

درس 2-3 الاشتقاق

ملاحظات:

$f(x)$

$f'(x)$

f : عند نقط الدوران $\cap \cup$ ميل المحاك $= 0$

عند التمرك على بيان f من يسار اليمين:

• تناقص f $\searrow$

• تزايد f $\nearrow$

عند هذه النقطة يتقاطع f' مع المحور x

• f' (سالب) ومعني f' تحت المحور x

• f' (موجب) ومعني f' فوق المحور x

f' غير صفرية كذلك (مقارب لـ f' $x=a$ $y=b$)

المقارب لـ $f(x)$ $x=a$ $y=b$ الدالة غير معرفة

f مستقيم حائل

f' مستقيم أفقي

$f(x)$

$f'(x)$

f متناقص

f' سالب (يعني معني f' تحت المحور x)

f متزايدة

f' موجب (يعني معني f' فوق المحور x)

نقط التقاطع (دوران) لـ f (معني عظمى أو

صغرى $\cap \cup$)

نختار عينا سب منها سب بترتيب تناقص

نقط تقاطع f' مع المحور x

حل تماريني : درس (2-3) الاشتقاق

تمرين ① ص 153 $f(x) = 3x + 1$ مطلوب استخدام الصيغتين في تعريف (2.1) ص 146

لايجاد $f'(a)$ حيث $a = 1$

الصيغة (2.1) $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(1+h) + 1] - [3(1) + 1]}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 + 3h + 1 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3$$

الصيغة (2.2) $f'(1) = \lim_{b \rightarrow 1} \frac{f(b) - f(1)}{b - 1} = \lim_{b \rightarrow 1} \frac{[3b + 1] - [3(1) + 1]}{b - 1}$

$$= \lim_{b \rightarrow 1} \frac{3b + 1 - 4}{b - 1} = \lim_{b \rightarrow 1} \frac{3b - 3}{b - 1} = \lim_{b \rightarrow 1} \frac{3(b-1)}{b-1} = 3$$

تمرين ② ص 153 $f(x) = 3x^2 + 1$ مطلوب $f'(1)$ باستخدام الصيغتين 2.1 و 2.2

الصيغة (2.1) $\rightarrow f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(1+h)^2 + 1] - [3(1)^2 + 1]}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(1 + 2h + h^2) + 1] - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 + 6h + 3h^2 + 1 - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6 + 3h)}{h} = 6 + 3(0) = 6$$

الصيغة (2.2) $\rightarrow f'(1) = \lim_{b \rightarrow 1} \frac{f(b) - f(1)}{b - 1} = \lim_{b \rightarrow 1} \frac{[3b^2 + 1] - [3(1)^2 + 1]}{b - 1}$

$$= \lim_{b \rightarrow 1} \frac{3b^2 + 1 - 4}{b - 1} = \lim_{b \rightarrow 1} \frac{3b^2 - 3}{b - 1}$$

$$= \lim_{b \rightarrow 1} \frac{3(b^2 - 1)}{b - 1} = \lim_{b \rightarrow 1} \frac{3(b-1)(b+1)}{b-1}$$

$$= 3(1+1) = 6$$

تمت الاجابة
بالاستخدام الصحيح
وكانت الاجابة
بنفس الطريقة بدون اخطاء

تمرين (3) ص 153 $f(x) = \sqrt{3x+1}$ المطلوب إيجاد $f'(1)$ باستخدام الصيغتين (2.1) و (2.2)

• صيغة (2.1) $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3(1+h)+1} - \sqrt{3(1)+1}}{h}$

لنعوضنا $h=0$ نحصل على $\frac{0}{0}$ غير معرف

$\rightarrow$ باستخدام البسط $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3h+4} - 2) \times (\sqrt{3h+4} + 2)}{h \times (\sqrt{3h+4} + 2)}$

يصبح البسط فرق مربعين: $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3h+4})^2 - (2)^2}{h(\sqrt{3h+4} + 2)}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h+4 - 4}{h(\sqrt{3h+4} + 2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{3h+4} + 2}$

$= \frac{3}{\sqrt{3(0)+4} + 2} = \frac{3}{4}$

• صيغة (2.2) $f'(1) = \lim_{b \rightarrow 1} \frac{f(b) - f(1)}{b - 1} = \lim_{b \rightarrow 1} \frac{[\sqrt{3b+1}] - [\sqrt{3(1)+1}]}{b - 1}$

لنعوضنا $b=1$ نحصل على $\frac{0}{0}$ غير معرف (باستخدام البسط) نجد:

$= \lim_{b \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3b+1} - 2) \times (\sqrt{3b+1} + 2)}{(b-1) \times (\sqrt{3b+1} + 2)}$

يصبح البسط فرق مربعين: $= \lim_{b \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3b+1})^2 - (2)^2}{(b-1)(\sqrt{3b+1} + 2)}$

$= \lim_{b \rightarrow 1} \frac{3b+1 - 4}{(b-1)(\sqrt{3b+1} + 2)} = \lim_{b \rightarrow 1} \frac{3b-3}{(b-1)(\sqrt{3b+1} + 2)}$

$= \lim_{b \rightarrow 1} \frac{3(b-1)}{(b-1)(\sqrt{3b+1} + 2)} = \frac{3}{\sqrt{3(0)+1} + 2} = \frac{3}{4}$

يمكن كتابة
x مكان b
ونفس الطريقة

تمرین (4) ص 153 $f(x) = \frac{3}{x+1}$ مطلوب: $f'(2)$ با استفاده از تعریف (2.1) و (2.2)

• (2.1) تعریف: $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2+h+1} - \frac{3}{2+1}}{h}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{h+3} - \frac{1 \times (h+3)}{h+3}}{h}$ ← نوع اول است پس باید

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{h+3} - \frac{h+3}{h+3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{3} - h - \cancel{3}}{h(h+3)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(h+3)}$

ضرب کسر بسط عکس در مقام:

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{h+3} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{0+3} = -\frac{1}{3}$

• (2.2) تعریف: $f'(2) = \lim_{b \rightarrow 2} \frac{f(b) - f(2)}{b-2} = \lim_{b \rightarrow 2} \frac{\frac{3}{b+1} - \frac{3}{2+1}}{b-2}$

$= \lim_{b \rightarrow 2} \frac{\frac{3}{b+1} - \frac{1 \times (b+1)}{b+1}}{b-2} = \lim_{b \rightarrow 2} \frac{\frac{3-b-1}{b+1}}{b-2}$

$= \lim_{b \rightarrow 2} \frac{\frac{-b+2}{b+1}}{b-2} = \lim_{b \rightarrow 2} \frac{-b+2}{b+1} \times \frac{1}{b-2} = \frac{-1}{2+1} = -\frac{1}{3}$

تمرین (5) ص 153 $f(x) = 3x^2 + 1$ مطلوب: $f'(x)$ با استفاده از تعریف (2.1) و (2.2)

$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(x+h)^2 + 1] - [3x^2 + 1]}{h}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) + 1 - 3x^2 - 1}{h}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 3x^2}{h}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6x + 3h)}{h} = 6x + 3(0) = 6x$

تمرين (6) ص 153 $f(x) = x^2 - 2x + 1$ مطلوب إيجاد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة (2.2)

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 - 2(x+h) + 1] - [x^2 - 2x + 1]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h + 1 - x^2 + 2x - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h - 2)}{h}$$

$$= 2x + 0 - 2 = 2x - 2$$

تمرين (7) ص 153 $f(x) = x^3 + 2x - 1$ مطلوب إيجاد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^3 + 2(x+h) - 1] - [x^3 + 2x - 1]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2x + 2h - 1 - x^3 - 2x + 1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 + 2)}{h} = 3x^2 + 3x(0) + 0^2 + 2 = 3x^2 + 2$$

نظرة التكميل

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

تمرين (8) ص 153 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ مطلوب إيجاد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة

$$A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4 = (A+B)^4$$

من الممكن ملاحظة أن $f(x)$ هي مربع كامل: $f(x) = (x^2 - 1)^2$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 + 1]^2 - [(x^2 + 1)^2]}{h}$$

أو كل كما ورد في السؤال:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^4 - 2(x+h)^2 + 1] - [x^4 - 2x^2 + 1]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - 2(x^2 + 2xh + h^2) + 1 - x^4 + 2x^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - 2x^2 - 4xh - 2h^2 + 2x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3 - 4x - 2h)}{h}$$

$$= 4x^3 + 6x^2(0) + 4x(0)^2 + (0)^3 - 4x - 2(0) = 4x^3 - 4x$$

تمرين (9) ص 153 $f(x) = \frac{3}{x+1}$ مطلوب إيجاد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة

$$f'(x) = \lim_{b \rightarrow x} \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \quad (2.2) \quad \text{نأخذ لأن (2.2)}$$

$$= \lim_{b \rightarrow x} \frac{\frac{3}{b+1} - \frac{3}{x+1}}{b - x}$$

لنعوضنا بما حوّل b بـ x نجد $\frac{0}{0}$ غير معرف
نوجد المقادير في البسط

$$= \lim_{b \rightarrow x} \frac{\frac{3 \times (x+1)}{(b+1) \times (x+1)} - \frac{3 \times (b+1)}{(x+1) \times (b+1)}}{b - x} = \lim_{b \rightarrow x} \frac{\frac{3x+3}{(b+1)(x+1)} - \frac{3b+3}{(x+1)(b+1)}}{b - x}$$

$$= \lim_{b \rightarrow x} \frac{\frac{3(x-b)}{(b+1)(x+1)}}{b - x} = \lim_{b \rightarrow x} \frac{3(x-b)}{(b+1)(x+1)} \times \frac{1}{b-x}$$

$$\text{نقوض } b \text{ بـ } x = \frac{-3}{(x+1)(x+1)} = \frac{-3}{(x+1)^2}$$

تمرين (10) ص 153 $f(x) = \frac{2}{2x-1}$ مطلوب إيجاد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{نأخذ الشكل (2.3)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{2(x+h)-1} - \frac{2}{2x-1}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \times (2x-1)}{(2x+2h-1) \times (2x-1)} - \frac{2 \times (2x+2h-1)}{(2x-1) \times (2x+2h-1)}}{h}$$

نوجد المقادير (من البسط)

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4x-2}{(2x+2h-1)(2x-1)} - \frac{-4x+2}{(2x-1)(2x+2h-1)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h}{(2x+2h-1)(2x-1)} \times \frac{1}{h}$$

$$= \frac{-4}{[2x+2(0)-1][2x-1]} = \frac{-4}{(2x-1)^2} \quad \text{نقوض } h \text{ بـ صفر}$$

تمرين (14) ص 153 $f(x) = \sqrt{3x+1}$ مطلوب إيجاد $f'(t)$ باستخدام تعريف المشتقة

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3(t+h)+1} - \sqrt{3t+1}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3(t+h)+1} - \sqrt{3t+1}) \times (\sqrt{3(t+h)+1} + \sqrt{3t+1})}{h \times (\sqrt{3(t+h)+1} + \sqrt{3t+1})}$$

نظف البسط

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3(t+h)+1) - (3t+1)}{h \times (\sqrt{3(t+h)+1} + \sqrt{3t+1})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3t+3h+1-3t-1}{h \times (\sqrt{3(t+h)+1} + \sqrt{3t+1})}$$

نفس المقام

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h \times (\sqrt{3(t+h)+1} + \sqrt{3t+1})} = \frac{3}{\sqrt{3t+1} + \sqrt{3t+1}} = \frac{3}{2\sqrt{3t+1}}$$

تمرين (12) ص 153 $f(t) = \sqrt{2t+4}$ مطلوب $f'(t)$ باستخدام تعريف + بقية

$$f'(x) = \lim_{b \rightarrow t} \frac{f(b) - f(t)}{b - t}$$

نستخدم الشكل الآتي للتعريف (فلاز)

$$= \lim_{b \rightarrow t} \frac{\sqrt{2b+4} - \sqrt{2t+4}}{b - t}$$

لو عوضنا b بـ t نحصل $\frac{0}{0}$ غير معرف

(إزالة البنية)

$$= \lim_{b \rightarrow t} \frac{(\sqrt{2b+4} - \sqrt{2t+4})(\sqrt{2b+4} + \sqrt{2t+4})}{(b - t)(\sqrt{2b+4} + \sqrt{2t+4})}$$

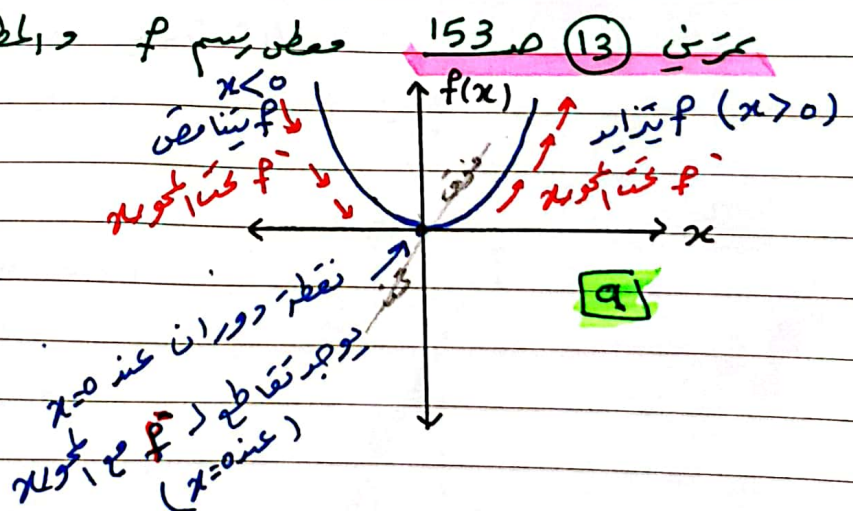
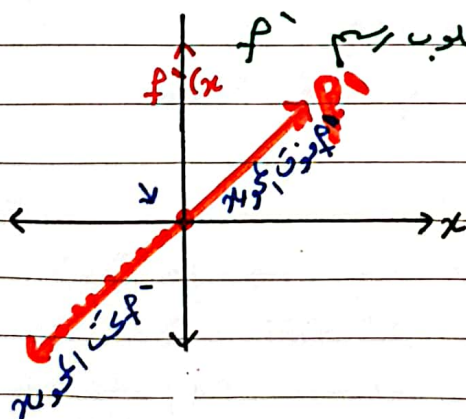
لتصبح فرقاً مربعين

$$= \lim_{b \rightarrow t} \frac{(\sqrt{2b+4})^2 - (\sqrt{2t+4})^2}{(b - t)(\sqrt{2b+4} + \sqrt{2t+4})}$$

$$= \lim_{b \rightarrow t} \frac{2b+4 - 2t-4}{(b - t)(\sqrt{2b+4} + \sqrt{2t+4})}$$

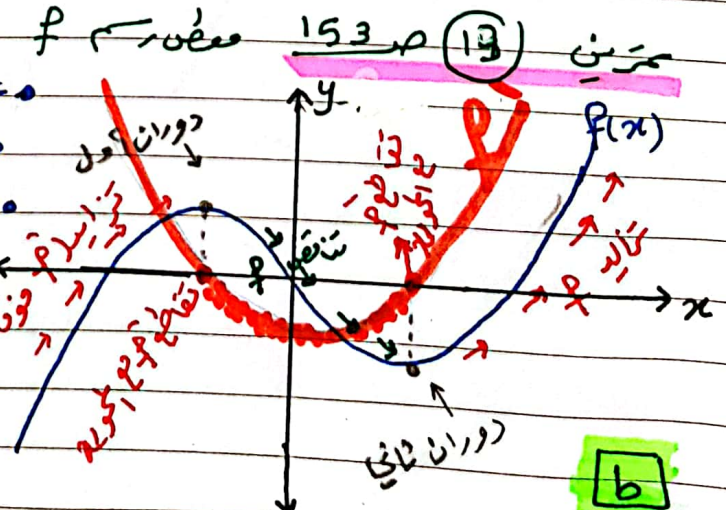
$$= \lim_{b \rightarrow t} \frac{2b - 2t}{(b - t)(\sqrt{2b+4} + \sqrt{2t+4})} = \lim_{b \rightarrow t} \frac{2(b - t)}{(b - t)(\sqrt{2b+4} + \sqrt{2t+4})}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2t+4} + \sqrt{2t+4}} = \frac{2}{2\sqrt{2t+4}} = \frac{1}{\sqrt{2t+4}}$$

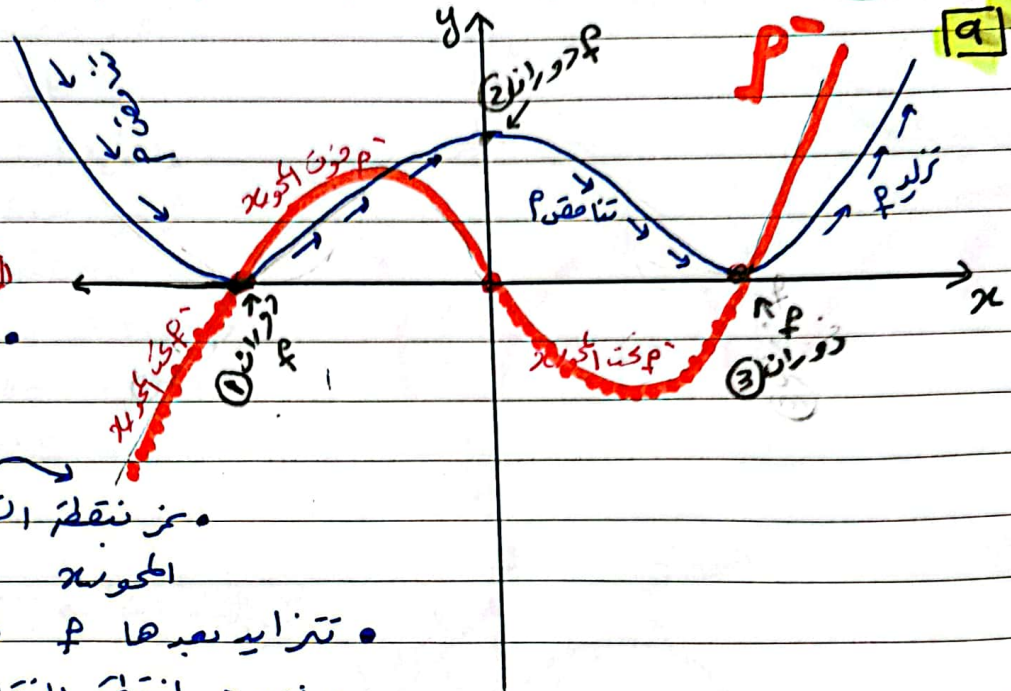


تمرين (13) ص 153 f مطلوب رسم f ومطلوب رسم f'

- على السبيل، قبل نقطة الدوران نبدأ أفقياً فوق المحور x حتى نصل x نقطة دوران تقاطع f مع المحور x
- نكمل خط المحور x (لأنه f متعلقاً) حتى نصل x نقطة دوران ثانية (تقاطع f مع المحور x ثانية) آخر نقطة
- نكمل فوق المحور x بعد نقطة التقاطع f' موجب (لأنه f متزايد بعداً)



تمرين (14) ص 153 مرسوم بيان $f(x)$ مطلوب رسم بيان f'



• يوجد دوران لـ f

• نقطة تقاطع f مع المحور
(أو نقطة انحناء)

• أقصى اليسار f متناقص

f' تحت المحور x بداية

الزاوية (أو نقطة انحناء)

• من نقطة التقاطع الذي لا f مع

المحور

• تزايد بعد f فيكون f' فوق المحور x

ونعود لننظر النقطة الثانية التقاطع الثاني مع المحور x (0)

• بعد نقطة التقاطع الثانية يكون f متناقص

(أو نقطة انحناء) f تحت المحور x وننتبه كنقطة انحناء الثالثة f مع المحور

• بعد نقطة التقاطع الثالثة مع المحور x f'

يكون f متزايد و يكون f' فوق المحور

لاحظ f مستقيم $\Leftarrow$ ميله ثابت
إذن المشتقة = ثابت
ومقاديرها من الشكل كل ثابت y

والرسم البياني لها سيكون مستقيم أفقي

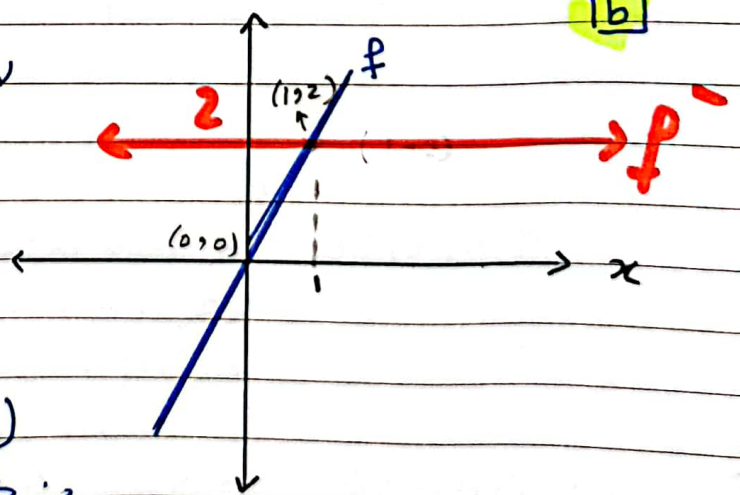
(لاحظ الميل يمكن استنتاجه من الرسم)

من خلال نقطتين من f هما:

$$m = \frac{2-0}{1-0} = 2 \rightarrow (0,0) (1,2)$$

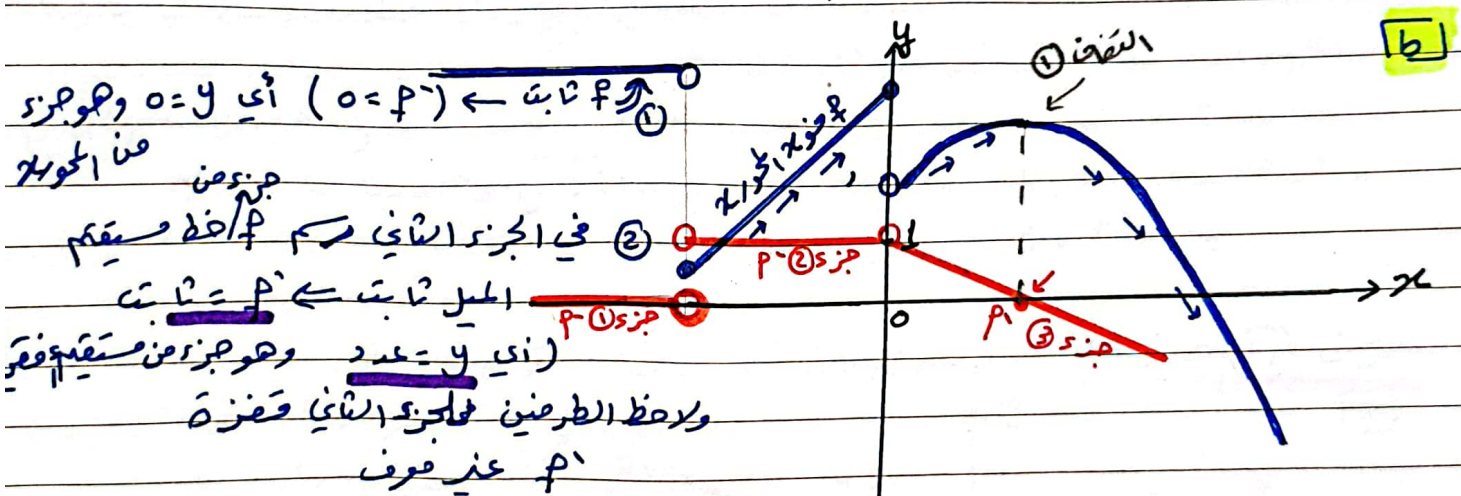
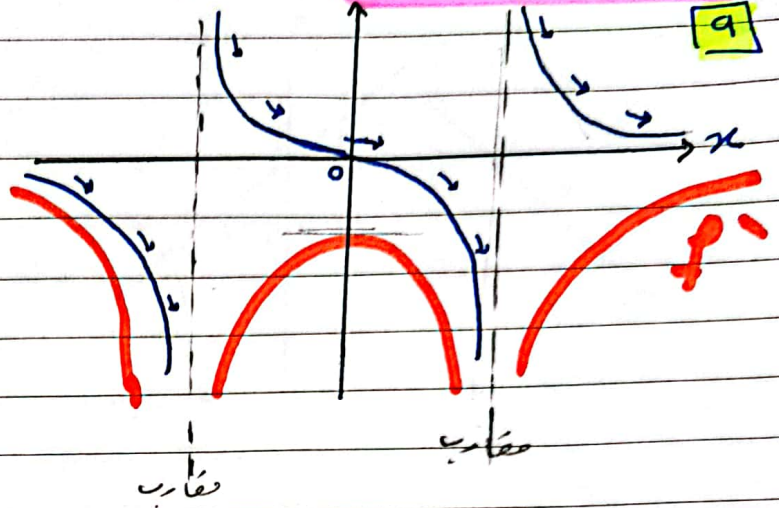
لذلك معادلة الدالة المشتقة: $y = 2$

$$f'(x) = 2$$



تمرين (15) ص 153 رسوم بيانه $f(x)$ المطلوب رسم بيان $f'(x)$

- f متناصه في كل جزء $\Leftarrow$
- f' كله تحت المحور x (في أجزاء)
- واضح وجود خطي تقارب (غير رؤس)
- f يتغير صفة عند هما f' كذلك
- عند $x=0$ التقاطع
- المحاور f' عند $x=0$ أفقي
- المحور x خط تقارب لـ f
- وكذلك لـ f'



الجزء الثاني من f' قطعة أفقية مفتوحة من الطرفين

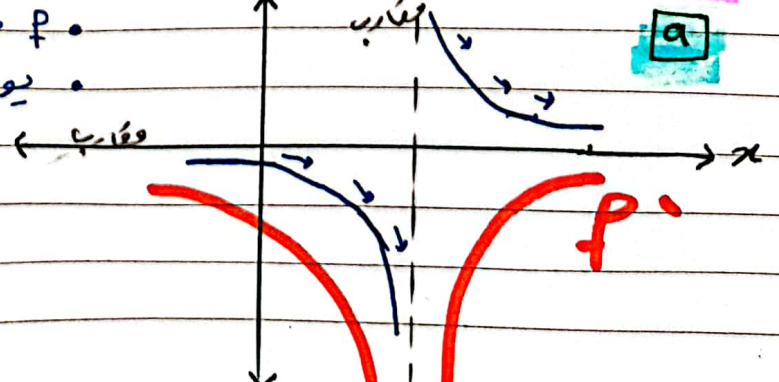
وعلى بأخذ فقط تقريبية من الجزء الثاني

نجد أن صليه $1 = f' \Leftarrow f' = 1$

③ الجزء الثاني : جزء منه قزايد (f' فوق المحور x)
 وجزء منه متناقص (f' تحت المحور x)
 عند نقطة التقاطع $f' \Leftarrow f'$ يتقاطع مع المحور x

تمرين (16) ص 153 رسوم بيانه f المطلوب رسم بيان f'

- f متناقص دوماً f' تحت المحور x (جزئين)
- يوجد خط تقارب رأسي والمحور الأفقي x تقارب
- كلاهما تقارب لـ (f')



تمرين (16) ص 153 رسوم بيان P وطلوب رسم بيان P'

[b]

① الجزء الأسير P متزايد P' فوق المحور x

الجزء الأسير P متقيم (جزء من مستقيم)

فياكون $P' =$ الميل عدد ثابت

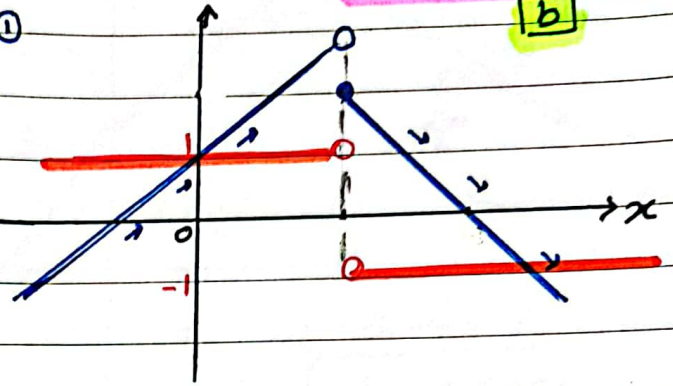
عدد y جزء من خط مستقيم أفقي

لو أخذنا نقطتين من الجزء الأسير لـ P

وحسبنا عليه سيجد تقريباً 1

$P' = 1$ (رسم P' هنا $y = 1$ جزء من

مستقيم أفقي)



• انقطاع في بيان P عند نقطة P' غير صفرية

الجزء الثاني من P متناقص P' تحت المحور x

P متقيم P' عليه ثابت $P' =$ عدد ثابت (عدد y جزء من مستقيم أفقي)

• لو أخذنا بالتقريب نقطتين من الجزء الثاني P وحسبنا عليه -1

بيان $P' = -1$ جزء من مستقيم أفقي

تمرين (17) ص 153 رسوم بيان P المطلوب رسم بيان P'

[a]

• تذكر: نقاط تقاطع P مع المحور x

يعني دوران لـ P

• نقطت عند نقاط التقاطع للمناطق

مطلوب رأسية وهي

• سيجد مناطق

• منطقة ① للبيان P' فوق المحور x

P يتزايد (لأنه خط لولبي)

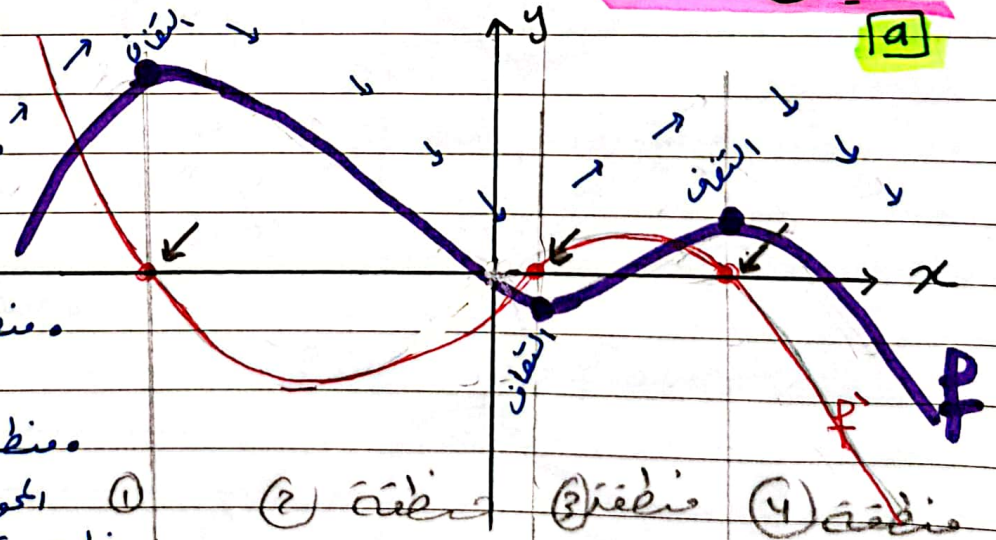
• منطقة ② وسط البيان P' تحت

① المحور x P يتناقص

• منطقة ③ وسط البيان P' فوق x

P يتزايد

• منطقة ④ بيان P' تحت المحور x P يتناقص



تمرین (17) ص 153 رسم بیان f و مطلوب رسم بیان f

• نقطه تقاطع f و محور x

• انتفاخ سطحی f

• نقاط انقطاع f یعنی

f غیر موجود $\leftarrow$ میل f

بیتدر عند هذو نقطه

• f خط افقی $\leftarrow f$ مستقیم

• عدد y $\leftarrow$ میل y بعد

• نقطه (1) لا منقطع

• منطقه (2) منقطع

• منطقه (3) منقطع

• منطقه (4) منقطع

• تقسیم f به هذو نقطه لایع

مناطق

تمرین (18) ص 153 رسم بیان f و مطلوب رسم بیان f

• نقطه تقاطع f و محور x رسم f

• نقطه دوران f

(على الخط الرئيسي الوهمي لـ f)

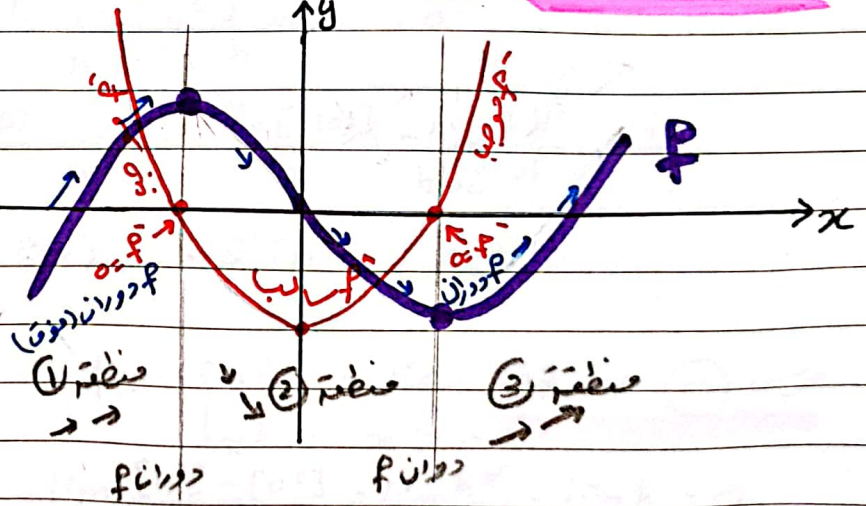
• منطقه (1) f فوق المحور x

$\leftarrow f$ متزايد

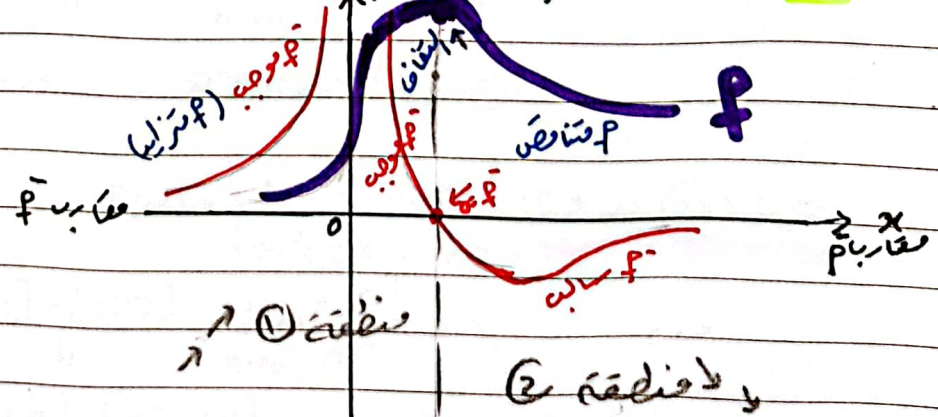
• منطقه (2) f تحت المحور x

$\leftarrow f$ متناقص

• منطقه (3) f فوق المحور x $\leftarrow f$ متزايد



تمرین (19) ص 153 رسم بیان f و مطلوب رسم بیان f



محور f (میل f غیر موجود)
دنا f (میل f غیر موجود)
دنا f (میل f غیر موجود)

تمرین (19) ص 153
 $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & : x < 0 \\ 3x+1 & : x \geq 0 \end{cases}$
 مطلوب $D_- f(0)$ و $D_+ f(0)$ و $f'(0)$ موجوده؟
 تعریف: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$

$$D_- f(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{[2(h)+1] - [2(0)+1]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h}{h} = 2$$

$$D_+ f(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{[3(h)+1] - [3(0)+1]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3h}{h} = 3$$

$$2 = D_- f(0) \neq D_+ f(0) = 3 \rightarrow f'(0) \text{ غير موجوده}$$

تمرین (20) ص 153
 $f(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ 2x & : x \geq 0 \end{cases}$

$$D_- f(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{[0] - [0]}{h} = 0$$

$$D_+ f(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{[2h] - [2(0)]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h}{h} = 2$$

$$D_- f(0) \neq D_+ f(0) \rightarrow f'(0) \text{ غير موجوده}$$

تمرین (21) ص 153
 $f(x) = \begin{cases} x^2 & : x < 0 \\ x^3 & : x \geq 0 \end{cases}$

$$D_+ f(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{[h^3] - [0^3]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^2 = 0$$

$$D_- f(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{[h^3] - [0^3]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h^2 = 0^2 = 0$$

$$D_- f(0) = D_+ f(0) = 0 \rightarrow f'(0) = 0 \text{ موجوده}$$

تمرین (22) ص 153
 $f(x) = \begin{cases} 2x & : x < 0 \\ x^2 + 2x & : x \geq 0 \end{cases}$

$$D_- f(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{[2h] - [2(0)]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h}{h} = 2$$

$$D_+ f(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{[h^2 + 2h] - [0^2 + 2(0)]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(h+2)}{h} = 0 + 2 = 2$$

$$D_- f(0) = D_+ f(0) \rightarrow f'(0) = 2 \text{ موجوده}$$

تمرين (23) ص 154 طريقة عددية لـ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ، $f'(1)$

لواستخدام تعريف $f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ حيث $f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$

وَأخذنا قيم عددية لـ x تقرب من 1 (من اليمين مثلاً) وسألاحظ قيم $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

x	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	0.707110	0.707142	0.70746	0.71061	0.73994
$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$	0.353550	0.353526	0.35328	0.350915	0.32833

في السطر الأخير: (القيم) $\leftarrow 0.353$ (تقريباً) عندما $x \rightarrow 1$
التقدير العددي: $f'(1) \approx 0.353$

تمرين (24) ص 153 $f(x) = x(e)^{x^2}$ طريقة عددية $f'(2)$
سوجد قيم $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ باختيار قيم x تقرب من 2: $f(2) = 109.1963$

x	1	1.9	1.99	1.999	1.9999
$f(x) = x \cdot e^{x^2}$	2.71828	70.2355	104.40052	108.7061158	109.1471737
$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$	106.47802	389.608	479.578	490.1842	491.263

(بدقة أكثر 491.383) $\rightarrow 491.3$ القيمة في آخر سطر
التقدير العددي: $f'(2) = 491.3$

تمرين (25) ص 153 $f(x) = \cos 3x$ وطوب تقدير عددي لـ $f'(0)$
سوجد قيم $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ (أو $\frac{f(x) - 1}{x}$)

أخذنا قيم تقرب من 0 من اليمين مثلاً

x	0.00001	0.0001	0.001	0.01	0.1
$f(x) = \cos 3x$	1.00000	1.00000	0.999995	0.99955	0.955336
$\frac{\cos 3x - 1}{x}$	-0.000045	-0.00045	-0.004500	-0.044996	-0.44663

قيم آخر سطر $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ تقرب من 0

التقدير العددي: $f'(0) = 0$

عزني (26) ص 154

$$\underline{f(x) - f(2)}$$

$$\downarrow \frac{\ln 3 x^{x-2} - 1.791759}{x-2}$$

0.5 ← $\bar{m}_1$

$$f'(2) = 0.5$$

عمر بنی (27) ص 154

5.8

$$c) \quad \begin{cases} a = 2 \\ f(a) = 5.8 \end{cases}$$

وسنلاحظ من (Var, سرية المحجوة) عندنا $t \leftarrow 2$ بحين دسنا،

السرية المطلقة ← 10
السرية النسبية ← 10
تقدير السرية عند 2 = تقريباً 10

محمدي (28) ص 154 مطلوب تقدير السرعة المتجهة عند $t=2$ بالاستعانة بالجداول

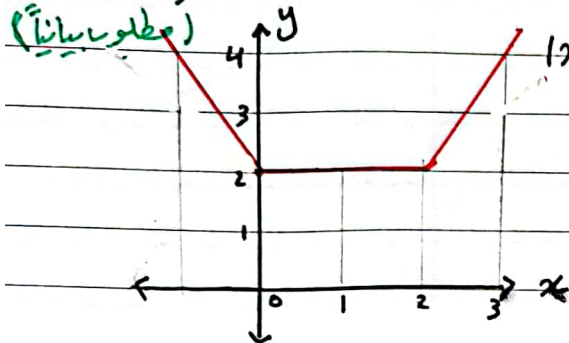
تذكر سرعة المتجهة الموضوعة في الفترة $a < x < b$: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \rightarrow 7.0$

السرعة المعكونة ← 8 | 9 → السرعة المعكونة

التقدير المقبول أنه تكون (إسرىة المصحفة بين 8 و 9) عن 2 = 1

تابع حل نمازین الدرس 2-3 الاستحقاق

تمرین (29) صد 154 $f(x) = |x| + |x-2|$ مطلوب تجدید من x التي يكون f غير قابل للتفاضل عند $x=0$ و $x=2$ (مطلوب بياناً)



$$x=0 \rightarrow |x|=0 \quad \text{و} \quad x=2 \rightarrow |x-2|=0$$

نمكن اكل بالرسم البياني لبيان الدالة

وملاحظة وجود (زاوية) رأسية عند $x=0$

وعند $x=2$

وبالتالي المستقيمة غير موجودة عند كل منهما

ملاحظة: صفة للرسم:

$$\textcircled{1} \quad x \leq 0 \rightarrow |x| = -x$$

$$(x < 2) \quad x-2 < 0 \rightarrow |x-2| = -(x-2) = -x+2$$

$$f(x) = -x - x + 2 = -2x + 2 \quad x < 0$$

x	-1	0
$f(x)$	4	2

$$\textcircled{2} \quad x > 0 \rightarrow |x| = x$$

$$0 < x < 2 \rightarrow |x-2| = -x+2$$

$$f(x) = x + (-x+2) = 2 \quad 0 < x < 2$$

x	0	2
$f(x)$	2	2

$$\textcircled{3} \quad x > 0 \rightarrow |x| = x$$

$$x \geq 2 \rightarrow |x-2| = x-2$$

$$f(x) = x + (x-2) = 2x-2 \quad x \geq 2$$

x	2	3
$f(x)$	2	4

بطريقة أخرى غير الرسم لاحظ أن الحالة تكتب بالشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+2 & : x < 0 \\ 2 & : 0 \leq x < 2 \\ 2x-2 & : x \geq 2 \end{cases}$$

ويمكن إيجاد $D_+ f(0)$ ثم $D_- f(0)$ مختلفتان: $f'(0)$ غير موجودة
 $D_+ f(2)$ ثم $D_- f(2)$ مختلفتان: $f'(2)$ غير موجودة

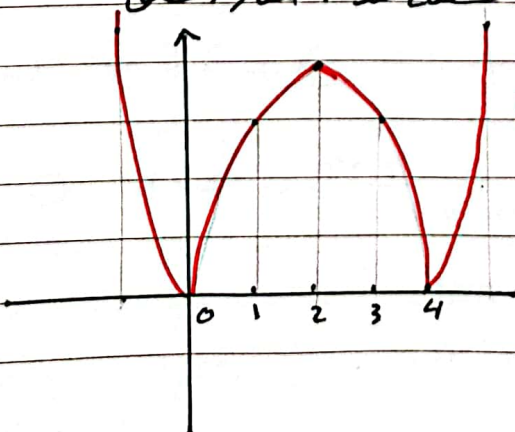
$$f(x) = |x^2 - 4x|$$

$$x^2 - 4x = 0 \rightarrow x=0 \text{ و } x=4$$

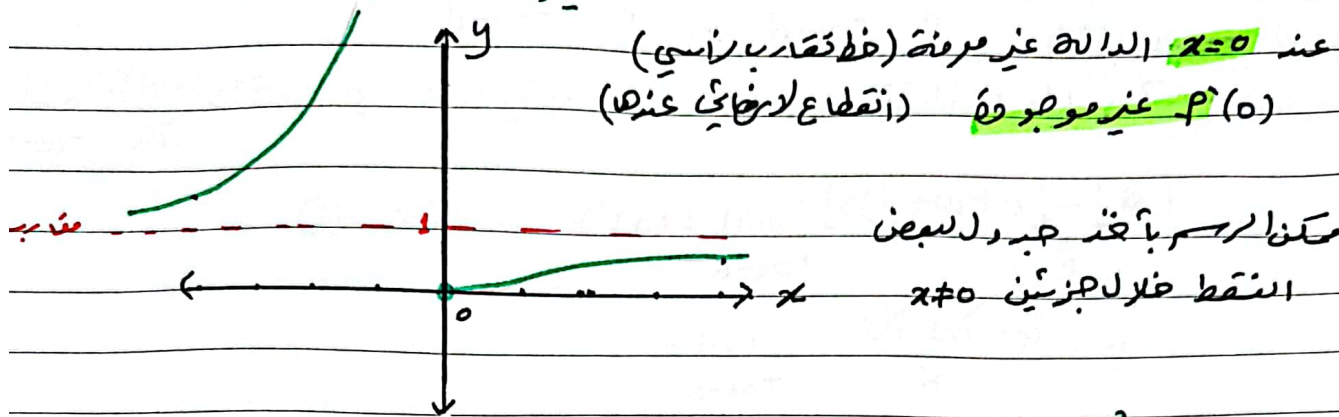
وعبارة الرسم البياني (مطلوب بياناً)

للدالة نجد أن $x=0$ و $x=4$

والمستقيمة غير موجودة عند كل منهما



تمرین (30) ص 154 [a] $g(x) = e^{-\frac{2}{x}}$ مطلوب من خلال الرسم البياني تحديد قيم x التي يكون $g(x)$ غير مماثل للدرجتين عند $x=0$



[b] $g(x) = \frac{e}{x^3 - x}$

الدالة معرفة بشرط $x^3 - x \neq 0$

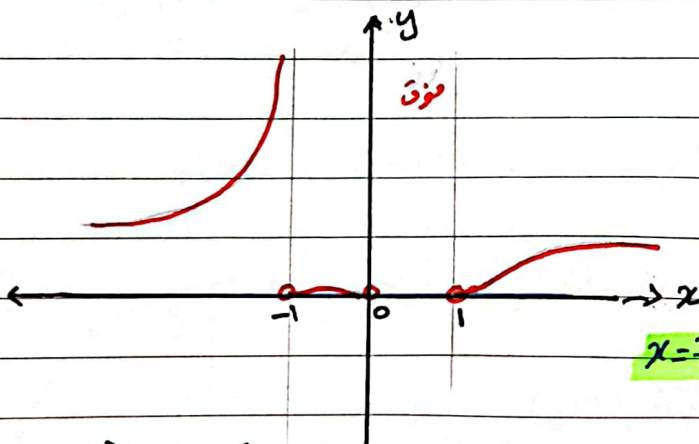
معرفة عند $x \neq 0$

$x \neq \pm 1$

باستخدام برامج الرسم

(يصعب قليلاً الرسم بأخذ نقاط)

بجد f' غير موجود عند $x=0$ و $x=\pm 1$



تمرین (31) ص 154 $f(x) = x^p$ مطلوب إيجاد قيم p الحقيقية ليكون $f'(0)$ موجوداً

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0+h)^p - 0^p}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^p}{h} = (h)^{p-1}$$

ولنكون هذا الناتج موجوداً لن يكون الأس سالب

لن يكون:

$$p-1 < 0$$

(لن يكون) $(p < 1)$ وبالتالي سيكون $p \geq 1$

موجوب $\frac{1}{h}$ سالب
غير معرف $\frac{1}{h} \rightarrow \pm \infty$
 $h \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{h}$

تمرین (32) ص 154 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x < 0 \\ ax + b & x \geq 0 \end{cases}$ مطلوب إيجاد قيم a و b ليكون $f'(0)$ موجوداً

$$\textcircled{1} \quad x < 0 \rightarrow f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h+0) - f(0)}{h}, \quad f(0) = a(0) + b = b$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{[(h+0)^2 + 2(h+0)] - [b]}{h}$$

يتبع:

تابع حل (32) ص 154

لنجد المشتق يجب أن نختصر ط في البسط والقام

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 + 2h - b}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h(h+2) - b}{h}$$

وهذا لا يمكن إلا إذا كانت $0 = b$ ويكون 2

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h(h+2) + 0}{h} = 2$$

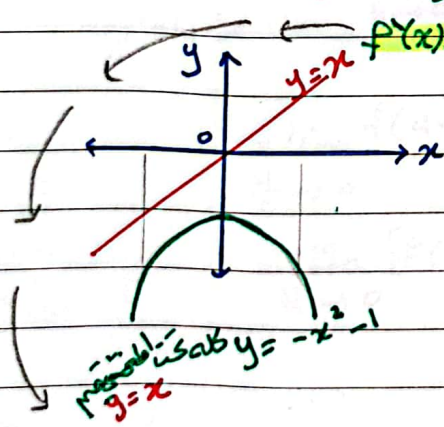
(3) $x > 0 \rightarrow f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{[a(h+0) + b] - [b]}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{ah + b - b}{h} = a$$

ولتكون f' موجوداً يجب أن يكون:

$$P_- f(0) = P_+ f(0) \quad 2 = a$$

تمرين (33) ص 154 مطلوب مثال (لا يحق) إذا كان $f(x) < x$ فإنه $f'(x) < 1$



أي مثال يكون: $f(x) < x$ ولن يكون $f'(x) < 1$

مثال: $f(x) = -x^2 - 1$ دائماً (لاحظ، نحل)

وسنجد $f'(x)$ عند إحدى قيم x مثلاً -1

($f(-1) = -(-1)^2 - 1 = -2$)

لاحظ $f(-1) = -2 < -1 = x$

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[-(-1+h)^2 - 1] - [-2]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(1-2h+h^2) - 1 + 2}{h}$$

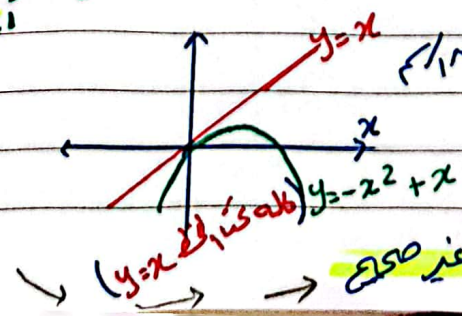
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1+2h-h^2-1+2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2-h)}{h} = 2-0=2$$

وخطأً أنه نقول: $2 = f'(-1) < 1$ ليس $f'(x) < 1$

تمرين (34) ص 154 مطلوب مثال (لحق) إذا كان $f(x) < x$ فإنه $f'(x) < 1$

أي مثال يكون (لا يكون)

$f(x) < x$ $f'(x) < 1$



$f(x) = -x^2 + x < x$ (أيون)

وسنجد $f'(x)$ لا حقا $f'(x) < 1$

$f'(-1) = 3$ (بالكل)

واضح أن: $f'(-1) < 1$ غير صحيح

تمرين (35) ص 154 مطلوب إيجاد قيمة $\lim_{x \rightarrow a} \frac{[f(x)]^2 - [f(a)]^2}{x^2 - a^2}$ حيث f قابل للاشتقاق عند $x=a \neq 0$

البلع فرق مربعين
وكذلك المقام فرق مربعين

$$\text{المطلوب} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{[f(x) - f(a)] \cdot [f(x) + f(a)]}{(x-a) \cdot (x+a)}$$

خواص النهايات (الفرق لضرب كسرين)

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + f(a)}{x+a}$$

$$= f'(a) \times \frac{f(a) + f(a)}{a+a} = f'(a) \times \frac{2f(a)}{2a}$$

$$= \frac{f'(a) \cdot f(a)}{a}$$

تمرين (36) ص 154 المطلوب إثبات أن: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = c \cdot f'(a)$ حيث f قابل للاشتقاق عند $x=a$

الطرف الأيسر من المطلوب

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

نفرض $ch = u$
 $h = \frac{u}{c} \rightarrow h \rightarrow 0$
 $\frac{u}{c} \rightarrow 0$
 وبما $c \neq 0$ فـ $u \rightarrow 0$

$$= \lim_{\frac{u}{c} \rightarrow 0} \frac{f(a+u) - f(a)}{\frac{u}{c}}$$

نقرب بمطلوب المقام

$$= \lim_{u \rightarrow 0} [f(a+u) - f(a)] \times \frac{c}{u} = c \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(a+u) - f(a)}{u}$$

الطرف الأيمن = $c \cdot f'(a)$

(تمرين 37 في الصفحة التالية)

تمرين (38) ص 154 المطلوب ترتيب تصاعدي $f(0) / f(0) - f(-1) / f(0) - f(-0.5) / f'(0)$

من خلال الرسم

$f(0) = 3$
 $f'(0) = 0$ ميل المماس عند $x=0$

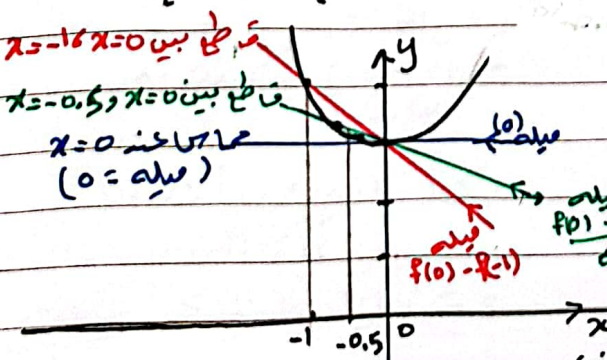
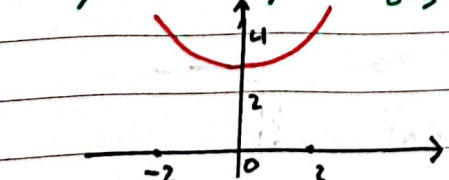
$f(0) - f(-1)$

$= \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)}$

ميل القاطع بين نقطتيه $x=0$ و $x=-1$ (الأعلى)

$\frac{f(0) - f(-0.5)}{0.5} = \frac{f(0) - f(-0.5)}{0 - (-0.5)}$

ميل القاطع بين نقطتيه $x=0$ و $x=-0.5$ (الأخفض)



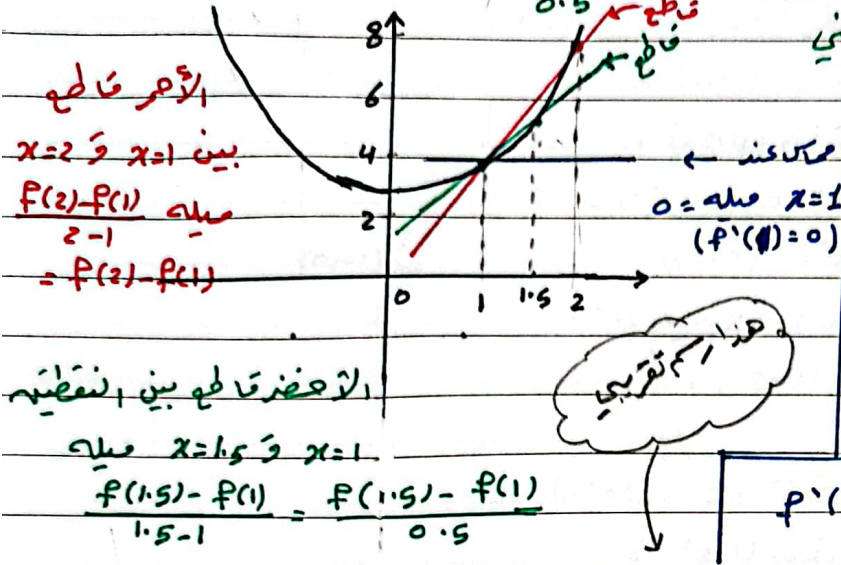
مماس بين $x=0$ و $x=-1$
 قاطع بين $x=0$ و $x=-0.5$
 مماس عند $x=0$ (مماس)

لاحظ في الرسم بعد التكبير وكأن القاطع يتقارب
 أحدهم أخفض ثم ازددت وميله يقترب من ميل المماس (صفر)

$f(0) - f(-1) / f(0) - f(-0.5) / f'(0) / f(0)$

تمرين 38 في الصفحة السابقة

تمرين (37) ص 154 مطلوب ترتيب قيم $f'(1)$ و $f(1.5) - f(1)$ و $f(2) - f(1)$ و $f(1)$ باستخدام الرسم البياني



لاحظ الخطوط الملونة كلها تمر بـ النقطة عند $x=1$
 الميل الأشد الخط الأصفر هو $m_1 = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$
 والميل للخط الأخضر هو $m_2 = \frac{f(1.5) - f(1)}{1.5 - 1}$
 والميل للخط الأزرق هو $m_3 = 0$

هنا رسم تقريبي

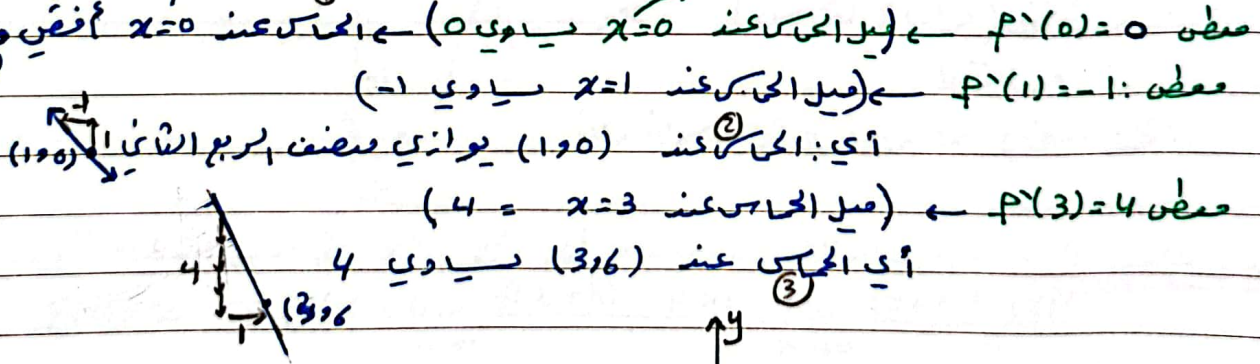
الآن نلاحظ بين النقطتين $x=1.5$ و $x=1$
 $\frac{f(1.5) - f(1)}{1.5 - 1} = \frac{f(1.5) - f(1)}{0.5}$

هذا رسم تقريبي $f(1) \approx 4$ و $f(2) \approx 7$ بين $x=1$ و $x=2$
 $f(1) < 3$ و $f(1) < 4$

تمرين (38) المطلوب رسم $f(x)$ حيث:

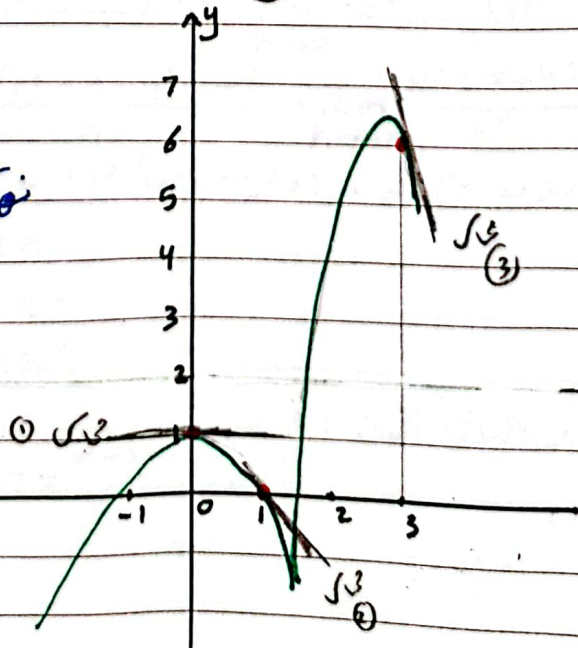
- صطين: $f(3) = 6$ ← نقطة (3, 6)
- صطين: $f(1) = 0$ ← نقطة (1, 0)
- صطين: $f(0) = 1$ ← نقطة (0, 1)
- صطين: $f'(0) = 0$ ← (ميل المحاك عند $x=0$ يساوي 0) ← المحاك عند $x=0$ أفقي ومنه (0, 1)
- صطين: $f'(1) = -1$ ← (ميل المحاك عند $x=1$ يساوي -1) أي: المحاك عند (1, 0) يوازي صطين الربع الثاني (1, 0)
- صطين: $f'(3) = 4$ ← (ميل المحاك عند $x=3$ يساوي 4) أي: المحاك عند (3, 6) يساوي 4

نقطة (0, 1)



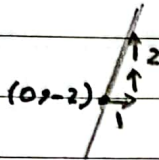
نقطة أولاً:
 - وضع النقطة
 - رسم المحاكات بـ خط تقريبي
 ③ ② ①

الحال المعني مروراً بالنقطة
 ومراعاة التماس عند
 بقية أجزاء المعني كما نريد تكمل



تمرين (40) ص 154 مطلوب رسم $f(x)$ بيته :

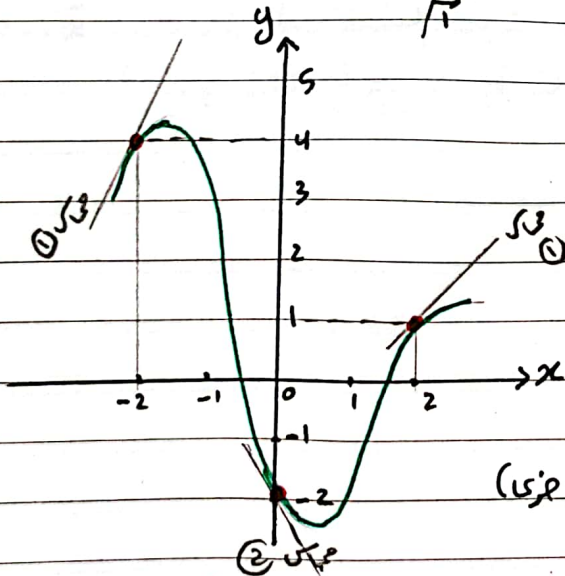
- معطى : $f(2) = 1$ ← نقطة (2, 1)
- معطى : $f(0) = -2$ ← نقطة (0, -2)
- معطى : $f(-2) = 4$ ← نقطة (-2, 4)



معطى : $f'(0) = 2$ ← ميل المماس عند $x = 0$ ياروي 2
وذلك عند نقطة (0, -2)

معطى : $f'(-2) = -2$ ← ميل المماس عند $x = -2$ ياروي -2
وذلك عند نقطة (-2, 4)

معطى : $f'(2) = 1$ ← ميل المماس عند نقطة $x = 2$ ياروي 1
وذلك عند نقطة (2, 1)



ترتيب الرسم : اضع النقاط الثلاثة أولاً

رسم كل تقريبي (المماس)

③ ② ①

تمرير المعني (مراجعة المعاني)
من النقاط

نحل المعني بما نريد (قد توجد رسوم أخرى)

تمرين (41) ص 154 مطلوب الدالة المشتقة للـ x^4, x^3, x^2 ثم تخمين مشتقة x^n

$$f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x + 0 = 2x$$

وبنفس القربى والمعادن (مكرراً بقاً في التمارين) نجد :

$$f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x$$

$$f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = x^4 \rightarrow f'(x) = 4x^3$$

وبالأي تخمن :

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) \quad \text{تذكر}$$

مراجعة (42) ص 154 مطلوب اختيار وإكمال في مربي 41 (وهو: $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$)
لكي نجد مشتقة $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ولكي نجد مشتقة $\frac{1}{x} = x^{-1}$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} (x)^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= \frac{1}{2} (x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -1 (x)^{-1-1} = -1 x^{-2}$$

$$= -1 \times \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

وبما أن المطلوب (التحقق) نختار طبقاً ما حصلنا عليه لكن هل هذا صحيح بناءً على

تعريف المشتقة؟ يعني سنطبق تعريف المشتقة على $f(x) = \sqrt{x}$

وسنجد نفس النتيجة الناتجة: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$