2^2 - 2 + b = \sin^{-1} 1$, so $b = \frac{\pi}{2} - 2$.

41. First note that

$\lim_{x\to 3+} f(x) = \lim_{x\to 3+} \ln(x-2) + x^2$

$= \ln(3-2) + 3^2 = 9.$

Also $f(3) = 2e^{3b} + 1$,

so if f is continuous, $2e^{3b} + 1$ must equal 9;

that is $e^{3b} = 4$, so $b = \frac{\ln 4}{3}$. Then note that

$f(0) = 2e^{(b)(0)} + 1 = 3.$

Also,

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} a(\tan^{-1} x + 2)$

$= a(\tan^{-1} 0 + 2)$

$= a(0 + 2) = 2a,$

so a must equal 3/2 if f is continuous.

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
21-a	Determine the continuity of a function at a given point. البحث في اتصال دالة عند نقطة معطاة	(39-41) Lesson 2.4	96

Full Answer

2024/2025

$$f(-1)=2$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-} 2=2$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+} ax+b=-a+b$$

$$-a+b=2$$

$$f(3)=-2$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} ax+b=3a+b$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+} -2=-2$$

$$3a+b=-2$$

$$\begin{matrix}-a+b=2\\ 3a+b=-2\end{matrix} \rightarrow 4a=-4\rightarrow a=-1$$

$$-a+b=2\rightarrow -(-1)+b=2\rightarrow b=1$$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
21-b	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول إلى اللانهاية والنهايات عند اللانهاية	(33-37) Lesson 2.5	106

Paper based الجزء الكتابي

33. Suppose that the size of the pupil of a certain animal is given by $f(x)$ (mm), where x is the intensity of the light on the pupil. If $f(x) = \dfrac{80x^{-0.3} + 60}{2x^{-0.3} + 5}$, find the size of the pupil with no light and the size of the pupil with an infinite amount of light.

33. لنفترض أنّ حجم بؤبؤ عين حيوان محدد يُعطى بالعلاقة $f(x)$ (mm). حيثما يكون x هو كثافة الضوء على بؤبؤ العين. إذا كان $f(x) = \dfrac{80x^{-0.3} + 60}{2x^{-0.3} + 5}$. فأوجد حجم بؤبؤ العين عندما لا يوجد ضوء وحجمه مع وجود كمية لانهائية من الضوء.

Solution

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830
Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
21-b	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول إلى اللانهاية والنهايات عند اللانهاية	(33-37) Lesson 2.5	106

Paper based الجزء الكتابي

34. Repeat exercise 33 with $f(x) = \dfrac{80x^{-0.3} + 60}{8x^{-0.3} + 15}$.

Solution

34. كرر التمرين 33 مع $f(x) = \dfrac{80x^{-0.3} + 60}{8x^{-0.3} + 15}$.

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
21-b	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول إلى اللانهاية والنهايات عند اللانهاية	(33-37) Lesson 2.5	106

Paper based الجزء الكتابي

35. Modify the function in exercise 33 to find a function f such that $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 8$ and $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$.

35. قم بتعديل الدالة في التمرين 33 لإيجاد الدالة f بحيث يكون $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 8$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$.

Solution

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
21-b	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول إلى اللانهاية والنهايات عند اللانهاية	(33-37) Lesson 2.5	106

Paper based الجزء الكتابي

36. Find a function of the form $f(x) = \dfrac{20x^{-0.4} + 16}{g(x)}$ such that $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 5$ and $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 4$.

36. أوجد دالة للشكل $f(x) = \dfrac{20x^{-0.4} + 16}{g(x)}$ بحيث يكون $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 5$ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 4$.

Solution

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
21-b	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول إلى اللانهاية والنهايات عند اللانهاية	(33-37) Lesson 2.5	106

Paper based الجزء الكتابي

37. Suppose that the velocity of a skydiver t seconds after jumping is given by $v(t) = -\sqrt{\frac{32}{k}}\frac{1-e^{-2t\sqrt{32k}}}{1+e^{-2t\sqrt{32k}}}$. Find the limiting velocity with $k = 0.00064$ and $k = 0.00128$. By what factor does a skydiver have to change the value of k to cut the limiting velocity in half?

37. لنفترض أن سرعة لاعب القفز الحر بعد t ثانية بعد القفز تُعطى بالعلاقة $v(t) = -\sqrt{\frac{32}{k}}\frac{1-e^{-2t\sqrt{32k}}}{1+e^{-2t\sqrt{32k}}}$ أوجد أقصى سرعة $k = 0.00064$ و $k = 0.00128$. بأي عامل يتوجب على لاعب القفز الحر تغيير قيمة k لخفض أقصى سرعة إلى النصف؟

Solution

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
21-b	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول إلى اللانهاية والنهايات عند اللانهاية	(33-37) Lesson 2.5	106

Paper based الجزء الكتابي 2024/2025

b) Suppose that the length of a small animal t days after birth is $h(t) = \frac{350}{2+8(0.8)^t}$ mm.

What is the length of the animal at birth?

What is the eventual length of the animal (i.e., the length as $t \to \infty$)?

Solution

لنفترض أن طول حيوان صغير بعد t يوم من الولادة هو $h(t) = \frac{350}{2+8(0.8)^t}$ mm

- ما طول الحيوان عند الولادة ؟
- ما الطول النهائي للحيوان أي الطول عندما $t \to \infty$؟

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
21-b	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول إلى اللانهاية والنهايات عند اللانهاية	(33-37) Lesson 2.5	106

Paper based الجزء الكتابي 2020/2021

Suppose that the diameter of an animal pupils is given by $f(x)$, $f(x) = \frac{160x^{-0.4} + 90}{4x^{-0.4} + 15}$ mm, where x is the intensity of light on the pupils Find the diameter of the pupils with:

a. Minimum light , b. Maximum light

Solution

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830
Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
21-b	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول إلى اللانهاية والنهايات عند اللانهاية	(33-37) Lesson 2.5	106

Full Answer

33. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{80x^{-.3}+60}{2x^{-.3}+5}\left(\dfrac{x^{.3}}{x^{.3}}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{80+60x^{.3}}{2+5x^{.3}}$

$= \dfrac{80}{2} = 40$ mm

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{80x^{-.3}+60}{2x^{-.3}+5} = \dfrac{60}{5} = 12$ mm

34. Re-write the function as

$f(x) = \dfrac{80+60x^{0.3}}{8+15x^{0.3}}$

to see that the size with no light is

$f(0) = 10$ mm, and the size with infinite light is $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 4$ mm.

35. $f(x) = \dfrac{80x^{-0.3}+60}{10x^{-0.3}+30}$

36. $g(x) = 4x^{-0.4}+4$

$\Rightarrow f(x) = \frac{20x^{-0.4}+16}{4x^{-0.4}+4}$

Therefore, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\left(20x^{-0.4}+16\right)\cdot x^{0.4}}{\left(4x^{-0.4}+4\right)\cdot x^{0.4}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{20+16x^{0.4}}{4+4x^{0.4}} = \frac{20}{4} = 5$ and

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{20x^{-0.4}+16}{4x^{-0.4}+4} = 4$

37. As in Example 5.10, the terminal velocity is $-\sqrt{\frac{32}{k}}$. When $k = 0.00064$, the terminal velocity is $-\sqrt{\frac{32}{.00064}} \approx -224$. When $k = 0.00128$, the terminal velocity is $-\sqrt{\frac{32}{.00128}} \approx -158$.

Solve $\sqrt{\frac{32}{ak}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{32}{k}}$. Squaring both sides, $\frac{32}{ak} = \frac{1}{4}\cdot\frac{32}{k}$ so $a = 4$.

Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
21-b	Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول إلى اللانهاية والنهايات عند اللانهاية	(33-37) Lesson 2.5	106

Full Answer

2024/2025

$$h(t)=\frac{350}{2+8(0.8)^t}$$

$$h(0)=\frac{350}{2+8(0.8)^0}=\frac{350}{10}=35\text{ mm}$$

$$\lim_{t\to\infty}h(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{350}{2+8(0.8)^t}$$

$$=\frac{350}{2+0}=175\text{ mm}$$

2020/2021

Minimum light=40mm ,
Maximum light=6mm

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga

الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
22	Apply the Product Rule on derivatives تطبيقات حياتية على قاعدة الضرب على المشتقات	(25-30) Lesson 3.4	169

Paper based الجزء الكتابي

25. Suppose that for some toy, the quantity sold $Q(t)$ at time t years decreases at a rate of 4%; explain why this translates to $Q'(t) = -0.04Q(t)$. Suppose also that the price increases at a rate of 3%; write out a similar equation for $P'(t)$ in terms of $P(t)$. The revenue for the toy is $R(t) = Q(t)P(t)$. Substituting the expressions for $Q'(t)$ and $P'(t)$ into the product rule $R'(t) = Q'(t)P(t) + Q(t)P'(t)$, show that the revenue decreases at a rate of 1%. Explain why this is "obvious."

25. على فرض أنّ الكمية المبيعة $Q(t)$ من أحد أنواع الدّمى عند الزمن t مقدرًا بالسنوات تتناقص بمعدّل 4%؛ اشرح السّبب في أن ذلك يترجم إلى العلاقة $Q'(t) = -0.04Q(t)$. افترض أيضًا أن السّعر يزداد بمعدّل 3%؛ اكتب معادلةً مشابهةً لـ $P'(t)$ بدلالة $P(t)$. يساوي إيراد الدّمية $R(t) = Q(t)P(t)$ بتعويض تعبيري $Q'(t)$ و $P'(t)$ في قاعدة الضرب $R'(t) = Q'(t)P(t) + Q(t)P'(t)$ بيّن أنّ الإيراد ينخفض بمعدّل 1%. واشرح السّبب في أنّ هذا "واضح".

Solution

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
22	Apply the Product Rule on derivatives تطبيقات حياتية على قاعدة الضرب على المشتقات	(25-30) Lesson 3.4	169

Paper based الجزء الكتابي

26. As in exercise 25, suppose that the quantity sold decreases at a rate of 4%. By what rate must the price be increased to keep the revenue constant?

26. كما في التمرين 25. افترض أنّ الكميّة المبيعة تنخفض بمعدّل 4%. فما المعدّل الذي يجب زيادة السّعر به للحفاظ على الإيراد ثابتًا؟

Solution

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
22	Apply the Product Rule on derivatives تطبيقات حياتية على قاعدة الضرب على المشتقات	(25-30) Lesson 3.4	169

Paper based الجزء الكتابي

27. Suppose the price of an object is \$20 and 20,000 units are sold. If the price increases at a rate of \$1.25 per year and the quantity sold increases at a rate of 2000 per year, at what rate will revenue increase?

27. افترض أنّ سعر إحدى السّلع AED 20 للقطعة وقد بيعت 20,000 قطعة. فإذا كان السعر يزداد بمعدل AED 1.25 في العام الواحد وتزداد الكمية المبيعة بمعدّل 2000 قطعة في العام الواحد. فبأي معدل سيزداد الإيراد؟

Solution

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830
Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
22	Apply the Product Rule on derivatives تطبيقات حياتية على قاعدة الضرب على المشتقات	(25-30) Lesson 3.4	169

Paper based الجزء الكتابي

28. Suppose the price of an object is \$14 and 12,000 units are sold. The company wants to increase the quantity sold by 1200 units per year, while increasing the revenue by \$20,000 per year. At what rate would the price have to be increased to reach these goals?

28. افترض أنّ سعر القطعة 14 AED. وأنّه قد بيعت 12,000 قطعة. تريد الشركة زيادة الكميّة المبيعة بمقدار 1200 قطعة في العام مع زيادة الإيراد بمقدار 20,000 AED في العام. فما المعدّل الذي يتعيّن زيادة السّعر به لتحقيق هذين الهدفين؟

Solution

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
22	Apply the Product Rule on derivatives تطبيقات حياتية على قاعدة الضرب على المشتقات	(25-30) Lesson 3.4	169

Paper based الجزء الكتابي

29. A baseball with mass 0.15 kg and speed 45 m/s is struck by a baseball bat of mass m kg and speed 40 m/s (in the opposite direction of the ball's motion). After the collision, the ball has initial speed $u(m) = \dfrac{82.5m - 6.75}{m + 0.15}$ m/s. Show that $u'(m) > 0$ and interpret this in baseball terms. Compare $u'(1)$ and $u'(1.2)$.

29. تُضرب كرة بيسبول كتلتها 0.15 kg وسرعتها 45 m/s بمضرب بيسبول كتلته m kg وبسرعة 40 m/s (بعكس اتجاه حركة الكرة). بعد الاصطدام، بلغت السرعة الابتدائية للكرة $u(m) = \dfrac{82.5m - 6.75}{m + 0.15}$ m/s. برهن أنّ $u'(m) > 0$ وفسّر ذلك وفق مصطلحات رياضة البيسبول. قارن $u'(1)$ و $u'(1.2)$.

Solution

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
22	Apply the Product Rule on derivatives تطبيقات حياتية على قاعدة الضرب على المشتقات	(25-30) Lesson 3.4	169

Paper based الجزء الكتابي

30. In exercise 29, if the baseball has mass M kg at speed 45 m/s and the bat has mass 1.05 kg and speed 40 m/s, the ball's initial speed is $u(M) = \dfrac{86.625 - 45M}{M + 1.05}$ m/s. Compute $u'(M)$ and interpret its sign (positive or negative) in baseball terms.

Solution

30. في التمرين 29. إذا كنت كتلة كرة البيسبول M kg وسرعتها 45 m/s وإذا كانت كتلة المضرب 1.05 kg وسرعته 40 m/s. وكانت السرعة الابتدائية للكرة $u(M) = \dfrac{86.625 - 45M}{M + 1.05}$ m/s احسب $u'(M)$ وفسّر إشارته (موجبة أو سالبة) وفق مصطلحات رياضة البيسبول.

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
22	Apply the Product Rule on derivatives تطبيقات حياتية على قاعدة الضرب على المشتقات	(25-30) Lesson 3.4	169

Paper based الجزء الكتابي 2019/2020

لنفترض أن سعر سلعة ما هو 2.4 درهم إماراتي، وبِيعَ منها 12,000 وحدة، وكان السعر يرتفع بمعدل 10 فلوس سنويًا، بينما يتناقص العدد المباع بمعدل 1500 وحدة سنويًا. ما معدل تزايد أو تناقص إجمالي الإيرادات؟

Suppose the price of an object is AED 2.4 and 12,000 units are sold, if the price increasing at the rate of 10 fils per year and the number sold is decreasing at the rate of 1500 unit per year. At what rate is the total revenue is increasing or decreasing?

Solution

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
22	Apply the Product Rule on derivatives تطبيقات حياتية على قاعدة الضرب على المشتقات	(25-30) Lesson 3.4	169

Paper based الجزء الكتابي 2017/2018

لنفترض أن سعر سلعة ما هو ١٢ درهمًا إماراتيًا، وبِيعَ منها ١٠,٠٠٠ وحدة. ترغب الشركة في زيادة الكمية المباعة بمقدار ١٠٠٠ وحدة سنويًا، مع زيادة إيراداتها بمقدار ١٥,٠٠٠ درهم إماراتي سنويًا. ما هو معدل زيادة السعر المطلوب لتحقيق هذه الأهداف؟

Suppose the price of an object is AED12 and 10,000 units are sold. The company wants to increase the quantity sold by 1000 units per year, while increasing the revenue by AED15,000 per year. At what rate would the price have to be increased to reach these goals?

Solution

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
22	Apply the Product Rule on derivatives تطبيقات حياتية على قاعدة الضرب على المشتقات	(25-30) Lesson 3.4	169

Paper based الجزء الكتابي

Full Answer

25. The rate at which the quantity Q changes is Q'. Since the amount is said to be "decreasing at a rate of 4%" we have to ask "4% of what?" The answer in this type of context is usually 4% of itself. In other words, $Q' = -0.04Q$.
As for P, the 3% rate of increase would translate as $P' = 0.03P$. By the product rule with $R = PQ$, we have:
$R' = (PQ)' = P'Q + PQ'$
$= (0.03P)Q + P(-0.04Q)$
$= -(0.01)PQ = (-0.01)R.$
In other words, revenue is decreasing at a rate of 1%.

26. Revenue will be constant when the derivative is 0. Substituting, $Q' = -0.04Q$ and, $P' = aP$ into the expression for R' gives,
$R' = -0.04QP + aQP$
$R' = (-0.04 + a)QP.$
This is zero when $a = 0.04$, so price must increase by 4%.

27. $R' = Q'P + QP'$
At a certain moment of time (call it t_0) we are given $P(t_0) = 20\,(\$/\text{item})$, $Q(t_0) = 20,000(\text{items})$
$P'(t_0) = 1.25\,(\$/\text{item/year})$
$Q'(t_0) = 2,000\,(\text{item/year})$
$R'(t_0) = 2,000(20) + (20,000)1.25$
$R'(t_0) = 65,000\,(\ \$/\text{year})\,.$
So, revenue is increasing by $\$65,000$/year at the time t_0.

28. We are given $P = \$14$, $Q = 12,000$ and $Q' = 1,200$. We want $R' = \$20,000$. Substituting these values in to the expression for R' (see exercise 25) yields:
$20,000 = 1200 \cdot 14 + 12,000 \cdot P'$
Solve to get $P' = 0.27$ dollars per year.

29. If $u(m) = \dfrac{82.5m - 6.75}{m + 0.15}$ then using the quotient rule,
$$\frac{du}{dm} = \frac{(m + 0.15)(82.5) - (82.5m - 6.75)1}{(m + 0.15)^2}$$
$$= \frac{19.125}{(m + 0.15)^2}$$
which is clearly positive. It seems to be saying that initial ball speed is an increasing function of the mass of the bat. Meanwhile,
$u'(1) = \dfrac{19.125}{1.15^2} \approx 14.46$
$u'(1.2) = \dfrac{19.125}{1.35^2} \approx 10.49,$
which suggests that the rate at which this speed is increasing is decreasing.

الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
22	Apply the Product Rule on derivatives تطبيقات حياتية على قاعدة الضرب على المشتقات	(25-30) Lesson 3.4	169

Paper based الجزء الكتابي

Full Answer

30. $$u'(M) = \frac{(M+1.05)\frac{d}{dM}(86.625-45M)}{(M+1.05)^2} - \frac{\frac{d}{dM}(M+1.05)(86.625-45M)}{(M+1.05)^2}$$
$$= \frac{(-45M-47.25)-(86.625-45M)}{(M+1.05)^2}$$
$$= \frac{-133.875}{(M+1.05)^2}$$

This quantity is negative. In baseball terms, as the mass of the baseball increases, the initial velocity decreases.

2019/2020

Revenue is Decreasing at rate of AED2,400 per year

2017/2018

AED 0.3 per year

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
23	Solve real-life problems using derivatives of exponential and logarithmic functions حل المشكلات الحياتية باستخدام مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية	(25-30) Lesson 3.7	194

Paper based الجزء الكتابي

In exercises 25–28, find an equation of the tangent line to $y = f(x)$ at $x = 1$.

في التمارين 25-28، أوجد معادلة المماس لمنحنى $y = f(x)$ عند $x = 1$.

25. $f(x) = 3e^{x^2}$

Solution

26. $f(x) = 3^{x^e}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
23	Solve real-life problems using derivatives of exponential and logarithmic functions حل المشكلات الحياتية باستخدام مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية	(25-30) Lesson 3.7	194

Paper based الجزء الكتابي

In exercises 25–28, find an equation of the tangent line to $y = f(x)$ at $x = 1$.

في التمارين 25-28، أوجد معادلة المماس لمنحنى $y = f(x)$ عند $x = 1$.

27. $f(x) = x^2 \ln x$

Solution

28. $f(x) = 2 \ln x^3$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
23	Solve real-life problems using derivatives of exponential and logarithmic functions حل المشكلات الحياتية باستخدام مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية	(25-30) Lesson 3.7	194

Paper based الجزء الكتابي

In exercises 29 and 30, find all values of x for which the tangent line to $y = f(x)$ is horizontal.

في التمرينين 29 و 30، أوجد كل قيم x التي يكون المماس لمنحنى $y = f(x)$ أفقيًا.

29. (a) $f(x) = xe^{-2x}$

Solution

(b) $f(x) = xe^{-3x}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
23	Solve real-life problems using derivatives of exponential and logarithmic functions حل المشكلات الحياتية باستخدام مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية	(25-30) Lesson 3.7	194

Paper based الجزء الكتابي

In exercises 29 and 30, find all values of x for which the tangent line to $y = f(x)$ is horizontal.

في التمرينين 29 و 30، أوجد كل قيم x التي يكون المماس لمنحنى $y = f(x)$ أفقيًا.

30. (a) $f(x) = x^2e^{-2x}$

Solution

(b) $f(x) = x^2e^{-3x}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
23	Solve real-life problems using derivatives of exponential and logarithmic functions حل المشكلات الحياتية باستخدام مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية	(25-30) Lesson 3.7	194

Paper based الجزء الكتابي 2023/2024

Find all values of x for which the tangent line to $y = 3x^4 - 6x^2 + 1$ is horizontal.

أوجد جميع قيم x التي عندها يكون المماس على $y = 3x^4 - 6x^2 + 1$ أفقيًا.

Solution

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
23	Solve real-life problems using derivatives of exponential and logarithmic functions حل المشكلات الحياتية باستخدام مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية	(25-30) Lesson 3.7	194

Paper based الجزء الكتابي 2021/2022

أوجد جميع قيم xالتي يكون فيها الخط المماس لـ بزاوية 45 درجة مع المحور x، على افتراض أن الزاوية يتم قياسها عكس اتجاه عقارب الساعة.

Find all values of x for which the tangent line to $y = x^3 - 2x + 1$ is at an angle of 45° with the x-axis, assuming that the angle is measured counterclockwise.

Solution

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
23	Solve real-life problems using derivatives of exponential and logarithmic functions حل المشكلات الحياتية باستخدام مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية	(25-30) Lesson 3.7	194

Paper based الجزء الكتابي 2019/2020

أوجد جميع قيم x التي يكون فيها الخط المماس للدالة الموضحة أفقيا.

Find all values of x for which the tangent line to $f(x) = xe^{-2x}$ is horizontal

Solution

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
23	Solve real-life problems using derivatives of exponential and logarithmic functions حل المشكلات الحياتية باستخدام مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية	(25-30) Lesson 3.7	194

Paper based الجزء الكتابي

Full Answer

25. $f(x) = 3e^{x^2}$
$f(1) = 3e^{1^2} = 3e$
$f'(x) = 3e^{x^2} 2x$
$f'(1) = 3e^{1^2} 2(1) = 6e$
So, the equation of the tangent line is,
$y = 6e(x-1) + 3e.$

26. $f(x) = 3^{x^e}$
$f(1) = 3^{1^e} = 3$
$f'(x) = 3^{x^e} \ln 3 \cdot ex^{(e-1)}$
$f'(1) = 3 \ln 3 \cdot e$
So, the equation of the tangent line is,
$y = 3 \ln 3 \cdot e(x-1) + 3.$

27. $f(1) = 0$
$f'(x) = 2x \ln x + x^2 . \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$
$f'(1) = 2 \cdot 1 \ln 1 + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$
So the equation of tangent line is
$y = 1(x-1) + 0$ or $y = x - 1.$

28. $f(x) = 2 \ln x^3$
$f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot 3x^2 = \frac{6}{x}$
Slope $= f'(x)$ at $x = 1.$
Slope $m = \frac{6}{1} = 6.$
Equation of the line passing through (x_1, y_1) with slope m is $y - y_1 = m(x - x_1).$
At $x_1 = 1$, $y_1 = f(1) = 2. \ln 1^3 = 0.$
Therefore equation is $y - 0 = 6 \cdot (x-1)$ or $y = 6x - 6.$

29. (a) $f(x) = xe^{-2x}$
Given that, the tangent line to $f(x)$ is horizontal. Therefore slope is zero.
Hence,
$f'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} = 0$
$e^{-2x}(1 - 2x) = 0$
$x = \frac{1}{2}.$
$f(x) = x \cdot e^{-3x}$
Given that, the tangent line to $f(x)$ is horizontal. Therefore slope is zero.
Hence,
$f'(x) = x \cdot (-3e^{-3x}) + e^{-3x} = 0.$
$\Rightarrow e^{-3x}(-3x + 1) = 0$
$\Rightarrow 3x - 1 = 0$
$\Rightarrow x = \frac{1}{3}$

Abdalla Abo
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
23	Solve real-life problems using derivatives of exponential and logarithmic functions حل المشكلات الحياتية باستخدام مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية	(25-30) Lesson 3.7	194

Paper based الجزء الكتابي

Full Answer

30. **(a)** $f(x) = x^2 \cdot e^{-2x}$

Given that, the tangent line to $f(x)$ is horizontal. Therefore slope is zero. Hence,

$$f'(x) = x^2 \cdot (-2e^{-2x}) + 2x \cdot e^{-2x} = 0$$

$$\Rightarrow -x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

(b) $f(x) = x^2 \cdot e^{-3x}$

Given that, the tangent line to $f(x)$ is horizontal. Therefore slope is zero. Hence,

$$f'(x) = x^2 \cdot (-3e^{-3x}) + 2x \cdot e^{-3x} = 0$$

$$\Rightarrow -3x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

2023/2024

$$x = -1, x = 1, x = 0$$

2021/2022

$$x = -1, x = 1$$

2019/2020

$$x = \frac{1}{2}$$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
24	Find derivatives implicitly. إيجاد المشتقات للعلاقات الضمنية	Ex 4 Lesson 3.8	199

Paper based الجزء الكتابي

Find $y''(x)$ implicitly for $y^2 + 2e^{-xy} = 6$. Then find the value of y'' at the point $(0, 2)$.

أوجد $y''(x)$ ضمنيًا لـ $y^2 + 2e^{-xy} = 6$. ثم أوجد قيمة y'' عند النقطة $(0, 2)$.

Solution

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
24	Find derivatives implicitly. إيجاد المشتقات للعلاقات الضمنية	Ex 4 Lesson 3.8	199

Paper based الجزء الكتابي

a) Find the derivative $y'(x)$ implicitly.

b) Find the value $y'(0)$.

$$y^2 + 2e^{-xy} = 6$$

a) أوجد المشتقة $y'(x)$ ضمنياً.

b) أوجد قيمة $y'(0)$.

Solution

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
24	Find derivatives implicitly. إيجاد المشتقات للعلاقات الضمنية	Ex 4 Lesson 3.8	199

Paper based الجزء الكتابي

EXAMPLE 8.4 Finding a Second Derivative Implicitly

Find $y''(x)$ implicitly for $y^2 + 2e^{-xy} = 6$. Then find the value of y'' at the point $(0, 2)$.

Solution We begin by differentiating both sides of the equation with respect to x. We have

$$\frac{d}{dx}(y^2 + 2e^{-xy}) = \frac{d}{dx}(6).$$

By the chain rule and the product rule, we have

$$2yy'(x) + 2e^{-xy}[-y - xy'(x)] = 0. \tag{8.3}$$

Notice that we don't need to solve this for $y'(x)$. Dividing out the common factor of 2 and differentiating again, we get

$$y'(x)y'(x) + yy''(x) - e^{-xy}[-y - xy'(x)][y + xy'(x)] - e^{-xy}[y'(x) + y'(x) + xy''(x)] = 0.$$

Grouping all the terms involving $y''(x)$ on one side of the equation gives us

$$yy''(x) - xe^{-xy}y''(x) = -[y'(x)]^2 - e^{-xy}[y + xy'(x)]^2 + 2e^{-xy}y'(x).$$

Factoring out the $y''(x)$ on the left, we get

$$(y - xe^{-xy})y''(x) = -[y'(x)]^2 - e^{-xy}[y + xy'(x)]^2 + 2e^{-xy}y'(x),$$

so that

$$y''(x) = \frac{-[y'(x)]^2 - e^{-xy}[y + xy'(x)]^2 + 2e^{-xy}y'(x)}{y - xe^{-xy}}. \tag{8.4}$$

مثال 8.4 إيجاد مشتقة من الرتبة الثانية ضمنيًا

أوجد $y''(x)$ ضمنيًا لـ $y^2 + 2e^{-xy} = 6$. ثم أوجد قيمة y'' عند النقطة $(0, 2)$.

الحل نحن نبدأ باشتقاق طرفي المعادلة بدلالة x . لدينا

$$\frac{d}{dx}(y^2 + 2e^{-xy}) = \frac{d}{dx}(6)$$

من قاعدة السلسلة وقاعدة ناتج الضرب. يوجد لدينا

$$2yy'(x) + 2e^{-xy}[-y - xy'(x)] = 0 \tag{8.3}$$

لاحظ أننا لسنا بحاجة إلى إيجاد حل ذلك لإيجاد $y'(x)$ بإخراج العامل المشترك 2 وإجراء الاشتقاق مرة أخرى. نحصل على

$$y'(x)y'(x) + yy''(x) - e^{-xy}[-y - xy'(x)][y + xy'(x)] - e^{-xy}[y'(x) + y'(x) + xy''(x)] = 0$$

وبتجميع كل الحدود التي تشمل $y''(x)$ في طرف واحد من المعادلة نحصل على

$$yy''(x) - xe^{-xy}y''(x) = -[y'(x)]^2 - e^{-xy}[y + xy'(x)]^2 + 2e^{-xy}y'(x)$$

وبأخذ العامل المشترك $y''(x)$ على الطرف الأيسر. نحصل على

$$(y - xe^{-xy})y''(x) = -[y'(x)]^2 - e^{-xy}[y + xy'(x)]^2 + 2e^{-xy}y'(x)$$

لذا فإن

$$y''(x) = \frac{-[y'(x)]^2 - e^{-xy}[y + xy'(x)]^2 + 2e^{-xy}y'(x)}{y - xe^{-xy}} \tag{8.4}$$

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
24	Find derivatives implicitly. إيجاد المشتقات للعلاقات الضمنية	Ex 4 Lesson 3.8	199

Paper based الجزء الكتابي 2024/2025

a) Find the derivative $y'(x)$ implicitly.

b) Find the value $y'(0)$.

$$e^{x^2 y} = 2x + 2y$$

Solution

a) أوجد المشتقة $y'(x)$ ضمنياً.

b) أوجد قيمة $y'(0)$.

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
24	Find derivatives implicitly. إيجاد المشتقات للعلاقات الضمنية	Ex 4 Lesson 3.8	199

Paper based الجزء الكتابي

Full Answer

2024/2025

a) $y'(x)$

$$e^{x^2y} = 2x + 2y$$

$$e^{x^2y}[2xy + x^2y'(x)] = 2 + 2y'(x)$$

$$2xye^{x^2y} + x^2y'(x)e^{x^2y} - 2y'(x) = 2$$

$$y'(x)[x^2e^{x^2y} - 2] = 2 - 2xye^{x^2y}$$

$$y'(x) = \frac{2 - 2xye^{x^2y}}{x^2e^{x^2y} - 2}$$

b) $e^{x^2y} = 2x + 2y$

$$e^{0(y)} = 2(0) + 2y$$

$$1 = 2y \rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$y'(0) = \frac{2 - 2(0)\left(\frac{1}{2}\right)e^{0\left(\frac{1}{2}\right)}}{0e^{0\left(\frac{1}{2}\right)} - 2}$$

$$= \frac{2 - 0}{0 - 2} = -1$$

Abdalla Abouelnaga

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
25	Use implicit differentiation to find derivatives of inverse trigonometric functions استخدام الاشتقاق الضمني لإيجاد مشتقات الدوال المثلثية العكسية	(29-32) Lesson 3.8	204

Paper based الجزء الكتابي

In exercises 29–34, find the derivative of the given function.

في التمارين 29 - 34, أوجد مشتقة كل دالة.

29. (a) $f(x) = \sin^{-1}(x^3 + 1)$

Solution

(b) $f(x) = \sin^{-1}(\sqrt{x})$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
25	Use implicit differentiation to find derivatives of inverse trigonometric functions استخدام الاشتقاق الضمني لإيجاد مشتقات الدوال المثلثية العكسية	(29-32) Lesson 3.8	204

Paper based الجزء الكتابي

In exercises 29–34, find the derivative of the given function.

في التمارين 29 - 34, أوجد مشتقة كل دالة.

30. (a) $f(x) = \cos^{-1}(x^2 + x)$

Solution

(b) $f(x) = \cos^{-1}(2/x)$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
25	Use implicit differentiation to find derivatives of inverse trigonometric functions استخدام الاشتقاق الضمني لإيجاد مشتقات الدوال المثلثية العكسية	(29-32) Lesson 3.8	204

Paper based الجزء الكتابي

In exercises 29–34, find the derivative of the given function.

في التمارين 29 - 34, أوجد مشتقة كل دالة.

31. (a) $f(x) = \tan^{-1}(\sqrt{x})$

Solution

(b) $f(x) = \tan^{-1}(1/x)$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
25	Use implicit differentiation to find derivatives of inverse trigonometric functions استخدام الاشتقاق الضمني لإيجاد مشتقات الدوال المثلثية العكسية	(29-32) Lesson 3.8	204

Paper based الجزء الكتابي

In exercises 29–34, find the derivative of the given function.

في التمارين 29 - 34, أوجد مشتقة كل دالة.

32. (a) $f(x) = \sqrt{2 + \tan^{-1} x}$

Solution

(b) $f(x) = e^{\tan^{-1} x}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
25	Use implicit differentiation to find derivatives of inverse trigonometric functions استخدام الاشتقاق الضمني لإيجاد مشتقات الدوال المثلثية العكسية	(29-32) Lesson 3.8	204

Paper based الجزء الكتابي

Full Answer

29. (a) $f(x) = \sin^{-1}(x^3+1)$

Diffrentiating with respect to x,

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\sin^{-1}(x^3+1)\right]$.

By the Chain rule we get,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}}\frac{d}{dx}(x^3+1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}}(3x^2)$$

$$= \frac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}}.$$

(b) $f(x) = \sin^{-1}(\sqrt{x})$

Diffrentiating with respect to x,

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\sin^{-1}(\sqrt{x})\right]$.

By the Chain rule, we get

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

30. (a) $f(x) = \cos^{-1}(x^2+x)$

Diffrentiating with respect to x,

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\cos^{-1}(x^2+x)\right]$.

By using Chain rule,

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-(x^2+x)^2}}\frac{d}{dx}(x^2+x)$$

$$= \frac{-(2x+1)}{\sqrt{1-(x^2+x)^2}}$$

(b) $f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)$

Diffrentiating with respect to x,

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\cos^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)\right]$

By using Chain rule,

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{x}\right)^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{x^2}\right)}}\left(\frac{-2}{x^2}\right)$$

$$= \frac{2}{x\sqrt{x^2-4}}$$

31. (a) $f(x) = \tan^{-1}(\sqrt{x})$

Diffrentiating with respect to x,

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}(\sqrt{x})\right]$.

By the Chain rule,

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{(1+x)}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
25	Use implicit differentiation to find derivatives of inverse trigonometric functions استخدام الاشتقاق الضمني لإيجاد مشتقات الدوال المثلثية العكسية	(29-32) Lesson 3.8	204

Paper based الجزء الكتابي

Full Answer

(b) $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

Diffrentiating with respect to x,

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$.

By the Chain rule,

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$
$$= \frac{-1}{(x^2+1)}$$

32. (a) $f(x) = \sqrt{2+\tan^{-1}x}$

Diffrentiating with respect to x,

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{2+\tan^{-1}x}\right)$.

By the Chain rule,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+\tan^{-1}x}}\frac{d}{dx}(2+\tan^{-}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2+\tan^{-1}x}}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{2+\tan^{-1}x}}$$

(b) $f(x) = e^{\tan^{-1}x}$

Diffrentiating with respect to x,

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{\tan^{-1}x}\right)$.

By the Chain rule,

$$f'(x) = \left(e^{\tan^{-1}x}\right)\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$
$$= \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$$

Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
26	Understand the Mean Value Theorem and use it in applications. التعرف على نظرية القيمة المتوسطة واستخدامها في التطبيقات	(30-40) Lesson 3.10	119

Paper based الجزء الكتابي

30. If $f'(x) < 0$ for all x, prove that $f(x)$ is a *decreasing* function: that is, if $a < b$, then $f(a) > f(b)$.

30. إذا كان $f'(x) < 0$ لكل قيم x. فأثبت أن $f(x)$ هي دالّة متناقصة: بمعنى أنه إذا كان $a < b$. فإن $f(a) > f(b)$.

Solution

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
26	Understand the Mean Value Theorem and use it in applications. التعرف على نظرية القيمة المتوسطة واستخدامها في التطبيقات	(30-40) Lesson 3.10	119

Paper based الجزء الكتابي

In exercises 31–38, determine whether the function is increasing, decreasing or neither.

في التمارين 31-38، حدّد ما إذا كانت دالّة متزايدة أم متناقصة أم غير ...

31 $f(x) = x^3 + 5x + 1$

32. $f(x) = x^5 + 3x^3 - 1$

Solution

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
26	Understand the Mean Value Theorem and use it in applications. التعرف على نظرية القيمة المتوسطة واستخدامها في التطبيقات	(30-40) Lesson 3.10	119

Paper based الجزء الكتابي

In exercises 31–38, determine whether the function is increasing, decreasing or neither.

في التمارين 31-38، حدّد ما إذا كانت دالّة متزايدة أم متناقصة أم غير ذلك.

33. $f(x) = -x^3 - 3x + 1$

34. $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

Solution

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبو النجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
26	Understand the Mean Value Theorem and use it in applications. التعرف على نظرية القيمة المتوسطة واستخدامها في التطبيقات	(30-40) Lesson 3.10	119

Paper based الجزء الكتابي

In exercises 31–38, determine whether the function is increasing, decreasing or neither.

في التمارين 31-38، حدّد ما إذا كانت دالّة متزايدة أم متناقصة أم غير ذلك.

35. $f(x) = e^x$

Solution

36. $f(x) = e^{-x}$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Final Revision Grade12 Adv
الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
26	Understand the Mean Value Theorem and use it in applications. التعرف على نظرية القيمة المتوسطة واستخدامها في التطبيقات	(30-40) Lesson 3.10	119

Paper based الجزء الكتابي

In exercises 31–38, determine whether the function is increasing, decreasing or neither.

في التمارين 31-38، حدّد ما إذا كانت دالّة متزايدة أم متناقصة أم غير ذلك.

37. $f(x) = \ln x$

Solution

38. $f(x) = \ln x^2$

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
26	Understand the Mean Value Theorem and use it in applications. التعرف على نظرية القيمة المتوسطة واستخدامها في التطبيقات	(30-40) Lesson 3.10	119

Paper based الجزء الكتابي

39. Suppose that $s(t)$ gives the position of an object at time t. If s is differentiable on the interval $[a, b]$, prove that at some time $t = c$, the instantaneous velocity at $t = c$ equals the average velocity between times $t = a$ and $t = b$.

Solution

39. على فرض أن $s(t)$ تحدّد موقع جسم ما في الزمن t. وإذا كانت s قابلة للإشتقاق في الفترة $[a, b]$. فأثبت أنه عندما $t = c$، تكون السرعة اللّحظيّة عند $t = c$ مساوية للسرعة المنجهة المتوسطة بين $t = a$ و $t = b$.

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830
Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
26	Understand the Mean Value Theorem and use it in applications. التعرف على نظرية القيمة المتوسطة واستخدامها في التطبيقات	(30-40) Lesson 3.10	119

Paper based الجزء الكتابي

40. Two runners start a race at time 0. At some time $t = a$, one runner has pulled ahead, but the other runner has taken the lead by time $t = b$. Prove that at some time $t = c > 0$, the runners were going exactly the same speed.

40. بدأ عدّاءان سباقًا في الزمن 0. وبعد مرور فترة من الزمن $t = a$، تصدر عدّاء السباق، ولكن المتسابق الثاني نزع منه صدارة السباق بمرور الزمن $t = b$. أثبت أنه عند الزمن $t = c > 0$، كان العدّاءان يجريان بالسرعة نفسها بالضبط.

Solution

Abdalla Abouelnaga
Mr. Abdalla Abouelnaga
0505114830

الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
26	Understand the Mean Value Theorem and use it in applications. التعرف على نظرية القيمة المتوسطة واستخدامها في التطبيقات	(30-40) Lesson 3.10	119

Paper based الجزء الكتابي

Full Answer

30. Let $a < b$. f is differentiable on (a, b) and continuous on $[a, b]$, since it is differentiable for all x. This means that

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

for some $c \in (a, b)$. Therefore $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ is negative, and $f(a) > f(b)$.

31. $f'(x) = 3x^2 + 5$. This is positive for all x, so $f(x)$ is increasing.

32. $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 \geq 0$ for all x. $f' = 0$ only at $x = 0$, so $f(x)$ is increasing.

33. $f'(x) = -3x^2 - 3$. This is nagative for all x, so $f(x)$ is decreasing.

34. $f'(x) = 4x^3 + 4x$ is negative for negative x, and positive for positive x, so $f(x)$ is neither an increasing function nor a decreasing function.

35. $f'(x) = e^x$. This is positive for all x, so $f(x)$ is increasing.

36. $f'(x) = -e^{-x} < 0$ for all x, so $f(x)$ is a decreasing function.

37. $f'(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) > 0$ for $x > 0$, that is, for all x in the domain of f. So $f(x)$ is increasing.

Mr. Abdalla Abouelnaga 0505114830

الأستاذ عبدالله أبوالنجا 0505114830

Q	Learning Outcome	Example/Exercise	Page
26	Understand the Mean Value Theorem and use it in applications. التعرف على نظرية القيمة المتوسطة واستخدامها في التطبيقات	(30-40) Lesson 3.10	119

Paper based الجزء الكتابي

Full Answer

38. $f'(x) = \frac{1}{x^2}.2x = \frac{2}{x}$ is negative for negative x, and positive for positive x, so $f(x)$ is neither an increasing function nor a decreasing function.

39. The average velocity on $[a, b]$ is $\frac{s(b) - s(a)}{b - a}$. By the Mean Value Theorem, there exists a $c \in (a, b)$ such that $s'(c) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}$ Thus, the instantaneous velocity at $t = c$ is equal to the average velocity between times $t = a$ and $t = b$.

40. Let $f(t)$ be the distance the first runner has gone after time t and let $g(t)$ be the distance the second runner has gone after time t. The functions $f(t)$ and $g(t)$ will be continuous and differentiable. Let $h(t) = f(t) - g(t)$. At $t = 0$, $f(0) = 0$ and $g(0) = 0$ so $h(0) = 0$. At $t = a$, $f(a) > g(a)$ so $h(a) > 0$. Similarly, at $t = b$, $f(b) < g(b)$ so $h(b) < 0$. Thus, by the Intermideate Value Theorem, there is time $t = t_0$ for $t_0 \in (a, b)$ where $h(t_0) = 0$. Rolle's Theorem then says that there is time $t = c$ where $c \in (0, t_0)$ such that $h'(c) = 0$. But $h'(t) = f'(t) - g'(t)$, so $h'(c) = f'(c) - g'(c) = 0$ implies that $f'(c) = g'(c)$, i.e., at time $t = c$ the runners are going exactly the same speed.

EOT1 *Math Grade 12* Adv

أسئلة واجابات هيكل(الرياضيات) الثاني عشر المتقدم

2025/2026

With Answers

مع الإجابات كما وردت بدليل المعلم

مع اسئلة وزارية سابقة من نفس أسئلة
ومخرجات التعلم المدرجة بالهيكل والمنهاج

عزيزي الطالب:

اجتهد في فهم المنهاج الدراسي جيدا وفي فهم الهيكل واستيعاب أفكاره وليس حفظ المسائل

لأنه وردت بعض الأسئلة في امتحانات السنوات السابقة أدرجت مسائل مثلها بالهيكل ولكن ليس هي بالنص وتم تغيير طفيف في صياغة السؤال في بعض الأسئلة.

"وفقنا الله جميعا لما يحب ويرضى"

Mr. Abdalla Abouelnaga