سر التفوق

رتب أفكار الفاينل

11

علمي

مع Mr. Shokry

@MATHWITHMRSHOKRY

مستر التفوق
أ/ شكري

ترتيب أفكار الفاينل

الأعداد المركبة

تساوي عددين مركبين

أوجد قيم كل من $x\,,\,y \in \mathbb{R}$ في كل مما يلي:

- $14\cancel{i^2}^{-1} - 3i = 2x + (y+5)i$

$-14 - 3i = 2x + (y+5)i$

الجزء الحقيقي = الجزء الحقيقي

$\frac{-14}{2} = \frac{2}{2}x$

$\boxed{x = -7}$

الجزء التخيلي = التخيلي

$y + 5 = -3$

$y = -3 - 5$

$\boxed{y = -8}$

- $(x+3) + y^2 i = 5 - yi$

الجزء الحقيقي = الجزء الحقيقي

$x + 3 = 5$

$x = 5 - 3$

$x = 2$

الجزء التخيلي = الجزء التخيلي

$y^2 = -y$

$y^2 + y = 0$

$\boxed{y=0}$ أو $\boxed{y=-1}$

الجمع والطرح الضرب والقسمة

$z = a + bi \longleftrightarrow M(a\,,\,b)$

الصورة الجبرية — الصورة الديكارتية

- مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $\bar{z} = a - bi$

- المعكوس الضربي $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$

- خواص المرافق:
  - $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
  - $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
  - $\left(\bar{\bar{z}}_1\right) = z_1$
  - $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \;,\; z_2 \neq 0$

- إذا كان $z_1 = 2 - 7i \;,\; z_2 = 3 + 5i$ فأوجد:

(1) $z_1 + \bar{\bar{z}}_2$ (2) $\overline{z_1 - z_2}$ (3) $z_1 \cdot z_2$

① $z_1 + \bar{\bar{z}}_2 = z_1 + z_2$

$= 2 - 7i + 3 + 5i$

$= 5 - 2i$

② $\overline{z_1 - z_2}$

$= \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

$= 2 + 7i - (3 - 5i)$

$= 2 + 7i - 3 + 5i$

$= -1 + 12i$

③ $z_1 \cdot z_2$

$= (2 - 7i) \cdot (3 + 5i)$

$= 6 + 10i + 35 - 21i$

$= 41 - 11i$

إذا كان : $z_1 = -2 + 2i$ ، $z_2 = 1 - i$ فأوجد:

(1) $(\overline{z_2 + z_1})$

$= \overline{z_2} + \overline{z_1}$

$= 1 + i - 2 - 2i$

$= -1 - i$

(2) حل المعادلة : $2z + \overline{z_1} = 3i\,(z_2)^2$

$2z + (-2 - 2i) = 3i\,(1 - i)^2$

$2z - 2 - 2i = 6$

$2z = 6 + 2 + 2i$

$2z = 8 + 2i \qquad \div 2$

$z = \frac{8}{2} + \frac{2}{2} i$

$z = 4 + i$

إذا كان : $z_2 = 3 - 4i$, $z_1 = 1 + i$ أوجد :

(1) أوجد $2z_1 - \bar{z}_2$

$= 2(1 + i) - (3 + 4i)$

$= 2 + 2i - 3 - 4i$

$= -1 - 2i$

(2) z_2^{-1}

$z_2^{-1} = \frac{\overline{z_2}}{a^2 + b^2}$

$z_2^{-1} = \frac{3 + 4i}{(3)^2 + (4)^2}$

$z_2^{-1} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25} i$

إذا كان : $z_1 = 3 + 4i \ , \ \ z_2 = 5 - 2i$

فأوجد كلا مما يلي في الصورة الجبرية:

1) $\overline{3z_1 - 2z_2}$

$= 3\overline{z_1} - 2\overline{z_2}$

$= 3(3-4i) - 2(5+2i)$

$= 9 - 12i - 10 - 4i$

$= -1 - 16i$

2) $\dfrac{z_2}{z_1}$

$\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{5-2i}{3+4i}$ بالضرب في مرافق المقام

$= \dfrac{5-2i}{3+4i} \cdot \dfrac{3-4i}{3-4i}$

$= \dfrac{(5-2i)(3-4i)}{(3+4i)\cdot(3-4i)}$

$= \dfrac{15-20i-6i-8}{(3)^2+(4)^2} = \dfrac{7-26i}{25}$

$= \dfrac{7}{25} - \dfrac{26}{25}i$

اكتب كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

(1) $\dfrac{3+i}{2+5i}$ (2) $\dfrac{2}{3-i}$ (3) $\overline{\left(\dfrac{5+i}{2-3i}\right)}$

(2) $\dfrac{2}{3-i} \cdot \dfrac{3+i}{3+i}$

$= \dfrac{2(3+i)}{(3-i)\cdot(3+i)}$

$= \dfrac{6+2i}{(3)^2+(1)^2}$

$= \dfrac{6+2i}{10}$

$= \dfrac{6}{10} + \dfrac{2}{10}i$

$\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5}i$

(3)

$= \dfrac{5-i}{2+3i}$ بالضرب في مرافق المقام

$\dfrac{5-i}{2+3i} \cdot \dfrac{2-3i}{2-3i}$

$= \dfrac{(5-i)\cdot(2-3i)}{(2)^2+(3)^2}$

$= \dfrac{7-17i}{13} = \dfrac{7}{13} - \dfrac{17}{13}i$

$\dfrac{5-i}{2+3i} =$ للتأكد اكتب في الآلة

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية

- يمكن التحويل بين الإحداثيات القطبية (r, θ) والإحداثيات الديكارتية (x, y) باستخدام:

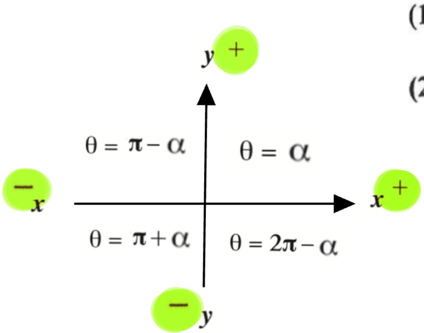
$$y = r\sin\theta$$
$$x = r\cos\theta$$

- يمكن التحويل بين والإحداثيات الديكارتية (x, y) الإحداثيات القطبية (r, θ) باستخدام:

(1) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

(2) نفرض أن α زاوية الإسناد

$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right|$



- **الصورة المثلثية:**

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

إذا كانت $\theta \in [0, 2\pi)$ أو $0^\circ \leqslant \theta < 360^\circ$ فتسمى السعة في هذه الحالة **بالسعة الأساسية**.

- أوجد الزوج المرتب (x, y) الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية لكل من النقطتين:

(1) $A(5, 300^\circ)$ (2) $B\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$

$r = 5 \quad , \quad \theta = 300$

$x = r\cos\theta = 5\cos 300 = \frac{5}{2}$

$y = r\sin\theta = 5\sin 300 = \frac{-5\sqrt{3}}{2}$

$(x, y) = \left(\frac{5}{2}, \frac{-5\sqrt{3}}{2}\right)$

$r = 2 \quad , \quad \theta = \frac{2\pi}{3}$

$x = r\cos\theta = 2\cos\frac{2\pi}{3} = -1$

$y = r\sin\theta = 2\sin\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$

$(x, y) = (-1, \sqrt{3})$

أوجد الزوج المرتب (r,θ) لكل نقطة مما يلي حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$

(1) $D(3\sqrt{3},3)$

$x = 3\sqrt{3}$, $y = 3$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2+(3)^2} = 6$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{3}{3\sqrt{3}}\right| = \frac{\pi}{6}$

$x>0 , y>0 \Rightarrow$ تقع في الربع الأول θ

$\alpha = \theta = \frac{\pi}{6}$

$(r,\theta) = (6, \frac{\pi}{6})$

(2) $C(4,-2\sqrt{5})$

$x = 4$, $y = -2\sqrt{5}$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(4)^2+(-2\sqrt{5})^2} = 6$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{-2\sqrt{5}}{4}\right| \simeq 48^\circ$

$x>0 , y<0 \Rightarrow$ تقع في الربع الرابع θ

$\theta = 360 - \alpha = 360 - 48 \simeq 312^\circ$

$(r,\theta) = (6, 312^\circ)$

ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية:

(1) $z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}i$ (2) $z_2 = -1-i$ (3) $z_3 = -2+2\sqrt{3}i$

$x = \frac{5}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{5}{\sqrt{2}}$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = 5$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}|1| = \frac{\pi}{4}$

$x>0, y<0 \Rightarrow$ تقع في الربع الرابع θ

$\theta = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

الصورة المثلثية

$z = 5\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

(2) $z_2 = -1-i$

$x = -1$, $y = -1$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{-1}{-1}\right| = \frac{\pi}{4}$

$x<0, y<0 \Rightarrow$ تقع في الربع الثالث θ

$\theta = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

الصورة المثلثية

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

(3) $z_3 = -2 + 2\sqrt{3}i$

$x = -2 , y = 2\sqrt{3}$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = 4$

بفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية α

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right| = \frac{\pi}{3}$

$x<0 , y>0 \Rightarrow$ تقع في الربع الثاني θ

$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

الصورة المثلثية

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

اكتب العدد $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$ في الصورة المثلثية مستخدما السعة الأساسية

$\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} \cdot \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}$

$= \frac{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3})^2+(1)^2} = \frac{3-\sqrt{3}i-\sqrt{3}i-1}{4} = \frac{2-2\sqrt{3}i}{4}$

$z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$x = \frac{1}{2} \quad , \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$\alpha = \tan^{-1}\left|-\frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{2}\right| \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ θ تقع في الربع الرابع

الصورة المثلثية

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = 1\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

حل المعادلات

أوجد مجموعة حل المعادلة: $5z - 4 + 2i = 3z + 1 - 4i$

$5z - 3z = 1 - 4i + 4 - 2i$

$2z = 5 - 6i \qquad \div 2$

$z = \frac{5}{2} - 3i$

م.ح = $\{\frac{5}{2} - 3i\}$

أوجد مجموعة حل المعادلة: $z + 3(1+i)z - 8(2-i) = 0$

$z(1 + 3(1+i)) = 8(2-i)$

$z(1+3+3i) = 16 - 8i \Rightarrow z(4+3i) = 16 - 8i$

$z = \frac{16-8i}{4+3i} \Rightarrow z = \frac{16-8i}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i} = \frac{(16-8i)(4-3i)}{(4)^2 + (3)^2}$

$z = \frac{8}{5} - \frac{16}{5}i$

أوجد مجموعة حل المعادلة: $z + i = 2\bar{z} + 1$ في $\mathbb{C}$.

$z - 2\bar{z} = 1 - i$

نفرض $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$

$x + yi - 2(x - yi) = 1 - i$

$x + yi - 2x + 2yi = 1 - i$

$-x + 3yi = 1 - i$

الجزء الحقيقي = الجزء الحقيقي

$-x = 1$

$x = -1$

الجزء التخيلي = الجزء التخيلي

$3y = -1$

$y = \frac{-1}{3}$

$\therefore z = -1 - \frac{1}{3}i$

م.ح = $\{-1 - \frac{1}{3}i\}$

● أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i\bar{z} = 5 - 2i$ في $\mathbb{C}$

بفرض $z = x + yi$ ، $\bar{z} = x - yi$

$2(x+yi) + i(x-yi) = 5 - 2i$

$2x + 2yi + xi + y = 5 - 2i$

$2x + y = 5$

$x + 2y = -2$ بالآلة mod $\boxed{5}$ $\boxed{1}$

$x = 4$, $y = -3$

$z = x + yi \Rightarrow z = 4 - 3i$ م.ح = $\{4 - 3i\}$

● أوجد حل المعادلة : $z^2 - 2z + 4 = 0$ في $\mathbb{C}$

$a = 1$
$b = -2$
$c = 4$

القانون $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$z = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$

$z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ ، $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

م.ح = $\{1 + \sqrt{3}i , 1 - \sqrt{3}i\}$

● أوجد مجموعة حل المعادلة : $4z^2 + 16z + 25 = 0$ في C

$a = 4$
$b = 16$
$c = 25$

القانون $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$z = \dfrac{-16 \pm \sqrt{(16)^2 - 4(4)(25)}}{2(4)}$

$z_1 = -2 + \frac{3}{2}i$, $z_2 = -2 - \frac{3}{2}i$

$\{-2 + \frac{3}{2}i , -2 - \frac{3}{2}i\}$ = م.ح

● أوجد مجموعة حل المعادلة: $z + \dfrac{4}{z} = 2$ بالضرب في z

$a = 1$
$b = -2$
$c = 4$

$z^2 + 4 = 2z \Rightarrow z^2 - 2z + 4 = 0$

$z = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow z = \dfrac{-(1) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$

$z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = 1 - 2\sqrt{3}i$

م.ح = $\{1 + \sqrt{3}i , 1 - \sqrt{3}i\}$

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $Z = -3 - 4i$

نفرض أن $w = m + ni$ هو الجذر التربيعي للعدد Z

$w^2 = Z$

$(m+ni)^2 = -3 - 4i$

$m^2 - n^2 + 2mni = -3 - 4i$

$m^2 - n^2 = -3 \longrightarrow (1)$

$2mn = -4 \longrightarrow (2)$

$|w^2| = |Z|$

$\left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2 = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$

$m^2 + n^2 = 5 \longrightarrow (3)$

بجمع (1) ، (3)

$2m^2 = 2 \quad \div 2$

$m^2 = 1$

$m = 1$

عوض في (2) $2mn = -4$

$2(1)n = -4$

$2n = -4$

$n = -2$

$w_1 = m + ni$

$w_1 = 1 - 2i$

$m = -1$

عوض في (2) $2mn = -4$

$2(-1)n = -4$

$-2n = -4$

$n = 2$

$w_2 = m + ni$

$w_2 = -1 + 2i$

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 7 + 24i$

نفرض أن $w = m + ni$ هو الجذر التربيعي للعدد Z

$w^2 = Z$

$(m+ni)^2 = 7 + 24i$

$m^2 - n^2 + 2mni = 7 + 24i$

$m^2 - n^2 = 7 \longrightarrow (1)$

$2mn = 24 \longrightarrow (2)$

$|w^2| = |Z|$

$\left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2 = \sqrt{(7)^2 + (24)^2}$

$m^2 + n^2 = 25 \longrightarrow (3)$ بجمع (1) ، (3)

$2m^2 = 32 \quad \div 2$

$m^2 = 16$ بأخذ $\sqrt{\ }$

$\therefore m = 4$ أو $m = -4$

عوض في (2) $2mn = 24$

$2(4)n = 24$

$8n = 24$

$n = 3$

$w_1 = m + ni$

$w_1 = 4 + 3i$

عوض في (2) $2mn = 24$

$2(-4)n = 24$

$-8n = 24$

$n = -3$

$w_2 = m + ni$

$w_2 = -4 - 3i$

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 5 + 12i$.

نفرض أن $w = m + ni$ هو الجذر التربيعي للعدد z

$w^2 = z$

$(m+ni)^2 = 5+12i$

$m^2 - n^2 + 2mni = 5 + 12i$

$m^2 - n^2 = 5 \longrightarrow (1)$

$2mn = 12 \longrightarrow (2)$

$|w^2| = |z|$

$\left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2 = \sqrt{(5)^2 + (12)^2}$

$m^2 + n^2 = 13 \longrightarrow (3)$ بجمع (1) ، (3)

$2m^2 = 18$ $\div 2$

$m^2 = 9$ بأخذ $\sqrt{\ }$

$\therefore$ $m = 3$ أو $m = -3$

نعوض في 2 $2mn = 12$	نعوض في 2 $2mn = 12$
$2(3)n = 12$	$2(-3)n = 12$
$6n = 12$	$-6n = 12$
$n = 2$	$n = -2$
$w_1 = m + ni$	$w_2 = m + ni$
$w_1 = 3 + 2i$	$w_2 = -3 - 2i$

Mr. Shokry

التمثيل البياني للدوال المثلثية

$y = a \sin bx$

السعة $= |a|$

الدورة $= \frac{2\pi}{|b|}$

ربع الدورة $= \frac{\text{الدورة}}{4}$

إجمع ربع الدورة

x	0	ربع الدورة			الدورة
y	0	a	0	$-a$	0

$y = a \cos bx$

السعة: $|a|$ =

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|}$ =

ربع الدورة $= \frac{\text{الدورة}}{4}$

إجمع ربع الدورة

x	0	ربع الدورة			الدورة
y	a	0	$-a$	0	a

$y = a \tan bx$

السعة: ليس لها سعة

الدورة: $= \frac{\pi}{|b|}$

ربع الدورة $= \frac{\text{الدورة}}{4}$

x	$-$نصف الدورة	$-$ربع الدورة	0	ربع الدورة	نصف الدورة
y	غير معرف	$-a$	0	a	غير معرف

أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

(1) $y = \frac{1}{2}\sin 4x$

(2) $y = 3\sin 2x$

(3) $y = -2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ ، $[-4\pi,\ 4\pi]$

(4) $y = -4\sin x$ ، $x \in [-\pi\ ,\ 2\pi]$

(1) $y = 3\cos 2x$

(2) $y = -5\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$ ، $[-3\pi\ ,\ 3\pi]$

(3) $y = -2\cos\left(\frac{3}{4}x\right)$ ، $0 \le x \le 2\pi$

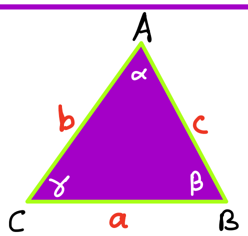
أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

(1) $y = \frac{1}{2}\tan x$

(2) $y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\cos bx$ إذا كانت:

الدورة هي $\frac{\pi}{3}$ ، $a = -2$



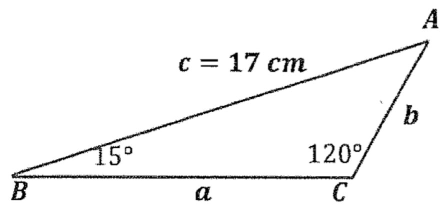
قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

تطبيق القانون مباشر

- حل المثلث ABC الذي فيه $a = 4\ cm, \alpha = 40^\circ, \beta = 60^\circ$

- حل المثلث ABC



- حل ΔABC حيث: $a = 7\text{ cm}\ ,\ b = 6\text{ cm}\ ,\ \alpha = 26.3^\circ$

يوجد مثلثين $a > b$
أحدهما مرفوض

- حلّ المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 43^\circ, a = 32\text{ cm}, b = 28\text{ cm}$

$a < b$
يوجد مثلثين كلاهما مقبول

- حل ΔABC حيث: $a = 6\text{ cm}\ ,\ b = 7\text{ cm}\ ,\ \alpha = 45^\circ$

قانون جيب التمام

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

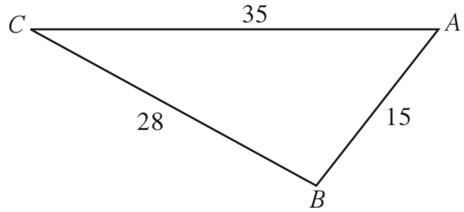
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

- حل ΔABC حيث: $a = 11\text{ cm}\ ,\ b = 5\text{ cm}\ ,\ \gamma = 20^\circ$

- حل المثلث ABC حيث $a = 9\ cm\ ,\ b = 7\ cm\ ,\ c = 5\ cm$

- حل ΔABC حيث: $a = 3\text{ cm}\ ,\ b = 2\text{ cm}\ ,\ c = \sqrt{7}$

- حل ΔABC



- في ΔABC حيث: $a = 9\text{ cm}\ ,\ b = 7\text{ cm}\ ,\ c = 5\text{ cm}$

أوجد قياس الزاوية الأكبر.

قياس أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع

قاعدة هيرون

(نصف محيط المثلث) $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

- أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $a = 4\text{ cm}\ ,\ b = 4\text{ cm}\ ,\ c = 3\text{ cm}$

- أوجد مساحة المثلث ABC حيث
  $a = 23\text{ cm}$ ، $b = 19\text{ cm}$ ، $c = 12\text{ cm}$ مستخدماً قاعدة هيرون

- أوجد مساحة سطح مثلث أطوال أضلاعه :
  $a = 9\ cm\ ,\ b = 7\ cm\ , c = 6\ cm$

إثبات صحة المتطابقة

ملخص للقوانين المستخدمة في نفس طريقة المسائل

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \begin{cases} 1 - \cos^2 x = \sin^2 x \\ 1 - \sin^2 x = \cos^2 x \end{cases}$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \Rightarrow \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x \Rightarrow \cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

$$(1-\cos x)(1+\cos x) = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x$$

$$(1+\cos x)(1+\cos x) = (1+\cos x)^2 \Rightarrow 1 + 2\cos x + \cos^2 x$$

$$\frac{1}{\sin x} = \csc x \qquad \frac{1}{\cos x} = \sec x \qquad \frac{1}{\tan x} = \cot x$$

$$\tan x = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

توحيد المقام

$$\frac{x}{y} \pm \frac{A}{B} = \frac{x \cdot B \pm A \cdot y}{y \cdot B}$$

اثبت صحة المتطابقة :

توحيد مقام

$$\frac{1}{1-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}=2\csc^2 x$$

الأيسر $=\frac{1+\cancel{\cos x}+1-\cancel{\cos x}}{1-\cos^2 x}$

$=\frac{2}{\sin^2 x}=2\csc^2 x$

$$\frac{1}{\sec x-1}+\frac{1}{\sec x+1}=2\cot x\csc x$$

الأيسر $=\frac{\sec x+\cancel{1}+\sec x-\cancel{1}}{\sec^2 x-1}=\frac{2\sec x}{\tan^2 x}$

$=\frac{2\sec x}{\tan x\cdot\tan x}=2\cot x\cdot\csc x$

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x}-\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=4\tan x\cdot\sec x$$

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\csc\theta$$

$$\tan x+\cot x=\sec x\,.\csc x$$

توحيد مقام

الأيسر: $\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\cdot\sin x}$

$=\frac{1}{\cos x\cdot\sin x}=\sec x\cdot\csc x=$ الأيمن

$$\tan^2 x-\sin^2 x=\sin^2 x\tan^2 x$$

الأيسر: $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{\sin^2 x}{1}=\frac{\sin^2 x-\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x}$

$=\frac{\sin^2 x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}=\tan^2 x\cdot\sin^2 x$

$$\cot^2 x-\cos^2 x=\cos^2 x\cot^2 x$$

Mr. Shokry

$$\frac{\tan x}{\sec x-1}=\frac{\sec x+1}{\tan x}$$

الأيسر: $\frac{\sec x+1}{\sec x+1}\cdot$

$=\frac{(\sec x+1)\cdot\tan x}{\sec^2 x-1}=\frac{(\sec x-1)\cdot\cancel{\tan x}}{\tan^2 x}=\frac{\sec x-1}{\tan x}$

الأيمن

$$\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$$

الأيسر $=\frac{1+\sin x}{1+\sin x}\cdot$

$\frac{(1+\sin x)\cdot\cos x}{1-\sin^2 x}=\frac{(1+\sin x)\cdot\cancel{\cos x}}{\cos^2 x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$

= الأيمن

$$\frac{\sec^2 x-1}{\sin x}=\tan x\,.\sec x$$

الأيسر $\frac{\tan^2 x}{\sin x}=\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\sin x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\tan x\cdot\sec x$

الأيمن

$$\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta}=\tan^2\theta$$

الأيسر $=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\tan^2\theta$

$$(\cos x)(\overset{\frac{\sin x}{\cos x}}{\tan x}+\sin x\overset{\frac{\cos x}{\sin x}}{\cot x})=\sin x+\cos^2 x$$

الأيسر $=\cancel{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}+\cos x\cdot\cancel{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\cancel{\sin x}}$

$=\sin x+\cos^2 x=$ الأيمن

$$(\sin x)(\cot x+\cos x\tan x)=\cos x+\sin^2 x$$

الأيسر $=\cancel{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\cancel{\sin x}}+\sin x\cdot\cancel{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}$

$=\cos x+\sin^2 x=$ الأيمن

$$(1-\tan x)^2=\sec^2 x-2\tan x$$

الأيسر $=1-2\tan x+\tan^2 x=\sec^2 x-2\tan x$

الأيسر : بالضرب في

$$=\frac{1-\cos x}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=(\csc x-\cot x)^2$$

$=\frac{(1-\cos x)^2}{1-\cos^2 x}=\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}=\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)^2$

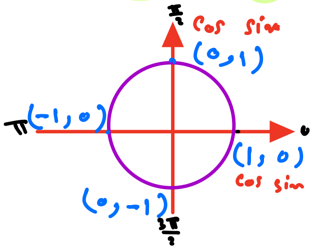
$=\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2=(\csc x-\cot x)^2=$ الأيمن

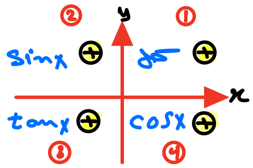
$\sin x = 0$ أو 1 أو -1

$\cos x = 0$ أو 1 أو -1

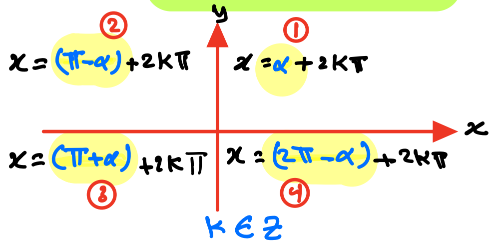
حل المعادلة المثلثية

زاوية ربعية





الحل يكون على الصورة



- حل المعادلة : $\cos x = -\frac{1}{2}$ حيث $0 \leqslant x < 2\pi$

معاكس

- حل المعادلة :- $2\cos x = -\sqrt{3}$
- حل المعادلة: $\sqrt{2}\cos x = 1$
- حل المعادلة : $\sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$
- حل المعادلة: $\tan x = 1$

تجميع الحدود المتشابهة

- حل المعادلة : $5\sin\theta - 3 = \sin\theta$
- حل المعادلة : $3\sin\theta + 1 = \sin\theta$

- حل المعادلة: $\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

عامل مشترك

- حل المعادلة : $2\cos x \sin x - \cos x = 0 \quad , x \in [0, 2\pi)$

- حل المعادلة: $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$

mod 5 3

- حل المعادلة : $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$
- حل المعادلة: $4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$

المتطابقات

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

مفتاح الحل

$\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$

$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

إذا كان $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ الربع الأول

$\cos\beta = \frac{-12}{13}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ الثالث

أوجد كلاً مما يلي :

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

(1) $\sin(\alpha+\beta)$ (2) $\tan 2\beta$

الحل

$\sin\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2\beta}$

$\sin\beta = \pm\sqrt{1-\left(\frac{-12}{13}\right)^2}$

$\sin\beta = \pm\frac{5}{13}$

تقع في الربع الثالث β

$\sin\beta = -\frac{5}{13}$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$= \pm\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)}$

$\cos\alpha = \pm\frac{3}{5}$

$\cos\alpha = +\frac{3}{5}$ في الربع الأول α

$\tan\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$

$= \frac{-5}{13} \div \frac{-12}{13} = \frac{5}{12}$

① $\sin(\alpha+\beta)$

$= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$= \left(\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{-12}{13}\right) + \left(\frac{-5}{13}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{-63}{65}$

② $\tan 2\beta = \dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}$

$= \dfrac{2\left(\frac{5}{12}\right)}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}$

$= \dfrac{120}{119}$

إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ، $\sin\theta = \frac{-3}{5}$ ، فأوجد:

$180 \quad 270$

الثالث

(1) $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (2) $\tan(2\theta)$

(1) $\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-(-\frac{4}{5})}{2}}$

$= \pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\frac{180}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{270}{2}$

$90 < \frac{\theta}{2} < 135$

θ في الربع الثالث

$\frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثاني

$\sin\frac{\theta}{2} = +\frac{3\sqrt{10}}{10}$

(2) $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$= \frac{2(\frac{3}{4})}{1-(\frac{3}{4})^2}$

$= \frac{24}{7}$

$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$= \pm\sqrt{1-(\frac{-3}{5})^2}$

$\cos\theta = \pm\frac{4}{5}$

θ في الربع الثالث

$\cos\theta = -\frac{4}{5}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{-3}{5} \div \frac{-4}{5}$

$= \frac{3}{4}$

Mr. Shokry

إذا كان $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ، $\cos \beta = \frac{24}{25}$ حيث α ، β زاويتين حادتين في الربع الأول

أوجد كلاً مما يلي :

(1) $\cos(\alpha - \beta)$ (2) $\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$

$= \pm\sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2}$

$\cos\alpha = \pm \frac{4}{5}$

زاوية α حادة في الربع الأول

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\sin\beta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\beta}$

$= \pm\sqrt{1 - (\frac{24}{25})^2}$

$\sin\beta = \pm \frac{7}{25}$

زاوية β حادة في الربع الأول

$\sin\beta = \frac{7}{25}$

(1) $\cos(\alpha - \beta)$

$\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

$= (\frac{4}{5})(\frac{24}{25}) - (\frac{3}{5})(\frac{7}{25})$

$= \frac{3}{5}$

(2) $\sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = \cos\beta = \frac{24}{25}$

$\sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = \overset{1}{\cancel{\sin\frac{\pi}{2}}} \cos\beta - \sin\beta \cos\frac{\pi}{2}$

$= (1)(\frac{24}{25}) - \cancel{(\frac{3}{5})(0)}$

$= \frac{24}{25}$

إذا كان $\sin\theta = \frac{-12}{13}$ ، $\underset{270}{\frac{3\pi}{2}} < \overset{\text{الرابع}}{\theta} < \underset{360}{2\pi}$

أوجد : $\sin 2\theta$

$\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \sin^2\theta}$

$= \pm\sqrt{1 - (\frac{-12}{13})^2}$

$\cos\theta = \pm \frac{5}{13}$

θ في الرابع

$\cos\theta = \frac{5}{13}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$= 2(\frac{-12}{13})(\frac{5}{13})$

$= -\frac{120}{169}$

إذا كان $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\overset{180}{\pi} < \theta < \overset{270}{\frac{3\pi}{2}}$

ثالث

فأوجد $(1)\ \sin 2\theta \qquad (2)\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$= 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$

$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\theta\cos\frac{\pi}{3} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{3}$

$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$

$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \sin^2\theta}$

$= \pm\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

θ في الثالث

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ ، $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ فاوجد :

90 ، 180 ثاني

(1) $\sin(\theta - \frac{\pi}{2})$ (2) $\tan 2\theta$

$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$= \pm\sqrt{1-(-\frac{3}{5})^2}$

$= \pm \frac{4}{5}$

θ في الربع الثاني

$\sin\theta = \frac{4}{5}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{4}{5} \div \frac{-3}{5}$

$= \frac{-4}{3}$

$\sin(\theta - \frac{\pi}{2})$

$= \sin\theta \cancel{\cos\frac{\pi}{2}} - \sin\frac{\pi}{2}\cos\theta$

$= \cancel{\frac{4}{5}\cdot(0)} - (1)(-\frac{3}{5})$

$= \frac{3}{5}$

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$= \frac{2(-\frac{4}{3})}{1-(-\frac{4}{3})^2}$

$= \frac{24}{7}$

Mr. Shokry

الثالث

إذا كانت: $180° < \theta < 270°$ ، $\sin\theta = -\frac{24}{25}$ ، فأوجد $\tan\frac{\theta}{2}$ ، $\cos\frac{\theta}{2}$ ، $\sin 2\theta$

$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\left(\frac{-24}{25}\right)^2}$

$\cos\theta = \pm\frac{7}{25}$

$\cos\theta = -\frac{7}{25}$ θ في الثالث

$180 < \theta < 270$

$\frac{180}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{270}{2}$

$90 < \frac{\theta}{2} < 135$

تقع في الربع الثاني $\frac{\theta}{2}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos x$

$= 2\left(-\frac{24}{25}\right)\cdot\left(\frac{-7}{25}\right) =$

$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = \pm\frac{3}{5}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{-3}{5}$

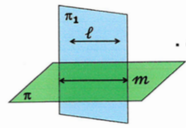
$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

$= \pm\sqrt{\frac{1-(-\frac{7}{25})}{1+(-\frac{7}{25})}} = \pm\frac{4}{3} \Rightarrow \tan\frac{\theta}{2} = \frac{-4}{3}$

هندسة الفضاء

نظرية (1) تفيد في اثبات توازي مستقيم مع مستوي

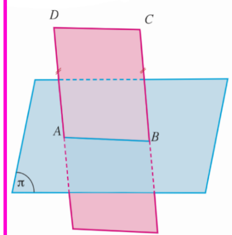
إذا وازي مستقيم خارج مستو مستقيما في المستوي فإنه يوازي المستوي .



$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{m} \\ \overleftrightarrow{m} \subset \pi\end{array}\right\} \overleftrightarrow{\ell} \parallel \pi$$

في الشكل المقابل: $AD = BC$ ، $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

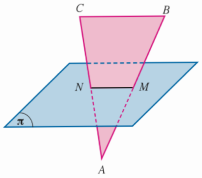
أثبت أن: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$



في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{AC}$ ،

M ، N تنتميان إلى المستوي π .

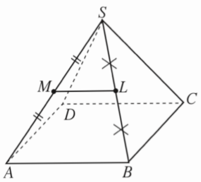
أثبت أن $\overleftrightarrow{BC} \parallel \pi$.



$SABCD$ هرم قاعدته $ABCD$ مربعة الشكل.

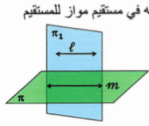
M منتصف $\overline{SA}$ ، L منتصف $\overline{SB}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{ML} \parallel (ABCD)$



نظرية (2)

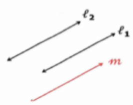
إذا وازى مستقيم مستويا، فكل مستو مار بالمستقيم و يقطع المستوي، يقطعه في مستقيم مواز للمستقيم المعلوم .



$$\left.\begin{array}{l}\because\ \overleftrightarrow{\ell} \parallel \pi \\ \overleftrightarrow{\ell} \subset \pi_1 \\ \pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{m}\end{array}\right\} \overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{m}$$

نظرية (3)

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان.



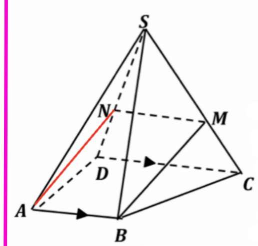
$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{\ell_1} \parallel \overleftrightarrow{m} \\ \overleftrightarrow{\ell_2} \parallel \overleftrightarrow{m}\end{array}\right\} \therefore\ \overleftrightarrow{\ell_1} \parallel \overleftrightarrow{\ell_2}$$

$SABCD$ هرم قاعدته شبه المنحرف $ABCD$ حيث إن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$

$M \in \overline{SC}$ ، المستوي ABM يقطع $\overleftrightarrow{SD}$ في N

(a) أثبت أن : $\overleftrightarrow{AB}$ يوازي المستوي SDC

(b) أثبت أن : $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

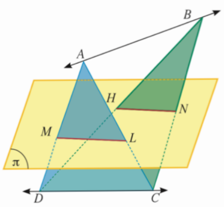


في الشكل المقابل: إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متخالفان، $\pi \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

$\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M، $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L .

$\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في H، $\overleftrightarrow{BC}$ تقطع π في N .

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{NH}$

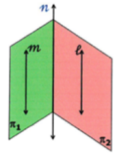


نتيجة (1)

إذا توازى مستقيمان و مر بهما مستويان متقاطعان ،

فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلا من هذين المستقيمين .

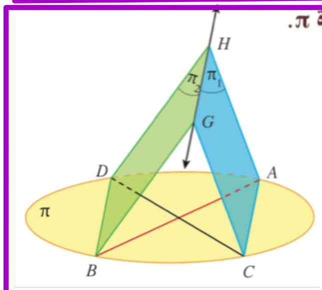
$$\left.\begin{array}{l} \overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{m} \ , \\ \overleftrightarrow{m} \subset \pi_1 , \\ \overleftrightarrow{\ell} \subset \pi_2 \\ \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{n} \end{array}\right] \overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n}$$



في الشكل المقابل: AB , CD قطران في مستوي الدائرة π.

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

أثبت أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$.

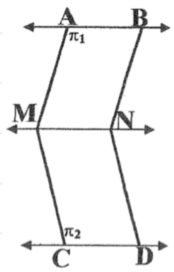


ليكن π_1 ,π_2 مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{MN}$ حيث:

$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi_2$

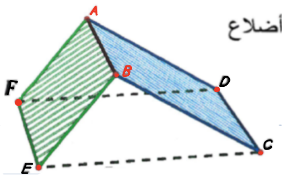
و $\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$, $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi_1$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$



ABEF , ***ABCD*** متوازيا اضلاع غير مستويين معاً

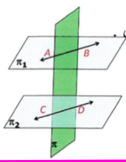
ويتقاطعان في $\overleftrightarrow{AB}$ أثبت أن ***CDFE*** متوازي أضلاع



نظرية (4) تفيد في اثبات توازي مستقيمين

إذا قطع مستو مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين .

$$\left.\begin{array}{l} \pi_2 \parallel \pi_1 \\ \pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB} \\ \pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD} \end{array}\right] \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$$

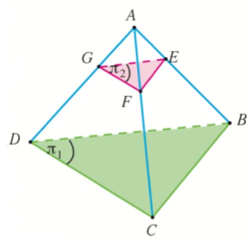


في الشكل المقابل، $ABCD$ هرم ثلاثي.

المستويان π_1 , π_2 متوازيان.

إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$، $FG = 6\,\text{cm}$

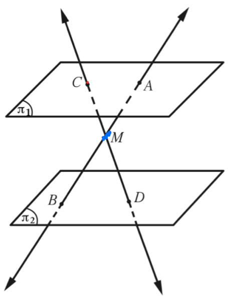
فأوجد DC



في الشكل المقابل π_1 ,π_2 مستويان متوازيان، M نقطة واقعة بينهما،

حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$

أثبت أن: $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$



تعريف

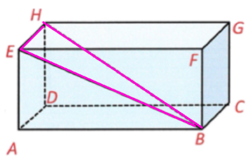
$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{l} \perp \Pi \\ \overleftrightarrow{m} \subset \Pi\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$$

نظرية (5)

المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديًّا على مستويهما.

في شبه المكعب المقابل،

أثبت أن المثلث BEH قائم في $\widehat{E}$.

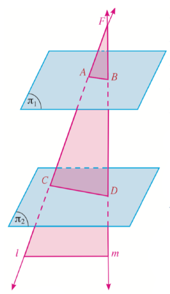


في الشكل المقابل: π_1 , π_2 مستويين متوازيين.

$\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متقاطعان في F ويقطعان كلًّا من π_1 في A, B، π_2 في C, D

إذا كان $BD = 4\text{ cm}$ ، $AC = 6\text{ cm}$ ، $CD = 9\text{ cm}$ ، $FB = 5\text{ cm}$

فأوجد محيط المثلث FAB



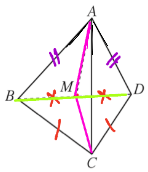
$ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

$AD = AB$ ، $CD = CB$

النقطة M منتصف $\overline{DB}$

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{BD} \perp (AMC)$

(b) استنتج أن: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$



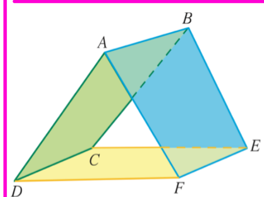
نظرية (6) $\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2 \implies \pi_1 \parallel \pi_2$

نظرية (7) $\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \ , \ \pi_1 \parallel \pi_2 \implies \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2$

في الشكل المقابل:

$ABEF, ABCD$ مستطيلان

أثبت أن: $(AFD) \parallel (BEC)$



في الشكل المقابل:

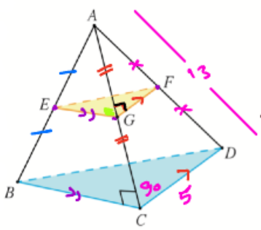
A نقطة خارج المستوى BCD،

والنقاط E, G, F منتصفات $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ على الترتيب.

إذا كان $\overline{AC} \perp \overline{CB}$

وكان $AD = 13\text{ cm}$ ، $AC = 12\text{ cm}$ ، $CD = 5\text{ cm}$

فأثبت أن: $(EGF) \parallel (BCD)$.

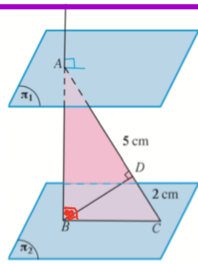


في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$ ، $A \in \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ ، $\pi_1 /\!/ \pi_2$

رسم: $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$ في المستوي ABC

إذا كان: $DC = 2\text{ cm}$ ، $AD = 5\text{ cm}$

أوجد: BD



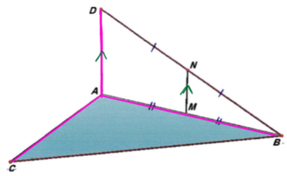
نظرية (8) $\overleftrightarrow{l} \perp \pi \ , \ \overleftrightarrow{m} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{l} /\!/ \overleftrightarrow{m}$

نظرية (9) $\overleftrightarrow{l} /\!/ \overleftrightarrow{m} \ , \ \overleftrightarrow{l} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{m} \perp \pi$

ABC مثلث، اخذت النقطة D خارج مستوي المثلث بحيث كان:

$\overleftrightarrow{DA}$ عمودي على كل من $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AB}$ فإذا كانت M منتصف $\overline{AB}$

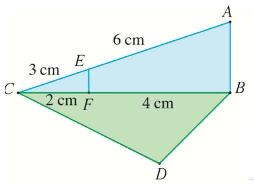
N منتصف $\overline{DB}$ أثبت أن: $\overleftrightarrow{MN} \perp (ABC)$.



في الشكل المقابل إذا كان $\overline{AB} \perp (BCD)$

وكان $FB = 4\text{ cm}$ ، $CF = 2\text{ cm}$ ، $EA = 6\text{ cm}$ ، $CE = 3\text{ cm}$

أثبت أن: $\overline{EF} \perp \overline{DB}$



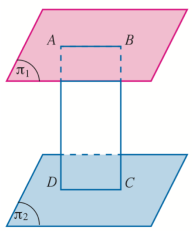
في الشكل المقابل: $\pi_1 /\!/ \pi_2$

A, B نقطتان في π_1،

C, D نقطتان في π_2 حيث: A, B, C, D في مستوى واحد

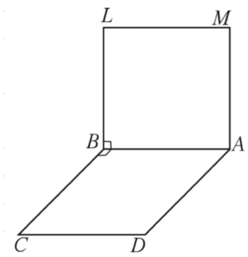
$\overline{BC} \perp \pi_2$ ، $\overline{AD} \perp \pi_2$

أثبت أن $ABCD$ مستطيل.



$ABCD$ ، $ABLM$ مربعان ليسا في مستو واحد، لهما ضلع مشترك $\overline{AB}$

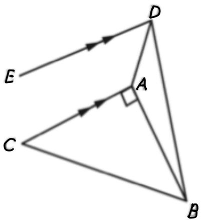
أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$



في الشكل المقابل، ABC مثلث قائم الزاوية في A

رسم $\overrightarrow{AD}$ عمودي على مستوي المثلث ABC، ورسم $\overleftrightarrow{ED} \parallel \overleftrightarrow{CA}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{AB}$



الزاوية الزوجية

في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

$m(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{6}$ ، $AB = 10\text{ cm}$ ، $DB = 5\text{ cm}$

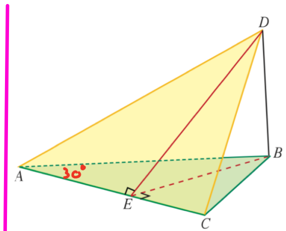
$\overline{DB} \perp (ABC)$

$\overline{DE} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{BE} \perp \overline{AC}$

أوجد:

a) BE , DE

b) قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC



في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

$m(B\hat{A}C) = 45^\circ$ ، $AB = 10\text{ cm}$ ، $DB = 5\text{ cm}$

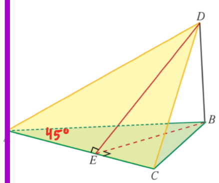
$\overline{DB} \perp (ABC)$

$\overline{DE} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{BE} \perp \overline{AC}$

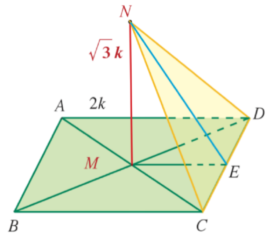
أوجد:

a) BE , DE

b) قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC



$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M، وفيه $AD = 2k$
أقيم $\overline{NM}$ عمودًا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}\,k$
أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD ، D



$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M ، و فيه $AD = 6cm$
أقيم $\overline{NM}$ عمودا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه
بحيث $MN = 3\sqrt{3}\ cm$ ، E منتصف $\overline{CD}$
أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD , $ABCD$