قناة الفلاح للرياضيات

٢٠٢٦

الصف الثاني عشر علمي

الفصل الدراسي الثاني

حلول

المراجعة النهائية

أ / محمد نوري الفلاح

1) أوجد: $\int \frac{x^2-4x+3}{x-1}\,dx$

$$= \int \frac{(x-3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}\,dx$$

$$= \int (x-3)\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 3x + C$$

2) أوجد: $\int (x^2+2x-3)^2(x+1)\,dx$

$$= \int u^2 \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^2\,du$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{u^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{6}(x^2+2x-3)^3 + C$$

$u = x^2+2x-3$

$du = (2x+2)\,dx$

$\frac{du}{2}\ (x+1)\,dx$

3) أوجد: $\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx$

$u = x^2+4x-1$

$du = (2x+4)dx$

$\frac{du}{2} = (x+2)dx$

$= \int \sqrt[3]{u}\,\frac{du}{2}$

$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}du$

$= \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C$

$= \frac{3}{8}(x^2+4x-1)^{\frac{4}{3}} + C$

4) أوجد: $\int \frac{(\frac{1}{x}+3)^4}{x^2}\,dx$

$u = \frac{1}{x}+3$

$du = \frac{-1}{x^2}dx$

$-du = \frac{1}{x^2}dx$

$= -\int u^4 du$

$= -\frac{u^5}{5} + C$

$= -\frac{1}{5}(\frac{1}{x}+3)^5 + C$

5) أوجد:

$$\int \frac{1}{x^2(\frac{1}{x}+2)^5}\ dx$$

$$u = \frac{1}{x} + 2$$

$$du = -\frac{1}{x^2}dx$$

$$-du = \frac{1}{x^2}dx$$

$$= \int \frac{1}{u^5}(-du)$$

$$= -\int u^{-5}\,du$$

$$= -\frac{u^{-4}}{-4} + C$$

$$= \frac{(\frac{1}{x}+2)^{-4}}{4} + C$$

$$= \frac{1}{4(\frac{1}{x}+2)^4} + C$$

6) أوجد:

$$\int \sqrt{4x-5}\ dx$$

$$u = 4x - 5$$

$$du = 4dx$$

$$\frac{du}{4} = dx$$

$$= \int \sqrt{u} \cdot \frac{du}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{6}(4x-5)^{\frac{3}{2}} + C$$

7) أوجد:

$$\int \frac{5}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^3}\,dx$$

$u = \sqrt{x} + 2$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$2\,du = \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$= \int \frac{5}{u^3}\,(2\,du)$

$= 10 \int u^{-3}\,du$

$= 10\,\frac{u^{-2}}{-2} + C$

$= -5\,(\sqrt{x}+2)^{-2} + C$

$= \frac{-5}{(\sqrt{x}+2)^2} + C$

8) أوجد:

$$\int x\,(x+1)^5\,dx$$

$u = x + 1 \Rightarrow x = u - 1$

$du = dx$

$= \int (u-1)\,u^5\,du$

$= \int (u^6 - u^5)\,du$

$= \frac{u^7}{7} - \frac{u^6}{6} + C$

$= \frac{(x+1)^7}{7} - \frac{(x+1)^6}{6} + C$

9) أوجد:

$\int x\,(2x-1)^3\ dx$

$u = 2x-1 \Rightarrow x = \frac{u+1}{2}$

$du = 2\,dx$

$\frac{du}{2} = dx$

$= \int \frac{u+1}{2}\, u^3\, \frac{du}{2}$

$= \frac{1}{4}\int (u^4 + u^3)\, du$

$= \frac{1}{4}\frac{u^5}{5} + \frac{1}{4}\frac{u^4}{4} + C$

$= \frac{(2x-1)^5}{20} + \frac{(2x-1)^4}{16} + C$

10) أوجد:

$\int x^3 \sqrt{x^2-2}\ dx$

$u = x^2-2 \Rightarrow x^2 = u+2$

$du = 2x\,dx$

$\frac{du}{2} = x\,dx$

$= \int x^2 \sqrt{x^2-2}\ x\,dx$

$= \int (u+2)\sqrt{u}\ \frac{du}{2}$

$= \frac{1}{2}\int (u+2)\, u^{\frac{1}{2}}\, du$

$= \frac{1}{2}\int (u^{\frac{3}{2}} + 2u^{\frac{1}{2}})\, du$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{2}C_1$

$= \frac{1}{5}(x^2-2)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x^2-2)^{\frac{3}{2}} + C$

11) أوجد: $\int x^3 .\ \cos(x^4+5)\ dx$

$u = x^4+5$

$du = 4x^3\, dx$

$\frac{du}{4} = x^3\, dx$

$= \int \cos u\ \frac{du}{4}$

$= \frac{1}{4} \int \cos u\, du$

$= \frac{1}{4} \sin u + C$

$= \frac{1}{4} \sin(x^4+5) + C$

12) أوجد: $\int \sin^5(x+1)\ \cos(x+1)\ dx$

$u = \sin(x+1)$

$du = \cos(x+1)\, dx$

$= \int u^5\, du$

$= \frac{u^6}{6} + C$

$= \frac{\sin^6(x+1)}{6} + C$

13) أوجد: $\int cos^3(2x-3)\ \sin(2x-3)\ \ dx$

$u = \cos(2x-3)$

$du = -2\sin(2x-3)dx$

$\frac{du}{-2} = \sin(2x-3)dx$

$= \int u^3 \frac{du}{-2}$

$= -\frac{1}{2}\int u^3 du$

$= -\frac{1}{2}\ \frac{u^4}{4} + C$

$= -\frac{1}{8}\cos^4(2x-3) + C$

14) أوجد: $\int csc^5 x\ \cot x\ \ dx$

$u = \csc x$

$du = -\csc x \cot x\, dx$

$-du = \csc x \cot x\, dx$

$= \int \csc^4 x\ \csc x\ \cot x\, dx$

$= \int u^4 (-du)$

$= -\int u^4 du$

$= -\frac{u^5}{5} + C$

$= -\frac{1}{5}\csc^5 x + C$

15) أوجد:

$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x)\sqrt{1+\cot x}}$$

$u = 1 + \cot x$

$du = -\csc^2 x\, dx$

$-du = \csc^2 x\, dx$

$$= \int \frac{\csc^2 x\, dx}{\sqrt{1+\cot x}}$$

$$= \int \frac{-du}{\sqrt{u}}$$

$$= -\int u^{-\frac{1}{2}}\, du$$

$$= -\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -2\,(1+\cot x)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -2\sqrt{1+\cot x} + C$$

16) أوجد:

$$\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan x}}\, dx$$

$u = 1 + \tan x$

$du = \sec^2 x\, dx$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$= \int u^{-\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2\,(1+\tan x)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2\sqrt{1+\tan x} + C$$

17) أوجد $\int (2x-1)e^{x^2-x+3}\ dx$

$u = x^2 - x + 3$

$du = (2x-1)\,dx$

$= \int e^{u}\, du$

$= e^{u} + C$

$= e^{x^2-x+3} + C$

18) أوجد $\int (x^2-2)e^{x^3-6x}\ dx$

$u = x^3 - 6x$

$du = (3x^2-6)\,dx$

$\frac{du}{3} = (x^2-2)\,dx$

$= \int e^{u} \cdot \frac{du}{3}$

$= \frac{1}{3}\int e^{u}\, du$

$= \frac{1}{3} e^{u} + C$

$= \frac{1}{3} e^{x^3-6x} + C$

(19 أوجد $\int \cot x \; dx$

$u = \sin x$

$du = \cos x \, dx$

$= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

$= \int \frac{du}{u}$

$= \ln|u| + C$

$= \ln|\sin x| + C$

(20 أوجد $\int x \sin x \; dx$

$u = x \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$\int x \sin x \, dx = -x\cos x + \int \cos x \, dx$

$= -x\cos x + \sin x + C$

21) أوجد $\int x\cos 3x \; dx$

$u = x \qquad dv = \cos 3x \, dx$

$du = dx \qquad v = \frac{\sin 3x}{3}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int x\cos 3x\,dx = \frac{x\sin 3x}{3} - \frac{1}{3}\int \sin 3x\,dx$

$= \frac{x\sin 3x}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\cos 3x}{3} + C$

$= \frac{x\sin 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9} + C$

22) أوجد $\int xe^{x} \; dx$

$u = x \qquad dv = e^{x}\,dx$

$du = dx \qquad v = e^{x}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int xe^{x}\,dx = xe^{x} - \int e^{x}\,dx$

$= xe^{x} - e^{x} + C$

23) أوجد $\int 3x\, e^{2x+1}\; dx$

$u = 3x \qquad dv = e^{2x+1}\,dx$

$du = 3\,dx \qquad v = \frac{1}{2} e^{2x+1}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\int 3x\, e^{2x+1}\,dx = \frac{3}{2}x\, e^{2x+1} - \frac{3}{2}\int e^{2x+1}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}x\, e^{2x+1} - \frac{3}{2}\times\frac{1}{2} e^{2x+1} + C$$

$$= \frac{3}{2}x\, e^{2x+1} - \frac{3}{4} e^{2x+1} + C$$

24) أوجد $\int x \ln x \; dx$

$u = \ln x \qquad dv = x\,dx$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\int x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

25) أوجد $\int \ln x \; dx$

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$

$= x \ln x - \int dx$

$= x \ln x - x + C$

26) أوجد $\int x^2 \ln x^2 \; dx$

$u = \ln x^2 \qquad dv = x^2 dx$

$du = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \qquad v = \frac{x^3}{3}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int x^2 \ln x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x^2 - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{2}{x} dx$

$= \frac{x^3}{3} \ln x^2 - \frac{2}{3} \int x^2 dx$

$= \frac{x^3}{3} \ln x^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C$

$= \frac{x^3}{3} \ln x^2 - \frac{2}{9} x^3 + C$

(27 أوجد $\int (4x-1)\ln x \ dx$

$u = \ln x$ $\qquad dv = (4x-1)\,dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx$ $\qquad v = 2x^2 - x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int (4x-1)\ln x\,dx = (2x^2-x)\ln x - \int x(2x-1)\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$= (2x^2-x)\ln x - \int (2x-1)\,dx$

$= (2x^2-x)\ln x - x^2 + x + C$

28) أوجد $\int x^2 \cos x \; dx$

$u = x^2 \qquad dv = \cos x \, dx$

$du = 2x \, dx \qquad v = \sin x$

$\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x \, dx \qquad ①$

$\int x \sin x \, dx$

$u = x \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx$

$= -x \cos x + \sin x + C_1 \qquad ②$

نعوض ② في ①

$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$

29) لتكن الدالة f : $f(x)=\frac{4x+1}{x^2+5x+4}$ فأوجد:

1) الكسور الجزئية		2) $\int f(x)dx$

$-1, -4$

$x^2+5x+4=(x+1)(x+4)$

$\frac{4x+1}{x^2+5x+4}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x+4}$

$4x+1=A_1(x+4)+A_2(x+1)$

نعوض x بـ -1

$4(-1)+1=A_1(-1+4)$

$\boxed{A_1=-1}$

نعوض x بـ -4

$4(-4)+1=A_2(-4+1)$

$\boxed{A_2=5}$

$\frac{4x+1}{x^2+5x+4}=\frac{-1}{x+1}+\frac{5}{x+4}$

$\int\frac{4x+1}{x^2+5x+4}dx=\int\frac{-1}{x+1}dx+\int\frac{5}{x+4}dx$

$=-\int\frac{1}{x+1}dx+5\int\frac{1}{x+4}dx$

$=-\ln|x+1|+5\ln|x+4|+C$

30) لتكن الدالة f : $f(x) = \frac{2}{(x-5)(x-3)}$ فأوجد:

1) الكسور الجزئية
2) $\int f(x)dx$

$$\frac{2}{(x-5)(x-3)} = \frac{A_1}{x-5} + \frac{A_2}{x-3}$$

$$2 = A_1(x-3) + A_2(x-5)$$

نعوض x بـ 5

$$2 = A_1(5-3)$$

$$\boxed{A_1 = 1}$$

نعوض x بـ 3

$$2 = A_2(3-5)$$

$$\boxed{A_2 = -1}$$

$$\frac{2}{(x-5)(x-3)} = \frac{1}{x-5} + \frac{-1}{x-3}$$

2) $$\int \frac{2}{(x-5)(x-3)} dx = \int \frac{1}{x-5} dx - \int \frac{1}{x-3} dx$$

$$= \ln|x-5| - \ln|x-3| + C$$

31) أوجد $\int \frac{12}{x^2+2x-3}\ dx$

$$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$$

$$\frac{12}{x^2+2x-3}=\frac{A_1}{x+3}+\frac{A_2}{x-1}$$

$$12=A_1(x-1)+A_2(x+3)$$

نعوض x بـ -3

$$12=A_1(-3-1)$$

$$\boxed{A_1=-3}$$

نعوض x بـ 1

$$12=A_2(1+3)$$

$$\boxed{A_2=3}$$

$$\frac{12}{x^2+2x-3}=\frac{-3}{x+3}+\frac{3}{x-1}$$

$$\int\frac{12}{x^2+2x-3}dx=\int\frac{-3}{x+3}dx+\int\frac{3}{x-1}dx$$

$$=-3\int\frac{1}{x+3}dx+3\int\frac{1}{x-1}dx$$

$$=-3\ln|x+3|+3\ln|x-1|+C$$

32) أوجد $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\, dx$

$$2x^3-5x^2-3x = x(2x^2-5x-3) = x(x-3)(2x+1)$$

$$\frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-3} + \frac{A_3}{2x+1}$$

$$x^2-2 = A_1(x-3)(2x+1) + A_2 x(2x+1) + A_3 x(x-3)$$

نعوض x بـ 0

$$(0)^2-2 = A_1(0-3)(2(0)+1) \Rightarrow \boxed{A_1 = \frac{2}{3}}$$

نعوض x بـ 3

$$(3)^2-2 = A_2(3)(2(3)+1) \Rightarrow \boxed{A_2 = \frac{1}{3}}$$

نعوض x بـ $-\frac{1}{2}$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2 = A_3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-3\right) \Rightarrow \boxed{A_3 = -1}$$

$$\frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x} = \frac{\frac{2}{3}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-3} + \frac{-1}{2x+1}$$

$$\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx = \int \frac{\frac{2}{3}}{x}\,dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{x-3}\,dx + \int \frac{-1}{2x+1}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-3}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+1}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$$

33) أوجد: $\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2}\,dx$

$x^3+4x^2 = x^2(x+4)$

$\frac{x^2+1}{x^3+4x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x+4}$

$x^2+1 = A_1 x(x+4) + A_2(x+4) + A_3 x^2$

نعوض x بـ 0

$(0)^2+1 = A_2(0+4) \Rightarrow \boxed{A_2 = \frac{1}{4}}$

نعوض x بـ -4

$(-4)^2+1 = A_3(-4)^2 \Rightarrow \boxed{A_3 = \frac{17}{16}}$

نختار x بـ 1

$(1)^2+1 = A_1(1)(1+4) + \frac{1}{4}(1+4) + \frac{17}{16}(1)$

$2 = 5A_1 + \frac{37}{16} \Rightarrow \boxed{A_1 = -\frac{1}{16}}$

$\frac{x^2+1}{x^3+4x^2} = \frac{-\frac{1}{16}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{17}{16}}{x+4}$

$\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2}\,dx = -\frac{1}{16}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{4}\int x^{-2}\,dx + \frac{17}{16}\int \frac{1}{x+4}\,dx$

$= -\frac{1}{16}\ln|x| + \frac{1}{4}\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{17}{16}\ln|x+4| + C$

$= -\frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{4x} + \frac{17}{16}\ln|x+4| + C$

(34 أوجد: $\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}\, dx$

$$\frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4} = 1 + \frac{x+3}{x^2-4x+4}$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^2-4x+4 & x^2-3x+7 \\ & x^2-4x+4 \\ - & \overline{\quad x+3} \end{array}$$

$$x^2-4x+4 = (x-2)^2$$

$$\frac{x+3}{x^2-4x+4} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2}$$

$$x+3 = A_1(x-2) + A_2$$

نعوض x بـ 2

$$2+3 = A_2 \implies \boxed{A_2 = 5}$$

نختار مثلاً $x=1$ ونعوض

$$1+3 = A_1(1-2)+5 \implies \boxed{A_1 = 1}$$

$$\frac{x+3}{x^2-4x+4} = \frac{1}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}$$

$$\frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4} = 1 + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}$$

$$\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}\,dx = \int dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx + 5\int (x-2)^{-2}\,dx$$

$$= x + \ln|x-2| - 5(x-2)^{-1} + C$$

$$= x + \ln|x-2| - \frac{5}{x-2} + C$$

35) أوجد: $\int_1^4 |x-2|\,dx$

$-x+2$ $x-2$

1   2   4

$$\int_1^4 |x-2|\,dx = \int_1^2 |x-2|\,dx + \int_2^4 |x-2|\,dx$$

$$= \int_1^2 (-x+2)\,dx + \int_2^4 (x-2)\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2 + \left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^4$$

$$= \left[\left(-\frac{(2)^2}{2}+2(2)\right)-\left(-\frac{(1)^2}{2}+2(1)\right)\right] + \left[\left(\frac{(4)^2}{2}-2(4)\right)-\left(\frac{(2)^2}{2}-2(2)\right)\right]$$

$$= 2.5$$

36) أوجد: $\int_{-1}^{1}(x^2+2x-3)^2(x+1)\,dx$

$$u = x^2+2x-3$$

$$du = (2x+2)\,dx$$

$$\frac{du}{2} = (x+1)$$

$$x=-1 \Rightarrow u = (-1)^2+2(-1)-3 = -4$$

$$x = 1 \Rightarrow u = (1)^2+2(1)-3 = 0$$

$$= \int_{-4}^{0} u^2 \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-4}^{0} u^2\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-4}^{0} = \frac{1}{6}\left[u^3\right]_{-4}^{0}$$

$$= \frac{1}{6}\left[(0)^3-(-4)^3\right]$$

$$= \frac{32}{3}$$

37) أوجد: $\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx$

$u = x \qquad dv = (x-1)^{\frac{1}{2}}dx$

$du = dx \qquad v = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx = \left[\frac{2}{3}x(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5 - \frac{2}{3}\int_2^5 (x-1)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5 - \frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\left[(x-1)^{\frac{5}{2}}\right]_2^5$$

$$= \left(\frac{2}{3}(5)(5-1)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{2}{3}(2)(2-1)^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{4}{15}\left[(5-1)^{\frac{5}{2}} - (2-1)^{\frac{5}{2}}\right]$$

$$= \frac{256}{16}$$

38) أوجد: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x\;dx$

$u = \tan x$

$du = \sec^2 x\,dx$

$x = 0 \Rightarrow u = \tan 0 = 0$

$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$$= \int_0^1 u\,du$$

$$= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{(1)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

39) أوجد: $\int_{-2}^{0} \frac{x}{e^x}\, dx$

$$= \int_{-2}^{0} x\, e^{-x}\, dx$$

$u = x \qquad dv = e^{-x}\, dx$

$du = dx \qquad v = -e^{-x}$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int_{-2}^{0} x\, e^{-x}\, dx = \left[-x e^{-x}\right]_{-2}^{0} + \int_{-2}^{0} e^{-x}\, dx$$

$$= \left[-x e^{-x}\right]_{-2}^{0} + \left[-e^{-x}\right]_{-2}^{0}$$

$$= \left[0 e^{0} + (-2) e^{-(-2)}\right] + \left[-e^{0} + e^{-(-2)}\right]$$

$$= -e^{2} - 1$$

40) أوجد: $\int_{-2}^{0} \frac{5x-1}{x^2+2x-3}\, dx$

$$x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$$

$$\frac{5x-1}{x^2+2x-3} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+3}$$

$$5x-1 = A_1(x+3) + A_2(x-1)$$

نعوض x بـ 1

$$5(1)-1 = A_1(1+3) \Rightarrow \boxed{A_1 = 1}$$

نعوض x بـ -3

$$5(-3)-1 = A_2(-3-1) \Rightarrow \boxed{A_2 = 4}$$

$$\frac{5x-1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x+3}$$

$$\int_{-2}^{0} \frac{5x-1}{x^2+2x-3}\, dx = \int_{-2}^{0} \frac{1}{x-1}\, dx + \int_{-2}^{0} \frac{4}{x+3}\, dx$$

$$= \int_{-2}^{0} \frac{1}{x-1}\, dx + 4\int_{-2}^{0} \frac{1}{x+3}\, dx$$

$$= \Big[\ln|x-1|\Big]_{-2}^{0} + 4\Big[\ln|x+3|\Big]_{-2}^{0}$$

$$= \Big[\ln|0-1| - \ln|-2-1|\Big] + 4\Big[\ln|0+3| - \ln|-2+3|\Big]$$

$$= -\ln 3 + 4\ln 3 = 3\ln 3 \simeq 3.295$$

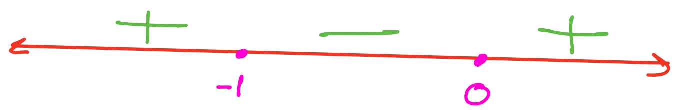
41) دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_3^5 (x^2 + x)dx \geq 0$

بفرض $f(x) = x^2 + x$ وهي دالة متصلة على $[3,5]$

نضع $x^2 + x = 0$

$x(x+1) = 0$

$x = 0 \quad , x = -1$



$f(x) \geq 0 \quad \forall \ x \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$

$[3,5] \subseteq [0, \infty)$

$x^2 + x \geq 0 \quad \forall \ x \in [3,5]$

$\int_3^5 (x^2 + x)dx \geq 0$

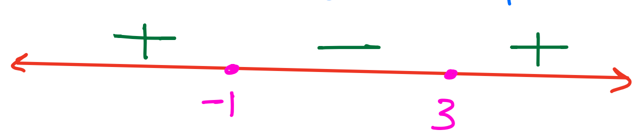
42) دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_0^2 (x^2 - 2x - 3)dx \leq 0$

بفرض $f(x) = x^2 - 2x - 3$ وهي دالة متصلة على $[0,2]$

نضع $x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0$

$x = 3 \quad , x = -1$



$f(x) \leq 0 \quad \forall \ x \in [-1, 3]$

$[0,2] \subseteq [-1,3]$

$x^2 - 2x - 3 \leq 0 \quad \forall \ x \in [0,2]$

$\int_0^2 (x^2 - 2x - 3)dx \leq 0$

43) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f: $f(x) = x^2 - 3\,x$ ومحور السينات.

نضع

$f(x) = 0$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0$

$x = 0\ ,\ x = 3$

$A = \left| \int_0^3 f(x)\,dx \right| = \left| \int_0^3 (x^2 - 3x)\,dx \right|$

$= \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_0^3 \right| =$

$= \left| \left(\frac{(3)^3}{3} - \frac{3(3)^2}{2} \right) - \left(\frac{(0)^3}{3} - \frac{3(0)^2}{2} \right) \right|$

$= \frac{9}{2}$

44) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 4x - x^2$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = 5 + x^2$

والمستقيمين: $x = 0\ ,\ x = 2$ علما بأن منحنيي الدالتين $g\ ,\ f$ غير متقاطعين.

المنحنيين غير متقاطعين

$A = \left| \int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx \right|$

$= \left| \int_0^2 ((4x - x^2) - (5 + x^2))\,dx \right|$

$= \left| \int_0^2 (4x - x^2 - 5 - x^2)\,dx \right|$

$= \left| \int_0^2 (-2x^2 + 4x - 5)\,dx \right|$

$= \left| \left[\frac{-2x^3}{3} + 2x^2 - 5x \right]_0^2 \right|$

$= \left| \left(-\frac{2(2)^3}{3} + 2(2)^2 - 5(2) \right) - \left(-\frac{2(0)^3}{3} + 2(0)^2 - 5(0) \right) \right|$

$= \frac{22}{3}$

45) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = e^x$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = -1 - x^2$ والمستقيمين: $x = 3$, $x = 0$ علما بأن منحنيي الدالتين g , f غير متقاطعين.

المنحنيين غير متقاطعين

$$A = \left| \int_0^3 (f(x) - g(x))\,dx \right|$$
$$= \left| \int_0^3 (e^x + 1 + x^2)\,dx \right|$$
$$= \left| \left[e^x + x + \frac{x^3}{3} \right]_0^3 \right|$$
$$= \left| \left(e^3 + 3 + \frac{(3)^3}{3} \right) - \left(e^0 + 0 + \frac{(0)^3}{3} \right) \right|$$
$$= e^3 + 11$$

46) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة: $y_1 = 3 - x^2$ والمستقيم : $y_2 = -2x$

$$y_1 = y_2$$
$$3 - x^2 = -2x$$
$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$
$$(x-3)(x+1) = 0$$
$$x = 3, \quad x = -1$$
$$A = \left| \int_{-1}^3 (y_1 - y_2)\,dx \right|$$
$$= \left| \int_{-1}^3 ((3 - x^2) - (-2x))\,dx \right|$$
$$= \left| \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3)\,dx \right|$$
$$= \left| \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 \right|$$
$$= \left| \left(-\frac{(3)^3}{3} + (3)^2 + 3(3) \right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3(-1) \right) \right|$$
$$= \frac{32}{3}$$

47) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $f(x) = x^2 + 1 \quad , \quad g(x) = -x^2 + 9$

نضع

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 + 1 = -x^2 + 9$$

$$x^2 + 1 + x^2 - 9 = 0$$

$$2x^2 - 8 = 0$$

$$x = 2 \ , \ x = -2$$

$$A = \left| \int_{-2}^{2} [f(x) - g(x)] \, dx \right|$$

$$= \left| \int_{-2}^{2} ((x^2+1) - (-x^2+9)) \, dx \right|$$

$$= \left| \int_{-2}^{2} (2x^2 - 8) \, dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{2x^3}{3} - 8x \right]_{-2}^{2} \right|$$

$$= \left| \left(\frac{2(2)^3}{3} - 8(2) \right) - \left(\frac{2(-2)^3}{3} - 8(-2) \right) \right|$$

$$= \frac{64}{3}$$

48) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f: $f(x) = \sqrt{x-1}$ ومحور السينات في الفترة $[1, 5]$.

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

$$= \pi \int_1^5 (\sqrt{x-1})^2 \, dx = \pi \int_1^5 (x-1) \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^5$$

$$= \pi \left[\left(\frac{(5)^2}{2} - 5 \right) - \left(\frac{(1)^2}{2} - 1 \right) \right]$$

$$= 8\pi$$

49) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f: $f(x) = x^2 + 2$ ومحور السينات في الفترة $[-1, 1]$.

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{-1}^1 (x^2+2)^2 \, dx = \pi \int_{-1}^1 (x^4 + 4x^2 + 4) \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + 4x \right]_{-1}^1$$

$$= \pi \left[\left(\frac{(1)^5}{5} + \frac{4(1)^3}{3} + 4(1) \right) - \left(\frac{(-1)^5}{5} + \frac{4(-1)^3}{3} + 4(-1) \right) \right]$$

$$= \frac{166}{15} \pi$$

50) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين: $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^2$.

نضع

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 = \sqrt{x} \quad , x \geq 0$$

بتربيع الطرفين

$$x^4 = x$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0 , x = 1$$

نأخذ قيمة اختيارية في $(0,1)$ ولتكن $x = \frac{1}{4}$

$$f(\tfrac{1}{4}) = (\tfrac{1}{4})^2 = \frac{1}{16} \quad , g(4) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$g(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

$$V = \pi \int_a^b [(g(x))^2 - (f(x))^2] dx$$

$$= \pi \int_0^1 [(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2] dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x - x^4) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

$$= \pi \left[\left(\frac{(1)^2}{2} - \frac{(1)^5}{5} \right) - \left(\frac{(0)^2}{2} - \frac{(0)^5}{5} \right) \right]$$

$$= \frac{3}{10} \pi$$

51) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين: $y_2 = x^2 + 1$, $y_1 = x + 3$.

نضع $y_1 = y_2$

$x + 3 = x^2 + 1$

$x^2 + 1 - x - 3 = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x = 2$, $x = -1$

نأخذ قيمة اختيارية في $(-1, 2)$ ولتكن $x = 0$

$y_1(0) = 0 + 3 = 3$, $y_2(0) = (0)^2 + 1 = 1$

$y_1 \geq y_2 \quad \forall x \in [-1, 2]$

$V = \pi \int_{-1}^{2} (y_1)^2 - (y_2)^2 \, dx$

$V = \pi \int_{-1}^{2} [(x+3)^2 - (x^2+1)^2] \, dx$

$= \pi \int_{-1}^{2} (x^2 + 6x + 9) - (x^4 + 2x^2 + 1) \, dx$

$= \pi \int_{-1}^{2} (-x^4 - x^2 + 6x + 8) \, dx$

$= \pi \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x \right]_{-1}^{2}$

$= \pi \left[\left(-\frac{(2)^2}{5} - \frac{(2)^3}{3} + 3(2)^2 + 8(2) \right) - \left(-\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3} + 3(-1)^2 + 8(-1) \right) \right]$

$= \frac{117}{5} \pi$

52) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة

بمنحنى الدالة f: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ والمستقيم $y = 2$ في الفترة $[-2, 2]$

نضع

$$\frac{1}{2}x^2 = 2$$

$$x^2 = 4$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = 2 , \quad x = -2$$

نأخذ قيمة اختيارية في $(-2, 2)$ مثلاً $x = 0$

$$f(0) = \frac{1}{2}(0)^2 = 0 \quad , \quad y(0) = 2$$

$$y \geq f(x) \qquad \forall x \in [-2, 2]$$

$$V = \pi \int_{-2}^{2} [y^2 - (f(x))^2] \, dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} [(2)^2 - (\tfrac{1}{2}x^2)^2] \, dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} (4 - \tfrac{1}{4}x^4) \, dx$$

$$= \pi \left[4x - \frac{x^5}{20} \right]_{-2}^{2}$$

$$= \pi \left[\left(4(2) - \frac{(2)^5}{20}\right) - \left(4(-2) - \frac{(-2)^5}{20}\right) \right]$$

$$= \frac{64}{5} \pi$$

53) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1$ في الفترة $[3, 8]$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$(f'(x))^2 = (x^{\frac{1}{2}})^2 = x$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_3^8 \sqrt{1+x}\, dx$$

$$= \int_3^8 (1+x)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_3^8$$

$$= \left(\frac{2}{3}(1+8)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{2}{3}(1+3)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{38}{3}$$

54) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^3}$ في الفترة $[0, 4]$

$$f(x) = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

$$(f'(x))^2 = \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{9}{4}x$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

$$g(x) = 1 + \frac{9}{4}x \Rightarrow g'(x) = \frac{9}{4}$$

$$\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\, dx = \frac{4}{9}\int_0^4 \frac{9}{4}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{4}{9}\left[\frac{(1+\frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \frac{4}{9}\left[\left(\frac{(1+\frac{9}{4}(4))^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(1+\frac{9}{4}(0))^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]\right.$$

$$= 9.07$$

55) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{3}(3+2x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0\,,6]$

$f'(x) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}(3+2x)^{\frac{1}{2}}(2) = (3+2x)^{\frac{1}{2}}$

$(f'(x))^2 = \left((3+2x)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3+2x$

$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2} = \int_0^6 \sqrt{1+3+2x}\, dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^6 2(4+2x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(4+2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^6$ $\quad g(x) = 4+2x$, $g'(x) = 2$

$= \frac{1}{3}\left[(4+2x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^6$

$= \frac{1}{3}\left[(4+2(6))^{\frac{3}{2}} - (4+2(0))^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{56}{3}$

56) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x\,,y)$ يساوي:

$3x^2 - 4x + 1$ ويمر بالنقطة $A(1\,,2)$

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (3x^2 - 4x + 1)\,dx$

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + C$

نعوض بالنقطة $A(1,2)$

$2 = (1)^3 - 2(1)^2 + 1 + C$

$C = 2$

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + C$

57) إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه $(x\,,y)$ هو $2x+5$

فأوجد معادلة المنحنى علما بأنه يمر بالنقطة $B(-2\,,3)$

$$f'(x)=\frac{-1}{2x+5}$$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int \frac{-1}{2x+5}\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+5}\,dx$$

$$f(x)=-\frac{1}{2}\ln|2x+5|+C$$

نعوض بالنقطة $B(-2,3)$

$$3=-\frac{1}{2}\ln|2(-2)+5|+C$$

$$C=3$$

$$f(x)=-\frac{1}{2}\ln|2x+5|+3$$

58) إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه $(x\,,y)$ هو $\sqrt{5-4x}$

فأوجد معادلة المنحنى علما بأنه يمر بالنقطة $A(-5\,,3)$

$$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{5-4x}}=-(5-4x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=$$

$$=\int -(5-4x)^{-\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{4}\int -4(5-4x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\,\frac{(5-4x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{1}{2}(5-4x)^{\frac{1}{2}}+C$$

نعوض $A(-5,3)$

$$3=\frac{1}{2}(5-4(-5))^{\frac{1}{2}}+C\Rightarrow C=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}(5-4x)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}$$

59) حل المعادلة التفاضلية: $y' - 2xy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx$$

$$\ln|y| = x^2 + c$$

$$|y| = e^{x^2+c} = e^c e^{x^2}$$

$$y = \pm e^c e^{x^2}$$

$$y = k e^{x^2}$$

60) حل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + c$$

$$\ln|y| = \ln x^2 + c$$

$$|y| = e^{\ln x^2 + c} = e^c e^{\ln x^2}$$

$$y = \pm e^c x^2$$

$$y = k x^2$$

61) حل المعادلة التفاضلية: $3y' - 2y = 4$ ثم أوجد الحل الخاص الذي يحقق $y = 3$ عندما $x = 0$

$3y' - 2y = 4$

$3y' = 2y + 4$

$y' = \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}$

$a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{4}{3}$

$y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$

$y = ke^{\frac{2}{3}x} - \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}$

$y = ke^{\frac{2}{3}x} - 2$

نعوض $x = 0$, $y = 3$

$3 = ke^{\frac{2}{3}(0)} - 2 \Rightarrow 3 = k - 2 \Rightarrow k = 5$

$y = 5e^{\frac{2}{3}x} - 2$

62) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $A(-1,4)$, $B(1,4)$

ثم أوجد بؤرته ومعادلة دليله.

محور التماثل محور الصادات

معادلة القطع من الشكل $x^2 = 4py$

نعوض بإحدى النقطتين : $B(1,4)$

$(1)^2 = 4p(4)$

$1 = 16p \Rightarrow p = \frac{1}{16}$

$x^2 = 4(\frac{1}{16})y$

$x^2 = \frac{1}{4}y$

البؤرة $F(0,p) = F(0, \frac{1}{16})$

معادلة الدليل $y = -p \Rightarrow y = -\frac{1}{16}$

63) حدد نوع القطع المخروطي ثم أوجد معادلته إذا علمت أن اختلافه المركزي $(e = 1)$ وبؤرته: $F(\frac{1}{2}, 0)$ ورأسه نقطة الأصل.

$e = 1$ قطع مكافئ ، رأسه نقطة الأصل

البؤرة $F(\frac{1}{2}, 0)$

محور التماثل محور السينات ، $p = \frac{1}{2}$

معادلة القطع : $y^2 = 4px$

$y^2 = 4(\frac{1}{2})x$

$y^2 = 2x$

64) أوجد البؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته: $25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$

$$\frac{25x^2}{400} + \frac{16y^2}{400} = \frac{400}{400}$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ المحور الأكبر ينطبق على محور الصادات

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow c = 3$

البؤرتان $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$

$F_1(0, -3)$, $F_2(0, 3)$

الرأسان $A_1(0, -a)$, $A_2(0, a)$

$A_1(0, -5)$, $A_2(0, 5)$

طول المحور الأكبر : $2a = 2 \times 5 = 10$

65) أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(-2,0)\ ,\ F_2(2,0)$
ونقطتا طرفي المحور الأصغر $B_1(0,-3)\ ,\ B_2(0,3)$.

البؤرة $F_2(2,0)$ ، المحور الأكبر ينطبق على محور السينات

$c = 2 \Rightarrow c^2 = 4$

$B_2(0,3)$ و $b = 3 \Rightarrow b^2 = 9$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 4 = 13$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$$

66) أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(-2,0)\ ,\ F_2(2,0)$ وطول محوره الأصغر 4

البؤرة $F_2(2,0)$ ، المحور الأكبر ينطبق على محور السينات

$c = 2 \Rightarrow c^2 = 4$

$2b = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow b^2 = 4$

$a^2 = b^2 + c^2 = 4 + 4 = 8$

معادلة القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

67) أوجد معادلة قطع ناقص مركزه $(0\,,0)$ إذا كان محوره الأكبر ينطبق على المحور الصادي وطوله $16\ cm$ والمسافة بين البؤرتين $10\ cm$.

طول المحور الأكبر 16

$2a = 16 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow a^2 = 64$

المسافة بين البؤرتين 10

$2c = 10 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow c^2 = 25$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 64 - 25 = 39$

المحور الأكبر ينطبق على المحور الصادي

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{39} + \frac{y^2}{64} = 1$$

68) للقطع الزائد الذي معادلته: $9x^2 - 16y^2 = 144$ أوجد كلا من:

1) رأسي القطع الزائد 2) البؤرتين 3) معادلتي دليلي القطع 4) الاختلاف المركزي

1) $9x^2 - 16y^2 = 144$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ معادلة قطع زائد محوره الأساسي ينطبق على محور السينات

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow c = 5$

الرأسين:

$A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$

$A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$

2) البؤرتين

$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$

$F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$

3) معادلتي دليلي القطع

$x = \pm \frac{a^2}{c}$

$x = \pm \frac{16}{5}$

4) الاختلاف المركزي

$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{5}{4}$

69) أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_1(-4\,,0)\,,\ F_2(4\,,0)$
ورأساه $A_1(-2\,,0)\,,\ A_2(2\,,0)$ ، ثم أوجد معادلة كل من خطيه المقاربين.

البؤرة $F_2(4,0)$ المحور الأساسي ينطبق على محور السينات

$c = 4 \Rightarrow c^2 = 16$

الرأس $A_2(2,0)$

$a = 2 \Rightarrow a^2 = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$

$b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

معادلة القطع الزائد

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

معادلة خطيه المقاربين :

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

$$y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{2} x$$

$$y = \pm \sqrt{3}\, x$$

70) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0\,,0)$ وإحدى بؤرتيه $F(0\,,-\sqrt{5}\,)$

ومعادلة أحد خطيه المقاربين هي: $y = 2\,x$ ثم أوجد اختلافه المركزي.

البؤرة $F(0,-\sqrt{5})$ ، المحور الأساسي ينطبق على محور الصادات

$c = \sqrt{5} \Rightarrow c^2 = 5$

معادلة أحد خطيه المقاربين: $y = 2x$

$y = \frac{a}{b} x$

$\frac{a}{b} = 2 \Rightarrow a = 2b$

$c^2 = a^2 + b^2$

$5 = (2b)^2 + b^2$

$5 = 4b^2 + b^2$

$5 = 5b^2 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$

$a = 2b = 2(1) = 2 \Rightarrow a^2 = 4$

معادلة القطع الزائد:

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{1} = 1$

الاختلاف المركزي:

$e = \frac{c}{a}$

$e = \frac{\sqrt{5}}{2}$

71) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0\,,0)$ وأحد رأسيه $(-4\,,0)$ ويمر بالنقطة $(5\,,-2)$

أحد رأسي القطع الزائد $(-4\,,0)$

المحور الأساسي ينطبق على محور السينات

$a = 4 \Rightarrow a^2 = 16$

معادلة القطع: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

نعوض بالنقطة $(\overset{x}{5}\,,\overset{y}{-2})$

$$\frac{(5)^2}{16} - \frac{(-2)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{25}{16} - \frac{4}{b^2} = 1$$

$$\frac{4}{b^2} = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16}$$

$$b^2 = \frac{4 \times 16}{9} = \frac{64}{9}$$

معادلة القطع: $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{\frac{64}{9}} = 1$

72) أوجد الاختلاف المركزي للقطع الذي معادلته: $x^2 - 25\,y^2 = 1$

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{25}} = 1$$

معادلة قطع زائد محوره الأساسي ينطبق على محور السينات $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$

$b^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow b = \frac{1}{5}$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 1 + \frac{1}{25} = \frac{26}{25}$$

$$c = \sqrt{\frac{26}{25}} = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{\frac{\sqrt{26}}{5}}{1} = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

مع أطيب الأمنيات بالنجاح والفلاح