الوحدة السابعة: المصفوفات

تمرين(١) إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢س+٤ & ص-٥ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ص-٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س ، ص

٢٠١٨ - ٢٠١٩

∵ المصفوفتين متساويتان فالعناصر المتناظرة متساوية

$٢س+٤=٤$	$ص-٥=٢ص-٢$
$٢س=٤-٤$	$ص-٢ص=-٢+٥$
$٢س=٠$ ومنه $س=٠$	$-ص=٣$ ومنه $ص=-٣$

تمرين(٢) إذا كانت : $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٤- & ٣ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ٢- & ٢- & ٣ \end{bmatrix}$

فأوجد : $٥\underline{ب} - ٤\underline{أ}$ ، $\underline{أ} + ٦\underline{ب}$

$$٥\underline{ب} - ٤\underline{أ} = ٥ \times \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ٢- & ١- & ٣ \end{bmatrix} - ٤ \times \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤- & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٠ & ٥ & ١٠ \\ ١٠- & ٥- & ١٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٨ & ١٢ & ١٦ \\ ٢٠ & ١٦ & ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨- & ٧- & ٢٦ \\ ٢٠- & ٢١- & ٣ \end{bmatrix}$$

$$\underline{أ} + ٦\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} + ٦ \times \begin{bmatrix} ٤- & ٣ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ٢- & ١- & ٣ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٦ & ١٢ \\ ١٢- & ٦- & ١٨ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & ٩ & ٨ \\ ٧- & ٢- & ٢١ \end{bmatrix}$$

تمرين(٣) إذا كانت : $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢- & ٢ \\ ٥ & ٤- \end{bmatrix}$

فأوجد : $٢\underline{أ} - \underline{ب}$ ، $\underline{ب}^{-١}$

$٢\underline{أ} - \underline{ب} = ٢ \times \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢- & ٢ \\ ٥ & ٤- \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٤ & ٦- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢- & ٢ \\ ٥ & ٤- \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ١- & ٢- \end{bmatrix}$

$\underline{ب}^{-١}$: $|\underline{ب}| = \begin{vmatrix} ٢- & ٢ \\ ٥ & ٤- \end{vmatrix} = (٤-)(٢-) - (٥)(٢) = ٨ - ١٠ = ٢- \neq$ صفر

$\underline{ب}^{-١} = \frac{١}{٢-} \begin{bmatrix} ٤- & ٢- \\ ٥- & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ \frac{٥}{٢} & ١ \end{bmatrix}$

MATH

٢٠١٨ – ٢٠١٩
"دور ثاني"

تمرين(٤) حل كل معادلة مما يلي :

أ) $٢س - \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٩ & ٨ \end{bmatrix}$

$٢س = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٩ & ٨ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$

$\frac{١}{٢} \times ٢س = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٢- \\ ١٤ & ١٠ \end{bmatrix}$ نضرب طرفي المعادلة في $\frac{١}{٢}$

$س = \begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix}$

ب) $٤س + ٢\begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

$٤س + \begin{bmatrix} ٦ & ٤- \\ ٨ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

$٤س = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٦ & ٤- \\ ٨ & ٢ \end{bmatrix}$

$\frac{١}{٤} \times ٤س = \frac{١}{٤} \times \begin{bmatrix} ٤ & ٨- \\ ٨ & ٠ \end{bmatrix}$ نضرب طرفي المعادلة في $\frac{١}{٤}$

$س = \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

تمرين(٥) إذا كانت : $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٤ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

أوجد : $\underline{أ} \times \underline{ب}$ ، $\underline{ب}^{٢}$

$$\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٤ & -١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣\times٤ + ٠\times٠ & ٣\times(-٢) + ٠\times١ \\ -٤\times٤ + -١\times٠ & -٤\times(-٢) + -١\times١ \\ ١\times٤ + ٢\times٠ & ١\times(-٢) + ٢\times١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٢ & -٦ \\ -١٦ & ٧ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\underline{ب}^{٢} = \underline{ب} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٤\times٤ + -٢\times٠ & -٢\times٤ + -٢\times١ \\ ٠\times٤ + ١\times٠ & ٠\times(-٢) + ١\times١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٦ & -١٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

تمرين(٦) أثبت أن $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

$$\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٤-٣ & -٦+٦ \\ ٢-٢ & -٣+٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \underline{و}$$

$\therefore \underline{أ} \times \underline{ب} = \underline{و}$ (مصفوفة الوحدة)

$\therefore \underline{ب}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ}$

MATH

تمرين(٧) إذا كانت المصفوفة ب = $\begin{bmatrix} س & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س.

٢٠١٨ – ٢٠١٩
"دور ثاني"

∴ ب منفردة ∴ |ب| = صفر

$\begin{vmatrix} س & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{vmatrix}$ = صفر وضح (س × ٦) − (١٢ × ٤) = ٠

٦ س − ٤٨ = ٠

$\frac{٦ س}{٦} = \frac{٤٨}{٦}$

س = ٨

MATH

٢٠١٢ – ٢٠١٣

تمرين(٨) أوجد النظير الضربي للمصفوفة : أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

|أ| = $\begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$ = (١ × ٥) − (٢ × ٣) = ١ ≠ صفر

$أ^{-١} = \frac{١}{١} \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$

٢٠١٦ – ٢٠١٧

تمرين(٩) أوجد س بحيث : $\begin{bmatrix} ٥ \\ ٤ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$ × س = $\begin{bmatrix} ٥ \\ ١٠ \end{bmatrix}$

$\underline{P} = \begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$: $|\underline{P}| = \begin{vmatrix} -٣ & ٥ \\ -٢ & ٤ \end{vmatrix} = (-٣ \times ٤) - (-٢ \times ٥) = -١٢ + ١٠ = -٢ \neq$ صفر

$\underline{P}^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} ٤ & -٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & \frac{٥}{٢} \\ ١ & \frac{٣}{٢} \end{bmatrix}$

$\underline{س} = \underline{P}^{-١} \times \begin{bmatrix} ٥ \\ ١٠ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -٢ & \frac{٥}{٢} \\ ١ & \frac{٣}{٢} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ \\ ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٠ + ٢٥ \\ ٥ + ١٥ \end{bmatrix}$

$\underline{س} = \begin{bmatrix} ١٥ \\ ١٠ \end{bmatrix}$

٢٠١٧ – ٢٠١٨

تمرين(١٠) حل النظام : $\begin{cases} ٥س + ٣ص = ٧ \\ ٣س + ٢ص = ٥ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة .

المعادلة المصفوفية: مصفوفة المتغيرات

مصفوفة المعاملات ← $\begin{bm٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ × $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix}$ ← مصفوفة الثوابت

نوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات: $\underline{P} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

$|\underline{P}| = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = (٣ \times ٣) - (٢ \times ٥) = ٩ - ١٠ = -١ \neq$ صفر

$\underline{P}^{-١} = \frac{١}{-١} \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢١ + ٢٥ \\ ١٤ - ١٥ \end{bmatrix}$ ، منه $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ -١ \end{bmatrix}$

حل النظام : س = ٤ ، ص = -١

٢٠١٤ - ٢٠١٥

تمرين(١١) حل النظام : $\begin{cases} س + ٣ص = ٥ \\ س + ٤ص = ٦ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة .

المعادلة المصفوفية :

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$$

مصفوفة الثوابت

مصفوفة المعاملات ↓ ↙ مصفوفة المتغيرات

النظير الضربي لمصفوفة المعاملات : $\underline{P} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

$$|\underline{P}| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} = (١ \times ٢) - (٤ \times ١) = -٢ \neq ٠$$

$$\underline{P}^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & \frac{١}{٢} \\ ٢ & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & \frac{١}{٢} \\ ٢ & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ + ٣ \\ ١٠ - ٦ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \end{bmatrix}$$

حل النظام : $س = ٢ \quad ، \quad ص = ١$

MATH

تمرين(١٢) حل النظام : $\begin{cases} ٣س + ٢ص = -٦ \\ -٤س - ٣ص - ٧ = ٠ \end{cases}$ باستخدام قاعدة كرامر

٢٠١٨ - ٢٠١٩

نكتب النظام بالصورة القياسية: $\begin{cases} ٣س + ٢ص = -٦ \\ -٤س - ٢ص = ٧ \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ -٤ & -٢ \end{vmatrix} = (٣ \times -٢) - (-٤ \times ٢) = -٦ + ٨ = ٢ \neq$ صفر

$\Delta س = \begin{vmatrix} -٦ & ٢ \\ ٧ & -٢ \end{vmatrix} = (-٦ \times -٢) - (٧ \times ٢) = ١٢ - ١٤ = -٢$

$\Delta ص = \begin{vmatrix} ٣ & -٦ \\ -٤ & ٧ \end{vmatrix} = (٣ \times ٧) - (-٤ \times -٦) = ٢١ - ٢٤ = -٣$

$س = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{-٢}{٢} = -١$

$ص = \frac{\Delta ص}{\Delta} = \frac{-٣}{٢}$

حل النظام هو : $س = -١ ، ص = \frac{-٣}{٢}$

تمرين(١٣) حل النظام : $\begin{cases} ٤س - ٥ص = -٧ \\ ٣ص - ٦س = -٣ \end{cases}$ باستخدام قاعدة كرامر.

٢٠١٦ - ٢٠١٧

"دور ثاني"

نكتب النظام بالصورة القياسية: $\begin{cases} ٤س - ٥ص = -٧ \\ -٦س + ٣ص = -٣ \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & -٥ \\ -٦ & ٣ \end{vmatrix} = (٤ \times ٣) - (-٦ \times -٥) = ١٢ - ٣٠ = -١٨ \neq$ صفر

$\Delta س = \begin{vmatrix} -٧ & -٥ \\ -٣ & ٣ \end{vmatrix} = (-٧ \times ٣) - (-٣ \times -٥) = -٢١ - ١٥ = -٣٦$

$\Delta ص = \begin{vmatrix} ٤ & -٧ \\ -٦ & -٣ \end{vmatrix} = (٤ \times -٣) - (-٦ \times -٧) = -١٢ - ٤٢ = -٥٤$

$س = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{-٣٦}{-١٨} = ٢ ، ص = \frac{\Delta ص}{\Delta} = \frac{-٥٤}{-١٨} = ٣$

حل النظام هو : $س = ٢ ، ص = ٣$

MATH