الدرس 6.5 البرمجة الخطية

1 إستخدام البرمجة الخطية لحل التطبيقات.

2 التعرف على الحالات التي لا يكون لها حلول أو لها أكثر من حل واحد لتطبيق البرمجة الخطية.

بوجه عام، تسعى الشركات جاهدة إلى تقليل التكاليف إلى أدنى حد ممكن من أجل تعظيم الأرباح. ويُطلق على العوامل التي تتسبب في تكاليف الأعمال أو تؤدي إلى زيادتها والتي تحد أو تقلل من الأرباح اسم قيود الأعمال.

بالنسبة لشركة شحن، قد يتمثل أحد القيود في عدد الساعات في اليوم التي يستطيع سائق الشاحنة خلالها القيادة بشكل آمن. أما في حالة مركز رعاية نهارية، فقد تتمثل أحد القيود في لائحة حكومية تحد من عدد الأطفال لكل مقدم للرعاية بالنسبة لفئات عمرية معينة.

المفردات الجديدة

الحل الأمثل optimization

البرمجة الخطية linear programming

الدالة الهدف objective function

قيود constraints

الحلول الممكنة feasible solutions

حلول مثلى متعددة multiple optimal solutions

غير محدودة unbounded

1 البرمجة الخطية

تنطوي العديد من التطبيقات في مجال الأعمال والاقتصاد على **الأمثلية (البحث عن الحل الأمثل)**؛ وهي عملية إيجاد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى لكمية معينة. وعندما تكون الكمية المطلوب تحقيق الأمثلية لها ممثلةً بدالة خطية، فإن هذه العملية تُسمى **برمجة خطية**.

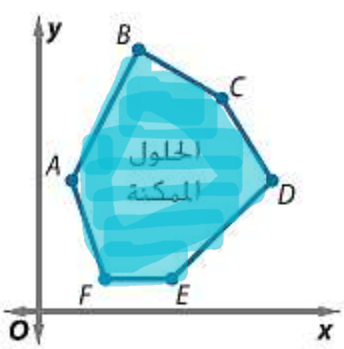
تتكون مسألة البرمجة الخطية ثنائية الأبعاد من دالة خطية مطلوب تحقيق الأمثلية لها تُسمى **دالة الهدف**. وهي تتألف من الصيغة $f(x, y) = ax + by + c$ ونظام من المتباينات الخطية يُسمى **قيود**. وتكون مجموعة حل نظام المتباينات عبارة عن مجموعة من **الحلول الممكنة أو المحتملة**، والتي تكون نقاطًا تأخذ الصيغة (x, y).

لنفترض أن المطلوب إيجاد القيمة العظمى للدالة $f(x, y) = 3x + 5y$ مع مراعاة القيود الواردة في النظام أعلاه. ونظرًا لأن المنطقة المظللة التي تمثل مجموعة الحلول الممكنة تحتوي على عدد لا نهائي من النقاط، فسيكون من المستحيل إيجاد قيمة $f(x, y)$ لجميعها. ولحسن الحظ، تقدم نظرية الرأس إستراتيجية لإيجاد الحل، إن وُجد.

المفهوم الأساسي نظرية الرأس المتعلقة بالحل الأمثل

الشرح إذا كان من الممكن إيجاد الحل الأمثل لمسألة برمجة خطية، فسوف تظهر القيمة المثلى عند إحدى رؤوس المنطقة التي تمثل مجموعة الحلول الممكنة.

مثال القيمة العظمى أو الصغرى للدالة $f(x, y) = ax + by + c$ عبر مجموعة الحلول الممكنة الممثلة بيانيًا تظهر عند النقطة A أو B أو C أو D أو E أو F.



المفهوم الأساسي البرمجة الخطية

لحل مسألة برمجة خطية، اتبع الخطوات التالية.

الخطوة 1 مثّل منطقة الحل الخاص بنظام القيود بيانيًا.

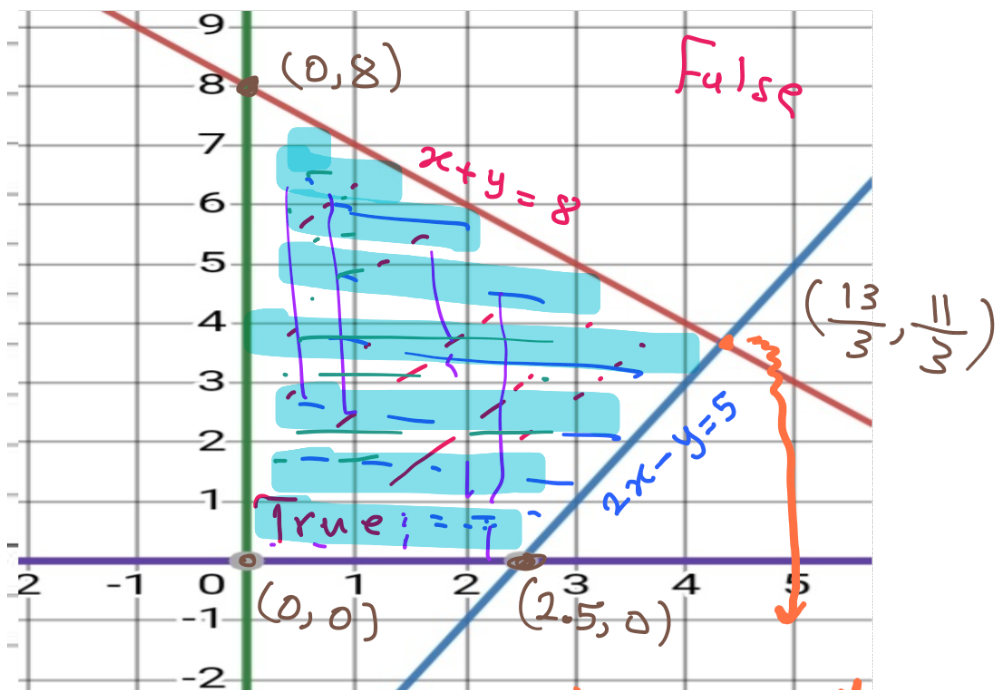
الخطوة 2 جد إحداثيات رؤوس المنطقة الناتجة.

الخطوة 3 جد قيمة دالة الهدف عند كل رأس لتحديد أي من قيمتي x و y، تحقق القيمة عظمى أو صغرى إن وُجدت .

مثال 1 زيادة دالة الهدف وإنقاصها إلى أقصى حد

جد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $\boxed{f(x, y) = x + 3y}$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود التالية.

$x + y \le 8$
$2x - y \le 5$
$x \ge 0$ → $x = 0$
$y \ge 0$



نمثل المعادلة الخطية

$x + y = 8$

نختبر نقطة ولتكن (0,0)

في المتباينة $x+y \le 0$

$0+0 \le 8$ True

تكون (0,0) ضمن منطقة الحل

$2x - y = 5$

(المحور x) $y = 0$

$y \ge 0$

(المحور y) $x = 0$

$x \ge 0$

لإيجاد نقطة التقاطع نحل المعادلتين جبرياً

$x + y = 8$
$2x - y = 5$

$x = \frac{13}{3}$, $y = \frac{11}{3}$

*
$f(x, y) = x + 3y$
$f(0, 0) = 0$ → قيمة صغرى
$f(2.5, 0) = 2.5$
$f(0, 8) = 24$ → قيمة عظمى
$f(\frac{13}{3}, \frac{11}{3}) = 15.3$

→ إذاً القيمة العظمى هي 24 عندما تكون $x=0$ و $y=8$
والصغرى هي 0 عندما $x=0$ و $y=0$

تمرين موجّه

جد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y)$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة.

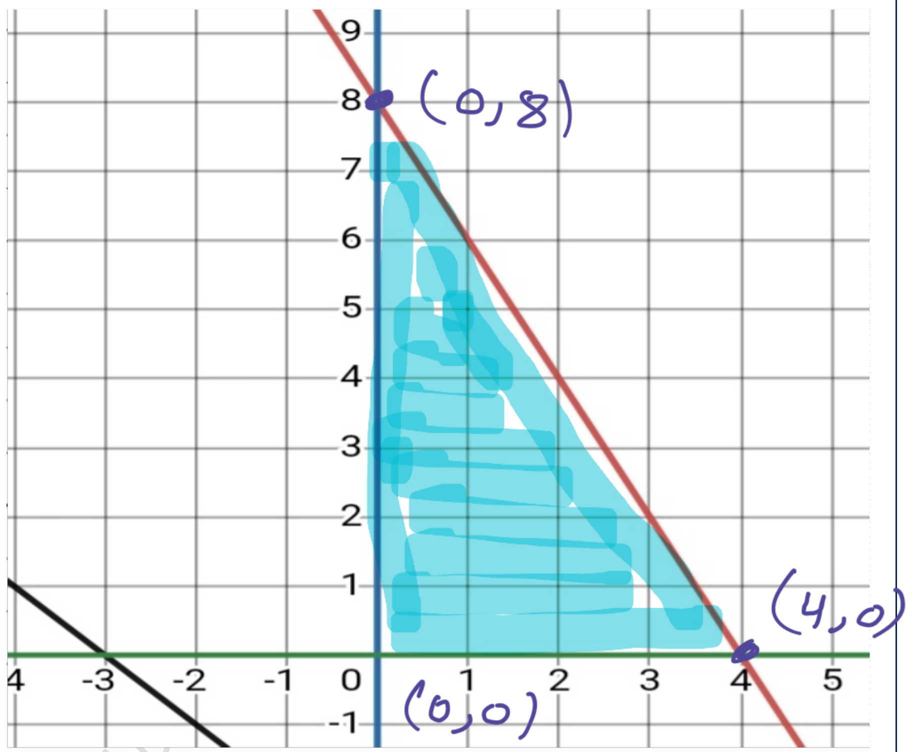
1A. $f(x, y) = 2x + 5y$

$x + y \geq -3$

$6x + 3y \leq 24$

$x \geq 0$

$y \geq 0$



$f(0,0) = 0$ صغرى

$f(4,0) = 8$

$f(0,8) = 40$ عظمى

الصغرى $(0,0)$

عند $x=0$ و $y=0$

العظمى 40 عند $x=0$

و $y=8$

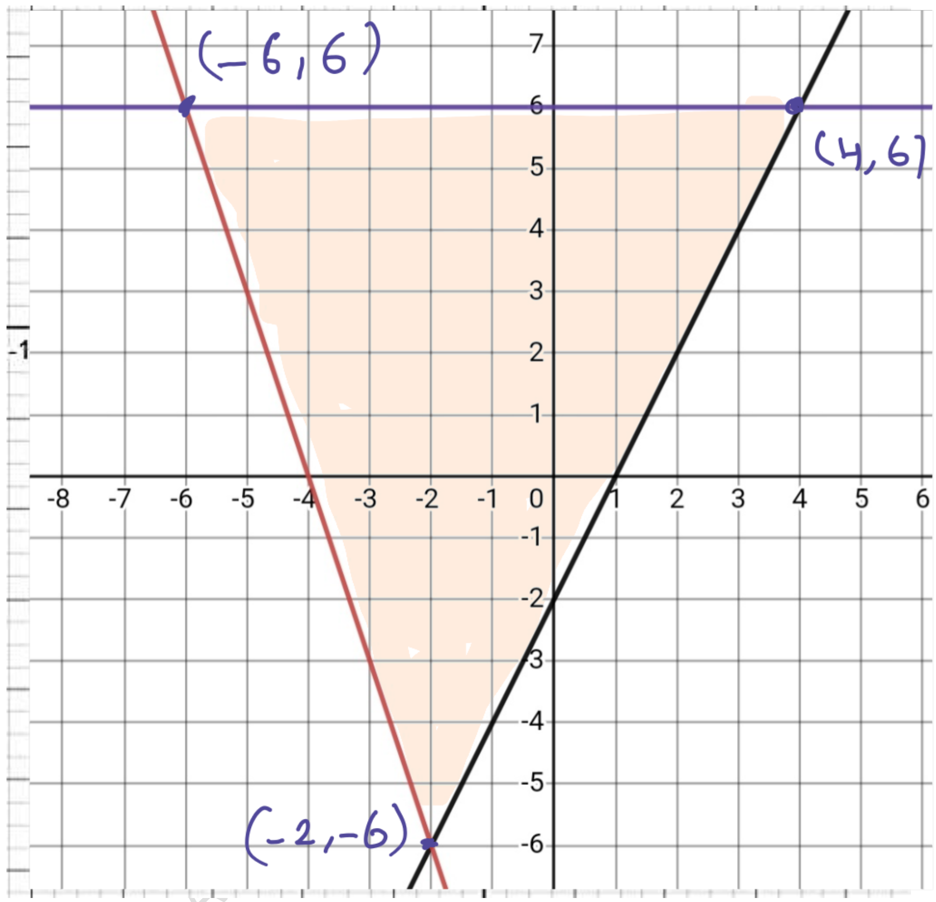
SAIF ALDEEN ALALI

1B. $f(x, y) = 5x - 6y$

$y \leq 6$

$y \geq 2x - 2$

$y \geq -3x - 12$



$f(4, 6) = -16$

$f(-6, 6) = -66$

$f(-2, -6) = 26$

العظمى 26

عند

$x = -2$

$y = -6$

الصغرى -66

عند

$x = -6$

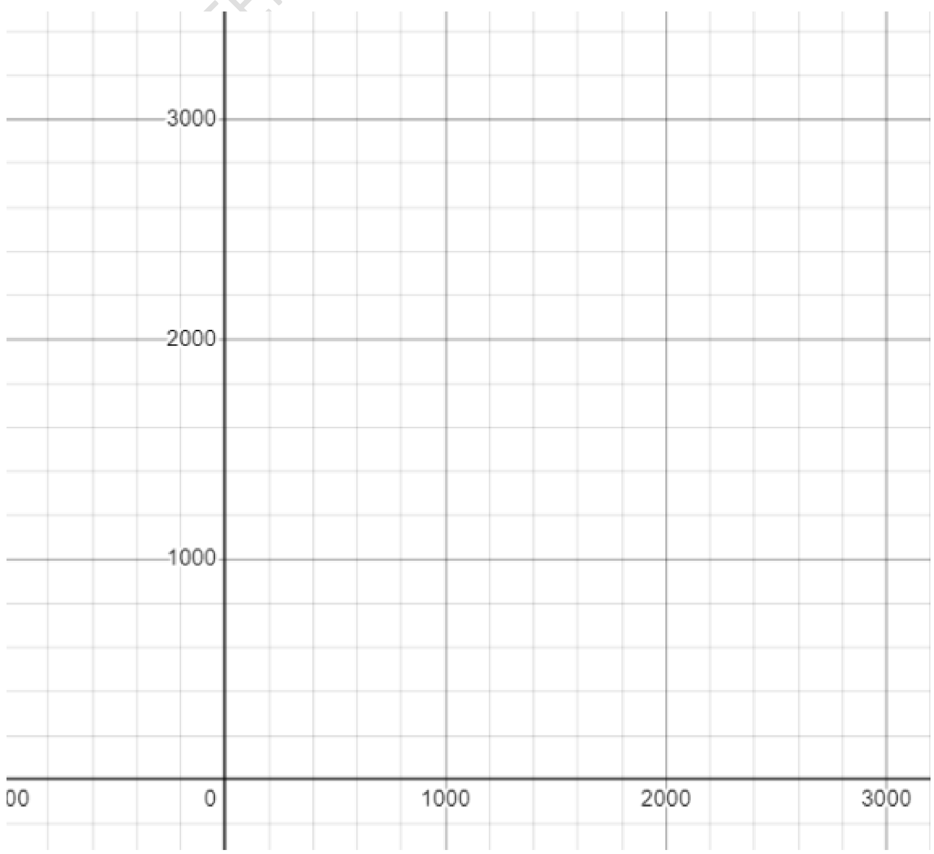
$y = 6$

مثال 2 من الحياة اليومية تعظيم الربح

الأعمال يزرع مركز أشجار بساتين فقط نباتات العرعر والأزالية في دفيئة زراعية تتسع ما يصل إلى 3000 شجيرة. ونظرًا لتكاليف العمالة، يجب أن يكون عدد شجيرات الأزالية المزروعة أقل من أو يساوي 1200 زائد ثلاث مرات عدد شجيرات العرعر. ويشار إلى أن طلب السوق على الأزالية يعادل مرتين على الأقل من الطلب على العرعر. ويحقق المركز ربحًا قدره AED 2 لكل شجيرة عرعر و AED 1.50 لكل شجيرة أزالية.

a. اكتب دالة هدف، وقائمة بالقيود التي تمثل الحالة المبينة.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا للمنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء (a) لإيجاد عدد الشجيرات لكل نبتة يجب على الشركة زراعتها لتحقيق أقصى ربح ممكن.



تمرين موجّه

2. التصنيع مصنع خشب يستطيع إنتاج ما يصل إلى 600 وحدة من المنتج كل أسبوع. ولتلبية احتياجات عملائه المعتادين، يجب على المصنع أن ينتج على الأقل 150 وحدة من الخشب المنشور و 225 وحدة من الخشب الرقائقي. ويحقق المصنع ربحًا قدره AED 30 لكل وحدة من الخشب المنشور و AED 45 لكل وحدة من الخشب الرقائقي.

A. اكتب دالة هدف وقائمة بالقيود التي تمثل الحالة المبينة.

B. ارسم تمثيلاً بيانيًا للمنطقة المحددة بواسطة القيود لإيجاد عدد الوحدات لكل من نوعي الخشب المنتجَين التي يجب على المصنع إنتاجها لتحقيق الربح الأقصى.

عدد وحدات الخشب المنشور x

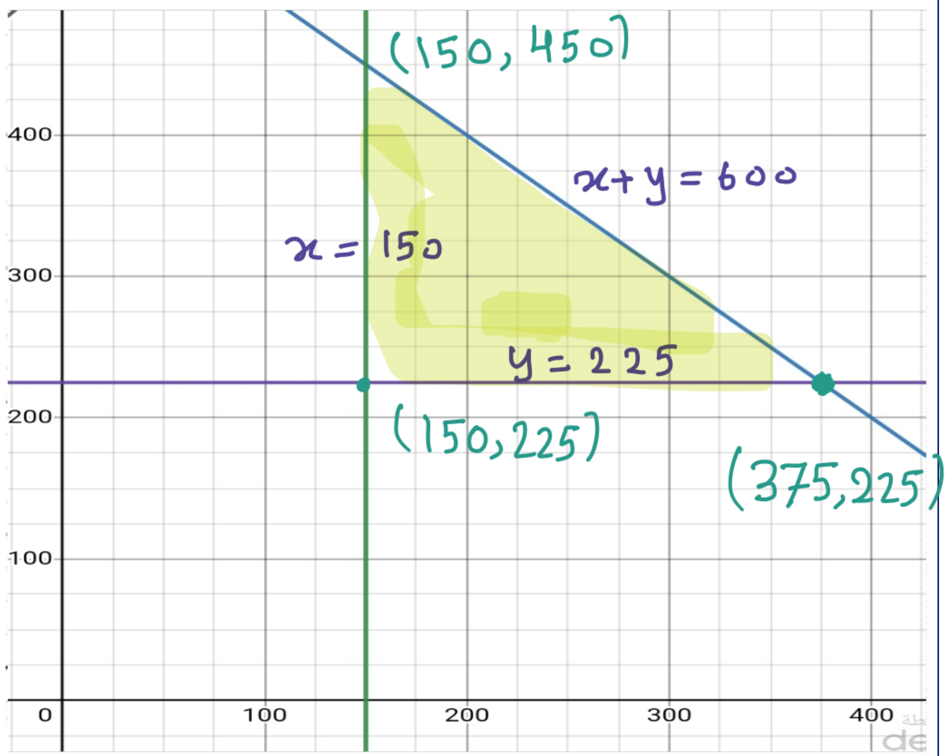
عدد وحدات الخشب الرقائقي y

$x+y \leq 600$

$x \geq 150$

$y \geq 225$

$f(x,y)=30x+45y$



• يمكن استخدام الحل الجبري لتحديد والتحقق من نقاط التقاطع

$\begin{cases} x+y=600 \\ y=225 \end{cases} \Rightarrow x=375$

$\begin{cases} x+y=600 \\ x=150 \end{cases} \Rightarrow y=450$

$f(x,y)=30x+45y$

$f(150,225)=14625$ (صغرى)

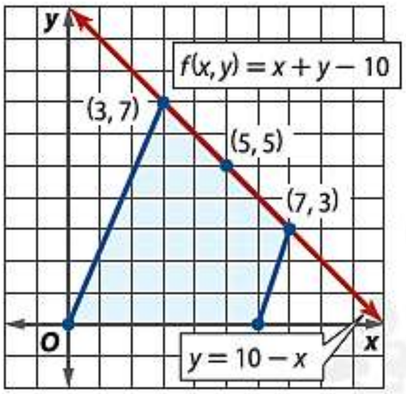
$f(375,225)=21375$

$f(150,450)=24750$ (عظمى)

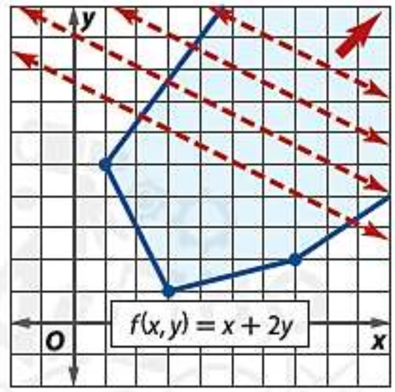
أعلى ربح يمكن تحقيقه → 24750 AED عندما يتم انتاج 150 وحدة من المنشور و 450 رقائقي

2 عدم وجود حلول مثلى أو تعددها

كما هو الحال مع أنظمة المعادلات الخطية، يمكن أن يكون لمسائل البرمجة الخطية حل أمثل واحد أو حلول مثلى متعددة أو تفتقر إلى هذه الحلول تمامًا. إذا كان التمثيل البياني للمعادلة المتعلقة بدالة الهدف f المطلوب إيجاد حل أمثل لها يقع في المكان نفسه عند أحد جوانب منطقة الحلول الممكنة، فإن الدالة f يكون لها **حلول مثلى متعددة**. وفي الشكل (5.5.1)، فإن أي نقطة على القطعة التي تصل بين الرأسين اللتين تقعان عند $(3, 7)$ و $(7, 3)$، تعتبر حلاً أمثل للدالة f. وإذا كانت المنطقة لا تشكل مضلعًا ولكنها بدلاً من ذلك **غير محدودة**، فقد لا تكون للدالة f أي قيمة صغرى أو عظمى. وفي الشكل (5.5.2)، لا يكون للدالة f أي قيمة عظمى.



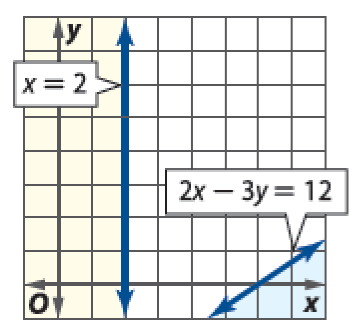
الشكل (5.5.1)



الشكل (5.5.2)

نصيحة دراسية

مسألة البرمجة الخطية غير ممكنة الحل يُقال عن حل مسألة البرمجة الخطية إنه غير ممكن إذا كانت مجموعة القيود لا تحدد منطقة لها نقاط مشتركة. فعلى سبيل المثال، لا يحدد التمثيل البياني أدناه منطقة حلول ممكنة يمكن الاعتماد عليها لتحقيق أمثلية (الوصول إلى حل أمثل) لدالة الهدف.

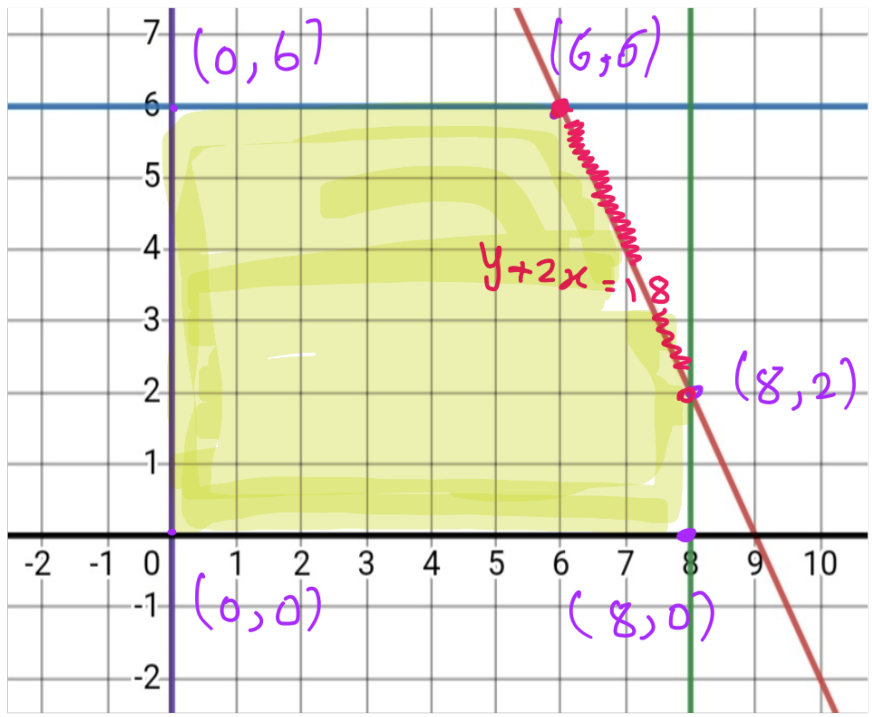


SAIF ALDEEN

مثال 3 الأمثلية عند نقاط متعددة

جد القيمة العظمى لدالة الهدف $f(x, y) = 4x + 2y$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحقق عندهما هذه القيمة، مع مراعاة القيود التالية.

$y + 2x \leq 18$
$y \leq 6$
$x \leq 8$
$x \geq 0$
$y \geq 0$



$f(0,0) = 0$
$f(8,0) = 32$
$f(8,2) = 36$ عظمى
$f(6,6) = 36$ عظمى
$f(0,6) = 12$

نظراً لأن القيمة العظمى تقع عند رأسين $(8,2)$ و $(6,6)$

فإن جميع نقاط القطعة المستقيمة الواقعة بين النقطتين

تحقق الأمثلية (قيم عظمى) للدالة. $(6 \leq x \leq 8)$.

* أي على المستقيم $y+2x=18$ ، $6 \leq x \leq 8$.

الصغرى 0 عند $(0,0)$.

تمرين موجه

جد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y)$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة.

3A. $f(x, y) = 3x + 3y$

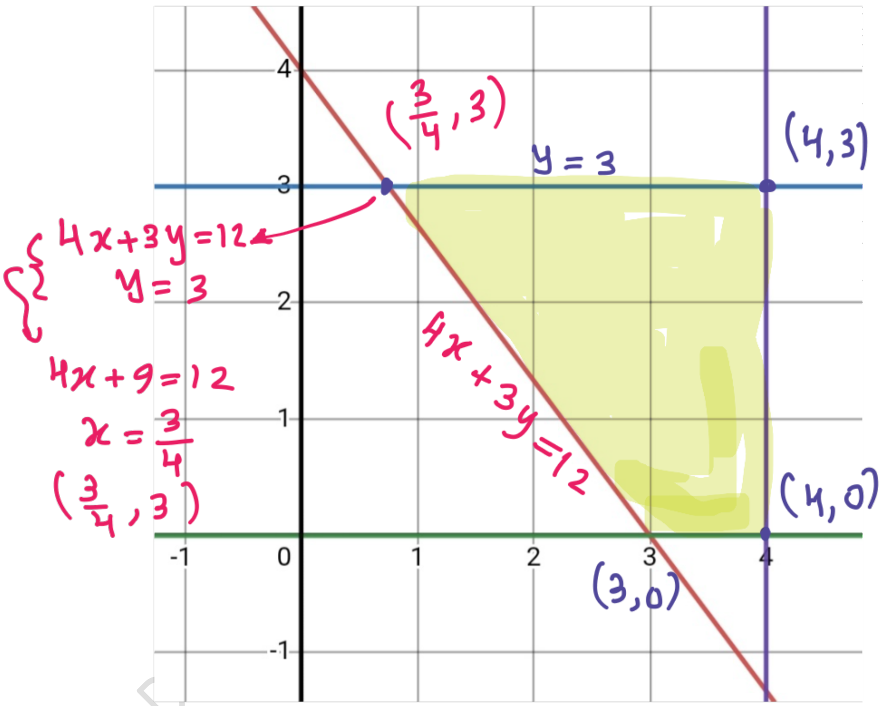
$4x + 3y \geq 12$

$y \leq 3$

$y \geq 0$

$x \leq 4$

$x \geq 0$



$f(3,0) = 9$

$f(4,0) = 12$

$f(4,3) = 21$

$f\left(\frac{3}{4}, 3\right) = 11.25$

العظمى 21 عند $(4,3)$

الصغرى 9 عند $(3,0)$

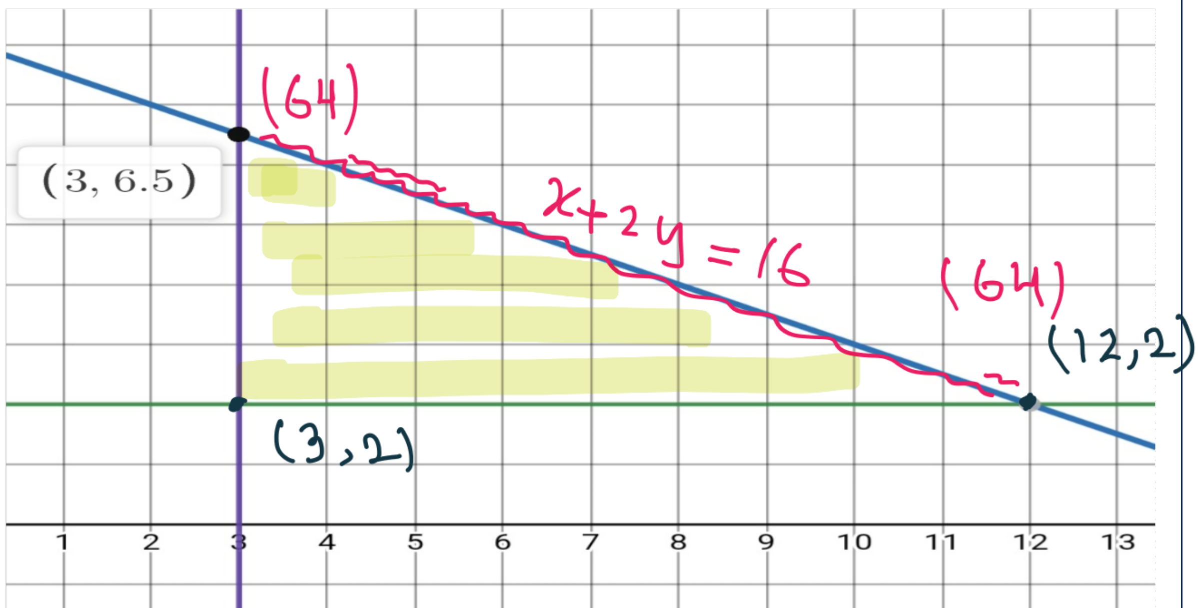
SAIF ALDEEN ALALI

3B. $f(x, y) = 4x + 8y$

$x + 2y \leq 16$

$y \geq 2$

$x \geq 3$



$f(12,2) = 64$

$f(3,2) = 28$

$f(3,6.5) = 64$

SAIF ALDEEN

العظمى 64 عند جميع النقاط على القطعة المستقيمة

الممتدة من $(3,6.5)$ إلى $(12,2)$

* التي تقع على المستقيم $x+2y=16$

حيث $3 \leq x \leq 12$

الصغرى 28 عند $(3,2)$

مثال 4 من الحياة اليومية منطقة الحل الممكنة غير المحدودة

الطب البيطري يوصي أحد الأطباء البيطريين بأن تخضع أرنب صغيرة جديدة لنظام غذائي يتألف على الأقل من 1.54 g من البروتينات و 0.56 g من الدهون يوميًا. استخدم الجدول التالي لتحديد كمية كل طعام للقطط ينبغي استخدامه لتلبية المتطلبات الغذائية بالتكلفة الصغرى.

العلامة التجارية لطعام القطط	البروتينات (جراماً/كوب)	الدهون (جراماً/كوب)	تكلفة الكوب ($)
Good Start	0.84	0.21	0.36
Sirius	0.56	0.49	0.22

a. اكتب دالة هدف واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يمثل المنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء (a) لإيجاد عدد الأكواب التي ينبغي استخدامها لكل نوع من نوعي طعام الأرانب A , B لتلبية المتطلبات الغذائية بالتكلفة المثلى.

تمرين موجه 4

الادارة وفقاً لمدير أحد متاجر البيتزا ، ترتبط الإنتاجية في ساعات عمل العمال لديها بمناصبهم ، و تعادل ساعة العمل الواحدة كمية العمل الذي ينجزه كل عامل متوسط في ساعة واحدة ، وستحتاج من أجل نوبة العمل التالية البالغة ثماني ساعات إلى إثنين من مشرفي النوبات ، و على الأقل اثنين من المساعدين ، إذا كانت تحتاج إلى 10 عمال على الأقل إجمالاً ، و ينبغي أن تخصص المديرة أيضاً ما لا يقل عن 120 ساعة عمل لتلبية طلب العملاء خلال تلك النوبة.

الموظفون العاملون	الإنتاجية (بساعات العمل)	الأجر (بالدراهم)
مساعد x	1.5	7.50
موظف y	1.0	6.50
مشرف نوبة 2	2.0	9.00

- افترض أن كل عامل يعمل نوبة عمل الساعات الثماني كاملة ، اكتب دالة هدف ، و اذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.
- ارسم تمثيلاً بيانياً للمنطقة المحددة بالقيود لإيجاد عدد الموظفين الذين ينبغي تكليفهم بالعمل لتحسين تكاليف العمالة على النحو الأمثل.

القيود

① $x \geq 2$

② $x+y+2 \geq 10$

③ ساعات العمل (الانتاجية)

$(8\times1.5)x + 8y + (8\times2)2 \geq 120$

$12x + 8y + 32 \geq 120$

4) $y \geq 0$

$\boxed{\text{دالة الهدف}}$

الأجور

المساعد $7.50 \times 8 = 60$

الموظف $6.50 \times 8 = 52$

المشرف $9 \times 8 = 72$

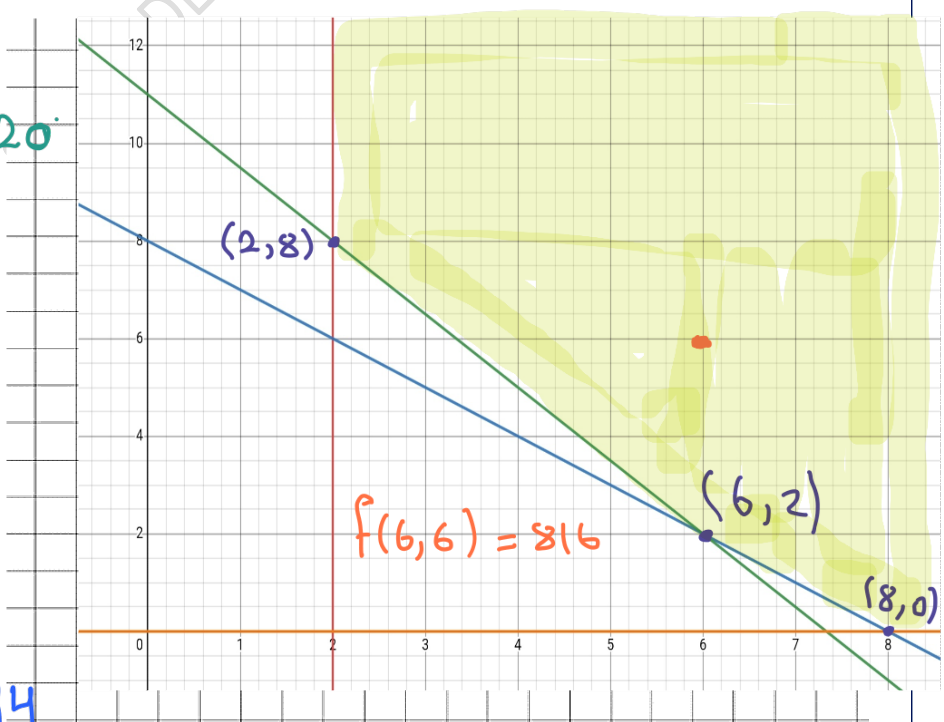
$f(x,y) = 60x + 52y + 144$

$f(6,2) = 608$

$f(8,0) = 624$

$f(2,8) = 680$

$f(6,6) = 816$



القيمة المثلى التي يكون عندها الحد الأدنى للتكاليف AED 608 عند (6 , 2)
أي 6 مساعدين و موظفان بالإضافة إلى المشرفين .

9. **عيادة طبية** يعمل عامر موظف استقبال في عيادة طبية، وتتمثل إحدى مهامه في تحديد مواعيد الزيارات. وهو يخصص 20 دقيقة للكشف و 40 دقيقة للفحص البدني. ولا يستطيع الطبيب إجراء أكثر من 6 فحوصات بدنية في اليوم، وتتيح العيادة 7 ساعات لمواعيد الزيارات في العمل. وتبلغ تكلفة الكشف AED 55 وتبلغ تكلفة الفحص البدني AED 125. (مثال 2)

a. اكتب دالة هدف، واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يمثل المنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء **a** لإيجاد مجموعة الحلول الممكنة لدالة الهدف.

c. كم عدد الزيارات الطبية من كل فئة التي ينبغي أن ينظمها عامر لتحقيق أقصى دخل؟ ما الدخل الأقصى؟

7 hours = 7 × 60
= 420 min

x عدد الكشوفات

y عدد الفحوصات البدنية

$20x + 40y \leq 420$

$y \leq 6$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$f(x, y) = 55x + 125y$

$f(0,6) = 750$

$f(9,6) = 1245$

$f(21,0) = 1155$

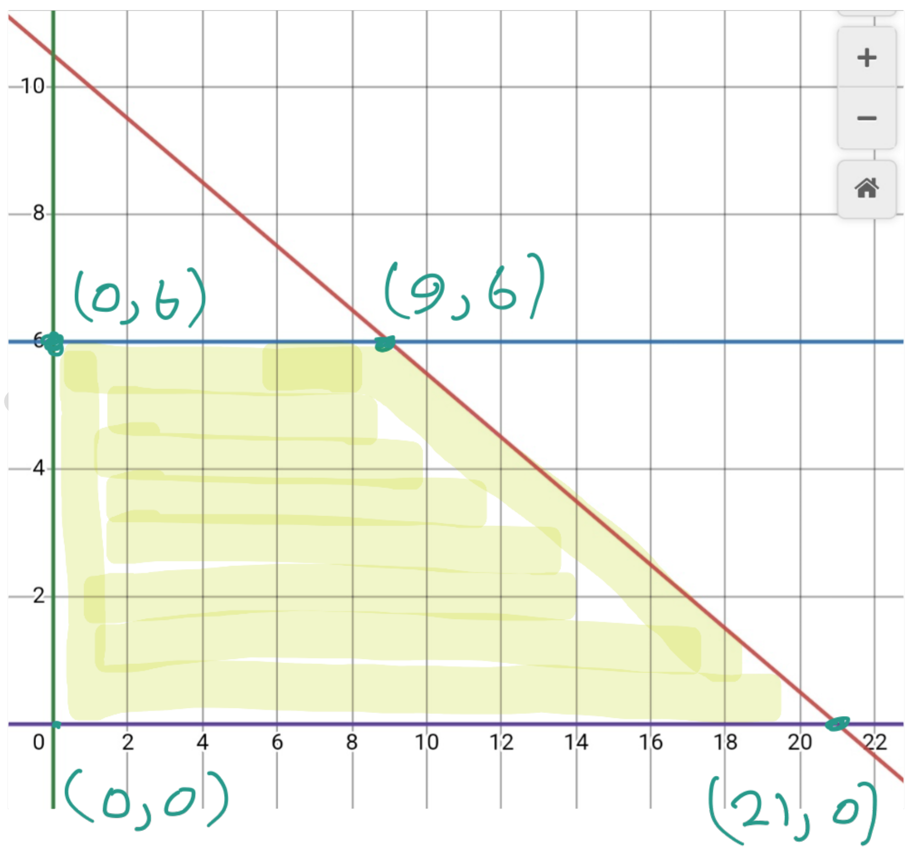
$f(0,0) = 0$

1245 الدخل الأقصى

عندما ينظم عامر

9 كشوفات

و 6 فحوصات بدنية



10. **الدخل** يعمل أحمد بدوام جزئي لدفع بعض نفقات جامعته. ويقوم أحمد بتوصيل البيتزا مقابل AED 5 في الساعة بالإضافة إلى البقشيش، وبالتالي يبلغ إجمالي ما يحصل عليه AED 8 تقريبًا في الساعة. كما يُلقي دروسًا خصوصية في معمل الرياضيات مقابل AED 15 في الساعة. ويتم فتح معمل الرياضيات لمدة ساعتين فقط يوميًا من الاثنين حتى الجمعة، عندما يكون أحمد متاحًا لإلقاء الدروس الخصوصية. ولا يمكن لأحمد أن يعمل أكثر من 20 ساعة في الأسبوع نظرًا لجدول مواعيد الصف لديه. (مثال 2)

a. اكتب دالة هدف، واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يمثل المنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء **a** لإيجاد مجموعة الحلول الممكنة لدالة الهدف.

c. كيف يمكن لأحمد تحقيق أكبر مبلغ من المال، وكم يساوي هذا المبلغ؟

- عدد ساعات العمل بالبيتزا x
- عدد ساعات الدروس y

دالة الهدف

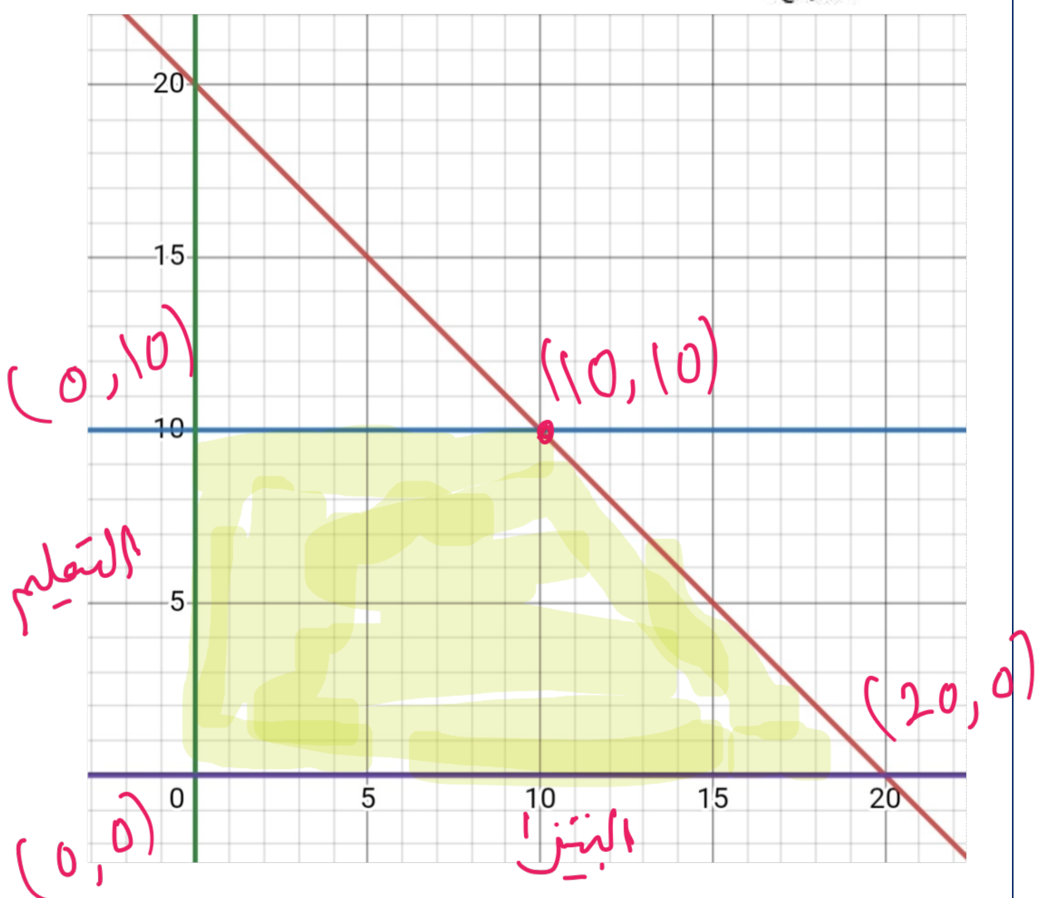
$f(x,y) = 8x + 15y$

$x + y \leq 20$

$y \leq 10$

$x \geq 0$

$y \geq 0$



$f(0,0) = 0$

$f(0,10) = 150$

$f(20,0) = 160$

$f(10,10) = 230$

يمكن لأحمد أن يحصل على أكبر مبلغ من المال 230 بالعمل 10 ساعات في توصيل البيتزا و 10 ساعات في التدريس

11. **أعمال صغيرة** شركة تصميم تنشئ مواقع ويب وألبومات إلكترونية. ويتطلب كل موقع ويب 10 ساعات من التخطيط و 4.5 ساعات من تصميم الصفحات. ويتطلب كل ألبوم عائلي إلكتروني 15 ساعة من التخطيط و 9 ساعات من تصميم الصفحات. وتُتاح 70 ساعة في الأسبوع لكي يقوم الموظفون بعملية التخطيط و 36 ساعة لتصميم الصفحات. (مثال 2)

a. إذا كان الربح المتحقق يبلغ AED 600 لكل موقع ويب و AED 700 لكل ألبوم عائلي إلكتروني، فاكتب دالة هدف واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يمثل المنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء **a** لإيجاد مجموعة الحلول الممكنة لدالة الهدف.

c. ما العدد الذي يجب أن تنتجه الشركة من كل منتج لتحقيق أقصى ربح؟ كم يبلغ الربح؟

x عددا لمواقع

y عدد الألبومات

(a) $f(x,y) = 600x + 700y$

القيود

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$10x + 15y \leq 70$

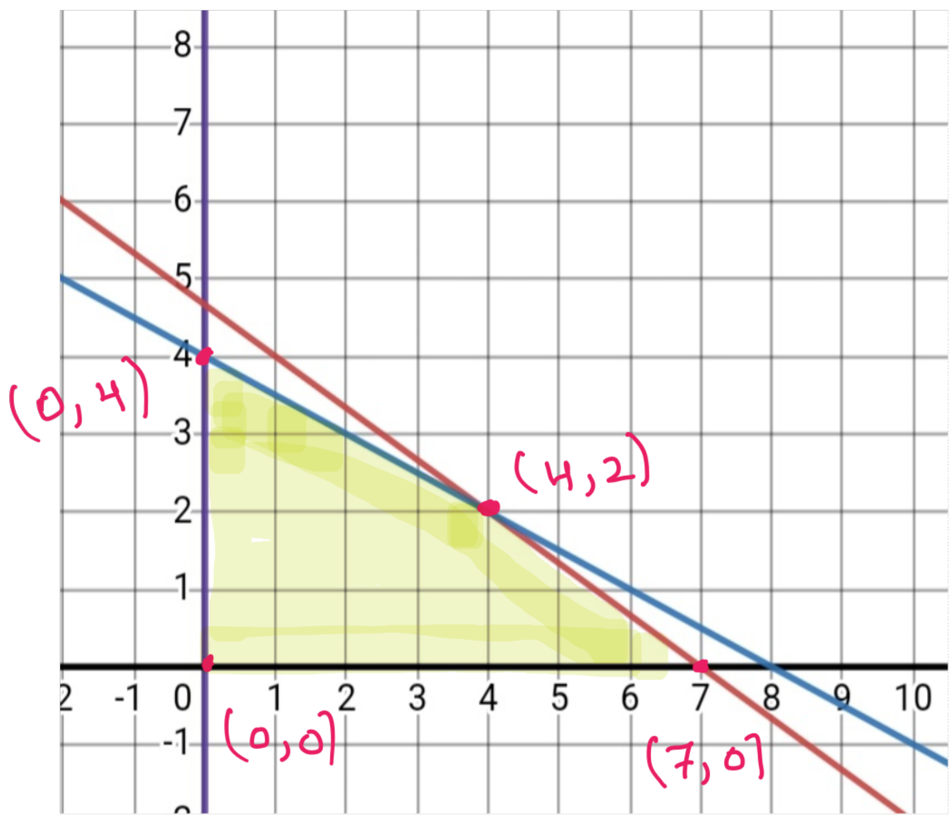
$4.5x + 9y \leq 36$

$f(0,4) = 2800$

$f(4,2) = 3800$

$f(7,0) = 4200$

$f(0,0) = 0$



لتحقيق أقصى ربح يجب أن تنتج الشركة 7 مواقع

دون أن تنتج ألبومات ، ويكون عندها الربح 4200

18. **التغذية** تريد مها استهلاك المزيد من المواد المغذية. وهي تسعى للحصول على ما لا يقل عن 40 mg من الكالسيوم و 600 mg من البوتاسيوم و 50 mg من فيتامين "C". وتُفضل مها من الفاكهة كلاً من التفاح والموز. وفيما يلي يتبين متوسط المحتوى الغذائي لكليهما. (مثال 4)

a عدد التفاح

b عدد الموز

$f(a,b)=0.55a+0.35b$

$9.5a+7b \geq 40$

$158a+467b \geq 600$

$9a+11b \geq 50$

$a \geq 0$

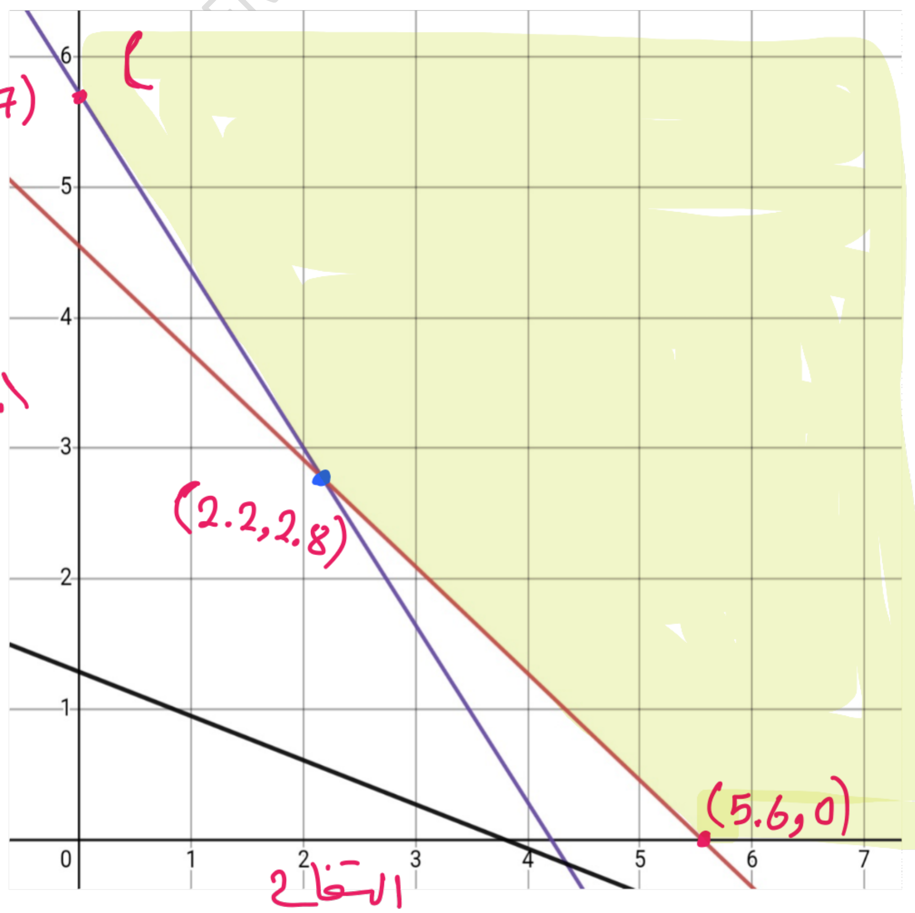
$b \geq 0$

الفاكهة	الكالسيوم	البوتاسيوم	فيتامين "C"
التفاح a	9.5 mg	158 mg	9 mg
الموز b	7.0 mg	467 mg	11 mg

a. إذا كانت تكلفة كل تفاحة AED 0.55 وتكلفة كل موزة AED 0.35 فاكتب دالة هدف. واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا للمنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء **a** لإيجاد مجموعة الحلول الممكنة لدالة الهدف.

c. حدد عدد كل نوع من الفاكهة التي يجب على مها تناولها لتحقق أدنى تكلفة بينما تظل تحصل في الوقت نفسه على الحصة الغذائية التي ترغب فيها.



$f(0,5.7) \approx 2.00$

$f(2.2,2.8)=2.19$

$f(5.6,0)=3.08$

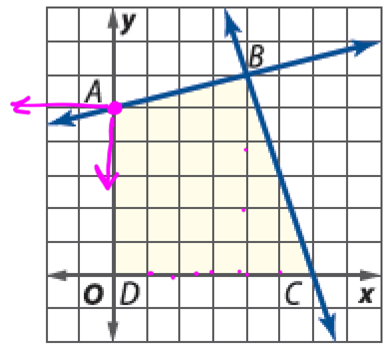
لتحقيق أدنى تكالفة

يجب أن تتناول 5.7

من الموز

جد دالة هدف لها قيمة عظمى أو صغرى عند كل رأس محددة.

25. الصغرى عند A



$f(x,y) = 10x - 10y$

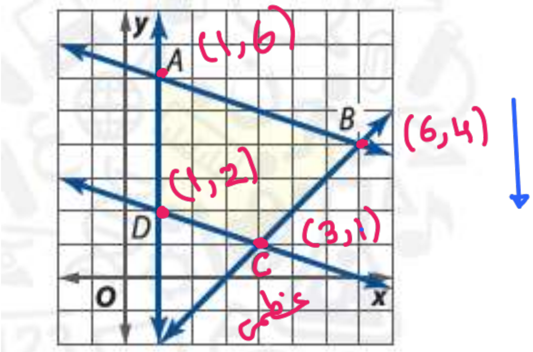
$f(0,0) = 0$

A: $f(0,5) = -50$ صغرى

$f(6,0) = 60$

$f(4,6) = -20$

26. العظمى عند C



$f(x,y) = -x - 10y$

A $f(1,2) = -21$

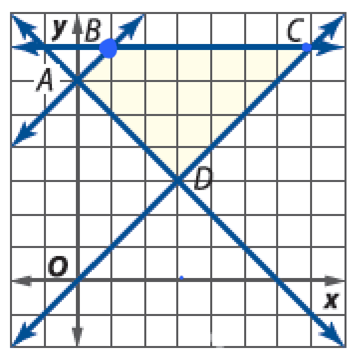
C $f(3,1) = -13$ ⟶ عظمى

B $f(6,4) = -46$

D $f(1,6) = -61$

SAIF ALDEEN

27. العظمى عند B



$f(x,y) = -5x + 10y$

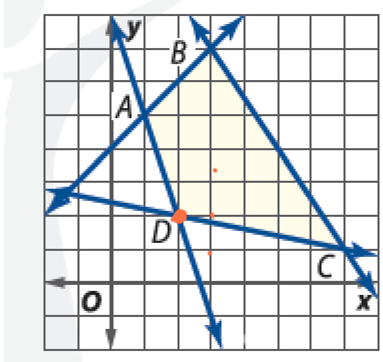
$f(0,6) = 60$

B: $f(1,7) = 65$ (عظمى

$f(3,3) = 15$

$f(7,7) = 35$

28. الصغرى عند D



$f(x,y) = 10x + 10y$

D $f(2,2) = 40$ (صغرى)

A $f(1,5) = 60$

C $f(7,1) = 80$

B $f(3,7) = 100$