دولة الإمارات العربية المتحدة

United Arab Emirates

معلم الرياضيات: أ/ عمرو البيومي

United Arab Emirates

مؤسسة الإمارات للتعليم المدرسي
EMIRATES SCHOOLS ESTABLISHMENT

2022/2023

الصف الحادي عشر المتقدم

مراجعة الوحدة الخامسة (أنظمة المعادلات و المصفوفات)

Student Name: ………………………………………………………

@AMRMATH7

0544560575

الدرس 2-5

ضرب المصفوفات والمعكوسات والمحددات

مثال 1 : ضرب المصفوفات

استخدم المصفوفات $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ لإيجاد كل ناتج ضرب، إن وجد

a. AB

b. BA

أ/ عمرو البيومي

0544560575

2. استخدم المصفوفات $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 7 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ لإيجاد كل ناتج ضرب، إن وجد

a. AB

b. BA

أ/ عمرو البيومي

3. استخدم المصفوفات $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ لإيجاد كل ناتج ضرب، إن وجد

a. AB

b. BA

0544560575

المفهوم الأساسي خصائص ضرب المصفوفة

بالنسبة لأي مصفوفة A و B و C والتي يكون ناتج ضرب المصفوفة لها معروف وأي كمية قياسية k، تنطبق الخصائص التالية.

خاصية التجميع في ضرب المصفوفة	$(AB)C = A(BC)$
خاصية التجميع في ضرب الكميات القياسية	$k(AB) = (kA)B = A(kB)$
خاصية التوزيع إلى اليسار	$C(A + B) = CA + CB$
خاصية التوزيع إلى اليمين	$(A + B)C = AC + BC$

مثال 2 من الحياة اليومية : ضرب المصفوفات

1. التصويت، توضح نسبة المصوتين من فئات عمرية مختلفة والمسجلين بأحزاب الديموقراطيين أو الجمهوريين أو المستقلين بأحد الانتخابات الأخيرة في مدينة أمريكية. استخدم هذه المعلومات لتحديد إن كان عدد المصوتين من الذكور المسجلين لحزب الديموقراطيين أكبر من عدد الإناث المسجلين بحزب الجمهوريين.

التوزيع حسب الحزب والعمر (%)

الحزب	18–25	26–40	41–50	50+
الديموقراطيون	0.55	0.50	0.35	0.40
الجمهوريون	0.30	0.40	0.45	0.55
المستقلون	0.15	0.10	0.20	0.05

التوزيع حسب العمر والجنس

العمر	أنثى	ذكر
18-25	18,500	16,000
26-40	20,000	24,000
41-50	24,500	22,500
50+	16,500	14,000

الحادي عشر متقدم

أ/ عمرو البيومي
@AMRMATH7

0544560575

2. المبيعات، يوضح عدد أجهزة الكمبيوتر المحمولة التي باعتها إحدى الشركات في الأشهر الثلاثة الأولى من العام وكذلك أسعار كل طراز أثناء هذه الأشهر. استخدم هذه المعطيات لتحديد أي النماذج تنتج أكبر قدر من الدخل للأشهر الثلاثة الأولى.

شهر	الطراز 1	الطراز 2	الطراز 3
يناير	150	250	550
فبراير	200	625	100
مارس	600	100	350

الطراز	يناير	فبراير	مارس
1	AED 650	AED 575	AED 485
2	AED 800	AED 700	AED 775
3	AED 900	AED 1050	AED 925

أ/ عمرو البيومي

0544560575

المفهوم الأساسي المصفوفة المحايدة

الشرح إن المصفوفة المحايدة ذات الـــرُتبة n، المعبر عنها بواسطة I_n، هي مصفوفة $n \times n$ تكون جميع قيمها 1 على قطرها الرئيس، من أعلى اليسار إلى أدنى اليمين، وجميع قيمها 0 بالنسبة لجميع المُدخلات الأخرى.

الرموز

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

إذاً، إذا كانت A مصفوفة n x n، فإن $AI_n = I_nA = A$ وقد تجد المصفوفة المحايدة بالطرف الأيسر لأي مصفوفة موسعة في صورة مستوى صف منخفض. وبشكل عام، إذا كانت A مصفوفة المعاملات لنظام المعادلات، فإن X هي مصفوفة العمود للمتغيرات و B هي مصفوفة العمود للثوابت، فيمكنك كتابة نظام المعادلات كمعادلة من المصفوفات (معادلة مصفوفية).

نظام المعادلات

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

معادلة المصفوفة

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{B}$$

مثال 3 : حل أنظمة المعادلات الخطية

اكتب نظام المعادلات في صورة معادلة مصفوفية AX = B . ثم استخدم اختزال جاوس - جوردان على المصفوفة الموسعة لحل النظام.

1. $-x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$

$-2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5$

$3x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -1$

أ/ عمرو البيومي

0544560575

اكتب نظام المعادلات في صورة معادلة مصفوفية AX = B . ثم استخدم اختزال جاوس - جوردان على المصفوفة الموسعة لحل النظام.

2. $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 9$

$-4x_1 + x_2 + 8x_3 = -16$

$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$

3. $x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$

$-x_1 + 4x_2 + x_3 = 3$

أ/ عمرو البيومي

0544560575

2 المعكوسات والمحددات أنت تعلم أنه إذا كان a عددًا حقيقياً غير صفري، فإن $\frac{1}{a}$ أو a^{-1} هو المعكوس الضربي للمتغير a حيث إن $1 = a \times a^{-1} = a\left(\frac{1}{a}\right)$. ويطلق على المعكوس الضربي لمصفوفة مربعة اسم **المصفوفة العكسية.**

المفهوم الأساسي معكوس المصفوفة المربعة

افترض أن A هي المصفوفة $n \times n$. فإذا وجدت مصفوفة B بحيث تكون $AB = BA = I_n$. فيطلق على المصفوفة B حينها **معكوس** المصفوفة A وتكتب بالصورة A^{-1}. إذًا، $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

مثال 4 : التحقق من المصفوفة العكسية

1. حدد إذا كان $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ مصفوفتين متعاكستين.

أ/ عمرو البيومي

حدد إذا كانت المصفوفة A والمصفوفة B مصفوفتين متعاكستين.

2. $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

وإذا كان للمصفوفة A معكوس، يقال إن المصفوفة A **قابلة للعكس أو لها معكوس** أو غير منفردة. أما **المصفوفة المنفردة** فليس لها معكوس. وليست جميع المصفوفات المربعة لها مصفوفة عكسية. ولإيجاد معكوس مصفوفة مربعة A، ستحتاج إلى إيجاد مصفوفة A^{-1}، بافتراض وجود A^{-1} وأن ناتج ضرب A و A^{-1} هو المصفوفة المحايدة. بعبارة أخرى، ستحتاج إلى حل المعادلة المصفوفية $AA^{-1} = I_n$ لإيجاد قيمة B. وبمجرد تحديد B، ستحتاج إلى التأكد أن $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

❖ **نصيحة دراسية:** المصفوفة المنفردة إذا كانت المصفوفة منفردة، فإن المعادلة المصفوفية $AB = I$ ليس لها حل.

مثال 5 : معكوس المصفوفة

جد A^{-1}، إن وجدت وإن لم توجد A^{-1}، فاكتب منفردة.

1. $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

جد A^{-1}، إن وجدت وإن لم توجد A^{-1}، فاكتب منفردة.

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

0544560575

جد A^{-1}، إن وجدت وإن لم توجد A^{-1}، فاكتب منفردة.

4. $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$

أ/ عمرو البيومي

المفهوم الأساسي محدد ومعكوس المصفوفة 2×2

افترض $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. يكون للمصفوفة A معكوس فقط إن كان $ad - cb \neq 0$، وهو $A^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

العدد $ad - cb$ يُسمى **مُحَدِّد** المصفوفة 2×2 ويُعبَّر عنه بواسطة $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

مثال 6 : محدد و معكوس المصفوفة 2×2

جد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم جد معكوس المصفوفة، إن وجدت.

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

0544560575

جد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم جد معكوس المصفوفة، إن وجدت.

2. $B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}$

أ/ عمرو البيومي

0544560575

جد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم جد معكوس المصفوفة، إن وجدت.

4. $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

المفهوم الأساسي محدد مصفوفة 3 × 3

افترض $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. إذًا $\det(A) = |A| = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$.

مثال 7 : محدد و معكوس المصفوفة 3 × 3

جد محدد $C = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. ثم جد C^{-1}، إن وجدت.

أ/ عمرو البيومي

جد محدد كل من مصفوفات التالية. ثم جد معكوسها، أن وجدت.

2. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

0544560575

تمارين

جد AB و BA إن أمكن.

1. $A = [8 \quad 1]$, $B\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

أ/ عمرو البيومي

جد AB و BA إن أمكن.

3. $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -10 & 9 \end{bmatrix}$

اكتب كل نظام من أنظمة المعادلات في صورة معادلة مصفوفة AX = B. ثم استخدم اختزال جاوس - جوردان على المصفوفة الموسعة لإيجاد حل النظام.

5. $2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 9$

$4x_1 + x_2 - 6x_3 = 35$

$-3x_1 + 9x_2 - 7x_3 = -6$

6. $3x_1 - 10x_2 - x_3 = 6$

$-5x_1 + 12x_2 + 2x_3 = -5$

$-4x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 16$

أ/ عمرو البيومي

اكتب كل نظام من أنظمة المعادلات في صورة معادلة مصفوفة AX = B. ثم استخدم اختزال جاوس - جوردان على المصفوفة الموسعة لإيجاد حل النظام.

7. $2x_1 - 10x_2 + 7x_3 = 7$

$6x_1 - x_2 + 5x_3 = -2$

$-4x_1 + 8x_2 - 3x_3 = -22$

8. $x_1 + 5x_2 + 5x_3 = -18$

$-7x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3$

$6x_1 + 7x_2 - x_3 = 42$

حدد إذا كانت المصفوفة A والمصفوفة B مصفوفتين متعاكستين.

9. $A = \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

0544560575

حدد إذا كانت المصفوفة A والمصفوفة B مصفوفتين متعاكستين.

11. $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

أ/ عمرو البيومي

0544560575

جد A^{-1}، إن جدت. وإن لم توجد A^{-1}، فاكتب منفردة.

13. $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

أ/ عمرو البيومي

0544560575

جد A^{-1}، إن جدت. وإن لم توجد A^{-1}، فاكتب منفردة.

15. $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

أ/ عمرو البيومي

جد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم جد معكوس المصفوفة، إن وجد.

17. $\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

0544560575

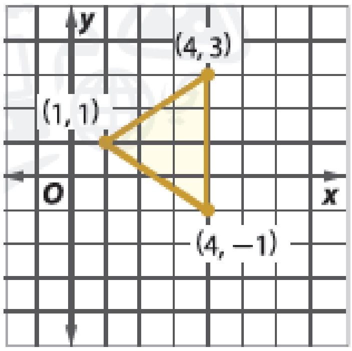
جد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم جد معكوس المصفوفة، إن وجد.

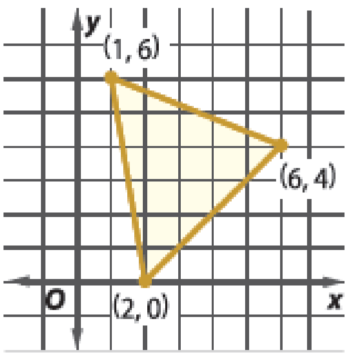
19. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 8 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & 9 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

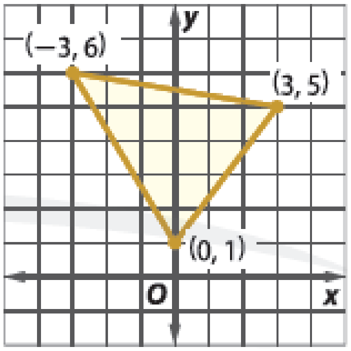
أ/ عمرو البيومي

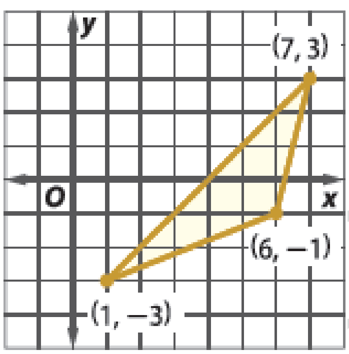
21. جد المساحة A لكل مثلث بالرؤوس (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، (x_3, y_3)، باستخدام $A = \frac{1}{2}|\det(X)|$، حيث إن X تساوي $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$





22. جد المساحة A لكل مثلث بالرؤوس (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، (x_3, y_3)، باستخدام $A = \frac{1}{2}|\det(X)|$، حيث إن X تساوي $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$





باستخدام A و AB، جد B

23. $A = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 36 & 48 \\ -24 & 48 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -16 & -6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

0544560575

جد x و y.

25. $A = \begin{bmatrix} 2x & -y \\ -3y & 5x \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} -2 \\ 31 \end{bmatrix}$

26. ما أبعاد المصفوفة التي تنتج عن عملية الضرب الموضحة؟

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

F 1×3

G 3×1

H 3×3

J 4×3

أ/ عمرو البيومي