

يمكنك مراجعته الحلول من خلال المذكرة المحلولة
للتأكد من حلك والتدرب على الحل الصحيح

مذكرة مراجعته القصير

الرياضيات

الصف الثاني عشر علمي

الفصل الدراسي الأول

"لا تبحث عن الحل الأسرع ... بل عن الفهم الذي لا يُنسى"

للحصول على المذكرة المحلولة اشترك في قناتي اليوتيوب والتيلجرام
وسيصلك كل ما هو جديد



اضغط هنا

للاضمام لجروب التيلجرام

YouTube

اضغط هنا

للاشتراك في قناة اليوتيوب



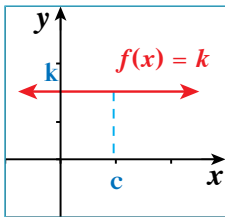
HOSAMBAYOUMI195



رياضيات

إعداد: أ. حسام بيومي

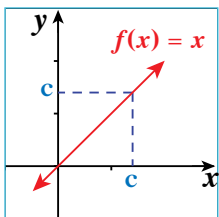
حساب النهايات



نظرية (2)

إذا كانت f دالة: $f(x) = k$ وكانا k, c عدداً حقيقيين فإن:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} k = k$$



نظرية (3)

إذا كانت f دالة: $f(x) = x$ وكان c عدداً حقيقياً فإن:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} x = c$$

نظرية (4)

إذا كانت k, c, M, L أعداداً حقيقية، $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ ، $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L + M \quad \text{(a) قاعدة الجمع:}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L - M \quad \text{(b) قاعدة الطرح:}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \cdot M \quad \text{(c) قاعدة الضرب:}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow c} f(x) = k \cdot L \quad \text{(d) قاعدة في ثابت:}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0 \quad \text{(e) قاعدة القسمة:}$$



حاول أن تحل (2) ص 17 :-

بفرض أن: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -3$

أوجد:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x)) \quad (b) \lim_{x \rightarrow 2} (f(x) \cdot g(x)) \quad (c) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{8 f(x) \cdot g(x)}{f(x) + g(x)} \right)$$

الحل:



نظرية (5): دوال كثيرات الحدود ودوال الحدوديات النسبية

(a) إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ دالة كثيرة الحدود ، c عددا حقيقيا ، فإن :

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0$$

(b) إذا كانت $f(x)$ ، $g(x)$ كثيرتي حدود ، c عددا حقيقيا ، فإن

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} \quad , \quad g(c) \neq 0$$

مثال (3) ص 18:

أوجد

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^4 - 2x^3 + 5)$$

الحل:

أوجد

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$$

الحل:

أوجد

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2(2 - x))$$

الحل:



مثال (4) ص 19 :-

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & : x < 1 \\ 5 & : x = 1 \\ \frac{5}{x} & : x > 1 \end{cases} \quad \text{لتكن الدالة } f:$$

أوجد إن أمكن: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

الحل:

حاول أن تحل (4) ص 19

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & : x \leq 2 \\ x - 1 & : x > 2 \end{cases} \quad \text{لتكن الدالة } f:$$

أوجد إن أمكن: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

الحل:



حاول أن تحل (5) ص 19

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x > 1 \\ \frac{x}{x^2 + 1} & : x \leq 1 \end{cases} \quad \text{لتكن الدالة } g :$$

أوجد إن أمكن : $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

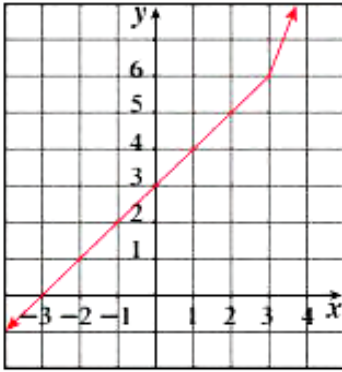
الحل :



مثال (6) ص 20 :

لتكن الدالة f : $f(x) = |x - 3| + 2x$ أوجد إن أمكن : $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

الحل:



حاول أن تُحل (6) ص 20 :

لتكن الدالة f : $f(x) = x^2 - |x + 2|$ أوجد إن أمكن : $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

الحل:



نظرية (6)

بفرض أن $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجودة وكانت n عددًا صحيحًا موجبًا فإن:

a $\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right)^n$

b $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$

(في حالة n عددًا زوجيًا يشترط أن يكون $c > 0$)

c $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$

(في حالة n عددًا زوجيًا يشترط أن تكون $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$)

مثال (7) ص 21 :-

أوجد

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x-3}$$

الحل :

أوجد:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{x - 2}$$

الحل:



التاريخ :

اليوم :

حاول أن تحل (7) ص 22 :

أوجد

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x^2 - 5}$$

أوجد

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x + \sqrt{x})^4$$

أوجد:

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 4x + 5}}{x - 2}$$



إلغاء العامل الصفري في المقام

إذا كان لدينا دالة نسبية وكانت نهاية مقام هذه الدالة النسبية لا تساوي الصفر عندما $x \rightarrow c$ فإننا نطبق نظرية (4) فرع e لإيجاد نهاية هذه الدالة. أما إذا ساوت نهاية المقام الصفر، فإننا نقوم باختصار العامل الصفري المشترك بين البسط والمقام، إن وجد، ثم نستخدم الصيغة المبسطة لإيجاد النهاية.

ملاحظات:

- ① عند التعويض المباشر لقيمة x في كل من البسط والمقام وحصلنا على $\frac{0}{0}$ فإنها تسمى **صيغة غير معينة**
- ② يمكن استخدام **التحليل** أو **القسمة** أو **الضرب بالمرافق** أو **غيرها** لإيجاد الصيغة المبسطة.

مثال (8) ص 22 :

أوجد:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$$

الحل:

أوجد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x}$$

الحل:



مثال (8) ص 22 :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1|}{x^2 - 1}$$

الحل :

حاول أن تحل (8) ص 23 :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$$

الحل :



حاول أن تحل (8) ص 23 :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow -7} \frac{(x+4)^2 - 9}{x^2 + 7x}$$

الحل :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x+2| - 7}{x^2 - 25}$$

الحل :



التاريخ :

اليوم :

مثال (9) ص 24 :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-3} - 1}{x-2}$$

الحل :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

الحل :



التاريخ :

اليوم :

مثال (9) ص 24 :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt[3]{x + 2}}$$

الحل :



التاريخ :

اليوم :

حاول أن تحل (9) ص 25 :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 2x}$$

الحل :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1}}{\sqrt[3]{x + 1}}$$

الحل :



التاريخ :

اليوم :

حاول أن تحل (9) ص 25 :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{3 - \sqrt{x}}$$

الحل :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{x^2 - 4x + 3}$$

الحل :



التاريخ :

اليوم :

مثال (10) ص 25 :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 6x^2 + 2x - 3}{x + 1}$$

الحل :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5 + 32}{x + 2}$$

الحل :



حاول أن تحل (10) ص 26

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^5 + x^3 + x + 22}{x - 2}$$

الحل :



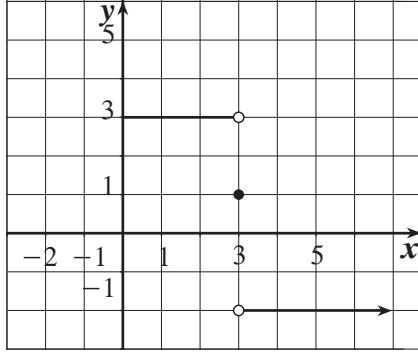
المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -2$ (في الرسم البياني أدناه)

(a)

(b)



(2) $\lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^2 + 5y + 6}{y + 2} = 5$

(a)

(b)

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 + 8x^2}{3x^4 - 16x^2} = 0$

(a)

(b)

(4) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} = -2$

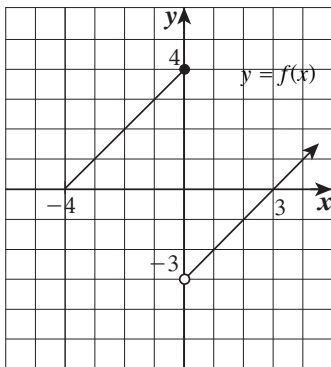
(a)

(b)

(5) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - |x| + 2) = 3$

(a)

(b)



في التمارين (6-14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) الشكل المقابل هو بيان دالة f .

العبارة الصحيحة في ما يلي هي:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -3$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 4$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$



(7) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 3x^2 - 2x - 17) =$

(a) 17

(b) -17

(c) 9

(d) -9

(8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} =$

(a) 1

(b) 0

(c) $\frac{1}{2}$

(d) غير موجودة

(9) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 5x + 2} =$

(a) 1

(b) 0

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{3}$

(10) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} =$

(a) -1

(b) 1

(c) $\frac{1}{2}$

(d) 0

(11) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x^2-4} =$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{4}$

(12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x} =$

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{4}$

(13) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2} =$

(a) 12

(b) -12

(c) 4

(d) -4

(14) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^3 + 9x^2 + 9x}{x+3} =$

(a) 9

(b) 0

(c) -3

(d) -9



نهايات تشتمل على $-\infty$, ∞ و صيغ غير معينة

بند 1-2

تعريف (3)

لتكن f دالة معرفة في الفترة (a, ∞) فإن:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى ∞ .

تعريف (4)

لتكن f دالة معرفة في الفترة $(-\infty, a)$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى $-\infty$.

كثيرة حدود (حدودية)

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

طريقة الحل: نأخذ (متغير أعلى أس) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty}$ فيكون الناتج $\left. \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix} \right\}$

نظرية (7)

لتكن $f(x) = \frac{1}{x}$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

نظرية (8)

لتكن $f(x) = \frac{k}{x^n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $k \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{x^n} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$



حاول أن تحل (1) ص 30

أوجد:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x^2+9}$$



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{|x|-3} = 2$$

(a)

(b)

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|-3}{x+3} = -1$$

(a)

(b)

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x}{2x^2-5x-3} = -\infty$$

(a)

(b)

$$(5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|2x-3|} = \frac{1}{2}$$

(a)

(b)

في التمارين (6-13)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|}{|x|+1} =$$

(a) 0

(b) 1

(c) ∞ (d) $\frac{1}{2}$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+3} =$$

(a) ∞ (b) $-\infty$

(c) 1

(d) 0

$$(8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} + 1 \right) \left(\frac{5x^2-1}{x^2} \right) =$$

(a) 0

(b) 5

(c) 1

(d) $-\infty$

$$(9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-|x+3|}{2x} =$$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) ∞ (d) $-\infty$ 

صينغ غير معينة

بند 1-3

لتكن: $f(x) = ax^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $a \in \mathbb{R}^*$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : a > 0 \\ -\infty & : a < 0 \end{cases}$$

(1) إذا كان n عدد زوجي فإن:(2) إذا كان n عدد فردي فإن:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : a > 0 \\ -\infty & : a < 0 \end{cases} , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = \begin{cases} -\infty & : a > 0 \\ \infty & : a < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 , \quad a_n \in \mathbb{R}^*$$

ملاحظة: إذا كانت

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

فإن:

مثال (1) ص: 37 - :

أوجد:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - 3x + 1) =$$

حاول أن تحل (1) ص 38

أوجد:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^2 + 2x - 4) =$$

نظرية (11)

إذا كانت كل من f , g دالة حدودية حيث:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$$

a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m} : n = m$

b $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 : n < m$

مثال وحاول أن تحل (2) ص: 39 - :

أوجد إن أمكن:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^4 - x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 3x^3}{2x^3 + 5} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 + 5x + 1}{6x^2 - x + 1} =$$



مثال (3) ص : 39

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + 3}{2x + 5} = 3 \quad \text{إذا كانت:}$$

أوجد قيمة كل من الثابتين a, b

الحل:

حاول أن تحل (3) ص 40

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2}{ax^2 + bx - 3} = 1 \quad \text{إذا كانت: } a, b \text{ أوجد قيمة كل من الثابتين}$$

الحل:



التاريخ :

اليوم :

مثال (4) ص : 40

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$$

الحل :



حاول أن تحل (4) ص 41

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 - x}}{x + 1}$$

الحل :



التاريخ :

اليوم :

حاول أن تحل (4) ص 41

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 5}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

الحل :



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 7x - 8) = \infty$

(a)

(b)

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 - 2x + 1) = -\infty$

(a)

(b)

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + x - 3) = -\infty$

(a)

(b)

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x + 4}{3x^2 - 5x + 1} = 0$

(a)

(b)

(5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 + 7x^2 - 1}{2x^3 - 4} = 2$

(a)

(b)

(6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 7}{\sqrt{4x^2 - 8x + 5}} = \frac{3}{2}$

(a)

(b)

في التمارين (7-12)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 5}{2x^4 + x^2 - 2} =$

(a) ∞ (b) $\frac{1}{2}$

(c) 0

(d) $-\infty$

(8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 5}{\sqrt{x^2 + 1}} =$

(a) ∞ (b) $-\infty$

(c) 3

(d) -3

(9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x + 3}{\sqrt{9x^2 - 2x + 4}} =$

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $-\frac{5}{3}$ (c) $\frac{5}{9}$ (d) $-\frac{5}{9}$

(10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 1}{\sqrt{4x^2 - x + 3}} =$

(a) -1

(b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$

(d) 1

(11) إذا كان: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{mx^2 + nx + 4}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}} = -2$ فإن قيم m, n هي:

(a)

 $m = 0, n = -2$

(b)

 $m = 0, n = 2$

(c)

 $m = 1, n = -1$

(d)

 $m = 1, n = 1$

(12) إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 3}}{mx^2 + nx - 4} = 1$ فإن قيم m, n هي:

(a)

 $m = 0, n = -2$

(b)

 $m = 0, n = 2$

(c)

 $m = 0, n = 4$

(d)

 $m = 0, n = -4$ 

نهايات بعض الدوال المثلثية

بند 4-1

نظرية (12)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \text{حيث } x \text{ بالراديان}$$

نتيجة (1)

إذا كان a, b عددين حقيقيين، $a \neq 0, b \neq 0$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$$

وبتطبيق تعريف النهاية على الدوال المثلثية الأساسية نجد أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0$$

ويمكننا تطبيق نظريات النهايات من البنود السابقة في إيجاد نهايات الدوال المثلثية. يمكننا استنتاج أن: $\lim_{x \rightarrow 0} \cos ax = 1, a \in R$

مثال (1) ص: 43 -

أوجد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$$

الحل:

أوجد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{\cos x}$$

الحل:



مثال (1) ص : 43 :-

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$$

الحل :

حاول أن تحل (1) ص : 43 :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x^2 - x}$$

الحل :



حاول أن تحل (1) ص 43 :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x \cos x}$$

الحل :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1}$$

الحل :



التاريخ :

اليوم :

مثال (2) ص 44 :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

الحل :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan x - 3 \sin x}{4x}$$

الحل :



حاول أن تحل (2) ص 44

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \tan x}$$

الحل :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan x - x^2 \cos x}{5x}$$

الحل :



نتيجة (2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

نتيجة (3)

إذا كان $a, b \in \mathbb{R}^*$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

مثال (3) ص 44 :

أوجد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + \sin x}{x}$$

الحل:

أوجد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \tan x - 2x \cos x}{3x}$$

الحل:



التاريخ :

اليوم :

حاول أن تحل (3) ص 45 :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - x^2}{3x^2}$$

الحل :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x + 3x \cos 4x}{5x}$$

الحل :



كُرّاسة التمارين

أوجد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$$

الحل:

أوجد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\tan 2x}$$

الحل:



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = 0$$

(a)

(b)

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin 2x}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}$$

(a)

(b)

في التمارين (6-10)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin x} =$$

(a) 2

(b) -2

(c) 0

(d) ∞

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 5\sin^2 x}{3x^2} =$$

(a) 3

(b) 9

(c) 0

(d) ∞ 

نظرية (14): خواص الدوال المتصلة

Properties of Continuous Functions

إذا كانت f, g دالتين متصلتين عند $x = c$ ، فإن الدوال التالية هي دوال متصلة عند $x = c$

- | | | |
|---|----------------------------------|----------------|
| 1 | $f + g$ | الجمع: |
| 2 | $f - g$ | الطرح: |
| 3 | $k \cdot f$, $k \in \mathbb{R}$ | الضرب في ثابت: |
| 4 | $f \cdot g$ | الضرب: |
| 5 | $\frac{f}{g}$, $g(c) \neq 0$ | القسمة: |

Continuous Functions

دوال متصلة

- 1 الدالة $f: f(x) = k$ حيث k ثابت متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
- 2 الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
- 3 الدالة الحدودية النسبية $\frac{f}{g}$ متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.
- 4 الدالة $f: f(x) = |x|$ متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
- 5 الدوال المثلثية الأساسية متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.

مثال (1) ص 55

ابحث اتصال الدالة $f: f(x) = x^2 + |x|$ عند $x = -1$

الحل:



مثال (1) ص 55

ابحث اتصال الدالة $f : f(x) = \sin x - \cos x$ عند $x = \frac{\pi}{2}$

الحل:

حاول أن تحل (1) ص 55 :

ابحث اتصال الدالة $f : f(x) = x^2 - 4x + 3 - |x|$ عند $x = 3$

الحل:



حاول أن تحل (1) ص 55 :

ابحث اتصال الدالة f : $f(x) = \frac{\tan x}{x+1}$ عند $x = \frac{\pi}{4}$

الحل:

مثال (2) ص 55 :

ابحث اتصال الدالة f : $f(x) = \frac{x-2}{x^2+9} - \frac{1}{x}$ عند $x = 3$

الحل:



اتصال الدوال الجذرية عند نقطة

نظرية (15)

- a) الدالة الجذرية $y = \sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x = c : c \in \mathbb{R}^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب ،
 b) إذا كانت g دالة متصلة عند $x = c$ وكانت $g(c) > 0$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من 1 ،
 فإن الدالة : $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ متصلة عند $x = c$

مثال (3) ص 56

ابحث اتصال الدالة $f : f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$ عند $x = 1$

الحل:

ابحث اتصال الدالة f عند $x = -1$

$$f(x) = \sqrt{x+3}$$

الحل:



حاول أن تحل (3) ص 56

ابحث اتصال الدالة f عند $x = -2$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

الحل:



الدالة المركبة

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

الدالة المركبة $(g \circ f)$ وتقرأ g بعد f

إذا كانت كل من f, g دالتين حقيقيتين وكان مدى الدالة f مجموعة جزئية من مجال الدالة g فإنه يتعين دالة مركبة h :

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

حاول أن تحل (4) ص 58 :

إذا كانت f, g معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^2 + 3$

أوجد:

(a) $(g \circ f)(x)$

(b) $(g \circ f)(-1)$

(c) $(f \circ g)(x)$

(d) $(f \circ g)(-1)$

الحل:



مثال (5) ص : 58 -

لتكن : $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^4 + 2$ أوجد :

$$(g \circ f)(0) \quad (4) \quad (g \circ f)(x) \quad (3) \quad (f \circ g)(0) \quad (2) \quad (f \circ g)(x) \quad (1)$$

الحل :

حاول أن تحل (5) ص : 59 -

لتكن : $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $g(x) = \frac{3}{x^2+4}$ أوجد : $(g \circ f)(\sqrt{3})$

الحل :



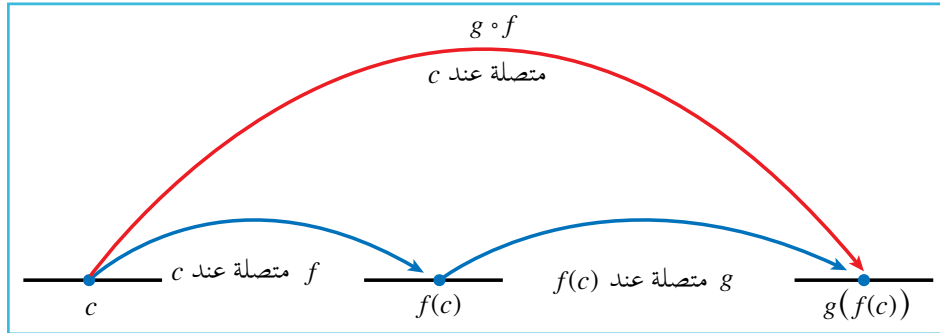
اتصال الدوال المركبة عند نقطة

نظرية (16): اتصال الدوال المركبة

إذا كانت f متصلة عند c ، و g متصلة عند $f(c)$ فإن الدالة المركبة $g \circ f$ متصلة عند c .

أي أن نهاية $g(f(x))$ عندما $x \rightarrow c$ هي $g(f(c))$ بمعنى

$$\lim_{x \rightarrow c} g(f(x)) = g(f(c))$$



مثال (6) ص: 59 :-

لتكن: $f(x) = x^2 + 5$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

الحل:



حاول أن تحل (6) ص 59

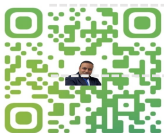
لتكن: $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$, $g(x) = 2x + 3$ ابحث اتصال الدالة $f \circ g$ عند $x = 1$

الحل:

مثال (7) ص: 60 -

لتكن: $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

الحل:



حاول أن تحل (7) ص 60

لتكن: $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

الحل:

لتكن: $f(x) = |\sqrt{x} - 3|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 4$

الحل:



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(a) (b)

(1) الدالة $f: f(x) = x^2 + |x-1|$ متصلة عند $x = 3$

(a) (b)

(2) الدالة $f: f(x) = \frac{2x+5}{x+2} - \frac{2}{x}$ متصلة عند $x = 0$

(a) (b)

(3) الدالة $f: f(x) = \frac{2x-2}{|x|-1}$ متصلة عند $x = 0$

(a) (b)

(4) الدالة $f: f(x) = \frac{\sqrt[3]{3x-1}}{x^2}$ متصلة عند $x = 3$

(a) (b)

(5) الدالة $f: f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 4}$ متصلة عند $x = 2$

في التمارين (6-12)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) نقاط انفصال الدالة $f: f(x) = \frac{-x+2}{x^2+9}$ عند:(a) $x = 3$ (b) $x = -3$ (c) $x = 2$

(d) لا يوجد نقاط انفصال

(7) نقاط انفصال الدالة $f: f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-1}$ عند x تساوي:

(a) 1 , -1

(b) 2 , -2

(c) 1 , 2

(d) -1 , -2

(8) لتكن الدالة $f: f(x) = x^2 + 3, x \neq 0$ ، الدالة $g: g(x) = \frac{x}{x-3}$ ، فإن $(g \circ f)(x)$ تساوي:(a) $\frac{4x^2 - 18x + 27}{(x-3)^2}$ (b) $\frac{x^2}{x^2-3}$ (c) $\frac{x^2+3}{x^2}$ (d) $\frac{x^2}{x^2+3}$ (9) لتكن الدالة $f: f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-3}}$ ، الدالة $g: g(x) = x^2 + 3, x \neq 0$ ، فإن $(f \circ g)(x)$ تساوي:(a) $\frac{x^2}{x-3} + 3$ (b) $\frac{x}{\sqrt{x-3}} + 3$ (c) $\frac{-(x^2+3)}{x}$ (d) $\frac{x^2+3}{|x|}$ (10) لتكن الدالة $f: f(x) = \sqrt{x^2+7}$ ، $g: g(x) = x^2 - 3$ ، فإن $(f \circ g)(0)$ يساوي:

(a) 4

(b) -4

(c) 1

(d) -1

(11) إذا كانت g دالة متصلة عند $x = 2$ فإن الدالة المتصلة عند $x = 2$ فيما يلي هي $f(x)$ تساوي:(a) $\sqrt{g(x)}$ (b) $\frac{1}{g(x)}$ (c) $\frac{g(x)}{x-2}$ (d) $|g(x)|$ (12) إذا كانت الدالة $f: f(x) = \sqrt{x^2 - a}$ متصلة عند $x = 3$ فإن a يمكن أن تساوي:

(a) 4

(b) 9

(c) 16

(d) 25

