قناة الفلاح للرياضيات

٢٠٢٦

الصف الحادي عشر علمي

الفصل الدراسي الثاني

حلول

المراجعة النهائية

أ / محمد نوري الفلاح

(1 إذا كان $z_2 = 5 - 2i \quad , z_1 = 3 + 4i$ فأوجد:

1) $\overline{3z_1 - 2z_2}$ **2)** $\frac{z_2}{z_1}$

1) $3z_1 - 2z_2 = 3(3+4i) - 2(5-2i) = 9 + 12i - 10 + 4i = -1 + 16i$

$\overline{3z_1 - 2z_2} = \overline{-1+16i} = -1 - 16i$

2) $\frac{z_2}{z_1} = \frac{5-2i}{3+4i} = \frac{5-2i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{15 - 20i - 6i + 8i^2}{(3)^2 + (4)^2}$

$= \frac{15 - 20i - 6i - 8}{9+16}$

$= \frac{7 - 26i}{25} = \frac{7}{25} - \frac{26}{25}i$

(2 إذا كان $z_2 = 3 + i \quad , z_1 = 5 - 4i$ فأوجد:

1) $z_1 . z_2$ **2)** $\overline{z_1 + z_2}$ **3)** $(z_2)^{-1}$

1) $z_1 \cdot z_2$

$= (5-4i)(3+i)$

$= 15 + 5i - 12i - 4i^2$

$= 15 + 5i - 12i + 4$

$= 19 - 7i$

2) $z_1 + z_2 = (5-4i) + (3+i)$

$= (5+3) + (-4i+i)$

$= 8 - 3i$

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{8 - 3i}$

$= 8 + 3i$

3) $z_2^{-1} = \frac{1}{z_2}$

$= \frac{1}{3+i}$

$= \frac{1}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i}$

$= \frac{3-i}{(3)^2 + (1)^2}$

$= \frac{3-i}{10}$

$= \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$

3) إذا كان: $z_1 = 1 + i \quad , z_2 = 3 - 4i$

1) أوجد $2z_1 - \bar{z}_2$ 2) اكتب العدد z_1 في الصورة المثلثية

1) $2z_1 - \overline{z_2} = 2(1+i) - \overline{(3-4i)}$

$= 2 + 2i - (3+4i) = 2 + 2i - 3 - 4i = -1 - 2i$

2) $z_1 = 1 + i$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

زاوية الاسناد α :

$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{1}{1} \right| = \frac{\pi}{4}$

x موجبة ، y موجبة

θ تقع في الربع الأول

$\theta = \alpha = \frac{\pi}{4}$

الصورة المثلثية : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

4) اكتب بالصورة الجبرية العدد المركب: $\overline{\left(\frac{5-2i}{i+3}\right)}$

$\overline{\left(\frac{5-2i}{i+3}\right)} = \frac{\overline{5-2i}}{\overline{3+i}} = \frac{5+2i}{3-i}$

$= \frac{5+2i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i}$

$= \frac{15 + 5i + 6i + 2i^2}{(3)^2 + (-1)^2} = \frac{15 + 5i + 6i - 2}{10}$

$= \frac{13 + 11i}{10} = \frac{13}{10} + \frac{11}{10}i$

5) إذا كان: $z_1 = -2 + 2i \quad , z_2 = 1 - i$

1) ضع العدد z_2 في الصورة المثلثية 2) حل المعادلة $2z + \bar{z_1} = 3i\,(z_2)^2$

1) $z_2 = 1 - i$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

زاوية الإسناد α

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{-1}{1}\right| = \frac{\pi}{4}$

x موجبة ، y سالبة

θ تقع في الربع الرابع

$\theta = 2\pi - \alpha$

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

الصورة المثلثية:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

2)

$2z + \bar{z_1} = 3i\,(z_2)^2$

$2z + (-2+2i)^- = 3i(1-i)^2$

$2z - 2 - 2i = 3i(1 - 2i + i^2)$

$2z - 2 - 2i = 3i(1 - 2i - 1)$

$2z - 2 - 2i = 3i(-2i)$

$2z - 2 - 2i = 6$

$2z = 6 + 2 + 2i$

$\frac{2z}{2} = \frac{8 + 2i}{2}$

$z = 4 + i$

$\{4 + i\} = 2.5$

6) اكتب العدد $\frac{2}{3-i}$ في الصورة الجبرية.

$\frac{2}{3-i} = \frac{2}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i}$

$= \frac{6 + 2i}{(3)^2 + (-1)^2}$

$= \frac{6 + 2i}{10}$

$= \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$

7) حول الاحداثيات القطبية إلى ديكارتية حيث $N(5, \frac{\pi}{4})$

$r = 5 \quad , \theta = \frac{\pi}{4}$

$x = r\cos\theta = 5\cos\frac{\pi}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$y = r\sin\theta = 5\sin\frac{\pi}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2})$ الاحداثيات الديكارتية

8) أوجد الزوج المرتب (r, θ) للنقطة $D(3\sqrt{3}, 3)$ حيث $0 \leq \theta < 2\pi$

$x = 3\sqrt{3}, y = 3$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2+(3)^2} = 6$

نفرض α زاوية الإسناد

$\alpha = \tan^{-1}|\frac{y}{x}| = \tan^{-1}|\frac{3}{3\sqrt{3}}| = \frac{\pi}{6}$

x موجبة ، y موجبة

θ تقع في الربع الأول

$\theta = \alpha = \frac{\pi}{6}$

$(6, \frac{\pi}{6})$ الإحداثيات القطبية

9) حول من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية للنقطة: $L(3\sqrt{3}, -3)$, $0 \le \theta < 2\pi$

$x = 3\sqrt{3}$, $y = -3$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2+(-3)^2} = 6$

نفرض α زاوية الإسناد

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{-3}{3\sqrt{3}}\right| = \frac{\pi}{6}$

x موجبة ، y سالبة

θ تقع في الربع الرابع

$\theta = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$

الإحداثيات القطبية $\left(6, \frac{11\pi}{6}\right)$

10) أوجد مجموعة حل المعادلة: $z + i = 2\bar{z} + 1$ في مجموعة الأعداد المركبة C

نفرض $z = x+yi$ فيكون $\bar{z} = x-yi$

$z + i = 2\bar{z} + 1$

$x+yi+i = 2(x-yi)+1$

$x + (y+1)i = 2x+1 - 2yi$

$x = 2x+1$ || $y+1 = -2y$

$x - 2x = 1$ || $y + 2y = -1$

$-x = 1$ || $3y = -1$

$x = -1$ || $y = -\frac{1}{3}$

$\left\{-1 - \frac{1}{3}i\right\} = $ ح.م

11) أوجد مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 2z + 4 = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة C

$a=1$, $b=-2$, $c=4$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(4) = -12 = 12i^2$

$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{-12}}{2(1)} = 1+\sqrt{3}i$

$z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{-12}}{2(1)} = 1-\sqrt{3}i$

م.ح $= \{1+\sqrt{3}i \text{ و } 1-\sqrt{3}i\}$

12) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب: $z = 5 + 12i$

نفرض $w = m+ni$ جذراً تربيعياً للعدد z فيكون $w^2 = z$

$(m+ni)^2 = 5+12i$

$m^2 - n^2 + 2mni = 5 + 12i$

$m^2 - n^2 = 5$ ①

$2mn = 12$ ②

$|w|^2 = |z|$

$(\sqrt{m^2+n^2})^2 = \sqrt{(5)^2+(12)^2}$

$m^2 + n^2 = 13$ ③

بجمع ① مع ③

$2m^2 = 18 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

نعوض في ③

$9 + n^2 = 13$

$n^2 = 4 \Rightarrow n = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

من المعادلة ② نجد m,n لها نفس الاشارة

$w_1 = 3+2i$, $w_2 = -3-2i$

13) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب: $z = -3 - 4i$

نفرض $w = m + ni$ جذرا تربيعيا للعدد z فيكون $w^2 = z$

$$(m+ni)^2 = -3-4i$$

$$m^2 - n^2 + 2mni = -3-4i$$

$$m^2 - n^2 = -3 \quad (1)$$
$$2mn = -4 \quad (2)$$

$$|w|^2 = |z|$$

$$\left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2 = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2}$$

$$m^2 + n^2 = 5 \quad (3)$$

بجمع (3) مع (1)

$$2m^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

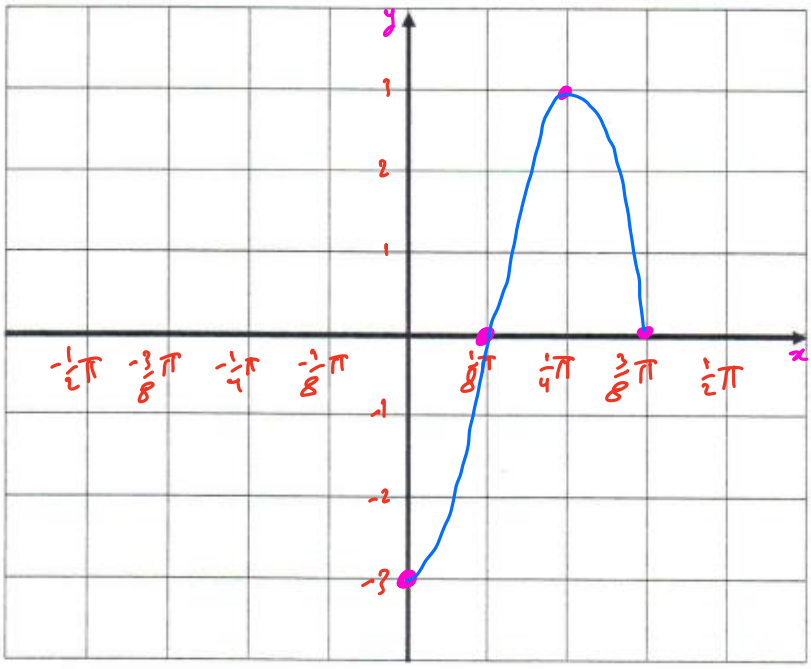
نعوض في (3)

$$1 + n^2 = 5 \Rightarrow n^2 = 5 - 1 = 4 \Rightarrow n = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

من المعادلة 2 نجد m, n لهما إشارتين مختلفتين

$$w_1 = 1 - 2i \quad , \quad w_2 = -1 + 2i$$

14) أوجد السعة والدورة للدالة: $y = -3\cos 4x$, $0 \le x \le \frac{3\pi}{8}$ ثم ارسم بيانها.



$a = 3$, $b = 4$

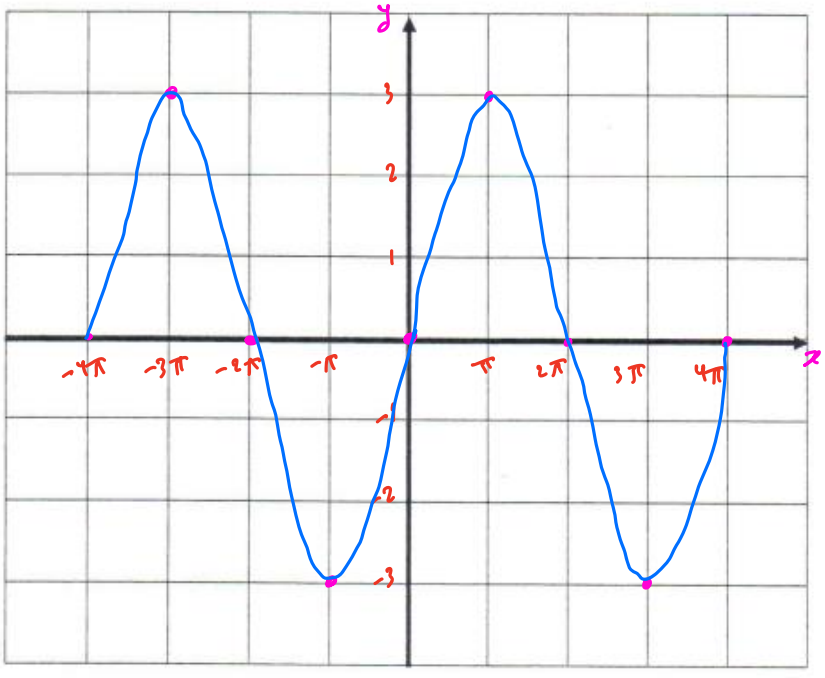
السعة: $|a| = |-3| = 3$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{1}{2}\pi$

ربع الدورة $\frac{1}{2}\pi \div 4 = \frac{1}{8}\pi$

x	0	$\frac{1}{8}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$4x$	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\cos 4x$	1	0	-1	0	1
y	-3	0	3	0	-3

15) أوجد السعة والدورة للدالة: $y = 3\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$, $-4\pi \le x \le 4\pi$ ثم ارسم بيانها.



$a = 3$, $b = \frac{1}{2}$

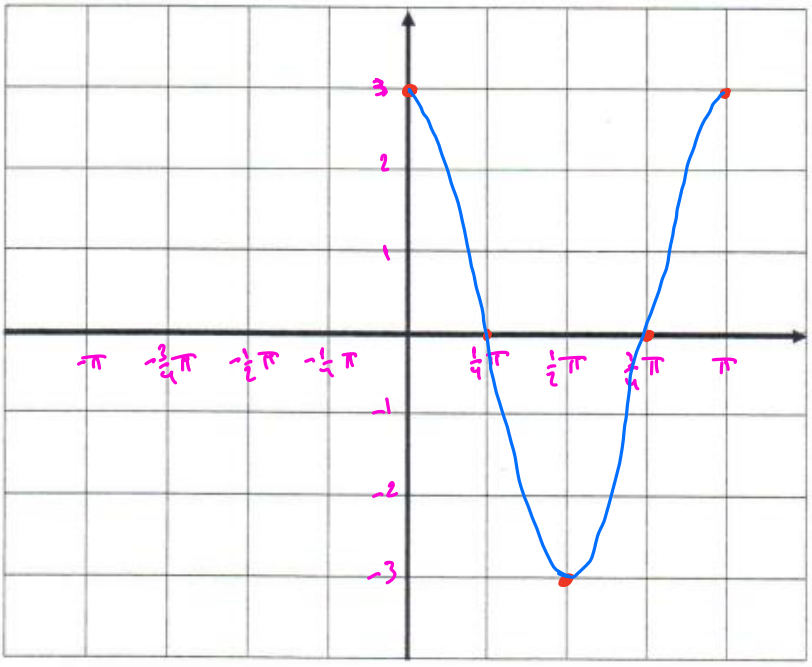
السعة: $|a| = |3| = 3$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|} = 4\pi$

ربع الدورة $4\pi \div 4 = \pi$

x	0	π	2π	3π	4π
$\frac{1}{2}x$	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\frac{1}{2}x$	0	1	0	-1	0
y	0	3	0	-3	0

16) أوجد السعة والدورة ثم ارسم دورة واحدة لبيان الدالة: $y = 3\cos 2x$



$a = 3$ ، $b = 2$

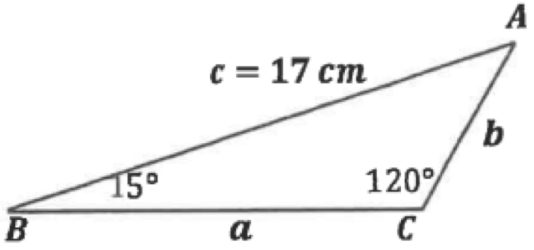
السعة $|a| = |3| = 3$

الدورة $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

ربع الدورة: $\pi \div 4 = \frac{1}{4}\pi$

x	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π
$2x$	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\cos 2x$	1	0	-1	0	1
y	3	0	-3	0	3

17) حل المثلث ABC :



$\beta = 15^\circ$ ، $\gamma = 120^\circ$ ، $c = 17\,cm$

مجموع قياسات زوايا المثلث 180°

$\alpha = 180 - (15 + 120) = 45^\circ$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 45}{a} = \frac{\sin 15}{b} = \frac{\sin 120}{17}$$

$$\frac{\sin 45}{a} = \frac{\sin 120}{17}$$

$$a = \frac{17 \times \sin 45}{\sin 120}$$

$$a \approx 13.88\ cm$$

$$\frac{\sin 15}{b} = \frac{\sin 120}{17}$$

$$b = \frac{17 \times \sin 15}{\sin 120}$$

$$b = 5.08\ cm$$

(18 حل ΔABC حيث: $\alpha = 36^\circ \ , \ \beta = 48^\circ \ , \ a = 8\ cm$

مجموع قياسات زوايا المثلث 180°

$$\gamma = 180 - (36 + 48) = 96^\circ$$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 36}{8} = \frac{\sin 48}{b} = \frac{\sin 96}{c}$$

$$\frac{\sin 36}{8} = \frac{\sin 48}{b}$$

$$b = \frac{8 \times \sin 48}{\sin 36}$$

$$b \approx 10.11\ cm$$

$$\frac{\sin 36}{8} = \frac{\sin 96}{c}$$

$$c = \frac{8 \times \sin 96}{\sin 36}$$

$$c \approx 13.53\ cm$$

(19 حل ΔABC حيث: $a = 7\ cm \ , \ b = 6\ cm \ , \ \alpha = 26.3^\circ$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 26.3}{7} = \frac{\sin\beta}{6} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 26.3}{7} = \frac{\sin\beta}{6}$$

$$\sin\beta = \frac{6 \times \sin 26.3}{7} \approx 0.379$$

shift → sin → 0.379

$$\beta = 22.27^\circ$$

$$\gamma = 180 - (26.3 + 22.27) = 131.43^\circ$$

$$\frac{\sin 26.3}{7} = \frac{\sin 131.43}{c}$$

$$c = \frac{7 \times \sin 131.43}{\sin 26.3}$$

$$c = 11.845\ cm$$

$$\beta_2 = 180 - 22.27 = 157.7$$

$$\alpha + \beta_2 = 26.3 + 157.73 = 184.03$$

$$\alpha + \beta_2 > 180$$

مرفوضة

(20 حل ΔABC حيث: $a = 9\ cm\ ,\ b = 7\ cm\ ,\ \gamma = 20°$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = (9)^2 + (7)^2 - 2(9)(7)\cos 20 \approx 11.59$

$c = \sqrt{11.59} = 3.4\ cm$

$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{(7)^2 + (3.4)^2 - (9)^2}{2 \times 7 \times 3.4} = -\dfrac{73}{170}$

$\alpha \approx 115.4°$

مجموع قياسات زوايا المثلث $180°$

$\beta = 180 - (20 + 115.4) = 44.6°$

(21 حل ΔABC حيث: $b = 9\ cm\ ,\ c = 6\ cm\ ,\ \alpha = 60°$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = (9)^2 + (6)^2 - 2(9)(6)\cos 60 = 63$

$a = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}\ cm$

$\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{(3\sqrt{7})^2 + (6)^2 - (9)^2}{2(3\sqrt{7})(6)} = \dfrac{\sqrt{7}}{14}$

$\beta \approx 79.1°$

مجموع قياسات زوايا المثلث 180

$\gamma = 180 - (60 + 79.1) = 40.9°$

(22 حل ΔABC حيث: $a = 9\ cm\ ,\ b = 7\ cm\ ,\ c = 5\ cm$

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(7)^2+(5)^2-(9)^2}{2(7)(5)} = -\frac{1}{10}$$

$$\alpha \approx 95.7^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{(9)^2+(5)^2-(7)^2}{2(9)(5)} = \frac{19}{30}$$

$$\beta \approx 50.7$$

مجموع قياسات زوايا المثلث 180°

$$\gamma = 180-(95.7+50.7) = 33.6^\circ$$

(23 ABC مثلث فيه: $a = 9\ cm\ ,\ b = 7\ cm\ ,\ c = 5\ cm$ أوجد:

1) قياس أكبر زاوية 2) مساحة سطح المثلث ABC مستخدما قاعدة هيرون

1) الزاوية الأكبر α تقابل أطول ضلع a

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(7)^2+(5)^2-(9)^2}{2\times7\times5} = -\frac{1}{10}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{10}\right) \approx 95.7^\circ$$

2)

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+7+5}{2} = 10.5$$

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{10.5\,(10.5-9)(10.5-7)(10.5-5)}$$

$$\approx 17.4\ cm^2$$

24) أوجد مساحة سطح مثلث أطوال أضلاعه: $7\ cm\ ,\ 5\ cm\ ,\ 8\ cm$

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+5+8}{2} = 10$$

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$A = \sqrt{10(10-7)(10-5)(10-8)}$$

$$= 10\sqrt{3}\ \ cm^2$$

25) أثبت صحة المتطابقة: $\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} = 2\ csc^2\ x$

$$\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1+\cos x+1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

توصيف مقامات

$$= \frac{2}{1-\cos^2 x}$$

$$= \frac{2}{\sin^2 x}$$

$$= 2\csc^2 x$$

26) أثبت صحة المتطابقة: $\tan x + \cot x = \sec x \cdot \csc x$

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

نوحد المقامات

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \sin x}$$

$$= \frac{1}{\cos x \cdot \sin x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$= \sec x \cdot \csc x$$

27) أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{\cos x}{1-\sin x} \cdot \frac{1+\sin x}{1+\sin x}$$

$$= \frac{\cos x(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$= \frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$$

$$= \frac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1+\sin x}{\cos x}$$

28) أثبت صحة المتطابقة: $\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta$

$$\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$$

$$= \tan^2\theta$$

29) أثبت صحة المتطابقة: $\tan^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x \cdot \tan^2 x$

$$\tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x$$

$$= \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x (1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}$$

$$= \sin^2 x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \sin^2 x \cdot \tan^2 x$$

(30) حل المعادلة : $2\cos x = \sqrt{3}$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

زاوية الإسناد α : $\cos\alpha = |\cos x| = |\frac{\sqrt{3}}{2}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha = \cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}$

$\cos x$ موجبة

x تقع في الربع الأول	x تقع في الربع الرابع
$x = \alpha + 2k\pi$	$x = 2\pi - \alpha + 2k\pi$
$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$	$x = 2\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$
	$x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

حلول المعادلة :

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \quad , k \in Z$

(31) حل المعادلة : $\cos x = -\frac{1}{2}$ حيث $0 \le x \le 2\pi$

$\cos x = -\frac{1}{2}$

$\cos\alpha = |\cos x| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$

$\cos x$ سالبة

x تقع في الربع الثاني	x تقع في الربع الثالث
$x = \pi - \alpha$	$x = \pi + \alpha$
$x = \pi - \frac{\pi}{3}$	$x = \pi + \frac{\pi}{3}$
$x = \frac{2\pi}{3} \in [0, 2\pi]$	$x = \frac{4\pi}{3} \in [0, 2\pi]$

حلول المعادلة

$x = \frac{2\pi}{3} \quad , \quad x = \frac{4\pi}{3}$

(32) حل المعادلة : $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

زاوية الإسناد α :

$\sin\alpha = |\sin x| = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$

إشارة $\sin x$ سالبة

x تقع في الربع الثالث	x تقع في الربع الرابع
$x = \pi + \alpha + 2k\pi$	$x = 2\pi - \alpha + 2k\pi$
$x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$	$x = 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$
$x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$	$x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

حلول المعادلة

$x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$

(33) حل المعادلة: $3\sin\theta + 1 = \sin\theta$

$3\sin\theta - \sin\theta = -1 \Rightarrow 2\sin\theta = -1$

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$

$\sin\alpha = |\sin\theta| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$

إشارة $\sin x$ سالبة

x تقع في الربع الثالث	x تقع في الربع الرابع
$x = \pi + \alpha + 2k\pi$	$x = 2\pi - \alpha + 2k\pi$
$x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$	$x = 2\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$
$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$	$x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

حلول المعادلة

$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$

(34) حل المعادلة: $5\sin\theta - 3 = \sin\theta$ حيث $0 \le \theta < 2\pi$

$5\sin\theta - \sin\theta = 3 \Rightarrow 4\sin\theta = 3$

$\sin\theta = \frac{3}{4}$

$\sin\alpha = |\sin\theta| = |\frac{3}{4}| = \frac{3}{4}$

$\alpha \approx 0.848$

$\sin\theta$ موجبة

θ تقع في الربع الأول	θ تقع في الربع الثاني
$\theta = \alpha$	$\theta = \pi - \alpha$
$\theta = 0.848 \in [0, 2\pi]$	$\theta = \pi - 0.848$
	$\theta = 2.293 \in [0, 2\pi]$

حلول المعادلة: $\theta = 0.848$, $\theta = 2.293$

(35) حل المعادلة: $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$

$(\sin x - 2)(2\sin x + 1) = 0$

$\sin x = -\frac{1}{2}$	$\sin x = 2 \notin [-1, 1]$
$\sin\alpha = \lvert\sin x\rvert = \lvert -\frac{1}{2}\rvert = \frac{1}{2}$	ليس لها حل
$\alpha = \frac{\pi}{6}$	

$\sin x$ سالبة

x تقع في الربع الثالث	x تقع في الربع الرابع
$x = \pi + \alpha + 2k\pi$	$x = 2\pi - \alpha + 2k\pi$
$x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$	$x = 2\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$
$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$	$x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

حلول المعادلة:

$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(36) حل المعادلة: $2\cos x \sin x - \cos x = 0 \quad , \quad x \in [0 , 2\pi)$

$\cos x (2\sin x - 1) = 0$

$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \in [0, 2\pi)$

$x = \frac{3\pi}{2} \in [0, 2\pi)$

$2\sin x - 1 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$\sin \alpha = |\sin x| = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$

$\sin x$ موجبة

x تقع في الربع الأول

$x = \alpha$

$x = \frac{\pi}{6} \in [0, 2\pi)$

x تقع في الربع الثاني

$x = \pi - \alpha$

$x = \pi - \frac{\pi}{6}$

$x = \frac{5\pi}{6} \in [0, 2\pi)$

حلول المعادلة:

$x = \frac{\pi}{2} \quad , x = \frac{3\pi}{2} \quad , x = \frac{\pi}{6} \quad , x = \frac{5\pi}{6}$

(37) إذا كان: $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ فأوجد $\sin 2\theta$.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \sin^2\theta} = \pm\sqrt{1 - (\frac{-1}{\sqrt{2}})^2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ في الربع الثالث

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2 \times \frac{-1}{\sqrt{2}} \times -\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

(38 إذا كان: $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, $\sin\theta = \frac{-12}{13}$ فأوجد $\sin 2\theta$.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta} = \pm\sqrt{1-(\frac{-12}{13})^2} = \pm\frac{5}{13}$

$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ في الربع الرابع

$\cos\theta = \frac{5}{13}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$= 2 \times \frac{-12}{13} \times \frac{5}{13} = -\frac{120}{169}$

(39 إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\sin\theta = \frac{-3}{5}$ فأوجد

1) $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ 2) $\tan(2\theta)$

1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$= \pm\sqrt{1-(\frac{-3}{5})^2}$

$= \pm\frac{4}{5}$

θ تقع في الربع الثالث , $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\cos\theta = -\frac{4}{5}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{3}{5} \div -\frac{4}{5} = \frac{3}{4}$

$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{-4}{5}}{2}}$

$= \pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثاني , $\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{4}$

$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\times\frac{3}{4}}{1-(\frac{3}{4})^2}$

$= \frac{24}{7}$

(40 إذا كان: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ، $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ ، $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ ، $\cos\beta = \frac{-12}{13}$ فأوجد

1) $\sin(\alpha+\beta)$ 2) $\tan 2\beta$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$= \pm\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}$

$= \pm\frac{3}{5}$

في الربع الأول $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos\alpha = \frac{3}{5}$

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

$\sin\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2\beta}$

$= \pm\sqrt{1-(\frac{-12}{13})^2}$

$= \pm\frac{5}{13}$

في الربع الثالث $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

$\sin\beta = -\frac{5}{13}$

$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = -\frac{5}{13} \div -\frac{12}{13} = \frac{5}{12}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$= \frac{4}{5}\times\frac{-12}{13} + \frac{3}{5}\times\frac{-5}{13}$

$= -\frac{63}{65}$

2) $\tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \frac{2\times\frac{5}{12}}{1-(\frac{5}{12})^2} = \frac{120}{119}$

(41 إذا كان: $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{24}{25}$ حيث α , β زاويتين حادتين، أوجد كلا مما يلي:

1) $\cos(\alpha - \beta)$ 2) $\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$

$= \pm\sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2}$

$= \pm\frac{4}{5}$

α زاوية حادة

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

$\sin\beta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\beta}$

$= \pm\sqrt{1 - (\frac{24}{25})^2}$

$= \pm\frac{7}{25}$

β زاوية حادة

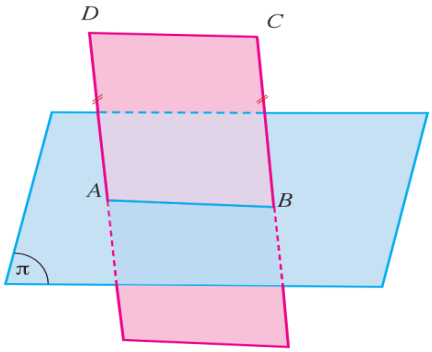
$\sin\beta = \frac{7}{25}$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$= \frac{4}{5} \times \frac{24}{25} + \frac{3}{5} \times \frac{7}{25}$

$= \frac{117}{125}$

2) $\sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = \cos\beta = \frac{24}{25}$



42) في الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi, \overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}, AD = BC$

أثبت أن $\overleftrightarrow{CD} // \pi$.

$\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$

مستقيمان متوازيان يعينان مستوياً وحيداً $(ABCD)$

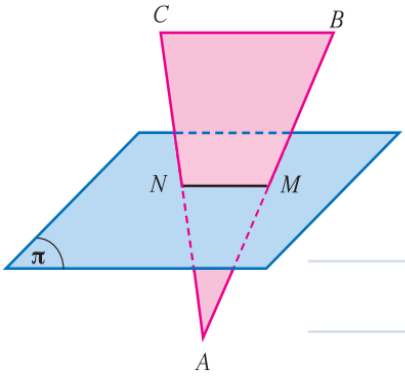
الشكل الرباعي $ABCD$ فيه $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$

إذاً $ABCD$ متوازي أضلاع

وفيه $\overleftrightarrow{DC} // \overleftrightarrow{AB}$

لكن $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

إذاً $\overleftrightarrow{CD} // \pi$ نظرية ١



43) في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه ، M منتصف $\overline{AB}$ ،

N منتصف $\overline{AC}$ ، N, M تنتميان إلى المستوي π .

أثبت أن $\overleftrightarrow{BC} // \pi$

في المثلث ABC

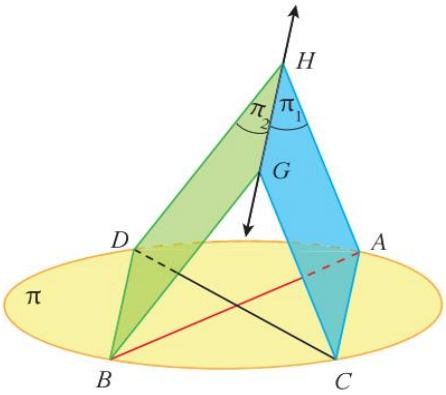
$\overline{BC} // \overline{MN} \Leftarrow \begin{cases} M \text{ منتصف } AB \\ N \text{ منتصف } AC \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} M \in \pi \\ N \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{MN} \subset \pi$

$\left.\begin{matrix} \overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{MN} \\ \overline{MN} \subset \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} // \pi$ نظرية ١

44) في الشكل المقابل: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ قطران في مستوي الدائرة π

أثبت أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$. $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$



$\overline{AB}$, $\overline{CD}$ قطران في الدائرة

فهما متطابقان وينصف كل منهما الآخر

فالشكل ABCD مستطيل

$AC \parallel DB$ ①

$\overline{AC} \subset \pi_1$, $\overline{DB} \subset \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$ ②

من ① و ② نجد

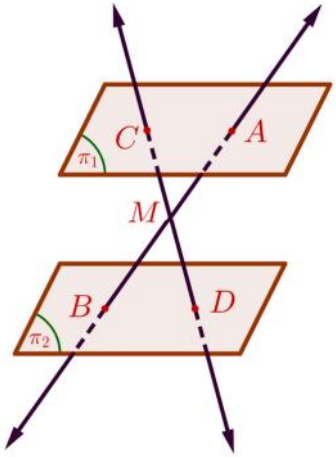
$\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DB}$

$\left.\begin{matrix} \overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AC} \\ \overleftrightarrow{AC} \subset \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{GH} \parallel \pi$

أي أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$

45) في الشكل المقابل: π_1 , π_2 مستويين متوازيين M نقطة واقعة بينهما، حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$

أثبت أن: $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$ ،



$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$

π مستقيمان متقاطعان يعينان مستوياً وحيداً

$\left.\begin{matrix} \pi_1 \parallel \pi_2 \\ \pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{CA} \\ \pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{BD} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{CA} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

نظرية ٤

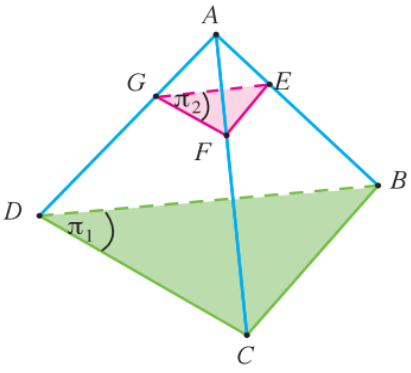
فالمثلثان AMC و BMD متشابهان

$\frac{AM}{BM} = \frac{MC}{MD} = \frac{AC}{BD}$

ومنه $\frac{AM}{BM} = \frac{AC}{BD}$

46) في الشكل المقابل ، $ABCD$ هرم ثلاثي. المستويان π_1 , π_2 متوازيان.

إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$, $FG = 6\ cm$ فإوجد DC



$$\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} (ABC) \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{BC} \\ (ABC) \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{EF} \\ \pi_1 // \pi_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{EF} // \overleftrightarrow{BC}$$

نظرية 4

المثلث ABC فيه $\overline{EF} // \overline{BC}$

فالمثلثان ABC , AEF متشابهان

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{1}{4} \quad ①$$

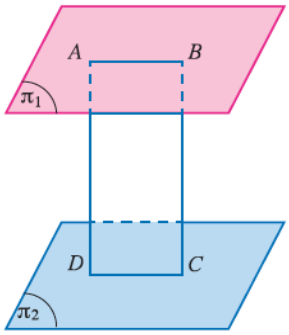
بالمثل نجد المثلثان ACD , AFG متشابهان

$$\frac{AF}{AC} = \frac{AG}{AD} = \frac{FG}{CD} \quad ②$$

من ① و ② نجد

$$\frac{FG}{CD} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{6}{CD} = \frac{1}{4}$$

$$CD = 24\ cm$$



(47) في الشكل المقابل: $\pi_1 \parallel \pi_2$ ، A , B نقطتان في π_1

C , D نقطتان في π_2 حيث A , B , C , D في مستوي واحد

$\overline{BC} \perp \pi_2$ ، $\overline{AD} \perp \pi_2$ أثبت أن $ABCD$ مستطيل.

$\overleftrightarrow{AD} \perp \pi_2$
$\overleftrightarrow{BC} \perp \pi_2$ $\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ①

النقاط A , B, C, D في مستوى واحد هو (ABCD)

$\pi_1 \cap (ABCD) = \overleftrightarrow{AB}$
$\pi_2 \cap (ABCD) = \overleftrightarrow{DC}$ $\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ ②
$\pi_1 \parallel \pi_2$

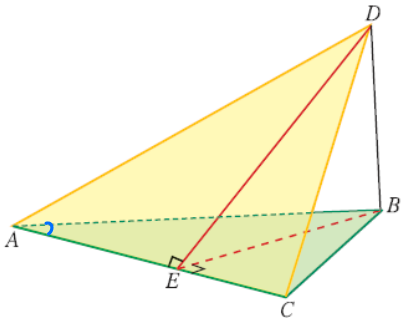
من ① ، ② نجد الشكل ABCD متوازي أضلاع

لكن

$\overline{AD} \perp \pi_2$
$\overline{DC} \subset \pi_2$ $\Rightarrow$ $\overline{AD} \perp \overline{DC}$

إذا الشكل ABCD متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة

الشكل ABCD مستطيل



48) في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC

$DB = 5\,cm\ , AB = 10\,cm\ , m(B\hat{A}C) = 45°$

$\overline{DB} \perp (ABC)\ ,\ \overline{BE} \perp \overline{AC}\ ,\ \overline{DE} \perp \overline{AC}$

أوجد: 1) BE

2) قياس الزاوية الزوجية بين المستويين DAC , BAC

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ①

المثلث AEB قائم في E وفيه $m(B\hat{A}C)=45°$

$\sin 45° = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \sin 45 = \frac{BE}{10}$

$BE = 10 \sin 45 = 5\sqrt{2}$

② $\overleftrightarrow{AC}$ هو خط تقاطع المستويين BAC , DAC

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$, $\overline{BE} \subset (BAC)$

$\overline{DE} \perp \overline{AC}$, $\overline{DE} \subset (DAC)$

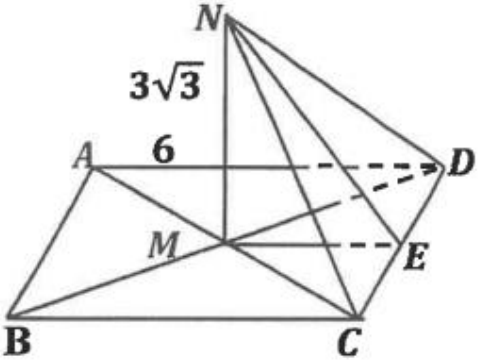
إذاً الزاوية المستوية للزاوية الزوجية هي $B\hat{E}D$

$\left.\begin{matrix}\overline{DB} \perp (ABC) \\ \overline{BE} \subset (ABC)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{DB} \perp \overline{BE}$

فالمثلث DBE قائم في B

$\tan(B\hat{E}D) = \frac{DB}{BE} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$m(B\hat{E}D) = 35.26°$



(49) $ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M

وفيه $AD = 6\ cm$ أقيم $\overline{NM}$ عمودا على $(ABCD)$

حيث N خارج مستواه بحيث $MN = 3\sqrt{3}$ ، E منتصف $\overline{CD}$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD , $ABCD$

$\overleftrightarrow{CD}$ هي الحافة المشتركة بين المستويين $ABCD$, NCD

$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{MN} \perp (ABCD) \\ \overleftrightarrow{CD} \subset (ABCD)\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{CD} \quad ①$$

في المثلث CDM المتطابق الضلعين (من خواص المستطيل)

E منتصف $\overline{CD}$

$$\overleftrightarrow{ME} \perp \overleftrightarrow{CD} \quad ②$$

من ① و ② نجد $\overleftrightarrow{CD} \perp (MNE)$, $\overline{NE} \subset (MNE)$

$$\overleftrightarrow{NE} \perp \overleftrightarrow{CD}$$

$$NE \subset (NCD)$$

$\overleftrightarrow{CD}$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $M\hat{E}N$

في المثلث ACD لدينا EM واصلة بين منتصفي الضلعين $\overline{CA}, \overline{CD}$

$$EM = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \times 6 = 3\ cm$$

في المثلث MEN القائم الزاوية في M : $\tan(M\hat{E}N) = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

$$m(M\hat{E}N) = 60^\circ$$

قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD و $ABCD$ هو 60°

مع أطيب الأمنيات بالنجاح والفلاح