لاتغني عن الكتاب المدرسي

الوحدة السابعة

طرائق التكامل والمعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى

7-1 مراجعة الصيغ وطرائق التكامل.

7-2 التكامل بالأجزاء.

7-3 طرائق تكامل الدوال المثلثية.

7-4 تكامل الدوال النسبية باستخدام الكسور الجزئية.

7-6 النمذجة باستخدام المعادلات التفاضلية.

7-7 المعادلات التفاضلية القابلة للفصل.

إعداد الاستاذ/ علي عبدالله

الفصل الدراسي الثالث 2022 / 2023

احصل على 100٪ في الرياضيات الفصل 3

L 7.1 مراجعة الصيغ وطرائق التكامل

IMPORTANAT RULES

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad for \quad n \neq -1 \; (power\ rule)$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c \qquad \int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c$$

$$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c \qquad \int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int e^{-x} dx = -e^{-x} + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{1-x^2}} dx = \sec^{-1} x + c \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

يمكن استخدام تعميم بعض قواعد التكامل مباشرة

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c \qquad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$$

$$\int (ax+b)^n\, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a\,(n+1)} + c$$

$$\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$$

بالمثل مع باقي النسب المثلثية

$$\int f'(x)\, e^{f(x)}\, dx = e^{f(x)} + c \qquad \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a}\, e^{ax+b} + c$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \qquad \int f'(x)\, a^{f(x)} dx = \frac{1}{\ln a}\, a^{f(x)} + c$$

$$\int \frac{b}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = b\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad \int \frac{b}{a^2+x^2} dx = \frac{b}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{b}{x\sqrt{x^2-a^2}} dx = \frac{b}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

1) أوجد قيمة التكامل: $\int \sin ax \, dx$ من أجل $a \neq 0$

2) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$ من أجل $a \neq 0$

$\int$

3) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{1}{16 + x^2} dx$

---

4) أوجد قيمة التكامل: أ) $\int (3x^2 - 2)^2 \, dx$ ب) $\int (3x - 2)^3 \, dx$

5) أوجد قيمة كل تكامل:

(a $\int \frac{4}{x^2+9}dx$

(b $\int \frac{4x}{x^2+9}dx$

(c $\int \frac{4x^2}{x^2+9}dx$

6) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{4x^2+27}{x^2+9}dx$

7) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$

الحل الأول:

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1}{1+e^x}\,dx$$

الحل الثاني:

$$\int \frac{1}{1+e^x}\cdot\frac{\qquad}{\qquad}\,dx$$

الاستاذ/ علي عبد الله

طريقة اكمال المربع

إذا كان $f(x)=x^2+bx+c$ فإن $f(x)=x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2+c-\left(\frac{b}{2}\right)^2$

من ذلك نحصل على $f(x)=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+d$ حيث $d=c-\left(\frac{b}{2}\right)^2$

$$\boxed{f(x)=x^2\pm bx+c \quad\Rightarrow\quad f(x)=\left(x\pm\frac{b}{2}\right)^2+c-\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

اكتب كل مما يلي في صورة مربع كامل:

(a $f(x)=x^2+4x$

(b $f(x)=x^2-6x+2$

(c $f(x)=3-2x-x^2$

(d $f(x)=2x^2-4x-3$

(e $f(x)=3x^2-2x+4$

0503050917

8) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$

---

9) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{1}{x^2 - 6x + 13} dx$

10) أوجد قيمة التكامل: أ) $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$ ب) $\int \frac{x+1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$

---

11) أوجد قيمة التكامل: أ) $\int_{-2}^{-1} \frac{\ln x^2}{x}\,dx$ ب) $\int_{1}^{3} e^{2\ln x}\,dx$

12) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10}\,dx$

$$\int \frac{b}{a^2+(x\pm k)^2}\,dx = \frac{b}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x\pm k}{a}\right)+c$$

$$\int \frac{b}{\sqrt{a^2-(x\pm k)^2}}\,dx = b\sin^{-1}\left(\frac{x\pm k}{a}\right)+c$$

13) أوجد قيمة التكامل: أ) $\int_3^4 x\sqrt{x-3}\,dx$ ب) $\int_0^1 x(x-3)^2\,dx$

0503050917

14) إذا كان $\int \cot x \ [\ln(\sin x)] \, dx = a \, [\ln(\sin x)]^2 + c$ أوجد قيمة a

15) إذا كان $\int \tan^2 2x \, dx = \frac{1}{a} \tan 2x - x + c$ أوجد قيمة a

16) إذا كان $\int \frac{6 \, x^2}{\sqrt{16 - x^6}} dx = b \sin^{-1}\left(\frac{x^3}{a}\right) + c$ أوجد قيمة كل من a و b

17) أوجد قيمة التكامل: أ) $\int \frac{2}{7e^{x}+4}dx$ ب) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}dx$

18) أوجد قيمة التكامل:
أ) $\int \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}d\theta$ ب) $\int \frac{1}{\cos\theta-1}d\theta$

19) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

20) أوجد قيمة التكامل: $\int_1^4 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\,dx$

21) أوجد قيمة التكامل: أ) $\int \frac{4}{5+2x+x^2}\,dx$ ب) $\int \frac{4x+4}{5+2x+x^2}\,dx$

22) أوجد قيمة التكامل: أ) $\int \frac{4t}{5+2t+t^2}\,dt$ ب) $\int \frac{t+1}{t^2+2t+4}\,dt$

23) أوجد قيمة التكامل: أ) $\int e^{3-2x}\,dx$ ب) $\int \frac{3}{e^{6x}}\,dx$

24) أوجد قيمة التكامل: أ) $\int \frac{4}{x^{1/3}(1+x^{2/3})}dx$ ب) $\int \frac{2}{x^{1/4}+x}dx$

25) أوجد قيمة التكامل: أ) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ ب) $\int \frac{\cos(1/x)}{x^2}dx$

26) أوجد قيمة التكامل: أ) $\int_0^{\pi} \cos x \; e^{\sin x}\, dx$ ب) $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \; e^{\tan x}\, dx$

27) أوجد قيمة التكامل: أ) $\int_{-\pi/4}^{0} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dt$ (b $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 t}\, dt$

27) أوجد قيمة التكامل: أ) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$ (b $\int \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$

27) أوجد قيمة التكامل: أ) $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$ (b $\int \frac{x^5}{1+x^6}\,dx$

28) أوجد قيمة التكامل: أ) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ (b $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

29) أوجد قيمة التكامل: أ) $\int_{-2}^{0} x\, e^{-x^2}\,dx$

تحري

30) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{x}}dx$

الاستاذ/ علي عبد الله

مهم

	التكامل		مثال
(1	$\int \cos(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	الزاوية هي دالة خطية	$\int \cos(2x+3)\,dx=\frac{1}{2}\sin(2x+3)+c$
(2	$\int \sin(ax+b)\,dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$		$\int \sin(4x-5)\,dx=\frac{-1}{4}\sin(4x-5)+c$
(3	$\int \sec(ax+b)\tan(ax+b)\,dx$ $=\frac{1}{a}\sec(ax+b)+c$		$\int \sec(2-3x)\tan(2-3x)\,dx$ $=-\frac{1}{3}\sec(2-3x)+c$
(4	$\int \csc(ax+b)\cot(ax+b)\,dx$ $=-\frac{1}{a}\csc(ax+b)+c$		$\int \csc(3x+2)\cot(3x+2)\,dx$ $=-\frac{1}{3}\csc(3x+2)+c$
(5	$\int e^{ax+b}\,dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}+c$	الأس دالة خطية فقط	$\int e^{3x+7}\,dx=\frac{1}{3}e^{3x+7}+c$
(6	$\int (ax+b)^n\,dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a\,(n+1)}+c$	دالة خطية داخل الأقواس	$\int (3-5x)^7\,dx=\frac{(3-5x)^8}{(-5)\,(8)}+c$

التدريب على الامتحان

30) اختر المشتقة العكسية الصحيحة:

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\int$

(a) $2\sqrt{x^2+1}+C$ (b) $\sqrt{x^2+1}+C$

(c) $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}+C$ (d) $\ln(x^2+1)+C$

2. $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{x^2+1}$ $\int$

(a) $\ln\sqrt{x^2+1}+C$ (b) $\frac{2x}{(x^2+1)^2}+C$ $\int 1$

(c) $\arctan x+C$ (d) $\ln(x^2+1)+C$

3. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2+1}$ $\int_1^1$

(a) $\ln\sqrt{x^2+1}+C$ (b) $\frac{2x}{(x^2+1)^2}+C$

(c) $\arctan x+C$ (d) $\ln(x^2+1)+C$

4. $\frac{dy}{dx}=x\cos(x^2+1)$ $\int$

(a) $2x\sin(x^2+1)+C$ (b) $-\frac{1}{2}\sin(x^2+1)+C$

(c) $\frac{1}{2}\sin(x^2+1)+C$ (d) $-2x\sin(x^2+1)+C$

https://t.me/Advanced2024 الأستاذ/ علي عبد الله

31) أوجد $\int_0^2 f(x)\,dx$ حيث $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+1} & x\le 1\\ \dfrac{x^2}{x^2+1} & x>1\end{cases}$

32) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{(\sin^{-1}x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

33) أوجد قيمة التكامل: أ) $\int \frac{3}{16+x^2}\,dx$ ب) $\int \frac{2}{4+4x^2}\,dx$

34. إذا كانت المُشتقة الثانية للدالة $y = f\ (x)$ هي $f''(x) = 6(x-1)$ ومنحنى الدالة يمر بالنقطة $(2,1)$ وعند هذه النقطة يكون المماس للمنحنى معادلته $y = 3x - 5$ ، فأوجد الدالة $f(x)$

L 7-1 مراجعة الصيغ وطرائق التكامل

أسئلة الاختيار من متعدد

(1 أوجد قيمة التكامل: $\int 2e^{\ln x}\,dx$

(A $x^2 + c$

(B $2e^x + c$

(C $\frac{2}{x} + c$

(D $\ln x^2 + c$

(2 أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{1+\tan^2 x}}\,dx$

(A $e^{\sin x} + c$

(B $-e^{\sin x} + c$

(C $e^{\cos x} + c$

(D $\ln(\sec x) + c$

(3 أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x} + x}\,dx$

(A $\ln\left(1 + \sqrt[4]{x}\right) + c$

(B $\frac{4}{3}\ln\left(1 + x^{3/4}\right) + c$

(C $\frac{3}{4}\ln\left(1 + x^{3/4}\right) + c$

(D $\ln\left(\sqrt[4]{x} + x\right) + c$

(4 إذا كان $\int_1^4 f(x)\,dx = 6$ ما قيمة $\int_1^4 f(5-x)\,dx$

(A 6

(B -6

(C 3

(D -1

5) إذا كان $\int_{30}^{100} f(x)\,dx = 10$ و $\int_{50}^{100} f(x)\,dx = A$ فإن $\int_{30}^{50} f(x)\,dx$

A) $A + 10$

B) $A - 10$

C) 0

D) $10 - A$

6) أوجد قيمة التكامل: $\int 3e^{2\ln x}\,dx$

A) $x^3 + c$

B) $3e^{2x} + c$

C) $\frac{3}{x} + c$

D) $\ln x^3 + c$

7) أوجد قيمة التكامل: $\int x^3 \cos(x^4)\ dx$

A) $\frac{1}{4}\sin(x^4) + c$

B) $-\frac{1}{4}\sin(x^4) + c$

C) $\frac{1}{4}x^4 + 4x^3\sin(x^4)$

D) $\frac{1}{5}\sin(x^5) + c$

8) أوجد قيمة التكامل: $\int_0^1 \sqrt{x}\,(x+1)\ dx$

A) 0

B) 1

C) $\frac{16}{15}$

D) $\frac{7}{5}$

https://t.me/Advanced2024 الأستاذ/ علي عبد الله

(9 أوجد قيمة التكامل: $\int \cos(4x)\ dx$

(A $-\sin(4x) + c$

(B $4\sin(4x) + c$

(C $\frac{\sin(4x)}{4} + c$

(D $-\frac{\sin(4x)}{4} + c$

(10 أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}}\ dx$

$\int$

(A $\sin^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + C$

(B $\sin^{-1}(x) + C$

(C $\frac{1}{5}\sin^{-1}(x) + C$

(D $\sqrt{25 - x^2} + C$

(11 أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3 + 1}}\ dx$

(A $2\sqrt{x^3 + 1} + C$

(B $\ln(x^3 + 1) + C$

(C $\sqrt{x^3 + 1} + C$

(D $\ln\left(\sqrt{x^3 + 1}\right) + C$

(12 أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\ dx$

(A $-\sin\left(\frac{1}{x}\right) + C$

(B $\sin\left(\frac{1}{x}\right) + C$

(C $-\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + C$

(D $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + C$

13) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{x}{4+x^4}\,dx$

$\int$

A) $\frac{1}{8}\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{2}\right)+C$

B) $\frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{2}\right)+C$

C) $\frac{1}{4}\tan^{-1}(x^2)+C$

D) $\frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2)+C$

14) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{x^3}{4+x^4}\,dx$

A) $\frac{1}{4}\ln(x^4+4)+c$

B) $\frac{1}{4}\ln(x^4+4)+\frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{2}\right)+c$

C) $4\ln(x^4+4)+c$

D) $\frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{2}\right)+c$

15) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-x}}\,dx$

$\int$

A) $\sin^{-1}(2x+1)+c$

B) $2\sin^{-1}(x+1)+c$

C) $\frac{1}{4}\sin^{-1}(2x+1)+c$

D) $\sin^{-1}(1-x)+c$

16) أوجد قيمة التكامل: $\int e^{x+e^x}\,dx$

A) $\frac{e^{x+e^x}}{1+e^x}+c$

B) $(1+e^x)e^{x+e^x}+c$

C) $e^{e^x}+c$

D) $e^{x+e^x}+c$

17) أوجد قيمة التكامل: $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

A) $\frac{4-\pi}{4}$

B) $\ln 2$

C) $\frac{4+\pi}{4}$

D) $\frac{1}{2}\ln 2$

18) أوجد: $\int_0^5 f(x)\,dx$ حيث $f(x)=\begin{cases}2x-3 & , \ x\geq 3\\ 3x^2+1 & , \ x<3\end{cases}$

A) 40

B) 10

C) 30

D) 120

19) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x-4}\,dx$

A) $\frac{1}{2}\ln|\sin^2 x-4|+c$

B) $\ln|\sin^2 x-4|+c$

C) $2\ln|\sin^2 x-4|+c$

D) $\frac{1}{2}\ln|\sin^2 x|+c$

20) أوجد قيمة التكامل $\int \sqrt{2-7x}\,dx$

A) $-\frac{2}{21}(2-7x)^{3/2}+C$

B) $-\frac{5}{14}(2-7x)^{5/2}+C$

C) $\frac{2}{3}(2-7x)^{3/2}+C$

D) $\frac{1}{7}(2-7x)^{3/2}+C$

21) أوجد قيمة التكامل: $\int (2\sin^2 5x + 1)\ dx$

A) $2x + \frac{1}{10}\sin 10x + C$

B) $2x - \frac{1}{10}\sin 10x + C$

C) $2x - \sin 10x + C$

D) $\frac{x}{2} - \frac{1}{10}\sin 10x + C$

22) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{6\cos x}{11\cos^2 x - 11}\ dx$

A) $-\frac{6}{11}\csc x + C$

B) $\frac{6}{11}\csc x + C$

C) $-\frac{6}{11}\cot x \csc x + C$

D) $\frac{6}{11}\tan x + C$

23) أوجد قيمة التكامل: $\int \sin 4t \sin 2t\ dt$

يجب أن تتذكر ما يلي:

$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$

A) $\frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{12}\sin 6t + C$

B) $\frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{12}\cos 6t + C$

C) $\frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{12}\sin 6t + C$

D) $\frac{1}{4}\sin 4t - \frac{1}{12}\sin 2t + C$

24) أوجد قيمة التكامل: $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{49 + e^{2x}} dx$

A) $\frac{1}{7}\left[\tan^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)\right]$

B) $\frac{1}{7}\left[\tan^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)\right]$

C) $\tan^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

D) $\tan^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

يجب أن تتذكر ما يلي:

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

(25 أوجد قيمة التكامل: $\int \sin 7x\cos 5x\ dt$

(A $-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{24}\cos 12x+C$

(B $\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{24}\sin 12x+C$

(C $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{24}\sin 7x+C$

(D $-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{12}\cos 14x+C$

(26 أوجد قيمة التكامل: $\int_0^1\sqrt{x^2-2x+1}\ dx$

(A $-\frac{1}{2}$

(B -1

(C $\frac{1}{2}$

(D 1

(27 أوجد قيمة التكامل: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x\ \ dx$

(A $\ln\sqrt{2}$

(B $\ln\frac{\pi}{4}$

(C $\ln\sqrt{3}$

(D $\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(28 إذا كان $f(x)=\begin{cases}x+1 & ,\ x<0\\ \cos\pi x & ,\ x\geq 0\end{cases}$ ، أوجد قيمة $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$

(A $\frac{1}{2}$

(B $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$

(C $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}$

(D $-\frac{1}{2}$

29) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx$

A) $\ln(1+x)+c$

B) $\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+c$

C) $2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+c$

D) $\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+c$

30) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$

A) $\sin^{-1} e^x + c$

B) $\sin^{-1} e^{2x} + c$

C) $\sqrt{1-e^{2x}} + c$

D) $2\sqrt{1-e^{2x}} + c$

31) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x}\,dx$

A) $\ln(e^x+\sin x)+c$

B) $\ln(e^x-\sin x)+c$

C) $\ln(e^x+\cos x)+c$

D) $\ln(e^x-\cos x)+c$

32) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{2}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx$

$\int \quad f'($

A) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)+c$

B) $2\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)+c$

C) $2\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{4}\right)+c$

D) $-2\sqrt{4+2x-x^2}+c$

(33 أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{\tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$

(A $\ln|\sec x + \tan x| - x + c$

(B $\sec x + \tan x + x + c$

(C $\sec x + \tan x - x + c$

(D $\sec x - \tan x + x + c$

(34 أوجد قيمة التكامل: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x}\,dx$

(A 1

(B $\sqrt{2} - 1$

(C $\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

(D 2

(35 أوجد قيمة التكامل: $\int \sec x\,dx$

(A $\ln|\sec x + \tan x| + c$

(B $\sec x \tan x + c$

(C $\ln|\sec x - \tan x| + c$

(D $\frac{1}{2}\sec^2 x + c$

(36 أوجد قيمة التكامل: $\int \csc x\,dx$

اختر إجابتين

(A $\ln|\csc x + \cot x| + c$

(B $\ln|\csc x - \cot x| + c$

(C $-\ln|\csc x + \cot x| + c$

(D $-\ln|\csc x - \cot x| + c$

(37 أوجد قيمة التكامل: $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x - 1}\,dx$

(A $\ln|\csc x + \cot x| + c$

(B $\csc x + \cot x + c$

(C $-\ln|\csc x + \cot x| + c$

(D $\csc x - \cot x + c$

(38 أوجد قيمة التكامل: $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x + 1}\,dx$

(A $\ln|\csc x + \cot x| + c$

(B $\csc x + \cot x + c$

(C $-\ln|\csc x + \cot x| + c$

(D $\csc x - \cot x + c$

(39 أوجد قيمة التكامل: $\displaystyle\int \frac{3}{4x^2 + 4}\,dx$

(A $3\tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + c$

(B $\frac{3}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + c$

(C $\frac{3}{4}\tan^{-1} x + c$

(D $\frac{3}{4}\tan^{-1} 2x + c$

(40 أوجد قيمة التكامل: $\displaystyle\int \frac{x - 1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}\,dx$

$\int$

(A $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$

(B $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$

(C $-\sqrt{3 + 2x - x^2} + c$

(D $-2\sqrt{3 + 2x - x^2} + c$

(41 أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{2}{x^2+4x+8}\,dx$

$\int$

(A $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}x+1\right)+c$

(B $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}x+1\right)+c$

(C $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}x+1\right)+c$

(D $\cot^{-1}\left(\frac{1}{2}x+1\right)+c$

(42 أوجد قيمة التكامل: $\int m\sin(mx)\,dx$

(A $\cos(mx)+c$

(B $-\cos(mx)+c$

(C $\frac{1}{m}\cos(mx)+c$

(D $-m\cos(mx)+c$

(43 إذا كان $\int \frac{6x^2}{\sqrt{16-x^6}}\,dx = b\sin^{-1}\left(\frac{x^3}{a}\right)+c$ أوجد قيمة كل من a و b

(A $a=6 \quad , \quad b=4$

(B $a=2 \quad , \quad b=6$

(C $a=4 \quad , \quad b=2$

(D $a=4 \quad , \quad b=6$

(44 إذا كان $\int \cot x\,[\ln(\sin x)]\,dx = a\,[\ln(\sin x)]^2+c$ أوجد قيمة a

(A $a=\frac{1}{2}$

(B $a=2$

(C $a=\frac{1}{4}$

(D $a=4$

45) أوجد قيمة التكامل: $\int_3^4 x\sqrt{x-3}\,dx$

A) $\frac{7}{5}$

B) 12

C) $\frac{12}{5}$

D) $\frac{4}{3}$

46) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$

A) $\ln(1+e^x)+c$

B) $-\ln(1+e^x)+c$

C) $x+\ln(1+e^x)+c$

D) $x-\ln(1+e^x)+c$

47) إذا كان $\int \frac{(\sin^{-1}x)^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{4}(\sin^{-1}x)^4 + c$ فإن:

A) $n=3$

B) $n=4$

C) $n=5$

D) $n=2$

(48 إذا كان $\int_0^a \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}\,dx = \ln 2$ فإن:

(A $a = \frac{\pi}{3}$

(B $a = \frac{\pi}{4}$

(C $a = \frac{\pi}{5}$

(D $a = \frac{\pi}{2}$

(49 أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{e^{-x}(1-x)}{\sin^2(xe^{-x})}\,dx$

(A $\cot(xe^{-x}) + c$

(B $-\cot(xe^{-x}) + c$

(C $-\cot(xe^{x}) + c$

(D $-\cos^2(xe^{-x}) + c$

(50 أوجد قيمة التكامل: $\int_1^2 \frac{2x+2}{2x^2+x-1}\,dx$

(A $\ln 3$

(B $\ln 2$

(C $2\ln 2$

(D $\ln 2 - \ln 3$

(51 أوجد قيمة التكامل: $\int_{-1}^{2} \left(\frac{1}{3-x} + \frac{1}{x+2}\right) dx$

(A $2\ln 4$

(B $2\ln 2$

(C $4\ln 4$

(D $4\ln 1$

(52 أوجد قيمة التكامل: $\int e^x \cos(e^x+1)\ dx$

(A $\sin(e^x+1)+c$

(B $\sin e^x + e^x + c$

(C $\cos e^x + e^x + c$

(D $\cos(e^x+1)+c$

(53 أوجد قيمة التكامل: $\int e^{x^2+\ln x}\,dx$

(A $e^{x^2}+c$

(B $\frac{1}{2}e^{x^2}+c$

(C $e^{x^2}+\ln x+c$

(D $2e^{x^2}+c$

(54 أوجد قيمة التكامل: $\int 2^{x^2} x\,dx$

(A $2^{x^2}+c$

(B $\frac{1}{\ln 2}2^{x^2}+c$

(C $\frac{1}{\ln 4}2^{x^2}+c$

(D $\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)e^{x^2}+c$

(55 أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}dx$

(A $x+\cos x+c$

(B $x-\cos x+c$

(C $x-\sin x+c$

(D $x+\sin x+c$

56) أوجد قيمة التكامل: $\int 3\sqrt{\tan x}\sec^2 x\,dx$

A) $\tan^{\frac{3}{2}} x + c$

B) $\frac{2}{3}\tan^{\frac{3}{2}} x + c$

C) $\frac{9}{2}\tan^{\frac{3}{2}} x + c$

D) $2\tan^{\frac{3}{2}} x + c$

57) إذا كان $\int_1^5 x\sqrt{3x+2}\,dx = n\int_5^{17}\sqrt{u}\,(u-2)\,dx$ فإن قيمة n تساوي

A) 9

B) $\frac{1}{9}$

C) 1

D) $\frac{1}{3}$

58) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{x+1}{\sqrt{3-x^2-2x}}\,dx$

$\int f'($

A) $-\sqrt{3-x^2-2x}+c$

B) $-\frac{1}{2}\sqrt{3-x^2-2x}$

C) $\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$

D) $-\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$

(59 أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

(A $2e^{\sqrt{x}} + c$

(B $e^{\sqrt{x}} + c$

(C $2\sqrt{x} + c$

(D $\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}} + c$

(60 أوجد قيمة التكامل: $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\,dx$

(A 16π

(B 8π

(C 4π

(D 2π

(61 أوجد قيمة التكامل: $\int x^2 \cos x^3\,dx$

(A $\frac{1}{3}\sin x^3 + c$

(B $\frac{1}{3}x^3 \cos x^3 + c$

(C $\sin x^3 + c$

(D $-\frac{1}{3}x^3 \sin x^3 + c$

(62 أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

(A $2\cos\sqrt{x}+c$

(B $-2\cos\sqrt{x}+c$

(C $\cos\sqrt{x}+c$

(D $\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}+c$

(63 أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{\cos(3/x)}{x^2}\,dx$

(A $-2\sin\left(\frac{3}{x}\right)+c$

(B $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{3}{x}\right)+c$

(C $-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{3}{x}\right)+c$

(D $\frac{1}{2x}\sin\left(\frac{3}{x}\right)+c$

(64 أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{3x}{(1+x^2)^3}\,dx$

(A $-\frac{3}{4(1+x^2)^2}+c$

(B $-\frac{2}{3(1+x^2)^2}+c$

(C $\frac{3}{4(1+x^2)^2}+c$

(D $\frac{3}{2}\ln|(1+x^2)^3|+c$

(65 أوجد قيمة n إذا كان: $\int \frac{x^2}{1+x^n}dx = \frac{1}{3}\tan^{-1}x^3 + c$ حيث $n \neq 0$

(A $n = 3$

(B $n = 4$

(C $n = 5$

(D $n = 6$

(66 أوجد قيمة a إذا كان: $\int \frac{\ln x}{ax}dx = \frac{1}{8}(\ln x)^2 + c$ حيث $a \neq 0$

(A $n = 2$

(B $n = 4$

(C $n = 6$

(D $n = 8$

(67 أوجد قيمة التكامل: $\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$

(A $\frac{2}{7}(x-1)^7 + \frac{4}{5}(x-1)^5 + \frac{2}{3}(x-1)^3 + c$

(B $\frac{2}{7}\sqrt{(x-1)^7} + \frac{4}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + c$

(C $\frac{7}{2}\sqrt{(x-1)^7} + \frac{5}{4}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{3}{2}\sqrt{(x-1)^3} + c$

(D $\frac{2}{7}\sqrt{(x-1)} + \frac{4}{5}\sqrt{(x-1)} + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)} + c$

(68 أوجد قيمة التكامل: $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$

(A $\frac{1}{5}(x^2-1)^5+\frac{1}{3}(x^2-1)^3+c$

(B $\frac{1}{5}\sqrt{(x^2-1)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}+c$

(C $\sqrt{(x^2-1)^5}+\sqrt{(x^2-1)^3}+c$

(D $\frac{1}{5}\sqrt{(x^2-1)}+\frac{1}{3}\sqrt{(x-1)}+c$

(69 أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{4x^3-1}{x^4-x}\,dx$

(A $\ln|x^4-x|+c$

(B $\ln\left|\frac{4x^3-1}{x^4-x}\right|+c$

(C $\ln\left|\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^2\right|+c$

(D $\ln|x^4-x|-\ln|x|+c$

(70 أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$

(A $\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)+c$

(B $\cos^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)+c$

(C $\sec^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)+c$

(D $\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{2}\right)+c$

71) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

A) $e^{2x} + \ln(1+e^x) + C$

B) $e^{2x} - \ln(1+e^x) + C$

C) $2e^{2x} - \ln(1+e^x) + C$

D) $e^{x} - \ln(1+e^x) + C$

72) أوجد قيمة التكامل: $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx$

A) $\frac{20}{3}$

B) $\frac{18}{5}$

C) $\frac{16}{3}$

D) $\frac{22}{3}$

L 7-1 مراجعة الصيغ وطرائق التكامل

مفاتيح الإجابة

Q	⌋ ∵←	Q	⌋ ∵←	Q	⌋ ∵←	Q	⌋ ∵←
1)	A	2)	A	3)	B	4)	A
5)	D	6)	A	7)	A	8)	C
9)	C	10)	A	11)	A	12)	A
13)	A	14)	A	15)	A	16)	C
17)	A	18)	A	19)	A	20)	A
21)	B	22)	B	23)	C	24)	A
25)	A	26)	C	27)	A	28)	A
29)	B	30)	A	31)	A	32)	B
33)	C	34)	A	35)	A	36)	∩. ∪
37)	B	38)	D	39)	C	40)	C
41)	B	42)	B	43)	D	44)	A
45)	C	46)	D	47)	A	48)	B
49)	B	50)	A	51)	A	52)	A
53)	A	54)	C	55)	A	56)	D
57)	B	58)	A	59)	A	60)	C
61)	A	62)	B	63)	C	64)	A
65)	D	66)	B	67)	B	68)	B
69)	A	70)	A	71)	D	72)	C

L 7.2 التكامل بالأجزاء

في هذه المرحلة، ستكون قد أدركت أن هناك العديد من التكاملات التي لا يمكن ايجادها باستخدام الصيغ الأساسية أو التكامل عن طريق التعويض. على سبيل المثال،

$$\int x\sin x\,dx$$

لا يمكن ايجاد قيمته بما تعرفه حاليا.

لقد لاحظنا أن كل قاعدة اشتقاق تؤدي إلى قاعدة تكامل مقابلة. لذلك، بالنسبة لقاعدة الضرب:

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

بتكامل طرفي هذه المعادلة، نحصل على:

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)]\,dx = \int f'(x)\cdot g(x)\,dx + \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

$$f(x)\cdot g(x) = \int f'(x)\cdot g(x)\,dx + \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

وبتجاهل ثابت التكامل، فإن التكامل الموجود على الجانب الأيسر هو ببساطة $f(x)\cdot g(x)$.

ويمكن كتابتها في الصورة:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

هذه القاعدة تسمى التكامل بالأجزاء. باختصار، تتيح لنا هذه القاعدة الجديدة استبدال تكامل معطى بتكامل أسهل.

أولا، عادة ما يكون من الملائم كتابة هذا باستخدام الترميز $u = f(x)$ و $v = g(x)$

إذن $du = f'(x)\,dx$ و $dv = g'(x)\,dx$

أن التكامل بواسطة خوارزمية التكامل بالأجزاء يصبح:

$$\boxed{\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du}$$

1) أوجد قيمة التكامل: $\int x\sin x\,dx$

التكامل بالأجزاء

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$

اختر u بهذا الترتيب: **LIATE**

① **L**ogarithmic الدوال اللوغاريتمية
② **I** [illegible] الدوال المثلثية العكسية
③ **A** [illegible] (**P**olynomial) كثيرات الحدود
④ **T**rigonometric الدوال المثلثية
⑤ **E**xponential الدوال الأسية

2) أوجد قيمة التكامل: $\int x^2 \ln x \, dx$

3) أوجد قيمة التكامل: $\int (x+7)\, e^x \, dx$

4) أوجد قيمة التكامل: $\int x^2 \sin x \, dx$

5) أوجد قيمة التكامل: $\int x^4 \sin x \, dx$

	u	dv

6) أوجد قيمة التكامل: $\int x^3 e^{-3x}\, dx$

	u	dv

7) أوجد قيمة التكامل: $\int e^{3x} \sin x\, dx$

8) إذا كان: $\int x^2 \ln x\, dx = a\, x^3 (3 \ln x - 1) + c$ أوجد قيمة a

الاستاذ/ علي عبدالله

$u = \cos x$
$dv = \cos 2x \; dx$

سؤال مهارات عليا – مع مساعدة

9) **أ)** إذا كان: $\int \cos x \cos 2x \, dx = a\,(2\cos x \sin 2x - \sin x \cos 2x) + c$

$u = \cos 2x$
$dv = \cos x \; dx$

9) **ب)** إذا كان: $\int \cos x \cos 2x \, dx = \cos 2x \sin x + b \, \sin^3 x + c$

أوجد قيمة a و b

هذا التكامل له ثلاث نتائج على النحو التالي:

$$\int \cos x \cos 2x \, dx = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + c$$
$$= \frac{1}{3}\,(2\cos x \sin 2x - \sin x \cos 2x) + c$$
$$= \cos 2x \;\sin x + \frac{4}{3}\sin^3 x$$

10) إذا كان: $\int x\sec^2 x\,dx = x\tan x + f(x) + c$ أوجد $f(x)$

11) أوجد قيمة التكامل: $\int (\ln x)^2\,dx$

12) أوجد قيمة التكامل: $\int \cos x \ln(\sin x)\,dx$

تكاملات معروفة باستخدام التكامل بالأجزاء:

1. التكاملات التالية

$$\int x^n\, e^{ax}\, dx \quad , \qquad \int x^n \sin ax\, dx \quad or \quad \int x^n \cos ax\, dx$$

استخدم $u = x^n$ و $dv = e^{ax} dx$ ، $dv = \sin ax \;\, dx$ ، $dv = \cos ax \;\, dx$

2. التكاملات التالية

$$\int x^n \ln x\, dx \quad , \qquad \int x^n \sin^{-1} ax\, dx \quad or \quad \int x^n \tan^{-1} ax\, dx$$

استخدم $u = \ln x$ ، $u = \sin^{-1} ax$ أو $u = \tan^{-1} ax$ و $dv = x^n dx$

3. التكاملات التالية

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx \quad or \quad \int e^{ax} \cos bx\, dx$$

استخدم $u = \sin bx$ أو $u = \cos bx$ و $dv = e^{ax} dx$

13) أوجد قيمة التكامل: $\displaystyle\int \frac{x e^{2x}}{(2x+1)^2}\, dx$ تحري

التكامل بالأجزاء لتكامل محدود

$$\int_{x=a}^{x=b} u\,dv = uv\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} v\,du$$

14) أوجد قيمة التكامل: $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \sin^{-1} x\,dx$

15) أوجد قيمة التكامل: $\int_{0}^{1} x^{2} \cos \pi x\,dx$

16) أوجد قيمة التكامل: $\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$
$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$$

$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$
$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$$
$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$
$$\cos A\sin B = \frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$$
$$\tan^2\theta+1 = \sec^2\theta$$
$$\cot^2\theta+1 = \csc^2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta-\sin^2\theta\\ &= 1-2\sin^2\theta\\ &= 2\cos^2\theta-1\end{aligned}$$

17) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{x^3}{(4+x^2)^{3/2}}\,dx$

18) أوجد قيمة التكامل: $\int e^{ax}\,x^2\,dx$ و $a \neq 0$

19) أوجد قيمة التكامل: $\int x \sin ax\,dx$ و $a \neq 0$

20) أوجد قيمة التكامل: $\int x^n \ln x\,dx$ و $n \neq -1$

L 7-2 التكامل بالأجزاء

أسئلة الاختيار من متعدد

(1 أوجد قيمة التكامل: $\int_0^1 xe^x\,dx$

(A 1

(B $2e+1$

(C $2e-1$

(D e

(2 أوجد قيمة التكامل: $\int x\sin(2x)\,dx$

(A $-\frac{x}{2}\cos(2x)+\frac{1}{4}\sin(2x)+C$

(B $-\frac{x}{2}\cos(2x)-\frac{1}{4}\sin(2x)+C$

(C $\frac{x}{2}\cos(2x)-\frac{1}{4}\sin(2x)+C$

(D $-2x\cos(2x)+\sin(2x)+C$

(3 أوجد قيمة التكامل: $\int \ln x\,dx$

(A $x-x\ln x+C$

(B $x\ln x-x+C$

(C $x\ln x+2x+C$

(D $x\ln x+\frac{1}{2}x^2+C$

4) أوجد قيمة التكامل: $\int x \ln x \; dx$

A) $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 + C$

B) $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

C) $2x^2 \ln x - x^2 + C$

D) $x \ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$

5) استخدم التكامل بالأجزاء لإيجاد التكامل $\int e^x \cos x \; dx$

A) $2e^x(\sin x + \cos x) + c$

B) $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c$

C) $2e^x(\sin x - \cos x) + c$

D) $\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + c$

6) استخدم التكامل بالأجزاء لإيجاد التكامل $\int_0^1 \tan^{-1} x \; dx$

A) $\frac{\pi}{2} - \ln 2$

B) $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$

C) $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$

D) $\frac{\pi}{2}$

7) اوجد قيمة التكامل $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$

(A $e - 2$

(B $1 - e$

(C $e + 2$

(D $2 - 3e$

8) اوجد $\int \ln(3x - 5) \, dx$

اختر جميع الإجابات الصحيحة

(A $\frac{1}{3}(3x - 5)[\ln(3x - 5) + 1] + C$

(B $\frac{1}{3}(3x - 5)\ln(3x - 5) - 1 + C$

(C $\frac{1}{3}(3x - 5)[\ln(3x - 5) - 1] + C$

(D $\frac{1}{3}(3x - 5)\ln(3x - 5) - x + C$

9) إذا كان: $\int \cos x \cos 2x \, dx = \sin x + b \sin^3 x +$ فإن $b =$

(A $\frac{2}{3}$

(B $-\frac{2}{3}$

(C $\frac{4}{3}$

(D $-\frac{4}{3}$

$$\int \cos x \cos 2x \, dx = \int \cos x\,(1 - 2\sin^2 x)\, dx$$
$$= \int (\cos x - 2\sin^2 x \cos x)\, dx$$
$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + c$$

10) إذا كان: $\int \cos x \cos 2x \, dx = \cos 2x \sin x + b \sin^3 x + c$ فإن $b =$

(A $\frac{2}{3}$

(B $-\frac{2}{3}$

(C $\frac{4}{3}$

(D $-\frac{4}{3}$

$u = \cos 2x \qquad dv = \cos x\, dx$

$du = -2\sin 2x\, dx \qquad v = \sin x$

$$\int \cos x \cos 2x \, dx = \cos 2x \sin x + \int 2\sin 2x \sin x \, dx$$
$$= \cos 2x \sin x + \int 2(2\sin x \cos x)\sin x \, dx$$
$$= \cos 2x \sin x + \int 4\sin^2 x \cos x \, dx$$
$$= \cos 2x \sin x + \frac{4}{3}\sin^3 x + c$$

(11 إذا كان: $\int (x+7)e^x\,dx = f(x)\,e^x + c$ فإن $f(x) =$

(A $x+7$

(B $x+6$

(C $x+8$

(D $x+5$

(12 إذا كان: $\int x\sec^2 x\,dx = x\tan x + f(x) + c$ فإن $f(x) =$

(A $\cos x$

(B $\sin x$

(C $\ln\cos x$

(D $\ln\sin x$

(13 أوجد قيمة التكامل: $\int_0^1 \sin^{-1} x\,dx$

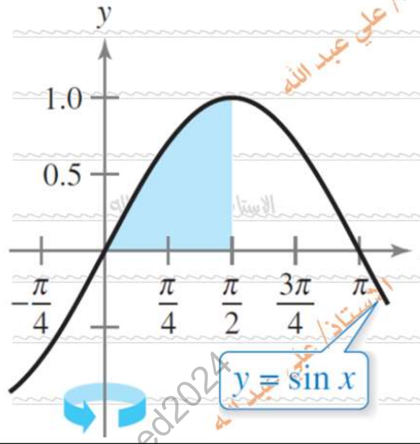
(A $\frac{\pi}{2}$

(B $\frac{\pi}{2}+1$

(C $\frac{\pi}{2}-1$

(D $\pi-1$

(14 أوجد حجم المجسم الناتج عن طريق دوران المنطقة المظللة
حول المحور الصادي y.



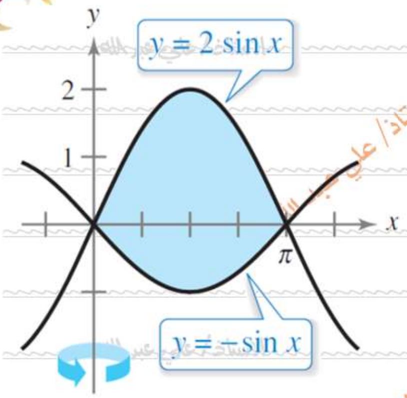
(A $\frac{\pi}{2}$

(B 2π

(C $\frac{3\pi}{2}$

(D π

(15 أوجد حجم المجسم الناتج عن طريق دوران المنطقة المظللة حول المحور *الصادي* y.



(A 6π

(B $6\pi^2$

(C $4\pi^2$

(D 4π

(16 إذا كان: $\int x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{9} x^3 f(x) + c$ فإن $f(x) =$

(A $3 \ln x + 1$

(B $\ln x - 1$

(C $\ln x + 1$

(D $3 \ln x - 1$

(17 أوجد قيمة التكامل: $\int e^{3x} \sin x \, dx$

(A $e^{3x}(3 \sin x - \cos x) + c$

(B $\frac{1}{10} e^{3x}(3 \sin x - \cos x) + c$

(C $\frac{1}{10} e^{3x}(3 \cos x - \sin x) + c$

(D $\frac{1}{10} e^{3x}(3 \sin x - \cos x) + c$

(18 أوجد قيمة التكامل: $\int \cos x \ln(sin\, x) \, dx$

(A $\sin x \ln(\sin x) - x + c$

(B $\sin x \ln(\sin x) + \sin x + c$

(C $\ln(\sin x) + \sin x + c$

(D $\sin x \ln(\sin x) - \sin x + c$

(19 أوجد قيمة التكامل: $\int_{3/2}^{5/2} x\cos \pi x \, dx$

(A $\frac{1}{\pi}$

(B $\frac{2}{\pi}$

(C $\frac{3}{\pi}$

(D $\frac{4}{\pi}$

(20 افترض أن $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق باستمرار، علاوة على ذلك افترض أن $f(2)=5$ و $f(7)=10$ و $f'(2)=1$ و $f'(7)=3$ فما قيمة التكامل التالي:

$$\int_2^7 (2x-4)\, f''(x)\; dx$$

(A 10

(B 12

(C 15

(D 20

(21 إذا كان: $\int 16x^n \ln x \, dx = x^4[4\ln x - 1] + c$ أوجد قيمة n

(A 2

(B 3

(C 4

(D 8

(22 أوجد قيمة التكامل: $\int 2x\tan^{-1} x \, dx$

(A $(x^2+1)\tan^1 x - x + c$

(B $(x^2-1)\tan^1 x - x + c$

(C $(x^2+1)\tan^1 x + c$

(D $x^2\tan^1 x - x + c$

(23 إذا كان: $\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2\, f(x) + c$ ، حيث c ثابت فإن:

(A $f(x) = x \cos x - \sin x$

(B $f(x) = x \sin x - \cos x$

(C $f(x) = x \cos x + \sin x$

(D $f(x) = x \cos x - 2 \sin x$

(24 إذا كان: $\int x^3 e^x \, dx = f(x)\, e^x + c$ ، حيث c ثابت فإن:

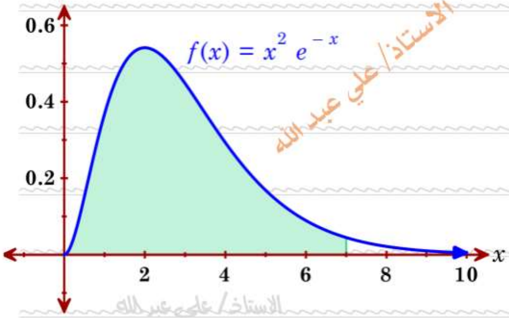
(A $f(x) = x^3$

(B $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6$

(C $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x + 6$

(D $f(x) = 3x^2 - 6x + 6$

(25 أوجد المساحة الواقعة بين منحنى $f(x) = x^2 e^{-x}$ ومحور x في الفترة $[0, 7]$



(A $2e^2 + 2$

(B $2e^2 - 2$

(C $10e^2 - 2$

(D $2e^2$

(26 أوجد قيمة التكامل: $\int \sin\sqrt{x}\, dx$

(A $2\sqrt{x} \cos\sqrt{x} - 2 \sin\sqrt{x} + c$

(B $2 \sin\sqrt{x} - 2\sqrt{x} \sin\sqrt{x} + c$

(C $2 \sin\sqrt{x} - 2\sqrt{x} \cos\sqrt{x} + c$

(D $\frac{1}{2\sqrt{x}} \cos\sqrt{x} + c$

بفرض $t = \sqrt{x}$

فإن $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} dt = 2t\, dt$

$$\int \sin\sqrt{x}\, dx = \int 2t\ \sin t\, dt$$

$$u = 2t \qquad dv = \sin t\ dt$$
$$du = 2dt \qquad v = -\cos t$$

$$\int 2t\ \sin t\, dt = -2t \cos t + \int 2 \cos t\, dt$$
$$\int 2t\ \sin t\, dt = -2t \cos t + 2 \sin t + c$$
$$= 2\sqrt{x} \cos\sqrt{x} + 2 \sin\sqrt{x} + c$$

(27 إذا كان: $\int x^2 e^x \, dx = f(x)e^x + c$ فإن: $f(x) =$

(A $x^2 - 2x + 2$

(B $x^2 - 2x - 2$

(C $x^2 + 2x + 2$

(D $x^2 + 2x - 2$

(28 إذا كان: $\int \cot x \ln(\sin x) \, dx = k(\ln(\sin x))^2 + c$ فإن $k =$

(A $\frac{1}{2}$

(B $\frac{1}{3}$

(C $\frac{1}{5}$

(D 2

(29 أوجد قيمة التكامل: $\int x \sin x \cos x \; dx$

(A $-\frac{1}{2} x \cos 4x + \frac{1}{6} \sin 4x + c$

(B $-\frac{3}{2} x \cos x + \frac{1}{7} \sin 2x + c$

(C $-\frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + c$

(D $-\frac{3}{2} x \cos 10x + \frac{1}{9} \sin 3x + c$

(30 افترض $f(x)$ أنها دالة موجودة. وكان:

$$f(0) = 1 \quad , \quad f'(0) = 5 \quad , \quad f(2) = 3 \quad , \quad f'(2) = 7$$

أوجد قيمة التكامل: $\int_0^2 3x\, f''(x)\, dx$

(A 32

(B 36

(C 28

(D 24

(31 إذا كان: $\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int f(x) \tan^2 x\, dx$ فإن:

(A $f(x) = \sec x$

(B $f(x) = \sec x \tan x$

(C $f(x) = \sec^2 x$

(D $f(x) = 3 \sec x$

(32 إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وقابلة للاشتقاق و $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ و $f(0) = 1$

فإن: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x\, f(x) + \sin x\ f'(x)\right) dx =$

(A 2

(B 3

(C 2π

(D 3π

(33 إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وقابلة للاشتقاق و $f(1) = 3$ و $f(0) = 1$

فإن: $\int_0^1 \left(e^x f(x) + e^x f'(x)\right) dx =$

(A $3e + 1$

(B $3e - 1$

(C $e - 3$

(D $e + 3$

(34 إذا كان: $\int e^x \cos x \; dx = e^x f(x) + c$ فإن:

(A $f(x) = 2(\sin x - \cos x)$

(B $f(x) = 2(\sin x + \cos x)$

(C $f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$

(D $f(x) = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$

(35 إذا كان: $\int \cos\sqrt{x} \; dx = 2\left(f(x) + \cos\sqrt{x}\right) + c$ فإن:

(A $f(x) = \sqrt{x}\cos\sqrt{x}$

(B $f(x) = \sqrt{x}\sin\sqrt{x}$

(C $f(x) = 2\sqrt{x}$

(D $f(x) = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$

(36 إذا كان: $\int e^{\sqrt{x}} \; dx = 2e^{\sqrt{x}} f(x) + c$ فإن:

(A $f(x) = \sqrt{x} - 1$

(B $f(x) = \sqrt{x} + 1$

(C $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

(D $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$

37) إذا كان: $\int f(x)\cos x \; dx = x^2 \sin x - \int f(x)\sin x \, dx$ فإن:

A) $f(x) = -3x^2$

B) $f(x) = 3x^2$

C) $f(x) = 2x$

D) $f(x) = -2x$

38) أوجد قيمة التكامل: $\int (x^2 - x)\cos x \; dx$

A) $(x^2 - x - 2)\sin x + (2x - 1)\cos x + c$

B) $(x^2 - x - 2)\sin x - (2x - 1)\cos x + c$

C) $(x^2 - x - 2)\cos x + (2x - 1)\sin x + c$

D) $(x^2 - x - 2)\cos x - (2x - 1)\sin x + c$

39) إذا كان $G'(x) = \mathrm{g}(x)$ فإن: $\int f(x)\mathrm{g}(x) \; dx = f(x)G(x) - \dots\dots\dots\dots\dots$

A) $\int f'(x)G(x) \; dx$

B) $\int f'(x)\mathrm{g}(x) \; dx$

C) $\int f(x)\mathrm{g}(x) \; dx$

D) $\int G(x) \; dx$

(39 أوجد قيمة التكامل: $\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

(A $\frac{3\sqrt{e}+4}{2e}$

(B $\frac{2\sqrt{e}-4}{3e}$

(C $\frac{3\sqrt{e}-4}{2e}$

(D $\frac{3\sqrt{e}-4}{e}$

(40 أوجد قيمة التكامل: $\int_{1}^{3} x \ln x\,dx$

(A $\frac{1}{2}x^2 \ln x\Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{2}x\,dx$

(B $\frac{1}{2}x^2 \ln x\Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{2}x\,dx$

(C $\frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\Big|_1^3 - \int_1^3 \ln x\,dx$

(D $x^2 \ln x\Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{2}x\,dx$

(41 بفرض أن: $\int (-6x-7)\ln 9x\;dx = uv - \int v\,du$ أي من التالي يساوي uv ؟

(A $-x(3x+7)$

(B $(-6x-7)\ln 9x$

(C $-\frac{x}{2}(3x+14)+c$

(D $-x(3x+7)\ln 9x$

(42 أوجد قيمة التكامل: $\int x\sin x\ dx$

(A $x(\sin x-\cos x)+C$

(B $\sin x-x\cos x+C$

(C $x\cos x-\sin x+C$

(D $-x\cos x-\sin x+C$

(43 اوجد قيم التكامل: $\int (3x+4)^2 e^x\ dx$

(A $e^x\left(\frac{9}{2}x^2+3x+1\right)+C$

(B $e^x\left(\frac{9}{2}x^2+6x+10\right)+C$

(C $e^x(9x^2+6x+10)+C$

(D $e^x(9x^2+3x+10)+C$

(44 $\int f(x)\cos(nx)\ dx$

(A $\frac{1}{n}f(x)\sin(nx)-\frac{1}{n}\int f'(x)\sin(nx)\ dx$

(B $\frac{1}{n}f(x)\cos(nx)-\frac{1}{n}\int f'(x)\cos(nx)\ dx$

(C $n\,f(x)\cos(nx)+\frac{1}{n}\int f'(x)\sin(nx)\ dx$

(D $n\,f(x)\cos(nx)-\frac{1}{n}\int f'(x)\cos(nx)\ dx$

(45 إذا كان : $\int f(x)\,dx$ $\int \cos^{-1} x\,dx = x\cos^{-1} x +$ فإن $f(x) =$

(A $-x\sqrt{1-x^2}$

(B $x\sqrt{1-x^2}$

(C $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(D $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(46

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	-2	3	4	-1
3	2	-1	-3	5

يعطي الجدول أعلاه قيم g' و g و f' و f لقيم محددة من x

إذا كان: $\int_1^3 f(x)\,g'(x)\,dx = 8$ فإن: $\int_1^3 f'(x)g(x)\,dx =$

(A -4

(B 5

(C -1

(D 8

0503050917

L 7-2 التكامل بالأجزاء

مفاتيح الإجابة

Q	__⌋ ∵←	Q	__⌋ ∵←	Q	__⌋ ∵←	Q	__⌋ ∵←
1)	D	2)	A	3)	B	4)	B
5)	D	6)	C	7)	A	8)	∪. ⇐
9)	B	10)	C	11)	B	12)	C
13)	C	14)	B	15)	B	16)	D
17)	B	18)	D	19)	D	20)	C
21)	B	22)	A	23)	A	24)	C
25)	B	26)	C	27)	A	28)	A
29)	C	30)	B	31)	A	32)	B
33)	B	34)	C	35)	B	36)	A
37)	C	38)	A	39)	A	40)	A
41)	D	42)	B	43)	C	44)	A
45)	D	46)	A				

L 7.3 طرائق تكامل الدوال المثلثية

تكاملات تتضمن قوى الدوال المثلثية

أولا: التكاملات في الصيغة:

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

الحالة 1: m أو n عدد صحيح موجب فردي

باستخدام طريقة الاستبدال مع $u =$ الدالة تحت القوة الزوجية

1- إذا كان m عددا صحيحا موجبا فرديا و n هو عدد صحيح زوجي موجب

عندما تكون قوة **sin** **فردية وموجبة**، اعزل عامل لـهس واحد وحول العوامل المتبقية إلىسθ.
ثم قم بالتوسيع و التكامل.

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^{m-1} x \cos^n x \; \sin x \, dx$$

ثم استبدل أي $\sin^2 x$ باستخدام $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

ثم استخدم طريقة التعويض باستخدام $u = \cos x \; , \; du = -\sin x \, dx$

$$\int \sin^{\overbrace{2k+1}^{\text{Odd}}} x \cos^n x \, dx = \int \overbrace{(\sin^2 x)^k}^{\text{Convert to cosines}} \cos^n x \overbrace{\sin x \, dx}^{\text{Save for } du} = \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \sin x \, dx$$

(1 أوجد قيمة التكامل: $\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx$

2) أوجد قيمة التكامل: $\int \sin^5 x \cos^2 x \; dx$

3) أوجد قيمة التكامل: $\int \sin^3 x \sqrt{\cos x} \; dx$

-2 إذا كان m عددا صحيحا موجبا زوجياً و n عددا صحيحا موجبا فردياً

عندما تكون قوة cos **فردية وموجبة** ، اعزل عامل cos واحد وحول العوامل المتبقية إلى ـلهس ثم قم بالتوسيع والتكامل.

$$\int \sin^m x \cos^n x \; dx = \int \sin^m x \cos^{n-1} x \quad \cos x \, dx$$

ثم استبدل أي $\cos^2 x$ باستخدام $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

ثم استخدم طريقة التعويض باستخدام $u = \sin x \; , \; du = \; \cos x \; dx$

$$\int \sin^m x \cos^{\overbrace{2k+1}^{\text{Odd}}} x \, dx = \int \sin^m x \underbrace{(\cos^2 x)^k}_{\text{Convert to sines}} \underbrace{\cos x \, dx}_{\text{Save for } du} = \int \sin^m x \, (1 - \sin^2 x)^k \cos x \, dx$$

4) أوجد قيمة التكامل: $\int \sqrt{\sin x} \, \cos^3 x \; dx$

5) أوجد قيمة التكامل: $\int \sin^2 2x \, \cos^5 2x \, dx$

الحالة 2: m و n كلاهما أعداد زوجية صحيحة موجبة

عندما تكون قوى كل من sin و cos زوجية وغير سالبة ، استخدم المتطابقات المثلثية:

$$\cos^2 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) \quad \text{و} \quad \sin^2 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$$

$$\int \sin^m x \cos^n x \; dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^{\frac{n}{2}} dx$$

6) أوجد قيمة التكامل: $\int \sin^2 3x \; dx$

7) أوجد قيمة التكامل: $\int \sin^2 x \; \cos^2 x \; dx$

8) أوجد قيمة التكامل: $\int \cos^4 x \ dx$ ثم أوجد قيمة: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \ dx$

9) أوجد قيمة التكامل: $\int \cos^3 x \ dx$

10) أوجد قيمة التكامل: $\int \sin^5 x \; dx$

11) أوجد قيمة التكامل: $\int \cos^2(2x+1) \; dx$

12) أوجد قيمة التكامل: $\int \sin^2 x \; \cos x \, dx$

ملخص

حال	إستراتيجية
m فردي و n زوجي	أعد كتابة التكامل في هذه الصيغة: $\int \sin^m x \cos^n x \ dx = \int \sin^{m-1} x \cos^n x \ \ \sin x \, dx$ ثم استبدل أي $\sin^2 x$ استخدام $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ثم استخدم طريقة التعويض باستخدام $u = \cos x \ \ , du = -\sin x \ dx$
n فردي و m زوجي	أعد كتابة التكامل في هذه الصيغة: $\int \sin^m x \cos^n x \ dx = \int \sin^m x \cos^{n-1} x \ \ \cos x \, dx$ ثم استبدل أي $\cos^2 x$ استخدام $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ثم استخدم طريقة التعويض باستخدام $u = \sin x \ \ , du = \cos x \ dx$
m و n فردي $m < n$	أعد كتابة التكامل في هذه الصيغة: $\int \sin^m x \cos^n x \ dx = \int \sin^{m-1} x \cos^n x \ \ \sin x \, dx$ ثم استبدل أي $\sin^2 x$ استخدام $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ثم استخدم طريقة التعويض باستخدام $u = \cos x \ \ , du = -\sin x \ dx$
m و n فردي $m > n$	أعد كتابة التكامل في هذه الصيغة: $\int \sin^m x \cos^n x \ dx = \int \sin^m x \cos^{n-1} x \ \ \cos x \, dx$ ثم استبدل أي $\cos^2 x$ استخدام $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ثم استخدم طريقة التعويض باستخدام $u = \sin x \ \ , du = \cos x \ dx$
m و n زوجي	أعد كتابة التكامل في هذه الصيغة: $\int \sin^m x \cos^n x \ dx = \int (\sin^2 x)^{\frac{m}{2}} (\cos^2 x)^{\frac{n}{2}} \ dx$ ثم استبدل $\sin^2 x$ باستخدام $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ وعوض باستخدام $\cos^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
m فردي و $n = 0$	أعد كتابة التكامل في هذه الصيغة: $\int \sin^m x \ dx = \int \sin^{m-1} x \ \ \sin x \, dx$ ثم استبدل أي $\sin^2 x$ استخدام $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ثم استخدم طريقة التعويض باستخدام $u = \cos x \ \ , du = -\sin x \ dx$
n فردي و $m = 0$	أعد كتابة التكامل في هذه الصيغة: $\int \cos^m x \ dx = \int \cos^{m-1} x \ \ \cos x \, dx$ ثم استبدل أي $\cos^2 x$ استخدام $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ثم استخدم طريقة التعويض باستخدام $u = \sin x \ \ , du = \cos x \ dx$

الاستاذ/ علي عبد الله

التكامـــلات في الصــيغة

$$\int \tan^m x \sec^n x\, dx$$

الحالة 1: m هو عدد صحيح موجب فردي

عندما تكون قوة ـلثرπ فردية وموجبة ، اعزل عامل من كل من ـلثرπ و θ·ںں وقم بتحويل العوامل المتبقية من ـلثرπ إلى θ·ںں ثم قم بالتوسيع والتكامل.

$$\int \tan^m x \sec^n x\; dx = \int \tan^{m-1} x \sec^{n-1} x \quad \sec x \tan x\, dx$$

ثم استبدل أي $\tan^2 x$ استخدام $\tan^2 x = \sec^2 x \ - 1$

ثم استخدم طريقة التعويض باستخدام:

$$u = \sec x \qquad , \qquad du = \sec x \tan x\; dx$$

$$\int \sec^m x \tan^{\overbrace{2k+1}^{\text{Odd}}} x\, dx = \int \sec^{m-1} x \overbrace{(\tan^2 x)^k}^{\text{Convert to secants}} \overbrace{\sec x \tan x\, dx}^{\text{Save for } du} = \int \sec^{m-1} x(\sec^2 x - 1)^k \sec x \tan x\, dx$$

(13 أوجد قيمة التكامل: $\int \tan^3 x \ \sec^3 x\, dx$

14) أوجد قيمة التكامل: $\int \tan^3 x \, \sqrt{\sec x} \;\, dx$

15) أوجد قيمة التكامل: $\int x \, \tan^3(x^2+1) \sec(x^2+1) \, dx$

الحالة 2: n هو عدد صحيح موجب زوجي

عندما تكون قوة θ·ںں زوجية وموجبة ، اعزل عامل $\theta^{٢}$·ںں وقم بتحويل العوامل المتبقية من θ·ںں إلى ـلثرπ. ثم قم بالتوسيع والتكامل.

$$\int \tan^m x \sec^n x \; dx = \int \tan^m x \sec^{n-2} x \quad \sec^2 x \, dx$$

ثم استبدل أي $\sec^2 x$ استخدام $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

ثم استخدم طريقة التعويض باستخدام:

$$u = \tan x \qquad , \qquad du = \sec^2 x \; dx$$

$$\int \sec^{\overset{\text{Even}}{\widehat{2k}}} x \tan^n x \, dx = \int \overbrace{(\sec^2 x)^{k-1}}^{\text{Convert to tangents}} \tan^n x \overbrace{\sec^2 x \, dx}^{\text{Save for } du} = \int (1 + \tan^2 x)^{k-1} \tan^n x \sec^2 x \, dx$$

(16 إذا كان: $\int \tan^3 x \sec^2 x \, dx = a \tan^n x + c$ أوجد قيمة a و n

(17 أوجد قيمة التكامل: $\int \tan^2 x \; \sec^4 x \, dx$

18) أوجد قيمة التكامل: $\int \sqrt{\tan x}\ \sec^4 x\ \ dx$

19) أوجد قيمة التكامل: $\int_0^{\pi/4} \tan^4 x\ \ \sec^4 x\ \ dx$

الحالة 3: هو m عدد صحيح موجب زوجي وهو n عدد صحيح موجب فردي

استبدل أي عوامل $\tan^2 x$ بـ $\sec^n x\ \ dx$ $\sec^2 x - 1$ ثم استخدم صيغة اختزال خاصة لإيجاد قيمة التكاملات باستخدام الصيغة. هذه حالة معقدة.

$$\int \sec^n x\ \ dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\ \ dx$$

(20 أوجد قيمة التكامل: $\int \tan^2 x\ \sec x\ \ dx$

☐

(21 أوجد قيمة التكامل: $\int \sec x \ \ dx$

(22 أوجد قيمة التكامل: $\int \csc x \ \ dx$

ملخص

$$\int \tan^m x \sec^n x \ dx$$

حال	إستراتيجية
m عدد فردي موجب	أولا، اعزل عاملا واحدا من $\sec x$ وواحدا من $\tan x$. (ستحتاج إلى هذا من أجل du.) بعد ذلك ، استبدل أي عوامل $\tan^2 x$ بـ $\sec^2 x - 1$ وقم باستخدام التعويض $u = sec\ x$
n عدد زوجي موجب	أولا، اعزل عاملا واحدا من $\sec^2 x$. (ستحتاج إلى هذا من أجل du.) بعد ذلك، استبدل أي عوامل $\sec^2 x$ بـ $1 + \tan^2 x$ وقم باستخدام التعويض $u = tan\ x$
m هو زوجي n وهو فردي	استبدل أي عوامل $\tan^2 x$ بـ $\sec^2 x - 1$ ثم استخدم صيغة اختزال خاصة (معطاة في التمارين) لحساب التكاملات التي بالصيغة $\int \sec^n x \ dx$. هذه حالة معقدة.

(22 أوجد قيمة التكامل: $\int \cot^2 x \ \csc^4 x \ \ dx$

(23 أوجد قيمة التكامل: $\int \cot^2 x \ \csc^2 x \ \ dx$

(24 اثبت أن: $\int \frac{1}{\cos x - 1}\, dx = \csc x + \cot x + c$

(25 اثبت أن: $\int \frac{1}{\cos x + 1}\, dx = \csc x - \cot x + c$

26) استخدم صيغة الاختزال التالية

$$\int \sec^n x \, dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x \, dx$$

لإيجاد قيمة التكاملات: $\int \sec^4 x \, dx$ and $\int \sec^3 x \, dx$

0503050917

التعويض مع الدوال المثلثـية

إذا كان التكامل يحتوي على حد بالصيغة:

$$\sqrt{x^2-a^2} \quad , \quad \sqrt{a^2+x^2} \quad , \quad \sqrt{a^2-x^2}$$ لبعض $a>0$

استخدم التعويضات التالية:

تعبير	استخدم	فترة	المتطابقات المستخدمة
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin\theta$	$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$	$1-\sin^2x=\cos^2x$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan\theta$	$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$	$1+\tan^2x=\sec^2x$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec\theta$	$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$	$\sec^2x-1=\tan^2x$

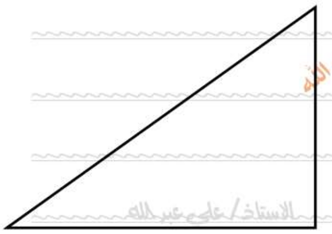
على سبيل المثال، بالنسبة لـ $a>0$

بفرض أن $x=a\sin\theta$ حيث $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}$ $=\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}$ $=\sqrt{a^2\cos^2\theta}$ $=a\cos\theta$	بفرض أن $x=a\tan\theta$ حيث $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ $\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta}$ $=\sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)}$ $=\sqrt{a^2\sec^2\theta}$ $=a\sec\theta$	بفرض أن $x=a\sec\theta$ حيث $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ $\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\sec^2\theta-a^2}$ $=\sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)}$ $=\sqrt{a^2\tan^2\theta}$ $=a\tan\theta$
$\sqrt{}$		

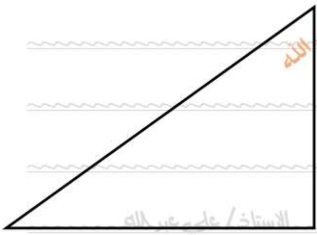
ملاحظات حول الصيغة: $\sqrt{x^2-a^2}$ واستخدام التعويض $x=a\sec\theta$

$$\sqrt{x^2-a^2}=\begin{cases} a\tan\theta\,, & 0\le\theta<\frac{\pi}{2} \\ -\,a\tan\theta\,, & \frac{\pi}{2}<\theta\le\pi \end{cases}$$

27) أوجد: $\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,dx$



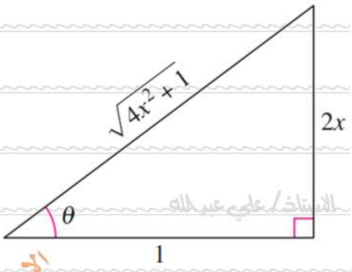
28) أوجد: $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$



(29 أوجد: $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\,dx$

Solution Let $u = 2x$, $a = 1$, and $2x = \tan\theta$. Then,

$$dx = \frac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta \quad \text{and} \quad \sqrt{4x^2+1} = \sec\theta.$$



Trigonometric substitution produces

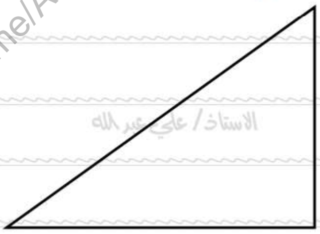
$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec\theta} \qquad \text{Substitute.}$$

$$= \frac{1}{2}\int \sec\theta\, d\theta \qquad \text{Simplify.}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C \qquad \text{Apply Secant Rule.}$$

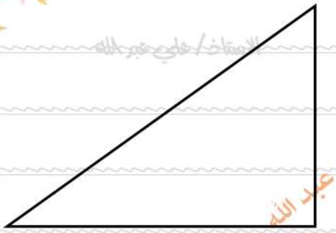
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{4x^2+1} + 2x\right| + C. \qquad \text{Back-substitute.}$$

(30 أوجد: $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$



الاستاذ/ علي عبدالله

31) أوجد: $\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx$



32) أوجد: $B)\ \int_{0}^{2} x\sqrt{x^2+9}\,dx$ $A)\ \int_{0}^{2} x^2\sqrt{x^2+9}\,dx$

(33 أوجد: $\int \sin 5x \cos 4x \; dx$

في هذه الحالة، نحتاج إلى استخدام إحدى المتطابقات المثلثية التالية:

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A-B) + \sin(A+B)]$$

L 7-3 طرائق تكامل الدوال المثلثية

أسئلة الاختيار من متعدد

1) أوجد قيمة $\int \sin^3 x \cos^4 x \ dx$

(A $\frac{1}{7}\cos^7 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + c$

(B $\frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c$

(C $\frac{1}{7}\sin^7 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + c$

(D $\frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + c$

2) أوجد قيمة: $\int \sin^3 x \sqrt{\cos x} \ dx$

(A $\frac{2}{7}\cos^{\frac{7}{2}} x - \frac{2}{3}\cos^{\frac{3}{2}} x + c$

(B $\frac{2}{7}\cos^{\frac{7}{2}} x + \frac{2}{3}\cos^{\frac{3}{2}} x + c$

(C $-\frac{2}{7}\cos^{\frac{7}{2}} x + \frac{2}{3}\cos^{\frac{3}{2}} x + c$

(D $-\frac{2}{7}\cos^{\frac{7}{2}} x - \frac{2}{3}\cos^{\frac{3}{2}} x + c$

3) إذا كان: $\int \tan^3 x \sec^2 x \ dx = n \tan^4 x + c$ أوجد قيمة n

(A $n = \frac{1}{4}$

(B $n = 4$

(C $n = 3$

(D $n = \frac{1}{3}$

(4 أوجد قيمة: $\int x\ \tan^3(x^2+1)\sec^2(x^2+1)\ dx$

(A $\frac{1}{8}\tan^4(x^2+1)+c$

(B $\frac{1}{4}\tan^4(x^2+1)+c$

(C $\frac{1}{6}\sec^3(x^2+1)-\frac{1}{2}\sec(x^2+1)+c$

(D $\frac{1}{6}\sec^3(x^2+1)+\frac{1}{2}\sec(x^2+1)+c$

(5 أوجد قيمة: $\int_0^{\pi/4}\tan^4 x\ \sec^4 x\ dx$

(A $\frac{12}{35}$

(B $\frac{12}{35}\pi$

(C $\frac{11}{35}$

(D $\frac{12}{34}$

(6 إذا كان: $\int \cot^2 x\csc^2 x\ dx = n\cot^3 x + c$ أوجد قيمة n

(A $n=\frac{1}{3}$

(B $n=-\frac{1}{3}$

(C $n=3$

(D $n=-3$

(7 استخدم التعويض بالدوال المثلثية لإيجاد قيمة $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$

(A $\ln\left|\frac{9+x^2}{3}+\frac{x}{3}\right|+C$

(B $\ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}}{9}\right|+C$

(C $\ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}}{9}+\frac{x}{9}\right|+C$

(D $\ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}}{3}+\frac{x}{3}\right|+C$

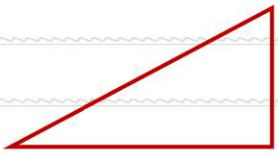
(8 استخدم التعويض بالدوال المثلثية لإيجاد قيمة $\int \frac{x^2}{4+x^2}\,dx$

(A $x-2\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+c$

(B $x+2\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+c$

(C $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{x^2+4}+c$

(D $x-\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+c$



$$\int \frac{x^2}{4+x^2}\,dx = \int \frac{4+x^2-4}{4+x^2}\,dx$$
$$= \int \frac{4+x^2}{4+x^2}\,dx + \int \frac{-4}{4+x^2}\,dx$$
$$= \int 1\,dx - 4\int \frac{1}{4+x^2}\,dx = x - 2\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

طريقة أخرى:

استخدام $x = 2\tan\theta \Rightarrow dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$

$$\int \frac{x^2}{4+x^2}\,dx = \int \frac{4\tan^2\theta}{4+4\tan^2\theta}(2\sec^2\theta\ d\theta)$$
$$= \int \frac{4\tan^2\theta}{4\sec^2\theta}(2\sec^2\theta\ d\theta) = \int 2\tan^2\theta\,d\theta$$
$$= 2\int (\sec^2\theta - 1)\,d\theta = 2\tan\theta - 2\theta + C$$
$$= x - 2\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

(9 أوجد قيمة التكامل: $\int -10\tan^{15}3x\sec^2 3x\ dx$

(A $-\frac{5}{24}\tan^{16}3x+C$

(B $-10\ \tan^{16}3x+C$

(C $-\frac{5}{24}\sec^{16}3x+C$

(D $-\frac{2}{3}\tan^{15}3x+C$

(10 أوجد قيمة التكامل: $\int 7\cos^3 4x\ dx$

(A $\frac{7}{4}\sin 4x - \frac{7}{12}\sin^3 4x + C$

(B $\frac{7}{4}\sin 4x - \frac{7}{12}\cos^3 4x + C$

(C $7\sin 4x - \frac{7}{3}\sin^3 4x + C$

(D $\frac{7}{4}\sin 4x + \frac{7}{12}\sin^3 4x + C$

(11 أوجد قيمة التكامل: $\int 3\sec^4 x\ dx$

(A $3\sec x + \sec^3 x + C$

(B $3\tan x + \tan^3 x + C$

(C $\frac{1}{3}\tan^3 x + C$

(D $3\tan x - \tan^3 x + C$

(12 أوجد قيمة التكامل: $\int \tan^3 x\sec^4 x\ dx$

اختر جميع الإجابات الصحيحة.

(A $\frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{1}{6}\tan^6 x + c$

(B $\frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{6}\tan^6 x + c$

(C $\frac{1}{6}\sec^6 x - \frac{1}{4}\sec^4 x + c$

(D $\frac{1}{6}\sec^6 x + \frac{1}{4}\sec^4 x + c$

(13 استخدم التعويض بالدوال المثلثية لإيجاد قيمة $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

(A $-\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x}+c$

(B $\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x}+c$

(C $\frac{x\sqrt{9-x^2}}{9}+c$

(D $\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{9-x^2}}{9}+c$

(14 استخدم التعويض بالدوال المثلثية لإيجاد قيمة $\int \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$

(A $\sqrt{9+x^2}+c$

(B $\ln\left|\sqrt{9+x^2}\right|+c$

(C $\frac{\sqrt{9+x^2}}{x}+c$

(D $\ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}}{x}\right|+c$

(15 استخدم التعويض بالدوال المثلثية لإيجاد قيمة $\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

(A $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+c$

(B $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+c$

(C $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+c$

(D $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right|+c$

0503050917

16) اوجد قيمة m إذا كان: $\int \tan x \sec^m x \, dx = \frac{1}{3}\sec^3 x + c$

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{2}$

C) 2

D) 3

17) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}} \, dx$

A) $2\ln\left|\sqrt{4x^2+1}-2x\right|+c$

B) $2\ln\left|\sqrt{4x^2+1}+2x\right|+c$

C) $\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{4x^2+1}+2x\right|+c$

D) $\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{4x^2+1}-2x\right|+c$

18) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx$

A) $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

B) $\ln\left|x-\sqrt{x^2-1}\right|+c$

C) $\ln\left|\frac{x}{2}+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

D) $\ln\left|\frac{x}{2}-\sqrt{x^2-1}\right|+c$

(19 إذا كان: $\int \cot^2 x \csc^2 x \; dx = \frac{1}{a}\cot^3 x + c$ فإن $a =$

(A 3

(B $\frac{1}{3}$

(C $-\frac{1}{3}$

(D -3

(20 تعويض ما يعطي $\int \sin^3 x \cos^n x \, dx = \int u^9 - u^7 \, du$ ما هي قيمة n ؟

(A 3

(B 5

(C 7

(D 9

(21 في التكامل $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^2 - 9}} dx$ أي من الدوال المثلثية الآتية باستخدامها يتم استبعاد الجذر التربيعي من هذا التكامل؟

(A $x = 3 \sec x$

(B $x = 3 \tan x$

(C $x = 3 \sin x$

(D $x = 3 \cos x$

(22 أوجد قيمة التكامل: $\int \sin^3(x+2)\,dx$

(A $\frac{1}{3}\sin^3(x+2)+\sin(x+2)+c$

(B $\frac{1}{3}\cos^3(x+2)-\cos(x+2)+c$

(C $\frac{1}{3}\sin^3(x+2)-\sin(x+2)+c$

(D $\frac{1}{3}\cos^3(x+2)+\cos(x+2)+c$

بعد إجراء التعويض بالدوال المثلثية المناسبة، وجد أن:

(23 $\int \frac{1}{\sqrt{16+x^2}}dx = \ln\left|\frac{\sqrt{16+x^2}}{2}+f(x)\right|+c$ أي مما يلي هو $f(x)$

(A $\frac{x}{2}$

(B $\frac{x}{3}$

(C $\frac{x}{4}$

(D $\frac{x}{5}$

(24 أوجد قيمة التكامل: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x\cos x\,dx$

(A $\frac{5}{32}$

(B $\frac{5}{64}$

(C $\frac{3}{64}$

(D $\frac{3}{32}$

25) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

A) $\sqrt{3-2x-x^2} - \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$

B) $\sqrt{3-2x-x^2} - \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$

C) $-\sqrt{3-2x-x^2} - \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$

D) $-\sqrt{3-2x-x^2} - \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$

26) التعويض المناسب للمتغيرات للتكامل: $\int \frac{1}{\sqrt{25+x^2}}dx$ هو

A) $x = 25\tan\theta$

B) $x = 5\sin\theta$

C) $x = 5\sec\theta$

D) $x = 5\tan\theta$

27) التعويض المناسب للمتغيرات للتكامل: $\int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}dx$ هو

A) $x = 25\tan\theta$

B) $x = 5\sin\theta$

C) $x = 5\sec\theta$

D) $x = 5\tan\theta$

28) التعويض المناسب للمتغيرات للتكامل: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-25}}dx$ هو

A) $x = 25\tan\theta$

B) $x = 5\sin\theta$

C) $x = 5\sec\theta$

D) $x = 5\tan\theta$

29) التعويض المناسب للمتغيرات للتكامل: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+10}}\,dx$ هو

A) $x+1=3\tan\theta$

B) $x+1=3\sin\theta$

C) $x-1=2\tan\theta$

D) $x-1=2\sin\theta$

30) أوجد قيمة التكامل: $\int (1-x^2)^{-3/2}\,dx$

A) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+c$

B) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+c$

C) $\sqrt{1-x^2}+c$

D) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+c$

31) استخدم التعويض بالدوال المثلثية لإيجاد قيمة $\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ يساوي

A) $\int_0^{\pi/3} \sin^2\theta\cos\theta\,d\theta$

B) $\int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\,d\theta$

C) $\int_0^{\pi/6} \sin^2\theta\,d\theta$

D) $\int_0^{\pi/6} \cos^2\theta\,d\theta$

(32 إذا كان: $\int \tan^3 x \sec x \, dx = \frac{1}{n}\sec^n x - \sec x + c$ فإن قيمة n هي

(A $\frac{1}{3}$

(B 3

(C $\frac{1}{4}$

(D 4

(33 إذا كان: $\int \sec^4 x \, dx = \frac{1}{3} f(x) + c$ فإن:

(A $f(x) = \tan x + 3\tan^3 x$

(B $f(x) = 3\tan x + \tan^3 x$

(C $f(x) = 3\tan x - \tan^3 x$

(D $f(x) = \tan x - 3\tan^3 x$

(34 التعويض المناسب للمتغيرات للتكامل: $\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} dx$ هو

(A $x = 3\sin\theta$

(B $x = \frac{3}{2}\sin\theta$

(C $x = \frac{2}{3}\sin\theta$

(D $x = \frac{3}{2}\sec\theta$

35) أوجد قيمة التكامل: $\int \sin^{2022} x \cos^3 x \, dx$

A) $\frac{1}{2022}\sin^{2022} x - \frac{1}{2023}\sin^{2023} x + C$

B) $\frac{1}{2023}\sin^{2023} x + \frac{1}{2025}\sin^{2025} x + C$

C) $\frac{1}{2022}\sin^{2022} x + \frac{1}{2023}\sin^{2023} x + C$

D) $\frac{1}{2023}\sin^{2023} x - \frac{1}{2025}\sin^{2025} x + C$

36) أوجد قيمة التكامل: $\int e^x \tan^2(e^x) \, dx$

A) $\tan(e^x) - e^x + C$

B) $\tan(e^x) + e^x + C$

C) $e^x - \tan(e^x) + C$

D) $\frac{1}{3}\tan^3(e^x) + C$

L 7-3 طرائق تكامل الدوال المثلثية

مفاتيح الإجابة

Q	←:· ــــا	Q	←:· ــــا	Q	←:· ــــا	Q	←:· ــــا
1)	B	**2)**	A	**3)**	A	**4)**	A
5)	A	**6)**	B	**7)**	D	**8)**	A
9)	A	**10)**	A	**11)**	B	**12)**	ـشبں
13)	A	**14)**	A	**15)**	B	**16)**	D
17)	C	**18)**	A	**19)**	D	**20)**	C
21)	A	**22)**	B	**23)**	C	**24)**	B
25)	C	**26)**	D	**27)**	B	**28)**	C
29)	A	**30)**	B	**31)**	C	**32)**	B
33)	B	**34)**	B	**35)**	D	**36)**	A

L 7.4 تكامل الدوال النسبية باستخدام الكسور الجزئية

الكسور الجزئية ذات العوامل الخطية المختلفة

إذا كانت العوامل الثلاثة $a_1x + b_1$ و $a_2x + b_2$ و $a_3x + b_3$ كلها مختلفة (أي، لا يُعد أي منها مضاعف عدد ثابت للآخر) ، فإنه يمكننا كتابة:

$$\frac{a_1x + b_1}{(a_2x + b_2)(a_3x + b_3)} = \frac{A}{a_2x + b_2} + \frac{B}{a_3x + b_3}$$

$$\int \frac{a_1x + b_1}{(a_2x + b_2)(a_3x + b_3)}\,dx = \int \frac{A}{a_2x + b_2}\,dx + \int \frac{B}{a_3x + b_3}\,dx$$

1) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{1}{(x-4)(x-2)}\,dx$

2) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx$

3) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{x+8}{x^2-5x-6}\,dx$

الاستاذ/ علي عبدالله
الأستاذ/ علي عبد الله

درجة البسط أقل من درجة المقام

1) إذا كان مقام الدالة النسبية له n عوامل خطية مختلفة، فإن عوامل التعويض تكون جميعها مختلفة a_ix+b_i حيث $i=1,2,\dots,n$ فيمكننا كتابة

$$\frac{P(x)}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\dots(a_nx+b_n)}=\frac{c_1}{a_1x+b_1}+\frac{c_2}{a_2x+b_2}+\dots+\frac{c_n}{a_nx+b_n}$$

4) أوجد قيمة التكامل: $\int\frac{x+4}{x^3+3x^2+2x}dx$

5) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x} dx$

أعد كتابة الكسر: $\frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x} = \frac{3x^2 - 7x - 2}{x\,(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$

بضرب كلا الطرفين في المقام المشترك $x(x+1)(x-1)$، نحصل على

$$3x^2 - 7x - 2 = A(x-1)(x+1) + Bx(x-1) + cx(x+1)$$

عوض $x = 0$

$$\Rightarrow \quad 3(0)^2 - 7(0) - 2 = A(0-1)(0+1) + B(0)(0-1) + c(0)(0+1)$$

$$\Rightarrow \quad -2 = -A \quad \Rightarrow \quad A = 2$$

عوض $\boxed{x = -1} \Rightarrow B = 4$ ، $\boxed{x = 1} \Rightarrow C = -3$

أذن: $\frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x} = \frac{2}{x} + \frac{4}{x+1} + \frac{-3}{x-1}$

فإن:

$$\int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x} dx = \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{4}{x+1} dx + \int \frac{-3}{x-1} dx$$

$$= 2\ln|x| + 4\ln|x+1| - 3\ln|x-1| + c$$

$$= \ln\left|\frac{x^2(x+1)^4}{(x-1)^3}\right| + c$$

الكسور الجزئية ذات العامل الخطي المتكرر

درجة البسط أقل من درجة المقام

2) إذا كان مقام الدالة النسبية يحتوي على عوامل خطية متكررة ، فإن التحليل يبدو كما يلي

$$\frac{P(x)}{(ax+b)^n} = \frac{c_1}{ax+b} + \frac{c_2}{(ax+b)^2} + \frac{c_3}{(ax+b)^3} + \cdots + \frac{c_n}{(ax+b)^n}$$

لتحديد الثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_n$

6) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} dx$

7) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{x-1}{x^3-3x^2}\,dx$

Standardized Test Practice

8) إذا كان: $\int \frac{18-12x}{(4x-1)(x-4)}\,dx = a\ln|4x-1| + b\ln|x-4| + c$

أوجد قيمة a و b

9) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{2x+3}{(x-3)(x+3)}dx$

(A $\frac{2}{3}\ln|x-3|-\frac{4}{3}\ln|x+3|+c$

(B $\frac{3}{2}\ln|x-3|+\frac{1}{2}\ln|x+3|+c$

(C $\frac{3}{2}\ln|x-3|+\frac{3}{2}\ln|x+3|+c$

(D $\frac{2}{3}\ln|x-3|-2\ln|x+3|+c$

10) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{x-2}{(2x+1)(x+3)}dx$

الكسور الجزئية التي تتطلب القسمة المطولة

درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام.

هنا نحتاج إلى إجراء قسمة طويلة قبل محاولة تحليل الدالة النسبية.

11) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{x^3+x+2}{x^2+2x-8}dx$

12) أوجد التكامل غير المحدد للدالة $f(x)=\frac{2x^3-4x^2-15x+5}{x^2-2x-8}$ باستخدام الكسور الجزئية.

درجة البسط أكبر من درجة المقام
علينا إجراء القسمة المطولة قبل محاولة تحليل الكسر الجزئي.

$$\begin{array}{r|l} & 2x \\ \hline x^2-2x-8 & 2x^3-4x^2-15x+5 \\ & \overset{-}{}\,2x^3\overset{+}{-}4x^2\overset{+}{-}16x \\ \hline & x+5 \end{array}$$

وبالتالي ، لدينا

$$f(x)=\frac{2x^3-4x^2-15x+5}{x^2-2x-8}=2x+\boxed{\frac{x+5}{x^2-2x-8}}$$

يمكن توسيع الكسر الصحيح المتبقي على النحو التالي:

$$\boxed{\frac{x+5}{x^2-2x-8}}=\frac{x+5}{(x-4)(x+2)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$$

بضرب طرفي هذه المعادلة في المقام المشترك ، نحصل على: $(x-4)(x+2)$

$$x+5=A(x+2)+B(x-4)$$

$$x=4 \quad\Rightarrow\quad 9=A(4+2)+B(4-4) \quad\Rightarrow\quad A=\frac{3}{2}$$

$$x=-2 \quad\Rightarrow\quad 3=A(-2+2)+B(-2-4) \quad\Rightarrow\quad B=-\frac{1}{2}$$

وبالتالي ، لدينا

$$f(x)=\frac{2x^3-4x^2-15x+5}{x^2-2x-8}=2x+\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$$

$$\int f(x)\,dx=\int 2x\,dx+\int\frac{(3/2)}{x-4}dx+\int\frac{(-1/2)}{x+2}dx$$

$$\int f(x)\,dx=x^2+\frac{3}{2}\ln|x-4|-\frac{1}{2}\ln|x+2|+c$$

الكسور الجزئية ذات العامل من الدرجة الثانية

إذا كانت المقامات تحتوي على عوامل تربيعية غير قابلة للاختزال (أي عوامل تربيعية ليس لها عوامل حقيقية). إذا كانت درجة $P(x)$ أقل من n (درجة المقام) وكانت جميع العوامل في المقام مختلفة.

$$\frac{P(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x+b_2)}=\frac{A}{a_2x+b_2}+\frac{Bx+C}{a_1x^2+b_1x+c_1}$$

حيث $a_1x^2+b_1x+c_1$ العوامل التربيعية غير القابلة للاختزال

13) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{x^2-2x+4}{x^3+4x}dx$

استخدم الكسور الجزئية لإيجاد المشتقة العكسية لـ $f(x)=\dfrac{5x^2+6x+2}{(x+2)(x^2+2x+5)}$

$$\frac{5x^2+6x\ +2}{(x+2)(x^2+2x+5)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

بضرب طرفي هذه المعادلة في المقام المشترك $(x+2)(x^2+2x+5)$، نحصل على:

$$5x^2+6x\ +2=A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x+2)$$

$$x=-2 \quad\Rightarrow\quad 10=5A \quad\Rightarrow\quad \boxed{A=2}$$

$$x=0 \quad\Rightarrow\quad 2=5A+2C \ \Rightarrow\quad 2=5(2)+2C\Rightarrow \boxed{C=-4}$$

$$x=1 \ \Rightarrow\ 13=8A+(B+C)(1+3)\Rightarrow\ 13=8(2)+4(B-4)\quad \boxed{B=3}$$

$$\int\frac{5x^2+6x\ +2}{(x+2)(x^2+2x+5)}dx=\int\frac{2}{x+2}dx+\int\frac{3x-4}{x^2+2x+5}dx$$

$$=2\ln|x+2|+\boxed{\int\frac{3x-4}{x^2+2x+5}dx}$$

استكمال المربع في مقام الحد الثاني

$$\boxed{\int\frac{3x-4}{x^2+2x+5}dx}=\int\frac{3x-4}{(x+1)^2+4}dx=\int\frac{3x-4}{4\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right]}dx$$

$$\int\frac{3x-4}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{3x-4}{(x+1)^2+4}dx=\int\frac{3x-4}{4\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right]}dx$$

ثم استخدم التعويض

$$u=\frac{x\ +\ 1}{2}$$
$$2u=x+1$$
$$2du=dx$$
و $2u-1=x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{6u}{u^2+1}du+\frac{1}{2}\int\frac{-7}{u^2+1}du$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{2u}{u^2+1}dx-\frac{7}{2}\int\frac{1}{u^2+1}dx$$

$$=\frac{3}{2}\ln|u^2+1|-\frac{7}{2}\ \tan^{-1}u+c$$

تعويض عكسي

$$u=\frac{x+1}{2}$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|\left(\frac{x\ +\ 1}{2}\right)^2+1\right|-\frac{7}{2}\ \tan^{-1}\left(\frac{x\ +\ 1}{2}\right)+c$$

$$\int\frac{5x^2+6x\ +2}{(x+2)(x^2+2x+5)}dx=2\,ln|x+2|+\int\frac{3x-4}{x^2+2x+5}dx$$

$$=2\ln|x+2|+\frac{3}{2}\,ln\left|\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right|-\frac{7}{2}\ \ tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$$

0503050917

15) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{1}{x^3 - 1} dx$

16) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x - 4} dx$

17) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{2e^{x}}{e^{3x}+e^{x}}dx$

18) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2}\,dx$

باستخدام الكسور الجزئية نكتب الكسر النسبي كالتالي:

$$\frac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}$$

الضرب في المقام المشترك الأصغر $(x^2+2)^2$ ينتج المعادلة الأساسية

$$8x^3+13x = (Ax+B)(x^2+2) + Cx + D$$

فك الاقواس وجمع الحدود المتشابهة ينتج

$$8x^3+13x = Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx + D$$

$$8x^3+13x = Ax^3 + +Bx^2 + (2A+C)x + (2B+D)$$

الآن ، يمكنك مساواة معاملات الحدود المتشابهة في طرفي المعادلة.

$8 = A$

$0 = 2B + D$

$$8x^3 + 0x^2 + 13x + 0 = Ax^3 + Bx^2 + (2A+C)x + (2B+D)$$

$0 = B$

$13 = 2A + C$

باستخدام القيم المعروفة ويمكنك كتابة:

$$13 = 2A + C \quad \Rightarrow \quad 13 = 2(8) + C \quad \Rightarrow \quad -3 = C$$

$$0 = 2B + D \quad \Rightarrow \quad 0 = 2(0) + D \quad \Rightarrow \quad 0 = D$$

أخيرا ، يمكنك استنتاج ما يلي:

$$\int \frac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2}\,dx = \int \left(\frac{8x}{x^2+2} + \frac{-3x}{(x^2+2)^2}\right) dx$$

$$= 4\ln(x^2+2) + \frac{3}{2(x^2+2)} + constant$$

19) استخدم التعويض والكسور الجزئية لإيجاد التكامل غير المحدد

A) $$\int \frac{5\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x - 4}\,dx$$

B) $$\int \frac{\sec^2 x}{\tan x\,(\tan x + 1)}\,dx$$

(C $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x-4}\,dx$ (D $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$

20) استخدم طريقة الكسور الجزئية للتحقق من صيغة التكامل.

(A $\displaystyle\int \frac{1}{x(a+bx)}\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+bx}\right| + C$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (B$$

ملخص

درجة البسط أقل من درجة المقام أي إذا كانت درجة $p(x)$ أقل من درجة المقام فإن:

	دالة نسبية	الدالة باستخدام الكسور الجزئية
(1	$\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$
(2	$\frac{p(x)}{(x-a)^2}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$
(3	$\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$
(4	$\frac{p(x)}{(x-a)^2(x-b)}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b}$
(5	$\frac{p(x)}{(x-a)(x^2+bx+c)}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$

إذا كانت درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام: استخدم أولا القسمة المطولة ثم استخدم أي مما سبق

L 7-4 تكامل الدوال النسبية باستخدام الكسور الجزئية

أسئلة الاختيار من متعدد

https://t.me/Advanced2024 الأستاذ/ علي عبد الله

(1 أوجد قيمة التكامل: $\int \dfrac{x-2}{(2x+1)(x+3)}\,dx$

(A $\ln|2x+1| + \ln|x+3| + c$

(B $\frac{1}{2}\ln|2x+1| - \ln|x+3| + c$

(C $\ln|x+3| - \ln|2x+1| + c$

(D $\ln|x+3| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + c$

(2 أوجد قيمة التكامل: $\int \dfrac{2x+3}{(x-3)(x+3)}\,dx$

(A $\frac{2}{3}\ln|x-3| - \frac{4}{3}\ln|x+3| + c$

(B $\frac{3}{2}\ln|x-3| + \frac{1}{2}\ln|x+3| + c$

(C $\frac{3}{2}\ln|x-3| + \frac{3}{2}\ln|x+3| + c$

(D $\frac{2}{3}\ln|x-3| - 2\ln|x+3| + c$

(3 إذا كان: $\int \dfrac{18-12x}{(4x-1)(x-4)}\,dx = P\ln|4x-1| + Q\ln|x-4| + c$

ما هي القيمة P و Q

(A $P=-1$ و $Q=-2$

(B $P=-4$ و $Q=-2$

(C $P=1$ و $Q=-2$

(D $P=4$ و $Q=2$

0503050917

4) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$

(A $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C$

(B $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+3}{x-1}\right| + C$

(C $\frac{1}{2}\ln|(x-1)(x+3)| + C$

(D $\ln|(x-1)(x+3)| + C$

5) أوجد F بحيث $F'(x) = \frac{x}{(x-e)^2}$ و $F(0) = 2$

(A $F(x) = \ln|x-e| + \frac{e}{e-x}$

(B $F(x) = \ln|e-x| - \frac{x}{e-x}$

(C $F(x) = \ln|x-e| - \frac{x}{e-x}$

(D $F(x) = \ln|e-x| + \frac{e}{e-x}$

6) استخدم الكسور الجزئية لإيجاد قيمة التكامل: $\int \frac{1}{x(x-2)}\,dx$

(A $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| + C$

(B $\ln\sqrt{x(x-2)} + C$

(C $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right| + C$

(D $\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| + C$

7) إذا كان $\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$ أوجد: $\int \frac{x-1}{(x+1)(x-2)}dx$

(A $\frac{2}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\ln|x-2| + C$

(B $\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + C$

(C $\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{2}{3}\ln|x-2| + C$

(D $\frac{2}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-2| + C$

8) إذا كان: $\int \frac{x}{x^2-4x-5}dx = k\ \ln|(x+1)(x-5)^5| + c$ فإن: $k =$

(A $\frac{1}{6}$

(B 6

(C $\frac{5}{6}$

(D 1

9) ما هي قيمة B في تحليل الكسر الجزئي التالي

$$\int \frac{2x+2}{x^2+10x+24}dx = \int \frac{A}{x+6} + \frac{B}{x+4}dx$$

(A -4

(B -3

(C 4

(D 3

10) استخدم الكسور الجزئية لإيجاد قيمة التكامل: $\int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx$

(A $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + C$

(B $\ln\left(x\sqrt{x^2+1}\right) + C$

(C $\ln(x^2+1) + \ln|x| + C$

(D $\ln|x| - \ln|x^2+1| + C$

11) استخدم الكسور الجزئية لإيجاد قيمة التكامل: $\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}\,dx$

A) $3\ln|x-2|+5\ln|x-3|+C$

B) $5\ln|x-2|+10\ln|x-3|+C$

C) $10\ln|x-2|+5\ln|x-3|+C$

D) $5\ln|x-2|+3\ln|x-3|+C$

12) استخدم الكسور الجزئية لإيجاد قيمة التكامل: $\int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}\,dx$

A) $\ln|x|+2\ln|x^2+1|+C$

B) $\ln|x|-\tan^{-1}x+C$

C) $\ln|x|+\tan^{-1}x+C$

D) $\ln|x|+\ln|x^2+1|+C$

13) أي مما يلي يمثل الكسر الجزئي للكسر النسبي التالي: $\frac{2x-3}{(x-1)^2(x^2+1)}$

A) $\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$

B) $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$

C) $\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$

D) $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x^2+1}$

(14 أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{5\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x - 4}\,dx$

(A $\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 4}\right| + C$

(B $2\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 4}\right| + C$

(C $\ln\left|\frac{\sin x + 4}{\sin x - 1}\right| + C$

(D $\ln|\sin^2 x + 3\cos x - 4| + C$

(15 أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{3}{e^x - 3}\,dx$

(A $\ln|e^x + 3| + x + C$

(B $\ln|e^x - 3| + x + C$

(C $\ln|e^x - 3| - x + C$

(D $\ln|e^x - 3| + C$

(16 أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{3}{(x^2 + x)(x + 1)}\,dx$

(A $3\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{3}{x+1} + C$

(B $3\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| - \frac{3}{x+1} + C$

(C $3\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + C$

(D $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{3}{x+1} + C$

17) إذا كان: $\frac{1}{x^3+4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$ أوجد: $\int \frac{1}{x^3 + 4x} dx$

A) $\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + c$

B) $\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{8}\ln|x^2+4| + c$

C) $\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

D) $\frac{1}{8}\ln|x^2+4| - \frac{1}{4}\ln|x| + c$

18) إذا كان: $\frac{2x^2-5x+2}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ أوجد: $\int \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 + x} dx$

A) $\ln|x| + 5\tan^{-1}x + c$

B) $2\ln|x| - 5\ln|x^2+1| + c$

C) $2\ln|x| - 5\tan^{-1}x + c$

D) $2\ln|x| + 5\ln|x^2+1| + c$

19) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{x-5}{x^2-1} dx$

A) $3\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + c$

B) $2\ln|x+1| - 3\ln|x-1| + c$

C) $2\ln|x+1| + 3\ln|x-1| + c$

D) $3\ln|x+1| - 2\ln|x-1| + c$

20) إذا كان $\int \frac{x+10}{(x-4)(x+3)}dx = \boldsymbol{a}\ln|x-4| - \boldsymbol{b}\ln|x+3| + C$ أوجد $a-2b$

A) 0

B) 1

C) 2

D) 4

21) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{2e^{2x}}{(e^x-1)(e^x+1)}dx$

A) $\ln|e^x(e^{2x}-1)| + c$

B) $\ln|2e^x(e^{2x}-1)| + c$

C) $\ln\left|\frac{1}{e^{2x}-1}\right| + c$

D) $\ln|(e^x-1)(e^x+1)| + c$

22) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{1}{x^2+x-6}dx$

A) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-1}{x+6}\right| + c$

B) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x+3}{x-2}\right| + c$

C) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + c$

D) $\frac{1}{5}\ln|(x-2)(x+3)| + c$

0503050917

23) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{3}{(x+1)(x^2+x)}\,dx$

(A $3\ln|x| - 3\ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + c$

(B $3\ln|x| - 3\ln|x+1| - \frac{3}{x+1} + c$

(C $3\ln|x| + 3\ln|x+1| - \frac{3}{x+1} + c$

(D $3\ln|x(x+1)| + c$

24) أوجد قيمة التكامل: $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}\,dx$

(A $2\sqrt{x} - \ln|\sqrt{x}-1| - \ln|\sqrt{x}+1| + c$

(B $2\sqrt{x} - \ln|\sqrt{x}-1| + \ln|\sqrt{x}+1| + c$

(C $\sqrt{x} + \ln|\sqrt{x}-1| - \ln|\sqrt{x}+1| + c$

(D $2\sqrt{x} + \ln|\sqrt{x}-1| - \ln|\sqrt{x}+1| + c$

L 7-4 تكامل الدوال النسبية باستخدام الكسور الجزئية

مفاتيح الإجابة

Q	___| ∵←	Q	___| ∵←	Q	___| ∵←	Q	___| ∵←
1)	D	2)	B	3)	A	4)	A
5)	A	6)	C	7)	D	8)	A
9)	B	10)	A	11)	B	12)	C
13)	B	14)	A	15)	C	16)	A
17)	B	18)	B	19)	D	20)	F
21)	F	22)	C	23)	A	24)	D

L 7.6 النمذجة باستخدام المعادلات التفاضلية

- إهلاك الأصول
- المرابحة المركبة
- قانون نيوتن للتبريد
- مسائل النمو والتضاؤل

مسائل النمو والتضاؤل

$$y'(t) = k\,y(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = k$$

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt = \int k\,dt \quad \Rightarrow \quad \ln y(t) = kt + c \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{kt+c}$$

$$y(t) = e^{kt}\,e^{c} \quad \Rightarrow \quad y(t) = Ae^{kt}$$

تمثل $y(t)$ عدد البكتيريا في مزرعة في الوقت t

k و A ثوابت:

إذا $k > 0$ (النمو الأسي)

إذا $k < 0$ (الاضمحلال الأسي)

1) أوجـد حلا للمعادلة التفاضلية المعطاة تحقق الشرط الابتدائي المشار إليه

أ) $y' = 4y \quad , \quad y(0) = 2$

ب) $y' = 3y \quad , \quad y(0) = -2$

(∪ $y' = -3y \quad , \quad y(0) = 5$

(⇐ $y' = -2y \quad , \quad y(0) = -6$

(∴ $y' = 2y \quad , \quad y(1) = 2$

(⟹ $y' = -y \quad , \quad y(1) = 2$

2) على فرض أن مستنبت بكتيري يحتوي في البداية على 400 خلية. وبعد ساعة واحدة، يتضاعف عدد أفراد المجتمع إلى 800 (أ) حدد عدد أفراد المجتمع بسرعة بعد 3 ساعات.
(ب) اوجـد معادلة للمجتمع في أي زمن t. (ج) كم سيكون عدد أفراد المجتمع بعد 3.5 ساعات؟

3) على فرض أن مستنبت بكتيري يحتوي في البداية على 100 خلية. وبعد ساعتين، تضاعف عدد أفراد المجتمع إلى 400 (أ) حدد عدد الأفراد بعد 6 ساعات.
(ب) أوجـد معادلة للمجتمع في أي زمن t. (ج) كم سيكون عدد الأفراد بعد 7 ساعات؟

الاستاذ/ علي عبد الله

4) على فرض أن مستنبت بكتيري يتضاعف تعداده ثلاث مرات كل 5 ساعات. إذا كان عدد أفراد المجتمع 200 في البداية،

(أ) حدد سريعاً متى تصل إلى 5400.
(ب) إيجاد معادلة للمجتمع في أي وقت t.
(ج) حدد متى سيصل عدد الفراد إلى 20000.

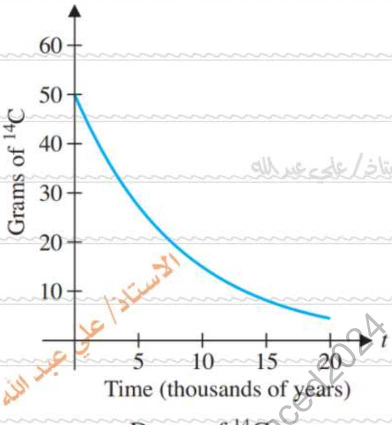
5) على فرض أن مستنبت بكتيري يتضاعف تعداده ثلاث مرات كل 5 ساعات. إذا كان عدد أفراد المجتمع 100 في البداية،

(أ) حدد سريعاً متى تصل إلى 400.
(ب) إيجاد معادلة للمجتمع في أي وقت t.
(ج) حدد متى سيصل عدد الفراد إلى 6000.

6) على فرض أن ّ كمية ما تزداد بطريقة أسية (أي عدد الخلايا في مستنبت بكتيري) بمعدل نمو r .
أثبت أن زمن المضاعفة هو $\frac{\ln 2}{r}$

7) إذا كان لديك 50 جراما من الكربون-14 ^{14}C اليوم، فكم سيتبقى بعد 100 عام؟

ملاحظة: يبلغ عمر النصف للكربون-14 (^{14}C) حوالي 5730 سنة



Decay of ^{14}C

0503050917

https://t.me/Advanced2024 الأستاذ/ علي عبد الله

8) إن نصف العمر لليورانيوم ^{235}U هو حوالي 0.7×10^9 عاما. إذا تم دفن 50جراما في أحد مواقع النفايات النووية، فما الكمية المتبقية بعد مرور 100عام؟ 1000عام؟

9) نصف العمر للمورفين في دماء الإنسان هو 3 ساعات. إذا كان في البداية هناك 0.4 mg مورفين في مجرى الدم، فجد معادلة للكمية الموجودة في مجرى الدم في أي زمن t .

متى تنخفض الكمية لأقل من (أ) 0.1 mg؟ (ب) 0.01 mg؟

10) إن تقدير العلماء لتاريخ إحدى الأحافير التي تحتوي على 20% من الكمية الأصلية من كربون-14 ومتذكرا أن نصف العمر يبلغ 5730عاماً، فكم يبلغ عمر الأحفورة تقريبا؟

0503050917

قانون نيوتن للتبريد

لتكن $y(t)$ درجة حرارة الكائن عند الزمن π ولتكن T_a درجة الحرارة المحيطة (درجة الحرارة المحيطة التي نفترض أنها ثابتة) ، فسنحصل المعادلة التفاضلية $y'(t) = k[y(t) - T_a]$ وحلها العام هو $y(t) = Ae^{kt} + T_a$

$$\boxed{y(t) = Ae^{kt} + T_a}$$

حيث A و k ثوابت يجب تحديدها. T_a درجة حرارة المنطقة المحيطة

1) أوجـد حلا للمعادلة التفاضلية المعطاة ، تحقق الشرط الابتدائي المشار إليه

أ) $y' = y - 50 \quad , \; y(0) = 70$

ب) $y' = 0.1y - 10 \quad , \; y(0) = 80$

2) تبلغ درجة حرارة فنجان من القهوة السريعة $80°C$ عندما يُسكب طازجاً. بعد دقيقتين في غرفة درجة حرارتها $20°C$ ، تم تبريد القهوة حتى وصلت إلى $75°C$. اوجد درجة الحرارة في أي زمن t. وأوجد الزمن الذي تصل فيه درجة حرارة القهوة إلى $50°C$.

3) وضع وعاء حساء درجة حرارته $93°C$ (ساخنة جداً) في غرفة درجة حرارتها $21°C$. بعد دقيقة واحدة برد الحساء حتى وصلت درجة حرارته إلى $82°C$. فمتى تصل درجة الحرارة إلى $49°C$ (ضمناً)؟

4) تم صب مشروب مثلج في درجة حرارة $10°C$. وبعد دقيقتين من وضعه في غرفة درجة الحرارة بها $21°C$ ، ارتفعت درجة حرارته إلى $13°C$. أوجد درجة حرارة المشروب عند أي زمنπ. كم ستبلغ درجة الحرارة بعد 10 دقائق؟ متى سيتم تسخين المشروب حتى $19°C$ ؟

المرابحة المركبة

لنفترض أنك تستثمر P بمعدل مرابحة سنوي r، n مرات مركبة في السنة. فإن قيمة استثمارك بعد t سنة هي

$$y(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

فترة	سنوي	6 أشهر (نصف سنوي)	3 أشهر (ربع سنوي)	شهري	يومي
n	1	2	4	12	365

مرابحة مستمرة

$$y(t) = Pe^{rt}$$

حيث P هو الاستثمار المبدئي ، r هو معدل المرابحة السنوي ، $y(t)$ قيمة الاستثمار بعد t سنة.

1) إذا استثمرت 1000 درهم بمعدل مرابحة سنوية 8% قارن بين قيمة الاستثمار بعد عام واحد مع انواع المرابحة المركبة الآتية:

$P =$ ------------- , --------- , ------------- $t =$

$A =$

سنوي

شهري

يومي

مستمر

2) يستثمر الشخصرشـ مبلغ 10,000 ⟸شـ في عام 1990 ويستثمر الشخص ∩ مبلغ 20,000 ⟸شـ في عام 2000.

(أ) فإذا كان معدل المرابحة السنوية لكلا الشخصين 12٪ مرابحة (مركبة باستمرار)، فما هي قيم الاستثمارات في عام 2010؟

الشخصرشـ	الشخص ∩

(ب) كرر مع معدل مرابحة سنوية ٤٪.

الشخصرشـ	الشخص ∩

(ج) حدد معدل المرابحة السنوية حيث يتساوى استثمار الشخصرشـ بالضبط مع استثمار الشخص ∩

إرشاد: تريد من الشخصرشـ أن يمتلك ⟸شـ ٢٠.٠٠٠ في عام ٢٠٠٠

3) اشترى أحد المؤلفين مجموعة من البطاقات التجارية لكرة السلة في عام 1985 بمبلغ 34$.
في عام 1995 ، كان " السعر الاجمالي " لهذه المجموعة 9800$

(أ) فرضا انه يوجد نسبة مئوية ثابتة للعائد على هذا الاستثمار ، فاوجد معادلة استحقاق المجموعة عند الزمن t سنة (حيث $t = 0$ تقابل عام 1985).

(ب) عند معدل العائد هذا، فما هو المبلغ المستحق للمجموعة في عام 2005؟

(ج) اشترى هذا المؤلف أيضا مجموعة من بطاقات البيسبول في عام 1985 تكلفت 22$. في 1995 كان الربح من هذه المجموعة32$. باستخدام معدل الربح هذا، ما قيمة المجموعة في عام 2005؟

انخفاض قيمة الأصول

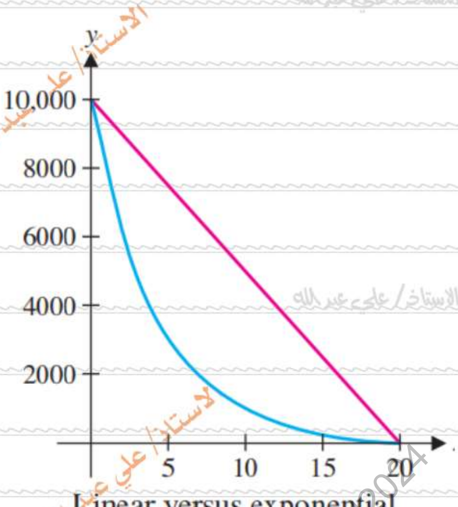
$$v(t) = Ae^{rt}$$

حيث A هي قيمة الأصل في البداية، و r معدل الاستهلاك و t الوقت بالسنوات.

1) (أ) على فرض أن قيمة أحد الأصول هي 10,000 درهم تتناقص باستمرار بمعدل ثابت 24% في كل عام. أوجـد قيمته بعد 10 سنوات؛ وبعد 20 سنة.

(ب) قارن بين هذه القيم وأحد الأصول قيمته 10,000 درهم ولن يكون له قيمة خلال 20 عاماً باستخدام الانخفاض الخطي

قيمة $v(t)$ لأي كمية تتغير بمعدل ثابت r تحقق $v'(t) = r\,v(t)$. هنا $r = -0.24$



Linear versus exponential depreciation

0503050917

2) على فرض أن قيمة أحد الأصول AED 40,000 تتناقص بنسبة مئوية ثابتة 10%.

أوجـد قيمته بعد

(أ) t سنة

(ب) 10 سنوات

(ج) 20 سنة

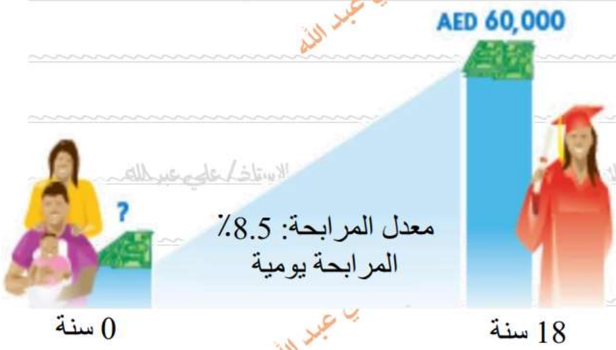
(د) قارن بين هذه القيم وأحد الأصول الذي تبلغ قيمته AED 40,000 ويصبح بلا قيمة خلال 20 عاماً باستخدام التناقص الخطي

3) أثبت أنه لأي عدد ثابت c ، أن $y = x - \frac{1}{2} + ce^{-2x}$
هو حل المعادلة التفاضلية: $y' + 2y = 2x$

4) أثبت أنه لأي عدد ثابت c ، أن $y = \sqrt{3x^2 + c}$ هو حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{3x}{y}$

5) زوجان رزقا للتو بطفل ويريدان البدء على الفور في استثمار مبلغ ما للحصول على مبلغ الذي يحتاجه هذا الطفل في الجامعة. استخدم المعلومات أدناه لتحديد مقدار المبلغ التي يجب عليهم استثماره.

(الجواب حوالي 12987 درهم:)



L 7-6 النمذجة مع المعادلات التفاضلية

أسئلة الاختيار من متعدد

Modeling with Differential Equations

Growth and Decay Problems	Newton's Law of Cooling	Compound Morabaha	Depreciation of Assets
$y'(t) = k\,y(t)$	$y'(t) = k[y(t) - T_a]$	$y(t) = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$	$v'(t) = r\,v(t)$
$y(t) = Ae^{kt}$	$y(t) = Ae^{kt} + T_a$	$y(t) = Pe^{rt}$	$v(t) = Ae^{rt}$

(1 على فرض أن مستنبت بكتيري يحتوي في البداية على 100 خلية. وبعد ساعتين، تضاعف عدد أفراد المجتمع إلى 400. أوجـد معادلة للمجتمع في أي زمن π.

(A $y = 100\,e^{(\ln 2)t}$

(B $y = 100\,e^{\left(\ln\frac{1}{2}\right)t}$

(C $y = 100 + e^{(\ln 2)t}$

(D $y = 400\,e^{(\ln 2)t}$

(2 على فرض أن مستنبت بكتيري يحتوي في البداية على 100 خلية. وبعد ساعتين، تضاعف عدد أفراد المجتمع إلى 400. حدد عدد الأفراد بعد 7 ساعات.

(A $y(7) = 12800$

(B $y(7) = 14200$

(C $y(7) = 1280$

(D $y(7) = 10200$

3) نصف العمر للمورفين في دماء الإنسان هو 3 ساعات. إذا كان في البداية هناك ٠,٤ μ ل مورفين في مجرى الدم، فجـد معادلة للكمية الموجودة في مجرى الدم في أي زمنπ .

(A $y = \frac{2}{5}\, e^{\left(-\frac{\ln 2}{3}\right)t}$

(B $y = \frac{2}{5}\, e^{\left(\frac{\ln 2}{3}\right)t}$

(C $y = \frac{2}{5}\, e^{\left(-\frac{\ln 3}{2}\right)t}$

(D $y = \frac{5}{2}\, e^{\left(-\frac{\ln 2}{3}\right)t}$

4) نصف العمر للمورفين في دماء الإنسان هو 3 ساعات. إذا كان في البداية هناك ٠,٤ μ ل مورفين في مجرى الدم، متى تنخفض الكمية لأقل من ٠,١ μ ل

(A ستنخفض الكمية إلى أقل من ملغ بعد ساعات 0.14

(B ستنخفض الكمية إلى أقل من ملغ بعد 5 ساعات 0.1

(C ستنخفض الكمية إلى أقل من ملغ بعد ساعات 0.16

(D ستنخفض الكمية إلى أقل من ملغ بعد ساعات 0.17

5) ضع وعاء حساء درجة حرارته ً 200°F (ساخنة جدا) في غرفة درجة حرارتها 70°F . بعد دقيقة واحدة برد الحساء حتى وصلت درجة حرارته إلى 180°F . اوجد معادلة درجة الحرارة للوعاء في أي وقتπ.

(A $y = 130\ \exp\left(\left(\ln\frac{11}{13}\right)t\right) + 70$

(B $y = 13\exp\left(\left(\ln\frac{11}{13}\right)t\right) + 70$

(C $y = 130\, e^{\left(\ln\left(\frac{13}{11}\right)\right)t} + 70$

(D $y = 70\, e^{\left(\ln\left(\frac{11}{13}\right)\right)t} + 130$

6) إن تقدير العلماء لتاريخ إحدى الأحافير التي تحتوي على 20% من الكمية الأصلية من كربون-14 وتذكر أن نصف العمر يبلغ 5730 عاماً، فكم يبلغ عمر الأحفورة تقريبا؟

A) حوالي 13305 سنة

B) حوالي 14305 سنة

C) حوالي 12300 سنة

D) حوالي 13300 سنة

7) على فرض أن قيمة أحد الأصول 40,000⟸شى تتناقص بنسبة مئوية ثابتة 10%. أوجد قيمته بعد 10 سنوات

A) $\$40000e^{-1}$

B) $\$40000e^{-2}$

C) $\$40000e^{1}$

D) $\$4000e^{-1}$

8) إذا تم استثمار $ A بمعدل سنوي r مركب شهريا، فكم من المال سيكون في حساب الاستثمار بعد 2 سنة؟

A) $A\left(1+\frac{r}{12}\right)^{24}$

B) $A\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}$

C) Ae^{12r}

D) Ae^{24r}

9) ما هو المبلغ الذي يجب استثماره بمعدل فائدة سنوي 4% ، مركب بشكل مستمر، حتى يصل الاستثمار 100,000$ في غضون 25 عاما؟

(A $100000\,e$

(B $100000\,e^{-1}$

(C $100000(1.04)^{25}$

(D $100000(1.04)^{-25}$

10) على فرض أن مستنبت بكتيري يحتوي في البداية على ٥٠٠ خلية. وبعد ساعتين، تضاعف عدد أفراد المجتمع إلى ١٢٠٠ أوجد عدد البكتيريا بعد 5 ساعات.

(A $500\exp\left(\frac{2}{5}\ln\left(\frac{12}{5}\right)\right) = 500e^{\frac{2}{5}\ln\left(\frac{12}{5}\right)}$

(B $500\exp\left(\frac{5}{2}\ln\left(\frac{5}{12}\right)\right) = 500e^{\frac{5}{2}\ln\left(\frac{5}{12}\right)}$

(C $500\exp\left(\frac{5}{2}\ln\left(\frac{12}{5}\right)\right) = 500e^{\frac{5}{2}\ln\left(\frac{12}{5}\right)}$

(D $500\exp\left(\frac{5}{12}\right) = 500e^{\frac{5}{12}}$

11) عُمر النصف لمـادة مُشـــعة هو 100 سنة. إذا كانت كتلة 500 جم في البداية، فمتى ستصل إلى 20 جم؟

(A $\frac{100\ln 0.04}{\ln 2}$ اعوام

(B $\frac{100\ln 2}{\ln 5}$ اعوام

(C $100\ln 50$ اعوام

(D $\frac{100\ln 25}{\ln 2}$ اعوام

(12 إذا استثمرت 1000 درهم بمعدل مرابحة سنوية 8% قارن بين قيمة الاستثمار بعد عام واحد مع أنواع المرابحة المركبة الآتية:: سنوي ، شهري ، يومي ، مستمر

(A	$A = 1000(1.08)^1$	-----	شهري
(B	$A = 1000e^{0.08(1)}$	-----	سنوي
(C	$A = 1000\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{12(1)}$	-----	يومي
(D	$A = 1000\left(1 + \frac{0.08}{365}\right)^{365(1)}$	-----	مستمر

(13 عمر النصف للراديوم 226 هو 1622 سنة. أوجد ثابت اضمحلاله.

عُمر النصف $= \frac{\ln 2}{k}$

حيث k ثابت الاضمحلال

(A 4.27×10^{-4} سنة$^{-1}$

(B 4.37×10^{-4} سنة$^{-1}$

(C 4.72×10^{-4} سنة$^{-1}$

(D 4.17×10^{-4} سنة$^{-1}$

(14 تضمحل كمية 10 كجم من عنصر مشع إلى 3 كجم بعد 17 عاما. أوجد ثابت اضمحلال لهذا العنصر المشع.

$$y' = ky \ \Rightarrow\ y = Ae^{-kt}$$

(A 0.710 سنة$^{-1}$

(B 0.071 سنة$^{-1}$

(C 0.701 سنة$^{-1}$

(D 0.107 سنة$^{-1}$

15) مجموعة معينة P من البكتيريا تتبع قانون النمو الأسي $P(t) = 2000e^{1.3t}$ (t بالساعات).

(أ) كم عدد البكتيريا الموجودة في البداية؟

(ب) في أي وقت سيكون عدد البكتيريا 10000؟

A) (أ) 1000 (ب) $\frac{\ln 5}{1.3}$

B) (أ) 2000 (ب) $\frac{\ln 1.3}{5}$

C) (أ) 2000 (ب) $\frac{\ln 5}{1.3}$

D) (أ) 3000 (ب) $\frac{\ln 5}{1.3}$

L 7-6 النمذجة مع المعادلات التفاضلية

مفاتيح الإجابة

Q	ــا ∵←	Q	ــا ∵←	Q	ــا ∵←	Q	ــا ∵←	
1)	A	2)	A	3)	A	4)	C	
5)	A	6)	A	7)	A	8)	A	
9)	B	10)	C	11)	D	12)	C	شهري
13)	A	14)	B	15)	C		A	سنوي
							D	يومي
							B	مستمر

0503050917

L 7.7 المعادلات التفاضلية القابلة للفصل

المعادلة التفاضلية هي معادلة تتضمن مشتقات.

رتبة المعادلة التفاضلية هو رتبة أعلى مشتقة موجودة في المعادلة.

درجة المعادلة التفاضلية هي المؤشر التكاملي الموجب لأعلى قوة للمشتقات الأعلى رتبة المعنية.

المعادلة التفاضلية	الرتبة	الدرجة
$y' + 3xy = x^2$		
$y'' - 2y' = 3x$		
$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 3y = 6$		
$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 + 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3y^3 = 6x$		

نحن نعتبر **المعادلة التفاضلية العادية من الدرجة الأولى** $y' = f(x, y)$. هذه المعادلة معادلة **تفاضلية قابلة للفصل** إذا كان بإمكاننا فصل المتغيرات ، أي إذا كان بإمكاننا إعادة كتابتها بالشكل $g(y)y' = h(x)$, الذي تكون فيه جميع x على جانب واحد من المعادلة وجميع y على الطرف الآخر

حدد إذا ما كانت المعادلة التفاضلية قابلة للفصل أم لا.

1. (أ) $y' = (3x + 1)\cos y$ **(ب)** $y' = (3x + y)\cos y$

2. (أ) $y' = 2x(\cos y - 1)$ **(ب)** $y' = 2x(y - x)$

3. (أ) $y' = x^2y + y\cos x$ (ب) $y' = x^2y - x\cos y$

4. (أ) $y' = 2x\cos y - xy^3$ (ب) $y' = x^3 - 2x + 1$

في التمارين التالية، المعادلة التفاضلية قابلة للفصل. أوجد الحل العام، في صورة صريحة إن أمكن.

5. $y' = (x^2 + 1)y$

6. $y' = 2x(y - 1)$

7. $y' = 2x^2y^2$

8. $y' = 2(y^2 + 1)$

9. $y' = \dfrac{6x^2}{y(1 + x^3)}$

10. $y' = \dfrac{3x}{y + 1}$

11. $y' = \dfrac{2x}{y}\, e^{y - x}$

12. $y' = \dfrac{\sqrt{1 - y^2}}{x \ln x}$

13. $y' = \dfrac{\cos x}{\sin y}$

14. $y' = x \cos^2 y$

15. $y' = \dfrac{xy}{1+x^2}$

16. $y' = \dfrac{2}{xy+y}$

أوجـد حل مسألة القيمة الابتدائية~~ح~~ في صورة صريحة إن أمكن

17. حل IVP: $y' = 3(x+1)^2 \quad , \quad y(0) = 1$

18. حل IVP: $y' = \dfrac{9x^2 - \sin x}{\cos y + 5e^y} \quad , \quad y(0) = \pi$

.19 حل IVP: $y(0) = 2$, $y' = \frac{x-1}{y^2}$

.20 حل IVP: $y(0) = -2$, $y' = \frac{x-1}{y}$

.21 حل IVP: $y(0) = 2$, $y' = \frac{4x^2}{y}$

.22 حل IVP: $y(-2) = 1$, $y' = \frac{4y}{x+3}$

الاستاذ/ علي عبد الله

23. حل IVP: $y' = \frac{3x}{4y+1} \quad , \quad y(1) = 4$

24. حل IVP: $y' = \frac{4x}{\cos y} \quad , \quad y(0) = 0$

25. حل IVP: $y' = \frac{x \sin x}{\cos y} \quad , \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$

.26 حل IVP: $y' = \frac{\tan y}{x} \quad , \quad y(1) = \frac{\pi}{4}$

.27 حل IVP: $y' = e^{x-y} \quad , \quad y(0) = \ln 3$

.28 حل IVP: $y' = \frac{4xy}{2x^2+2} \quad , y(0) = 1$

النمو اللوجستي

$y'(t) = ky(M - y)$. وحلها العام هو $y = \frac{AM\,e^{kMt}}{1 + A\,e^{kMt}}$

حيث M هو الحد الأقصى للسكان المستدامين k و A ثابتة.

.29 $M = 1000$ قيمة عظمى معطاة في المجتمع السكاني المستدام (وهذا يمكن أن يقاس بالملايين أو بالطن، وما إلى ذلك) ومعدل نمو $k = 0.007$ ، أوجـد تعبيراً مناسبا للمجتمع السكاني في أي زمن π ، لمجتمع سكاني ابتدائي معطى $y(0) = 350$ وبفرضية النمو اللوجستي

استخدم معادلة النمو اللوجستي للمساعدة في حل IVP.

$$y'(t) = ky(M - y) \quad , \quad y = \frac{AM\,e^{kMt}}{1 + A\,e^{kMt}}$$

30. $y' = 3y(2 - y)$, $y(0) = 1$

31. $y' = y(3 - y)$, $y(0) = 2$

32. $y' = 3y(1 - y)$, $y(0) = \frac{3}{4}$

33. $y' = y(3 - y)$, $y(0) = 0$

https://t.me/Advanced2024 الأستاذ/ علي عبد الله

استراتيجيات الاستثمار لصنع مليون

إذا تم الحصول على الفائدة بمعدل r ويفترض أن يتم إجراء ودائع إضافية على أساس مستمر. إذا كان معدل الإيداع هو d درهم إماراتي في السنة، فإن المبلغ $A(t)$ الموجود في الحساب بعد t سنة يحقق المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dA}{dt} = rA + d$$

حيث $A(t)$ يكون المبلغ في الحساب بعد t سنة

34. يتم استثمار المال بمُرابحة سنوية 8% مُركبة مستمرة. إذا تم الإيداع بشكل مستمر بمعدل ٢٠٠٠ ⟸شه سنوياً، فأوجد حجم الاستثمارات الابتدائية المطلوبة لبلوغ مليون درهم خلال 20 عاماً

L 7-7 المعادلات التفاضلية القابلة للفصل

أسئلة الاختيار من متعدد

(1 أي المعادلات التفاضلية الآتية قابلة للفصل؟

$$\text{I}\quad \frac{dy}{dx} = xy \qquad \text{II}\quad \frac{dy}{dx} = x + y \qquad \text{III}\quad \frac{dy}{dx} = xy + y$$

(A **I** فقط

(B **I** و **II**

(C **I** و **III**

(D الثلاثة قابلة للفصل

(2 أي المعادلات التفاضلية الآتية قابلة للفصل؟

$$\text{I}\quad y' = \frac{x}{y}\, e^{y-x} \qquad \text{II}\quad y' = 2x(\cos y - 1) \qquad \text{III}\quad y' = (1 + x^2)y$$

(A **I** فقط

(B **I** و **II**

(C **I** و **III**

(D الثلاثة قابلة للفصل

(3 أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية القابلة للفصل:

$$y' = \frac{x\,y}{1 + x^2}$$

(A $y = A\sqrt{1 + x^2}$ ، A ثابت

(B $y = Ae^{\sqrt{1+x^2}}$ ، A ثابت

(C $y = A\sqrt{1 - x^2}$ ، A ثابت

(D $y = \ln\left|\sqrt{1 + x^2}\right| + c$ ، c ثابت

(4 أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = 3x^2y + 2y$

(A $y = Ae^{x^3+2x}$ ، A ثابت

(B $y = x^3 + 2x + A$ ، A ثابت

(C $y = e^{x^3+2x} + A$ ، A ثابت

(D $y = \pm\, e^{x^3+2x} + A$ ، A ثابت

(5 الرسوم البيانية لحلول المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

(A خطوط مستقيمة

(B الدوائر

(C القطع المكافئ

(D القطوع الزائدة

(6 أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\frac{dW}{dt} = 0.05W - 200$

(A $W = Ae^{t} + 4000$ ، A ثابت .

(B $W = Ae^{-10t}$ ، A ثابت .

(C $W = 20e^{0.05t} + 4000 + A$ ، A ثابت .

(D $W = Ae^{0.05t} + 4000$ ، A ثابت .

(7 أوجد الحل المحدد للمعادلة التفاضلية $(t^2+1)\frac{dP}{dt} = 2Pt$ حيث $P(0) = 3$.

(A $P = \ln(t^2+1) + 3$

(B $P = 3t^2 + 1$

(C $P = 3t^2 + 3$

(D $P = t^2 + 3$

(8 أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = \frac{2x}{y}e^{y-x}$ في شكل صريح إن أمكن

(A $\frac{1+y}{e^y} = \frac{2(1+x)}{e^x} + c$ ، c ثابت

(B $\frac{1+y}{e^y} = \frac{1+x}{e^x} + c$ ، c ثابت

(C $(1+y)e^y = 2(1+x)e^x$ ، c ثابت

(D $(1+y)e^x = 2(1+x)e^y + c$ ، c ثابت

(9 أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = 3(1+y^2)$ في شكل صريح إن أمكن

(A $y = \tan(3x) + c$ ، c ثابت

(B $y = \tan(3x + c)$ ، c ثابت

(C $y = \tan^{-1}(3x + c)$ ، c ثابت

(D $y = \sec(3x + c)$ ، c ثابت

(10 أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = x(y-1)$ في شكل صريح إن أمكن

(A $y = Ae^{\frac{1}{2}x^2} + 1$ ، A ثابت

(B $y = Ae^{\frac{1}{2}x^2} - 1$ ، A ثابت

(C $y = Ae^{x^2} + 1$ ، A ثابت

(D $y = Ae^{x^2} - 1$ ، A ثابت

(11 أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = \frac{\sin x}{\cos y}$ في شكل صريح إن أمكن

(A $\sin y = A - \cos x$ ، A ثابت

(B $\cos y = A + \sin x$ ، A ثابت

(C $\sin y = A + \cos x$ ، A ثابت

(D $\cos y = A - \sin x$ ، A ثابت

(12 أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = 3x^2 \cos^2 y$ في شكل صريح إن أمكن

(A $y = \tan^{-1}(x^3 + A)$ ، A ثابت

(B $y = \tan^{-1}(9x^3 + A)$ ، A ثابت

(C $y = \tan x^3 + A$ ، A ثابت

(D $y = \tan^{-1} x^3 + A$ ، A ثابت

(13 حل IVP ، صراحة إن أمكن $y' = \frac{\cot y}{x}$ ، $y(1) = \frac{\pi}{3}$

(A $y = \cos^{-1} 2x$

(B $y = \sec^{-1} 2x$

(C $y = \cos^{-1} x + 2$

(D $y = \sec^{-1} x + 2$

(14 حل IVP ، صراحة إن أمكن ، حيث $\frac{dy}{dt} = y - 50$ ، $y(0) = 70$

(A $y = 20e^t + 50$

(B $y = 20e^t - 50$

(C $y = 20e^t + 120$

(D $y = 50e^t + 20$

(15 $M = 1000$ قيمة عظمى معطاة في المجتمع السكاني المستدام (وهذا يمكن أن يقاس بالملايين أو بالطن، وما إلى ذلك) ومعدل نمو $k = 0.007$ ، أوجـد تعبيراً مناسبا للمجتمع السكاني في أي زمنπ ، لمجتمع سكاني ابتدائي معطى $y(0) = 350$ وبفرضية النمو اللوجستي

المعادلة اللوجستية

$$y = \frac{AMe^{kMt}}{1 + Ae^{kMt}}.$$

(A $y = \frac{35000e^{7t}}{65+35e^{7t}}$

(B $y = \frac{35000e^{7t}}{35+65e^{7t}}$

(C $y = \frac{3500e^{7t}}{65+35e^{7t}}$

(D $y = \frac{35000e^{7t}}{65-35e^{7t}}$

16) حل مسألة القيمة الابتدائية $y' = 2e^{x-y}$ حيث $y(1) = \ln(2e+1)$

A) $y = \ln(e^x + 1)$

B) $y = \ln(2e^{x+1} + 1)$

C) $y = \ln(2e^x + 1)$

D) $y = 2e^x + 1$

17) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية القابلة للفصل: $(x^2+4)\dfrac{dy}{dx} = xy$

A) $y = A\sqrt{x^2+4}$ ، A ثابت

B) $y = \sqrt{x^2+4} + C$ ، C ثابت

C) $y = \dfrac{C}{\sqrt{x^2+4}}$ ، C ثابت

D) $y = Ae^{\sqrt{x^2+4}}$ ، A ثابت

18) إذا كان $\dfrac{dy}{dx} = y\sec^2 x$ وكانت $y = 5$ عندما $x = 0$ فإن $y = \dots\dots\dots$

A) $e^{\tan x} + 4$

B) $e^{\tan x} + 5$

C) $5e^{\tan x}$

D) $\tan x + 5e^x$

19) إذا كان $\dfrac{dy}{dx} = \sin x\cos^2 x$ وكانت $y = 0$ عندما $x = \dfrac{\pi}{2}$ فأوجد قيمة y عندما $x = 0$

A) -1

B) $\dfrac{1}{3}$

C) 0

D) $-\dfrac{1}{3}$

$$\frac{dy}{dx} = \sin x\cos^2 x$$

$$\int dy = \int \sin x\cos^2 x\,dx$$

$$y = -\frac{1}{3}\cos^3 x + c$$

استخدم الشرط الأولي $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$$0 = -\frac{1}{3}\cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right) + c$$

$$\Rightarrow c = 0$$

$$y = -\frac{1}{3}\cos^3 x$$

حيث $x = 0$

$$y = -\frac{1}{3}\cos^3(0) = -\frac{1}{3}$$

20) إذا كان $y' = \sin x \cos^2 y$ وكانت $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ فإن قيمة $y(0)$ تساوي

A) $-\frac{\pi}{4}$

B) $\frac{3\pi}{4}$

C) $-\frac{\pi}{4} \ , \ \frac{3\pi}{4}$

D) 0

21) أي المعادلات التفاضلية الآتية غير قابلة للفصل؟

A) $y' = \sin(x+y)$

B) $y' = e^{x - \ln y}$

C) $y' = \frac{xy}{x^2+1}$

D) $\frac{y'}{x} = \frac{\cos x}{y}$

22) إذا كان $y' = e^{x-y}$ وكانت $y(0) = 0$ فإن قيمة $y(2)$ تساوي

A) 2

B) 4

C) $2e$

D) $2e^2$

23) أي من التالي يمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = \frac{5}{5x^2+5} - \csc^2 x$ ؟

A) $y = \tan^{-1} x + 5\cot x + c$

B) $y = 5\tan^{-1} x + \cot x + c$

C) $y = \tan^{-1} x + \cot x + c$

D) $y = \tan^{-1} x - \cot x + c$

24) أي من التالي يمثل حل المعادلة التفاضلية؟ $y' = \frac{-x}{ye^{x^2}}$ ، $y(0) = 1$ في صيغة ضمنية

A) $y^2 = 1 - e^{-2x}$

B) $y^2 = 1 + e^{-x^2}$

C) $y^2 = e^{-2x}$

D) $y^2 = e^{-x^2}$

25) أي من التالي يمثل حل المعادلة التفاضلية $y' = \sqrt{1 - y^2}$ ؟

A) $y = \cos x + c$

B) $y = \sin(x + c)$

C) $y = \cos(x + c)$

D) $y = \sin^{-1} x + c$

26) أي من التالي يمثل حل المعادلة التفاضلية $y' = x\cos x$ و $y(0) = 2$ ؟

A) $y = x\sin x + \cos x + 1$

B) $y = x\sin x - \cos x + 1$

C) $y = x\cos x + \sin x + 1$

D) $y = x\cos x - \sin x + 1$

27) أي من التالي يمثل حل المعادلات التفاضلية $y' = \frac{x}{x^2 + 1}$ و $y(0) = -3$ ؟

A) $y = \ln\sqrt{x^2 + 1} - 3$

B) $y = \ln\sqrt{x^2 + 1} + 3$

C) $y = 2\ln(x^2 + 1) - 3$

D) $y = \frac{1}{2}\tan^{-1} x - 3$

(28 حل المعادلة التفاضلية: $x\,dx + \sec x \sin y\,dy = 0$

(A $\cos y = x\cos x + \sin x + c$

(B $\cos y = x\sin x + \cos x + c$

(C $\cos y - \sin x = \cos x + c$

(D $x\cos y = \sin x + \cos x + c$

(29 أوجد الحل المحدد للمعادلة التفاضلية $y' = 5$ عندما $x = 0$ و $y = 2$

(A $y = 5x - 2$

(B $y = 2x + 5$

(C $y = 5x + 2$

(D $y = 10x$

(30 إذا كان $(x^2+1)dy = 2xy\,dx$ و $y(x_0) = 10$ ، $y(0) = 1$ فما قيمة x_0 ؟

(A $x_0 = 3$

(B $x_0 = \ln 3$

(C $x_0 = 2$

(D $x_0 = \ln 2$

(31 معادلة المنحنى الذي يمر عبر النقطة $(1,1)$ وميله يعطى بالعلاقة $\frac{2y}{x}$ هي

(A $y = x^2$

(B $y = x^2 + 1$

(C $y = x^2 - 1$

(D $y = \frac{3}{2}x^2$

(32 حل IVP: $y' = xe^{x^2-\ln y}$ و $y(0) = 2$

(A $y^2 = e^{x^2} + 1$

(B $y^2 = e^{x^2} - 1$

(C $y^2 = 1 - e^{x^2}$

(D $y^2 = e^{x^2} + 3$

(33 حل IVP: $y' = \dfrac{2x^2y - 8y}{x+2}$ و $y(0) = 2$

(A $y = e^{x^2-4x}$

(B $y = \frac{1}{2}e^{x^2-4x}$

(C $y = e^{x^2+4x}$

(D $y = e^{x^2-2x}$

(34 أوجد الحل العام في شكل صريح للمعادلة التفاضلية القابلة للفصل: $y' = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{x\ln x}$

(A $y = \sin(\ln x + c)$

(B $y = \sin(\ln(\ln x) + c)$

(C $y = \ln(\ln x) + c$

(D $y = \sin^{-1}(\ln x) + c$

(35 أوجد حل ~~ح~~: $y' = \dfrac{\tan y}{x}$ و $y(1) = \frac{\pi}{2}$

(A $y = \sin x$

(B $\sin y = 2x$

(C $y = \sin^{-1} x$

(D $y = \sin^{-1} x + 2$

L 7-7 المعادلات التفاضلية القابلة للفصل

مفاتيح الإجابة

Q	┘ ∵←	Q	┘ ∵←	Q	┘ ∵←	Q	┘ ∵←	Q	┘ ∵←
1)	C	**2)**	D	**3)**	A	**4)**	A	**5)**	B
6)	D	**7)**	C	**8)**	A	**9)**	C	**10)**	A
11)	A	**12)**	A	**13)**	B	**14)**	A	**15)**	A
16)	C	**17)**	A	**18)**	C	**19)**	D	**20)**	C
21)	A	**22)**	A	**23)**	C	**24)**	D	**25)**	B
26)	A	**27)**	A	**28)**	B	**29)**	C	**30)**	A
31)	A	**32)**	⟸	**33)**	~ش	**34)**	∩	**35)**	∪

تم بحمد الله

نرجو لكم التوفيق والنجاح

لا تنسونا من صالح دعائكم

0503050917