



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عبد الخطيب

محمد بن الخطيب

محمد عمر الخطيب

الوحدة الأولى : التمهيدات

لا... يوجد اسئلة مباشرة على هذه الوحدة في امتحان الوزارة

(يوجد لها شرح على الموقع... في وحدة الاساسيات وهي مهمة لفهم الوحدات الباقية)

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الوحدة الثانية : النهايات والاتصال

1-2 المماسات وطول المنحنى

2-2 مفهوم النهاية

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

3-2 حساب النهايات

4-2 الاتصال ونتائجه

5-2 النهايات التي تتضمن اللانهاية: خطوط التقارب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الوحدة الثالثة : التفاضل

1-3 المماسات والسرعة المتجهة

2-3 الاشتقاق

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

3-3 حساب المشتقات : قاعدة القوى

4-3 قاعدة الضرب والقسمة

5-3 قاعدة السلسلة

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

6-3 مشتقات الدوال المثلثية

7-3 اشتقاق الدوال الأسية والدوال المثلثية اللوغاريتمية

8-3 الاشتقاق الضمني والدوال المثلثية المعكوسة

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

10-3 نظرية القيمة المتوسطة

الوحدة الرابعة : تطبيقات التفاضل

1-4 التقريبات الخطية وطريقة نيوتن

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

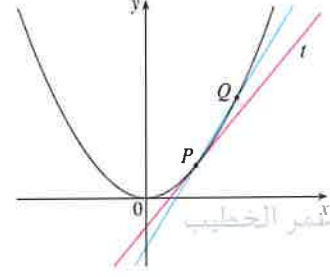
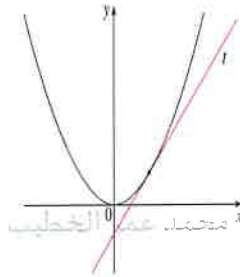
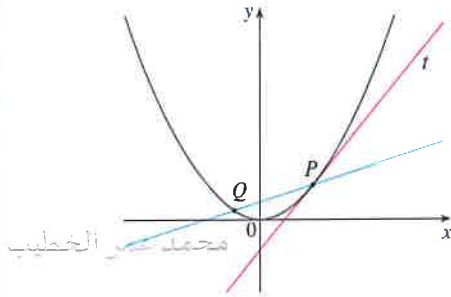
محمد عمر الخطيب

2-4 الصيغ غير المعرفة وقاعدة لوبتال

الوحدة الثانية: النهايات والاتصال /// الدرس الأول: المماسات وطول المنحني

اولاً: تقدير ميل المنحني عند نقطة

(1) قدر ميل منحنى الدالة $y = x^2$ عند النقطة $(2,4)$



النقطة المتحركة من اليسار		النقطة الثابتة	النقطة المتحركة من اليمين	
$(1.9, 3.61)$	$(1.99, 3.9601)$	$(2, 4)$	$(2.01, 4.0401)$	$(2.1, 4.41)$
$m = 3.9$	$m = 3.99$	4	$m = 4.01$	$m = 4.1$

4

إذا ميل المنحني عند النقطة $(2,4)$ تقريباً يساوي $m = 4$

(2) قدر ميل منحنى الدالة $y = \cos x$ عند $x = 0$

النقطة المتحركة من اليسار		النقطة الثابتة	النقطة المتحركة من اليمين	
$(-0.1, \cos -0.1)$	$(-0.01, \cos -0.01)$	$(0, 1)$	$(0.01, \cos 0.01)$	$(0.1, \cos 0.1)$
$m = -0.05$	$m = 0.005$	0	$m = -0.005$	$m = -0.05$

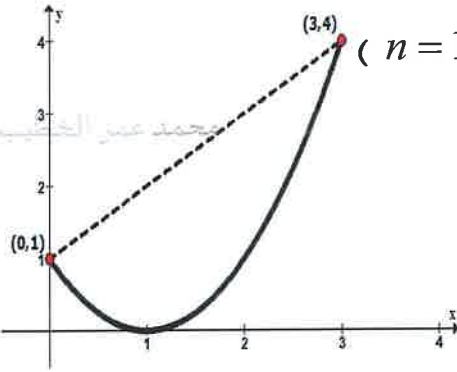
إذا ميل المنحني عند النقطة $(0,1)$ تقريباً يساوي $m = 0$

(3) قدر ميل منحنى الدالة $y = e^x$ عند $x = 0$

النقطة المتحركة من اليسار		النقطة الثابتة	النقطة المتحركة من اليمين	
$(-0.1, e^{-0.1})$	$(-0.01, e^{-0.01})$	$(0, 1)$	$(0.01, e^{0.01})$	$(0.1, e^{0.1})$
$m = 0.950$	$m = 0.995$	1	$m = 1.005$	$m = 1.05$

إذا ميل المنحني عند النقطة $(0,1)$ تقريباً يساوي $m = 1$

(1) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x) = (x-1)^2$ حيث $0 \leq x \leq 3$



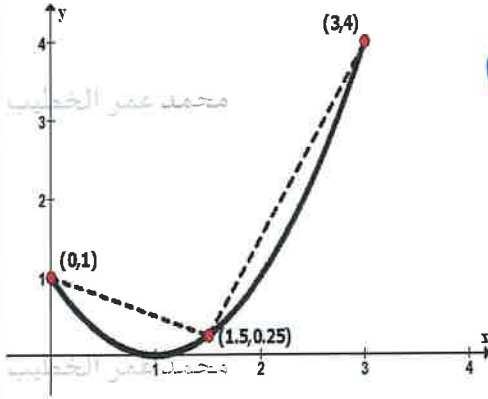
قدر طول منحنى الدالة $f(x)$ باستخدام قطعة مستقيمة واحدة ($n=1$)

المنقاط هي $(0,1)$ و $(3,4)$

$$d = \sqrt{(3-0)^2 + (4-1)^2} = 4.24$$

(2) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x) = (x-1)^2$ حيث $0 \leq x \leq 3$

قدر طول منحنى الدالة $f(x)$ باستخدام قطعتين مستقيمتين ($n=2$)



المنقاط هي $(0,1)$ و $(1.5, 0.25)$ و $(3,4)$

$$d_1 = \sqrt{(1.5-0)^2 + (0.25-1)^2} = 1.67$$

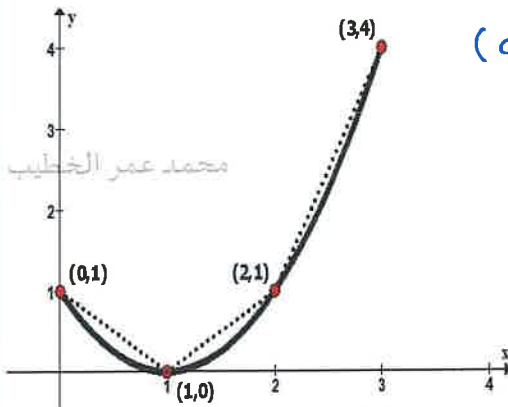
$$d_2 = \sqrt{(3-1.5)^2 + (4-0.25)^2} = 4.03$$

طول المنحنى $d = 1.67 + 4.03 = 5.7$

(3) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x) = (x-1)^2$ حيث $0 \leq x \leq 3$

قدر طول منحنى الدالة $f(x)$ باستخدام ثلاث قطع مستقيمة ($n=3$)

المنقاط هي



$(0,1)$ و $(1,0)$ و $(2,1)$ و $(3,4)$

$$d_1 = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41$$

$$d_2 = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} = 1.41$$

$$d_3 = \sqrt{(3-2)^2 + (4-1)^2} = 3.16$$

طول المنحنى $d = d_1 + d_2 + d_3 = 5.98 \approx 6$

(1) قدر طول منحنى الدالة $f(x) = x^2 + 1$ باستخدام قطعتين مستقيمتين ($n=2$) حيث $-2 \leq x \leq 2$

التجزئة (قيم x)
 $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-(-2)}{2} = 2 \Rightarrow P: -2, 0, 2$

النقاط
 $(-2, 5)$ و $(0, 1)$ و $(2, 5)$

$d_1 = \sqrt{(0-(-2))^2 + (1-5)^2} = \sqrt{20} = 4.47$

$d_2 = \sqrt{(2-0)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{20} = 4.47$

$d = d_1 + d_2 = \sqrt{20} + \sqrt{20} = 4\sqrt{5} \approx 8.9$

ملاحظة:

طول الفترة الجزئية

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

(2) قدر طول منحنى الدالة $f(x) = \cos x$ باستخدام قطعتين مستقيمتين ($n=2$) حيث $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

التجزئة (قيم x)
 $\Delta x = \frac{\frac{\pi}{2}-0}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow P: 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

النقاط هي
 $(0, 1)$ و $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ و $(\frac{\pi}{2}, 0)$

$d_1 = \sqrt{(\frac{\pi}{4}-0)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}-1)^2} = 0.84$

$d_2 = \sqrt{(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})^2 + (0-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 1.05$

$d = 0.84 + 1.05 = 1.89$

(3) قدر طول منحنى الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ باستخدام اربع قطع مستقيمة ($n=4$) حيث $1 \leq x \leq 2$

التجزئة (قيم x)
 $\Delta x = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow P: 1, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, 2$

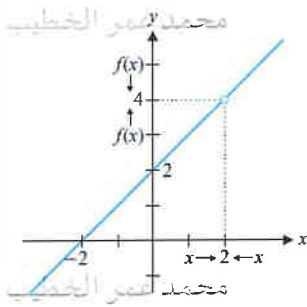
يمكن حل السؤال
 بطريقة الجدول

Left	Right	dist.
$(1, 1)$	$(\frac{5}{4}, \frac{4}{5})$	$\sqrt{(\frac{5}{4}-1)^2 + (\frac{4}{5}-1)^2} = 0.32$
$(\frac{5}{4}, \frac{4}{5})$	$(\frac{6}{4}, \frac{4}{6})$	$\sqrt{(\frac{6}{4}-\frac{5}{4})^2 + (\frac{4}{6}-\frac{4}{5})^2} = 0.28$
$(\frac{6}{4}, \frac{4}{6})$	$(\frac{7}{4}, \frac{4}{7})$	$\sqrt{(\frac{7}{4}-\frac{6}{4})^2 + (\frac{4}{7}-\frac{4}{6})^2} = 0.27$
$(\frac{7}{4}, \frac{4}{7})$	$(2, \frac{1}{2})$	$\sqrt{(2-\frac{7}{4})^2 + (\frac{1}{2}-\frac{4}{7})^2} = 0.26$

$d = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 1.13$

نهاية دالة عند نقطة

تعلمنا بالصفوف السابقة كيف نجد صورة أي عدد ضمن مجال الدالة بالتعويض المباشر، ولكن إذا أرادنا توقع صورة الدالة لعدد خارج مجال الدالة، فأننا سنقوم بدراسة هذه الدالة بجوار هذا العدد وليس عنده، والفكرة الرياضية التي تساعدنا في دراسة سلوك الدالة بجوار عدد معين تسمى النهاية ($\lim$).



فمثلاً إذا كانت الدالة: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ فإن الدالة غير معرفة عند $x = 2$

أي لا يوجد صورة للعدد 2 (نقطة خارج المجال) ولكن يمكن توقع من الرسم البياني للدالة أنه كلما :

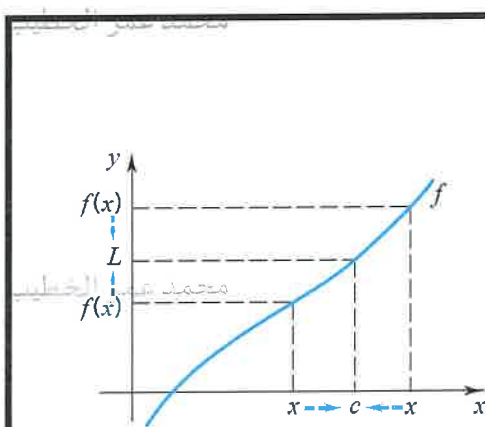
اقتربنا للعدد 2 من جهة اليسار أو من جهة اليمين فإن الدالة تقترب من العدد 4

فنقول أن نهاية الدالة $f(x)$ تقترب من العدد 4 عندما تقترب x من العدد 2

ونعبر عن ذلك باستخدام الرموز الرياضية

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

وبشكل عام



إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة هي L

عندما تقترب x من c من الجهتين

فإن نهاية الدالة $f(x)$ تقترب من L عندما تقترب x من c

ونكتب ذلك بالرموز

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

يمكن ايجاد نهاية دالة
عند نقطة

من الحل الجبري
جبرياً

من الرسم البياني
بيانياً

من الجدول
رقمياً

اولاً: نهاية دالة عند نقطة من الجدول

(1) اوجد: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ من خلال الجدول

x	3.9	3.99	3.999	4.0	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	7.9	7.99	7.999	8	8.001	8.01	8.1

يظهر الجدول السابق ان قيم $f(x)$ تقترب من العدد 8 عندما تقترب x من العدد 4 من الجهتين

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 8 \quad \text{اي ان}$$

(2) اذا كان: $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & , x > -3 \\ 2 - x & , x \leq -3 \end{cases}$ فاوجد $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ من خلال الجدول

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	5.1	5.01	5.001		-10.997	-10.97	-10.7

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -11$$

تكون النهاية موجودة اذا كانت النهاية من اليمين = النهاية من اليسار
اما اذا كانت النهاية من اليمين $\neq$ النهاية من اليسار فان النهاية غير موجودة

اي ان $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ غير موجودة لان النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار

(1) استخدم الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :

$$(1) f(0) = -2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$$

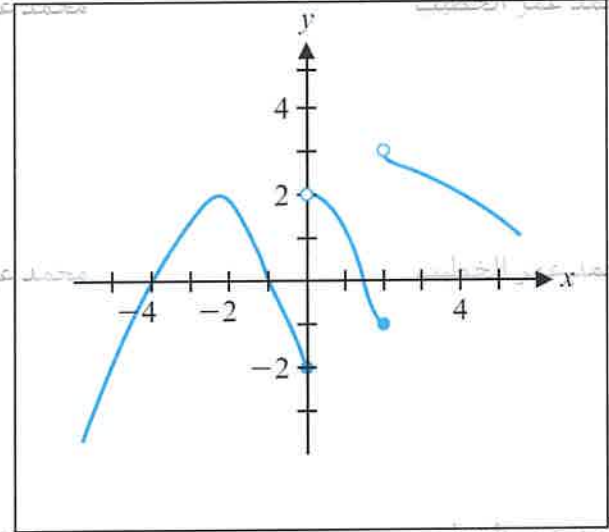
$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ غير موجود}$$

$$(5) f(2) = -1$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ غير موجود}$$



(2) استخدم الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :

$$(1) f(4) = 2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 2$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 2$$

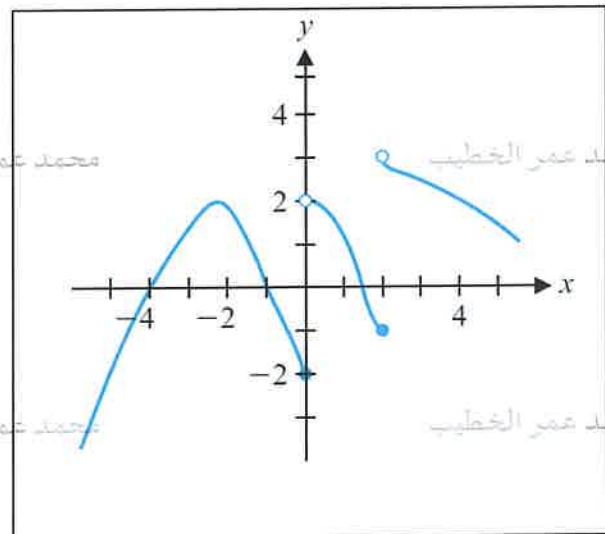
$$(4) \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2$$

$$(5) f(-1) = 0$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$



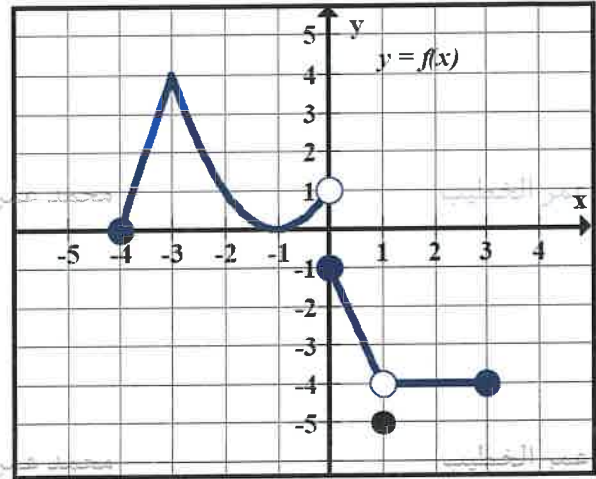
استخدم الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :

(1) $f(0) = -1$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ غير موجود

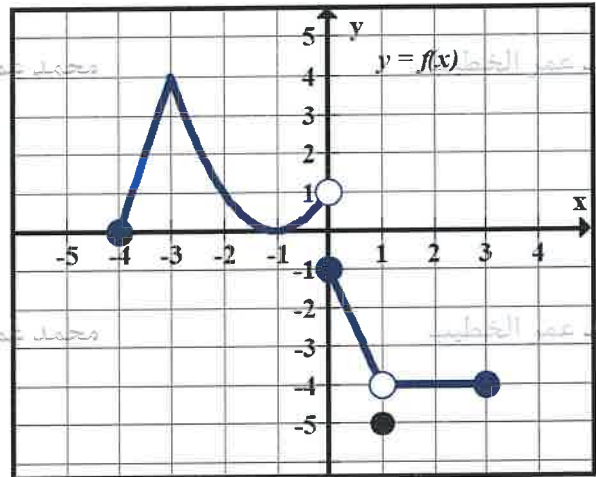


(5) $f(1) = -5$

(6) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -4$

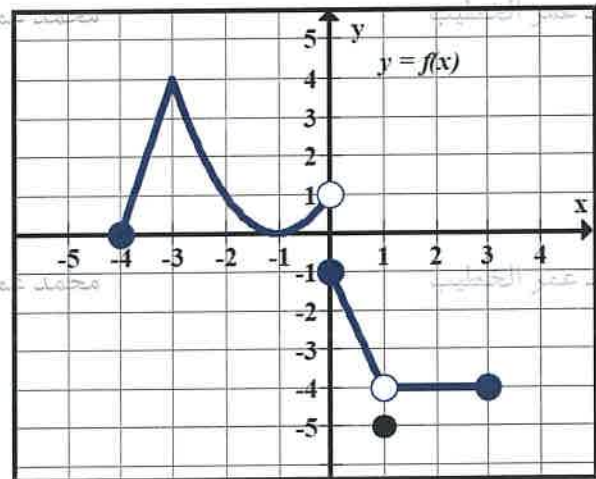
(7) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -4$

(8) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -4$



(9) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -4$

(10) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 4$



(1) استخدم الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :

(1) $f(0) = 4$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 4$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{2}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ غير موجودة

(5) $f(2)$ غير معرفه

(6) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{1}{2}$

(7) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{1}{2}$

(8) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{2}$

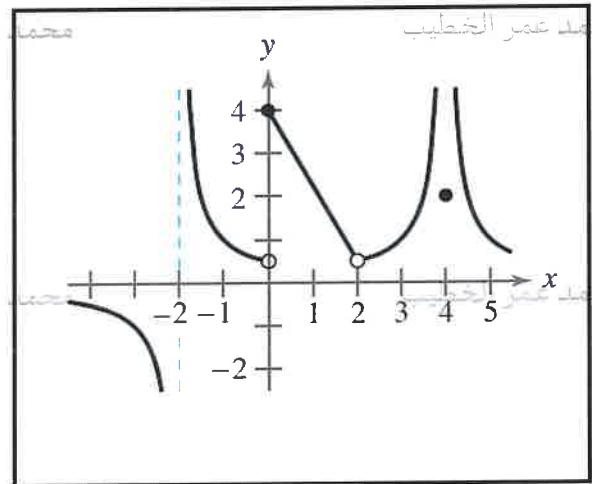
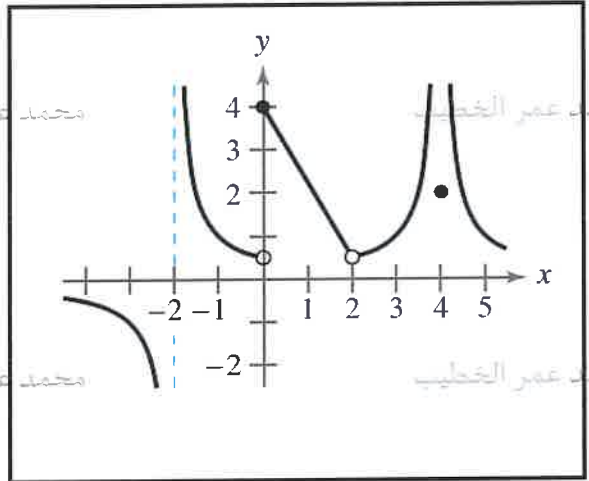
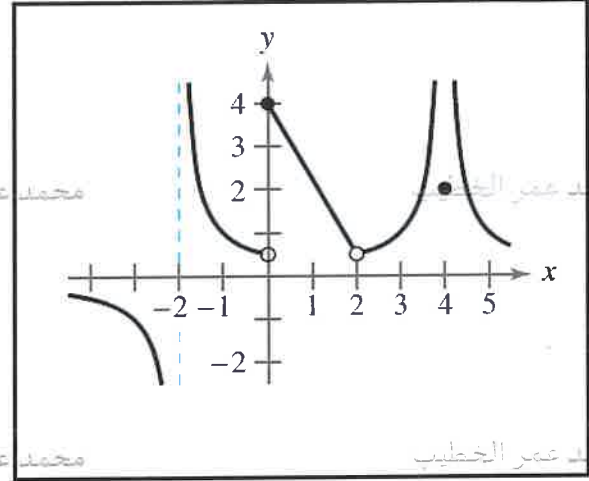
(9) $f(4) = 2$

(10) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \infty$

(11) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \infty$

(12) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \infty$

(13) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ غير موجودة



$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$

استخدم الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :

(1) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$

(2) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -4$

(3) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ م.ع

(4) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ م.ع

(5) $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = 0$

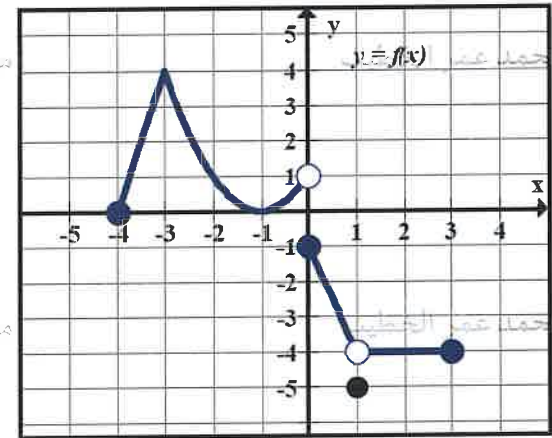
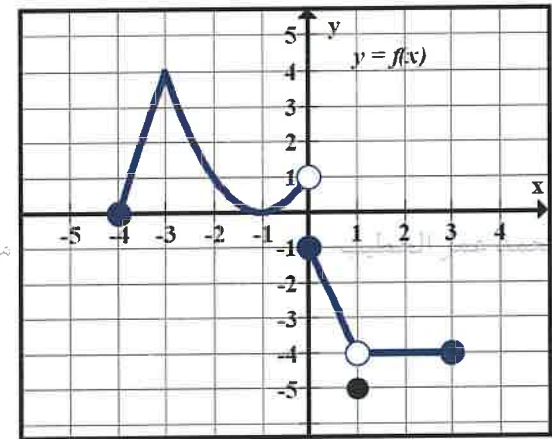
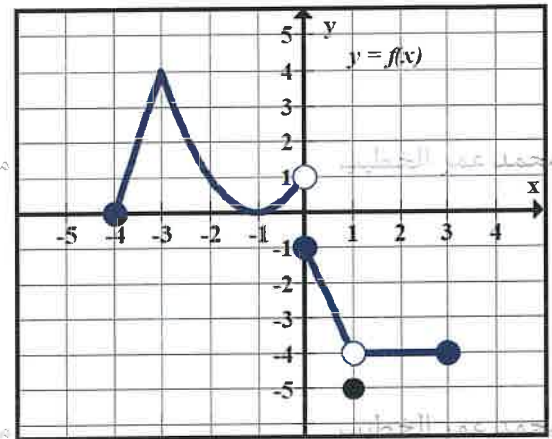
(6) $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x)$ م.ع

(7) $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ م.ع

(8) $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 1$

(9) $\lim_{x \rightarrow 1} |f(x)| = 4$

(10) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{f(x)} = 0$



(11) مجموعة قيم c التي تجعل $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ غير موجودة هي $-4, 0, 3$

(12) مجموعة قيم c التي تجعل $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ من جهة اليمين فقط موجودة هي -4

(13) مجموعة قيم c التي تجعل $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ من جهة اليسار فقط موجودة هي 3

استخدم الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :

(1) $f(0) = 2$

(2) $f(2) = 1$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ غ.م

(6) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ غ.م

(7) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3$

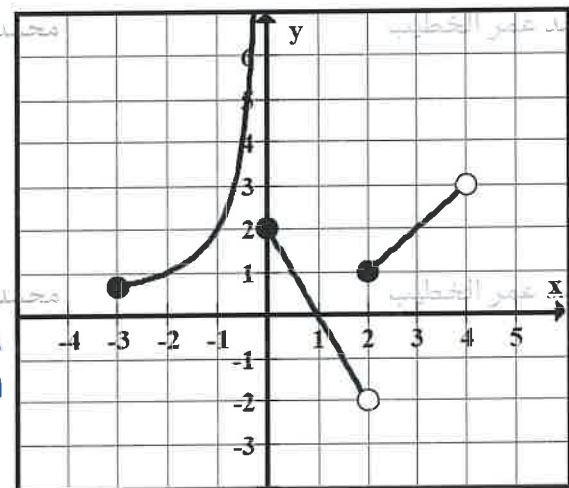
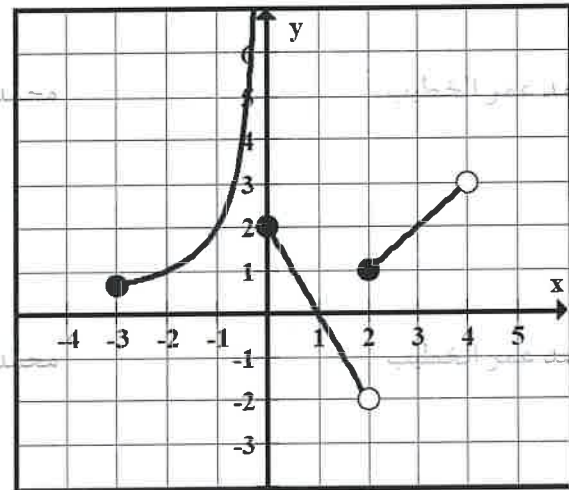
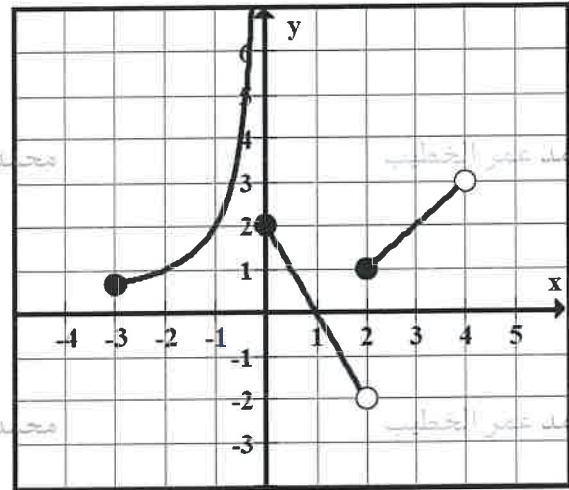
(8) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ غ.م

(9) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

(10) $\lim_{x \rightarrow 2} |f(x)|$ غ.م

(11) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{f(x)}$ غ.م

(12) $\lim_{x \rightarrow 0} f(|x|) = 2$



ملاحظة: يمكن استخدام خواص النهايات اذا كانت النهايات موحدة

اذا كانت a, c اعداد حقيقية

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

حيث $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ موجودتين

فان

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

محمد عمر الخطيب

(1) نهاية الدالة الثابتة

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

(2) نهاية الدالة المحايدة

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

(3) نهاية مجموع وطرح دالتين

$$\lim_{x \rightarrow a} c \times f(x) = c \times \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

(4) نهاية الضرب في ثابت

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

(5) نهاية ضرب دالتين

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

(6) نهاية قسمة دالتين

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n$$

محمد عمر الخطيب

(7) نهاية الدالة المركبة (احد اشكال تركيب دالتين)

محمد عمر الخطيب

ملاحظة: اذا كانت احدى النهايات غير موجودة نبحت عن طرق اخرى وذلك بايجاد قاعدة الدالة

محمد عمر الخطيب

الناتجة عن الجمع او الطرح او الضرب او القسمة او التركيب ثم نجد النهاية

او نستخدم خواص النهايات من كل جهة ثم نقارن بين الجهتين بشرط ان لا يكون نهاية احدى

الجهات ملانهاية اي انه يمكن استخدام خواص النهايات من جهة واحدة بشرط ان نكون كلاهما

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اعداد حقيقية

$$(1) \lim_{x \rightarrow 5} [4f(x) + 7] = 4 \lim_{x \rightarrow 5} f(x) + \lim_{x \rightarrow 5} 7$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= 4(-3) + 7 = 5$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 5} [f(x) \times g(x) - x] = (-3)(4) - 5 = -17$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(3) \lim_{x \rightarrow 5} [f^2(x) - \sqrt{g(x)}] = (-3)^2 - \sqrt{4} = 7$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(4) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) + 2x}{g(x) - 1} = \frac{-3 + 2(5)}{4 - 1} = 7/3.$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(5) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2f(x)g(x)}{f(x) + g(x)} = \frac{2(-3)(4)}{-3 + 4} = -24.$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

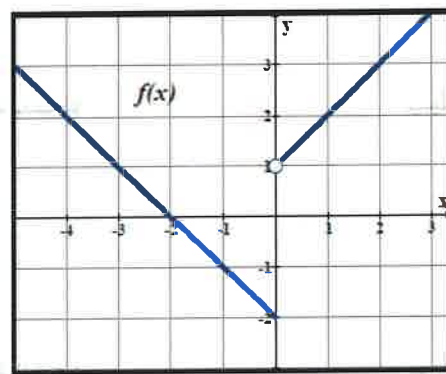
محمد عمر الخطيب

(1) إذا كانت $p(x) = x^2 - 1$ فاوجد

$$\begin{aligned} (a) \lim_{x \rightarrow 0} p(p(p(p(x)))) &= p(p(p(p(0)))) \\ &= p(p(p(-1))) \\ &= p(p(0)) = p(-1) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \lim_{x \rightarrow 0} p(3 + 2p(x - p(x))) &= p(3 + 2p(0 - p(0))) \\ &= p(3 + 2p(1)) = p(3 + 0) = 8 \end{aligned}$$

(2) استخدم الرسم البياني المجاور في الإجابة عن الأسئلة التالية :



يجوز توزيع النهاية

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2 + 1 = 3.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)]$$

لا يجوز توزيع النهاية لأن

نهاية الدالة f عند 0 غير موجودة.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$$

* نأخذ النهاية من كل جهة ونوثرها.

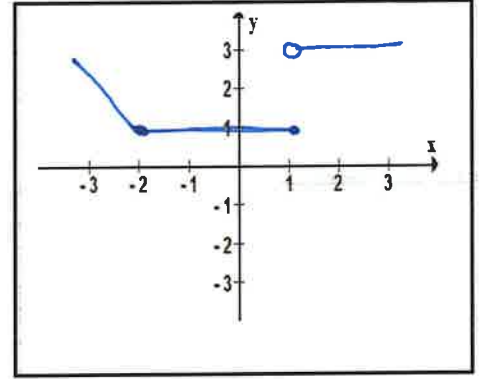
$$= -2 + -1 = -3.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \\ &= 1 + (-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] \text{ غير موجود.}$$

(1) $f(x) = 1, -2 \leq x \leq 1$

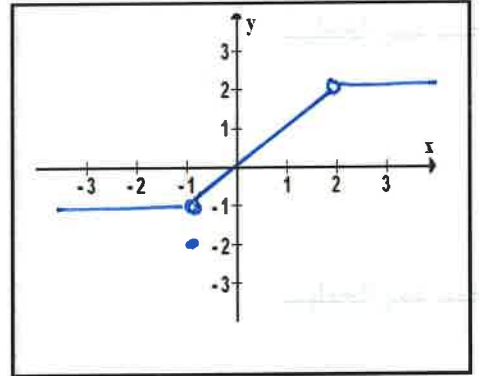
$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$$



(2) $f(x) = x, -1 < x < 2$

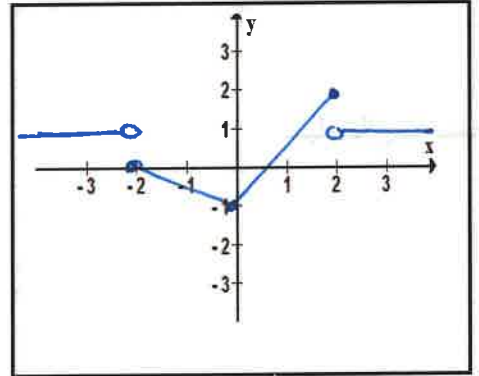
$$f(-1) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$$



(3) $f(2) = 2, f(0) = -1, f(-2) = 0$

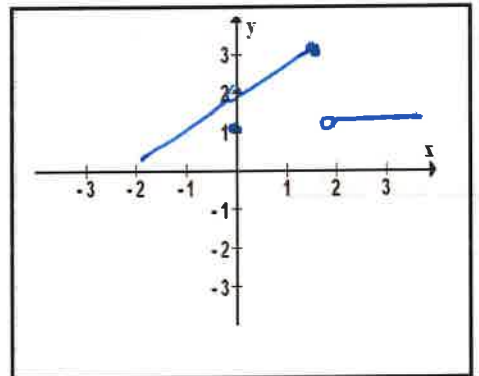
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ غير موجودة}$$



(4) $f(0) = 1, f(2) = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ غير موجودة}$$



///

ثالثاً: نهاية دالة عند نقطة جبرياً

اولاً: نهاية دالة عند نقطة من الجدول ثانياً: نهاية دالة عند نقطة بيانياً

طرق حساب النهايات جبرياً



(1) التعويض المباشر

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+3}{x-2} = \frac{2(-2)+3}{-2-2} = \frac{1}{4}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^3}{x+1} = \frac{1^3}{1} = 1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{9x^2-4} = \frac{2(2)-4}{9(2)^2-4} = 0$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-3x}{x^2+9} = \frac{(-3)^2-3(-3)}{(-3)^2+9} = \frac{18}{18} = 1$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2+5} = 3$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -5} \sqrt[3]{3x-12} = -3$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \sin x = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow -1} e^x = e^{-1} = 1/e$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) + x = \ln(1) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 3} \log_2(x+5) = \log_2 8 = 3$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 3} |2-3x| = |2-3(3)| = |-7| = 7$$

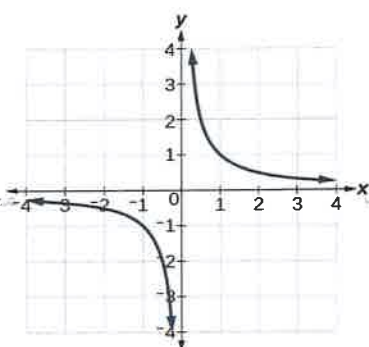
$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} \cos^{-1}(x^2) = \cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sin^{-1}(1/2) = \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

ملاحظة : يمكن الاستفادة من دراسة إشارة المقام قبل حساب النهاية في حالة :
البسط عدد لا يساوي صفر والمقام يساوي صفر

ملاحظة:

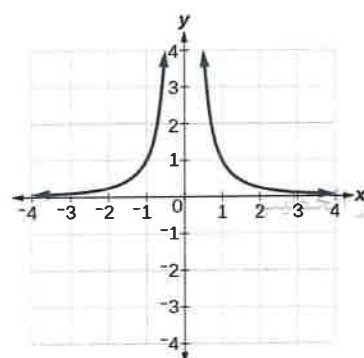
$$\left. \begin{array}{l} (1) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \\ (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ غير موجودة}$$



ملاحظة:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

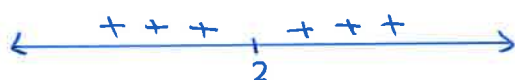
لا يمكن اعتبارها غير موجودة



أوجد قيمة كل من النهايات الآتية:
إشارة المقام $(x-2)^2$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(x-2)^2}$$

عدد موجب / صفر موجب

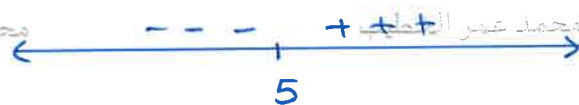


$$= \infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{-3}{2x-10}$$

عدد سالب / صفر موجب

إشارة المقام $2x-10$



$$= -\infty$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{-2}{x^2 - 2x - 8}$$

عدد
موجب



محمد عمر الخطيب

$$= -\infty$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(2) \lim_{x \rightarrow 9^-} \frac{x^2}{18 - 2x}$$

عدد
موجب

إشارة الجُزء



محمد عمر الخطيب

$$= \infty$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3}{x^3 - 1}$$

عدد
موجب

إشارة الجُزء



محمد عمر الخطيب

$$= -\infty$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 - 4}$$

عدد
موجب

إشارة الجُزء



محمد عمر الخطيب

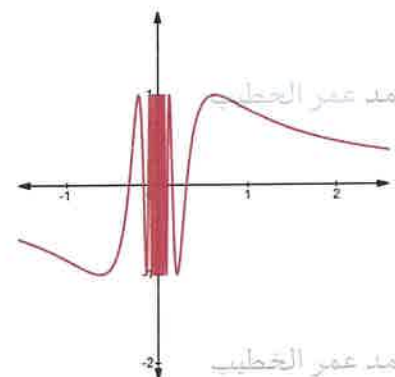
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

النهاية غير موجودة

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(2) التحليل إلى العوامل

طرق التحليل

1. العامل المشترك
2. الفرق بين مربعين
3. الحدود الثلاثية
4. الفرق بين مكعبين
5. مجموع مكعبين
6. التجميع
7. طرق أخرى

ملاحظة : يجب التعويض المباشر أولاً وفي حالة البسط والمقام كلاهما صفر نبحث عن طرق أخرى مثل التحليل إلى العوامل أو التبسيط أو المرافق ...

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 9x}{18 - 2x} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x(x-9)}{2(9-x)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{-x}{2} = -\frac{9}{2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2 - 4} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 9x}{3x - x^2} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x^2 - 9)}{x(3-x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{3-x} = \lim_{x \rightarrow 3} -(x+3) = -6$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x+3} = \frac{1}{6}$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6-x-x^2}{x^2-4} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x^2+x-6)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x+3)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{-5}{4}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{2x^2-3x-2} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(2x+1)}$$

$$= \frac{12}{5}$$

$$x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$$

$$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h-4)^2-16}{h}$$

$$= \lim_{u \rightarrow -4} \frac{u^2-16}{u+4}$$

$$= \lim_{u \rightarrow -4} \frac{(u-4)(u+4)}{u+4} = -8$$

تحل السؤال
بالتكرار من طريقة

مساعدة... افرض

$$u = h - 4$$

$$h \rightarrow 0$$

$$u \rightarrow -4$$

$$* h = u + 4$$

$$(4) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+2)^3-8}{h} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{u \rightarrow 2} \frac{u^3-8}{u-2}$$

تحل السؤال
بالتكرار من طريقة

مساعدة... افرض

$$u = h + 2$$

$$h \rightarrow 0$$

$$u \rightarrow 2$$

$$* h = u - 2$$

$$= \lim_{u \rightarrow 2} \frac{(u-2)(u^2+2u+4)}{u-2}$$

$$= 12$$

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

ملاحظة
 $x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{4}{3}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^2 - 2}{x - 1} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 2)(x^2 - 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 2)(x-1)(x+1)}{x-1} = 6$$

لتبسيط
 $x^4 + x^2 - 2$

افرض
 $u = x^2$

$$u^2 + u - 2$$

$$= (u + 2)(u - 1)$$

$$= (x^2 + 2)(x^2 - 1)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)^{10}}{(x^2 - 2x + 1)^5} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[(x-1)(x+1)]^{10}}{((x-1)^2)^5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^{10} (x+1)^{10}}{(x-1)^{10}} = (1+1)^{10} = 1024$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+3)}{x-1}$$

$$= 4$$

لتبسيط
 $x^3 - x^2 + 3x - 3$
 بالتجميع

$$= x^2(x-1) + 3(x-1)$$

$$= (x-1)(x^2+3)$$

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

مساعدة... افرض

$$u = \sqrt{x}$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^2-1}{u-1} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u-1)(u+1)}{(u-1)}$$

$$= 2.$$

$$u = \sqrt{x}$$

$$u^2 = x.$$

$$x = u^2$$

$$x \rightarrow 1$$

$$u \rightarrow 1.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - \sqrt{x} - 6}{\sqrt{x} - 3}$$

مساعدة... افرض

$$u = \sqrt{x}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 3} \frac{u^2 - u - 6}{u - 3} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{u \rightarrow 3} \frac{(u-3)(u+2)}{u-3}$$

$$= 5.$$

$$u = \sqrt{x}$$

$$u^2 = x$$

$$x = u^2$$

$$x \rightarrow 9.$$

$$u \rightarrow 3.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

مساعدة... افرض

$$u = \sqrt[3]{x}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^3-1}{u-1}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u-1)(u^2+u+1)}{u-1}$$

$$= 3.$$

$$u = \sqrt[3]{x}$$

$$u^3 = x.$$

$$x = u^3$$

$$x \rightarrow 1$$

$$u \rightarrow 1.$$

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{-2x+1}}{x^2 + x} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{-2x+1}}{x(x+1)} = \frac{e}{1} = e$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{e^x - 1} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (e^x)^2}{e^x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x)(1 + e^x)}{e^x - 1} = -(1 + e^0) = -2$$

تذكر ان

$$e^{2x} = (e^x)^2$$

$$u = e^x \text{ افرض}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^x - 2}{e^x - 1} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x)^2 + e^x - 2}{e^x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + 2)(e^x - 1)}{e^x - 1}$$

$$= e^0 + 2$$

$$= 3$$

افرض

$$u = e^x$$

تنبه

$$u^2 + u - 2$$

$$= (u + 2)(u - 1)$$

(1) إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 1)^{2n}}{(x^2 - 2x + 1)^n} = 81$ فاوجد قيمة الثابت n

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[(x-1)(x^2+x+1)]^{2n}}{[(x-1)^2]^n} = 81$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^{2n} (x^2+x+1)^{2n}}{(x-1)^{2n}} = 81$$

$$\frac{2n}{3} = 81$$

$$\frac{2n}{3} = 3^4$$

$$2n = 12$$

$$n = 6$$

(2) إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2} = 7$ فاوجد قيمة الثوابت a, b

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2} = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x - \frac{b}{2})}{x-2} = 7$$

$$2 - \frac{b}{2} = 7$$

$$-\frac{b}{2} = 5$$

$$b = -10$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + ax + b = 0$$

$$2^2 + a(2) - 10 = 0$$

$$2a = 6$$

$$a = 3$$

ملاحظة:

إذا كانت النهاية عند c موجودة

والمقام صفر

فان

(1) نهاية البسط عند c تساوي

صفر

(2) يجب ان يحتوي البسط والمقام

على عامل مشترك مثل $(x - c)$

(3) التبسيط (توحيد المقامات)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\frac{2-x}{2x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x-2} \right) \times \frac{2x}{2-x} = -4.$$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

تذكران

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = a \div \frac{b}{c} \\ = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{2}x-1}{x^2-4} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x/2}{2}}{(x/2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2(x+2)} = \frac{1}{8}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{2}(x/2)}{(x/2)(x+2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3} \right) \times \frac{x}{x^2-9}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{-1}{3x}}{\frac{x}{(x/3)(x+3)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{3(x+3)} = -\frac{1}{18}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} - \frac{4}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2) - 4}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x/2)(x+2)}$$

$$= \frac{1}{4}$$

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5}{2x-3} + 5}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5 + 5(2x-3)}{2x-3}}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5 + 10x - 15}{2x-3}}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{10x - 10}{2x-3}}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10(x-1)}{2x-3} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{10}{-1} = -10
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-2} - 1}{2x^{-2} + 1}$$

يجب تحويل الأسس

إلى صورة كسرية

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{\frac{2}{x^2} + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - x^2}{x^2}}{\frac{2 + x^2}{x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2}{2 + x^2} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

(1) في إحدى الدراسات على عيون القطط وجد إن قطر البؤبؤ $f(x)$ للقطط يتناسب عكسياً مع شدة الإضاءة x التي تسقط على عين القط وفق العلاقة:

$$f(x) = \frac{160x^{-0.04} + 90}{4x^{-0.04} + 15}$$

أوجد نهاية قطر البؤبؤ عندما تقترب شدة الإضاءة x من الصفر (تتعدم الرؤية).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{160x^{-0.04} + 90}{4x^{-0.04} + 15} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{160}{x^{0.04}} + 90}{\frac{4}{x^{0.04}} + 15} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{160 + 90x^{0.04}}{4 + 15x^{0.04}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{160 + 90x^{0.04}}{x^{0.04}}}{\frac{4 + 15x^{0.04}}{x^{0.04}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{160 + 90x^{0.04}}{4 + 15x^{0.04}} \\ &= \frac{160}{4} = 40. \end{aligned}$$

(2) أوجد قيمة الثوابت a, b حيث $a \neq 0$ التي تجعل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{x+a} - b}{x} = -1$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{x+a} - b}{x} = 0$$

نحتاج إلى البسط = صفر

$$\frac{a}{x+a} - b = 0 \Rightarrow 1 - b = 0 \Rightarrow b = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{x+a} - 1}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a - (x+a)}{x+a}}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a - x - a}{x+a}}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-x}{x+a}}{x} = -1$$

$$-\frac{1}{a} = -1$$

$$a = 1$$

(4) الدوال المتفرعة (الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة وتشمل دالة المطلق والصحيح)

$$\frac{x^2+2 \text{ (5) } 2x+3}{1} \quad f(x) = \begin{cases} x^2+2 & , x < 1 \\ 2x+3 & , x \geq 1 \end{cases} \quad (1) \text{ اذا كانت :}$$

(a) $f(1) = 5$ فاوجد :

(b) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} 2x+3 = 9$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ع.م $\left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2+2 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x+3 = 5 \end{array} \right.$

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos x + 1 & , x < 0 \\ e^x - 4 & , x > 0 \end{cases} \quad (2) \text{ اذا كانت :}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ع.م $\frac{2\cos x + 1 \text{ (8) } e^x - 4}{3 \quad 0 \quad -3}$ فاوجد

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & , x \neq 2 \\ 5 & , x = 2 \end{cases} \quad (3) \text{ اذا كانت :}$$

$\frac{x^2-4}{x-2} \text{ (5) } \frac{x^2-4}{x-2}$ فاوجد :

(a) $f(2) = 5$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

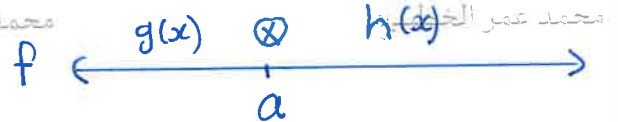
$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x < a \\ h(x) & x > a \end{cases} \quad \text{كثيرات حدود وكانت } h(x), g(x) \text{ اذا كانت}$$

أوجد

$$(i) \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = g(x)$$

محمد عمر الخطيب



$$(ii) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = h(x)$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \cos x & , x \geq 0 \\ e^x - 1 & , x < 0 \end{cases} \quad g(x) = x^2 - x \quad (2) \text{ اذا كانت:}$$



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$h(x) = f(x) \times g(x)$$

وكان

(أ) اشرح هل يمكن تطبيق نهاية حاصل ضرب دالتين في إيجاد قيمة $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب لا يمكن لان $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ غير موجود

(ب) ابحث عن طريقة تحليلية لإيجاد قيمة هذه النهاية

لنستخدم خواص النهايات وتوزيع النهايات من جهة واحدة.

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0 \times 0 = 0$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1 \cdot 0 = 0$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$$

محمد عمر الخطيب

$$f(x) = \begin{cases} \log x + 4 & , x \geq 1 \\ 5x - 1 & , x < 1 \end{cases}$$

محمد عمر الخطيب

$$g(x) = \frac{x-1}{1-x}$$

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كانت:

فاوجد

$$f \leftarrow \begin{array}{c} 5x-1 \quad \swarrow \quad \searrow \quad \log x + 4 \\ \leftarrow 4 \quad 1 \quad 4 \rightarrow \end{array}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4 + (-1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1-x} = -1$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & , x \geq 1 \\ 4 - 2x & , x < 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -3x & , x \geq 1 \\ 2x^2 - 3x & , x < 1 \end{cases}$$

(2) اذا كانت:

$$f \leftarrow \begin{array}{c} 4-2x \quad \swarrow \quad \searrow \quad x^2+3 \\ \leftarrow 2 \quad 1 \quad 4 \rightarrow \end{array}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

وكان

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$$

(أ) اشرح هل يمكن تطبيق نهاية حاصل جمع دالتين في إيجاد قيمة

$$g \leftarrow \begin{array}{c} 2x^2-3x \quad \swarrow \quad \searrow \quad -3x \\ \leftarrow -1 \quad 1 \quad -3 \rightarrow \end{array}$$

محمد عمر الخطيب

لا يمكن لان النهايات غير موجودة

(ب) ابحث عن طريقة تحليلية لإيجاد قيمة هذه النهاية

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

لا توجد النهاية من كل جهة

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$$

$$= 2 + (-1) = 1$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 4 + (-3) = 1$$

محمد عمر الخطيب

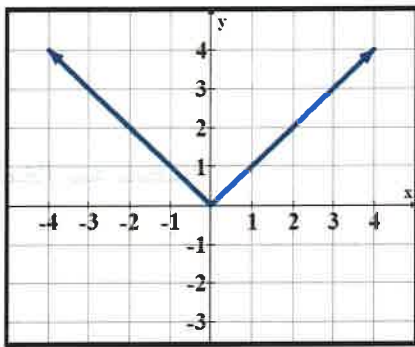
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

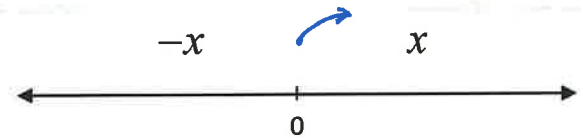
$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 1$$

دالة المطلق

دالة المطلق : $y = |x|$



$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} |5| &= 5 \\ |-5| &= 5 \end{aligned}$$



أوجد قيمة كل من النهايات الآتية:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + |x| - 2}{x^2 + 1} = \frac{-1 + 1 - 2}{1 + 1} = \frac{-2}{2} = -1.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{5 - |x - 4|}{|10 - x| - 1} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$|x - 4| \quad \frac{4 - x}{4} \quad \frac{x - 4}{4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{5 - |x - 4|}{|x - 10| - 1}$$

$$|x - 10| \quad \frac{10 - x}{10} \quad \frac{x - 10}{10}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{5 - (x - 4)}{10 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{9 - x}{9 - x} = 1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x|1 - x| - 6}{x^2 - 3x} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

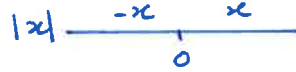
$$|x - 1| \quad \frac{1 - x}{1} \quad \frac{x - 1}{1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x|x - 1| - 6}{x^2 - 3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x - 1) - 6}{x^2 - 3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 2)}{x(x - 3)} = \frac{5}{3}.$$

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = \infty$



ملاحظة:

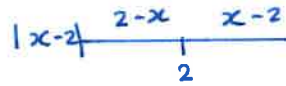
إذا كان ناتج التعويض

ما بداخل المطلق هو صفر

فمن الأفضل

أخذ النهاية من اليمين واليسار

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2} \left(\frac{0}{0} \right)$

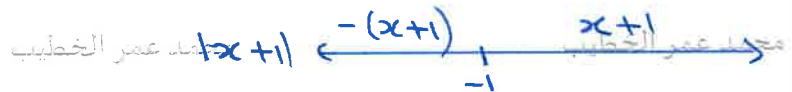


$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{x-2} = -1$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}$ م.ع

(3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+1|}{x^2-1} \left(\frac{0}{0} \right)$

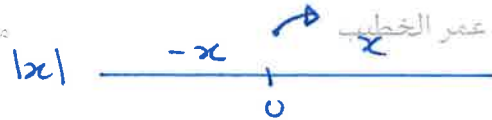


$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x+1|}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-(x+1)}{(x-1)(x+1)} = 1/2$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x+1|}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = -1/2$

$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+1|}{x^2-1}$ م.ع

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{|x|} \right)$



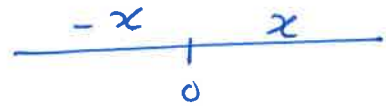
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x} \right) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4}{x} = -\infty$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{|x|} \right)$ م.ع

(1) اوجد قيمة كل من النهايات الآتية:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+|x|}{x} - \frac{1-x}{|x|} \right)$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1+|x|}{x} - \frac{1-x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1+x}{x} - \frac{1-x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x}{x} \right) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1+|x|}{x} - \frac{1-x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1-x}{x} - \frac{1-x}{-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1-x}{x} + \frac{1-x}{x} \right)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+|x|}{x} - \frac{1-x}{|x|} \right) \text{ م.ع} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1-x)}{x} = -\infty$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-|x|}{|3x|-2x}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x-|x|}{|3x|-2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x-x}{3x-2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x-|x|}{|3x|-2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x-(-x)}{-3x-2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x}{-5x} = -3/5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-|x|}{|3x|-2x} \text{ م.ع}$$

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{x^2 - b^2}{x - b} = \lim_{x \rightarrow 2} (|x| + 8)$$

(2) اوجد قيمة b اذا كانت

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{(x-b)(x+b)}{x-b} = 2+8$$

$$b+b = 10$$

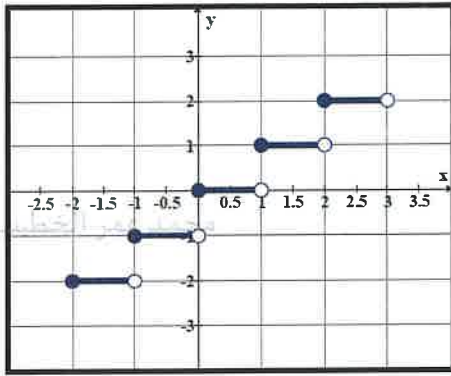
$$2b = 10$$

$$b = 5$$

دالة الصحيح

محمد عمر الخطيب

دالة الصحيح : $y = [x]$



$$[5] = 5$$

$$[5.7] = 5$$

$$[-5.99] = -6$$

$$(i) [x+n] = [x] + n$$

ملاحظة: إذا كانت n عدد صحيح فان

$$(ii) x-1 \leq [x] \leq x$$

صحيح فان

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

محمد عمر الخطيب

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2.9} [x] = [2.9] = 2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} [3x+1] = [3(\frac{1}{2})+1] = [2.5] = 2$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} [x] = 1$$

محمد عمر الخطيب

$$(4) \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x|}{[x]} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x|}{-3} = \frac{2}{-3} = -2/3$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 2} [5-x] = 3$$

محمد عمر الخطيب

$$(6) \lim_{x \rightarrow 2^-} 3[x] - |x| = 3(1) - 2 = 1$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 2^-} |x-2| + [x] + x = 0 + 1 + 2 = 3$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0^-} ([x] + 5)^{[x]} = (-1 + 5)^{-1} = 1/4$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x[x]}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(-1)}{x(x+1)} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x]}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{0}{x-1} = 0$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{|x-2| + [x-2]} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{1 + (-1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

ملاحظة: نهاية دالة الصحيح $[x]$
(الدالة الاساسية فقط)

(1) إذا كانت n عدد صحيح فان

$$\lim_{x \rightarrow n} [x] \text{ غير موجودة}$$

لان

$$\lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n-1, \lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n$$

اي انه اذا كان ناتج التعويض ما بداخل الصحيح هو عدد صحيح فان النهاية غير موجودة ويمكن التأكد باخذ النهاية من الجهتين

(2) إذا كانت a عدد غير صحيح

(كسر) فان

$$\lim_{x \rightarrow a} [x] = [a]$$

اي انه اذا كان ناتج التعويض ما بداخل الصحيح هو كسر فان النهاية موجودة ويكفي التعويض لايجاد النهاية

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} [x]$

م.ع

★ ما بدافض

الصحيح

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} [x] \text{ م.ع}$$

الصحيح

(2) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} [3x+1]$

م.ع

ما بدافض

الصحيح

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} [3x+1] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} [3x+1] = 2$$

الصحيح

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} (x - [x])$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - [x]) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - [x]) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (x - [x]) \text{ م.ع}$$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} x[x+2]$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x[x+2] = \lim_{x \rightarrow 0^-} x(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x[x+2] = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(2) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x[x+2] = 0$$

(5) $\lim_{x \rightarrow 1} (x+2)^{[x]}$

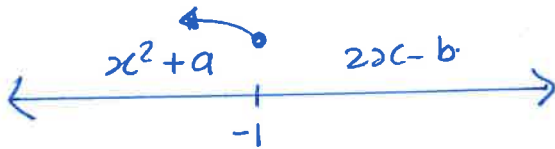
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x+2)^{[x]} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+2)^0 = 3^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x+2)^{[x]} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+2)^1 = 3^1 = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (x+2)^{[x]} \text{ م.ع}$$

م.ع

ايجاد الثوابت من خلال وجود نهاية دالة عند نقطة



$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & , x \leq -1 \\ 2x - b & , x > -1 \end{cases} \quad (1) \text{ إذا كانت:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$$

$$(-1)^2 + a = 2$$

$$a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2$$

$$2(-1) - b = 2$$

$$-b = 4 \Rightarrow b = -4$$

وكانت $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$ فاوجد كل من الثابتين a, b

$$f(x) = \begin{cases} \log_2 x & 0 < x \leq 8 \\ 3^{ax} & x > 8 \end{cases} \quad (2) \text{ إذا كانت:}$$

موجودة $\lim_{x \rightarrow 8} f(x)$ حيث a فاوجد قيمة a

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x)$$

$$\log_2 8 = 3^{a(8)}$$

$$3 = 3^{8a}$$

$$8a = 1 \Rightarrow a = 1/8$$



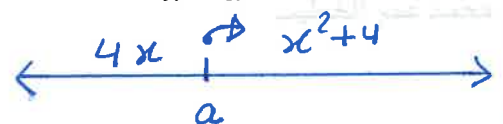
$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & x \geq a \\ 4x & x < a \end{cases} \quad (3) \text{ إذا كانت:}$$

موجودة $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ حيث a فاوجد قيم a

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$$

$$4a = a^2 + 4$$

$$a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow a = 2$$



$$f(x) = \begin{cases} 2ax - 5 & x < 2 \\ \frac{x-3}{|x-3|} & x > 2 \end{cases} \quad (4) \text{ لتكن:}$$

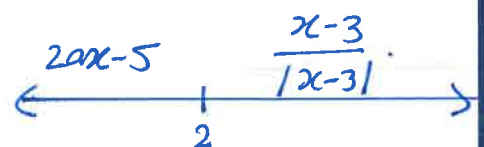
موجودة $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$2a(2) - 5 = \frac{2-3}{|2-3|}$$

$$4a - 5 = -1$$

$$4a = 4 \Rightarrow a = 1$$



(5) الجذر والمرافق

ملاحظة : اذا كان ناتج ما بداخل الجذر التربيعي (دليل الجذر عدد زوجي) صفر عند التعويض يفضل دراسة اشارة ما تحت الجذر قبل حساب النهاية وغير ذلك فانه يكفي التعويض المباشر

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

الأس, x $\frac{- -}{0} \frac{+ +}{+}$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x} \text{ م.ع.}$$

ما تحت الجذر سالب

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \text{ م.ع.}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{1-x^2} = \sqrt[3]{1-3^2} = -2$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 5^+} \sqrt{25-x^2} \text{ م.ع.}$$

الأس, $25-x^2$ $\frac{- -}{-5} \frac{+ +}{5} \frac{- -}{+}$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x - [x]} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x-0} = \sqrt{1} = 1$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{[x] - x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{1-x} \text{ م.ع.}$$

الأس, $1-x$ $\frac{+ +}{1} \frac{- -}{+}$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{(x-5)^2}}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x-5|}{x-5} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|x-5|}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{-(x-5)}{x-5} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{|x-5|}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x-5}{x-5} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{(x-5)^2}}{x-5} \text{ م.ع.}$$

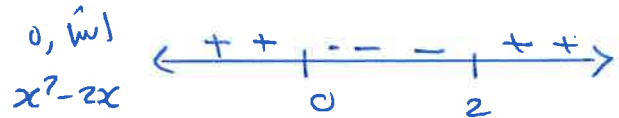
ملاحظة

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$(\sqrt{x})^2 = x$$

أوجد قيمة كل من النهايات :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x^2 - 2x} = 0$$

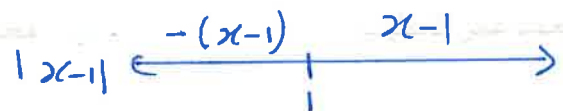


$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 - 2x} \quad \text{م. ع}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x^2 - 2x} \quad \text{م. ع}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2}}$$



$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{-(x-1)} = -1$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2}} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{x^2(x^2 + 1)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{x^2} \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x| \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 1}} = -1$$

ملاحظة: مرافق المقدار الجبري $\sqrt{x} - \sqrt{a}$ هو $\sqrt{x} + \sqrt{a}$ ويكون حاصل ضربهم هو $x - a$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \left(\frac{0}{0} \right) \times \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$ مرافق لبط

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{2}$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} \left(\frac{0}{0} \right) \times \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1-4}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-3}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} = \frac{3}{4}$$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3-\sqrt{x+9}} \times \frac{3+\sqrt{x+9}}{3+\sqrt{x+9}}$ مرافق لقام

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3+\sqrt{x+9})}{9-(x+9)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3+\sqrt{x+9})}{-x} = -6$$

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(\sqrt{x} + 1)}{x-1}$$
$$= 2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1} \times \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1 - 2}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{2x-1} - 1} \times \frac{\sqrt{2x-1} + 1}{\sqrt{2x-1} + 1}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x - 2)(\sqrt{2x-1} + 1)}{2x - 1 - 1}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{2x-1} + 1)}{2x - 2}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{2x-1} + 1)}{2(x-1)}$$
$$= \frac{(3)(2)}{2} = 3$$

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}}{x} \times \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{x+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x - (x+1)}{x (\sqrt{1-x} + \sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x (\sqrt{1-x} + \sqrt{x+1})} = \frac{-2}{1+1} = -1.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3} \times \frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{x^2+5-9}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x+2)(x-2)} = \frac{6}{-4} = -3/2.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x\sqrt{x}-27}{x-9} \times \frac{x\sqrt{x}+27}{x\sqrt{x}+27}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^3 - 729}{(x-9)(x\sqrt{x}+27)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(x^2+27x+27^2)}{(x-9)(x\sqrt{x}+27)}$$

$$= \frac{9}{2}$$

$$\begin{aligned} x\sqrt{x} \cdot x\sqrt{x} \\ &= x^2 \cdot x \\ &= x^3 \end{aligned}$$

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}{1 - x} \times \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} + 1}{\frac{1}{\sqrt{x}} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}{(1 - x)(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{x}^{\cancel{x}}}{(1 - \cancel{x})(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1)} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{4}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} - \frac{4}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + 2}{x - 4} - \frac{4}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{10-x}-3} \times \frac{\sqrt{5-x}+2}{\sqrt{5-x}+2} \times \frac{\sqrt{10-x}+3}{\sqrt{10-x}+3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5-x-4)(\sqrt{10-x}+3)}{(10-x-9)(\sqrt{5-x}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(\sqrt{10-x}+3)}{(1-x)(\sqrt{5-x}+2)}$$

$$= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u-1}{\frac{1}{2}(u^3-1)}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u-1}{\frac{1}{2}(u-1)(u^2+u+1)}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}$$

مرافق الجذر التكعيبي للمقدار $\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{a}$ هو
 $(\sqrt[3]{x})^2 \mp \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{a})^2$
 ويكون حاصل ضربهم $x \pm a$

يمكن الحل بالضرب في مرافق الجذر التكعيبي

او بالتعويض $u = \sqrt[3]{1+2x}$

$$u = \sqrt[3]{1+2x}$$

$$u^3 = 1+2x$$

$$1+2x = u^3$$

$$2x = u^3 - 1$$

$$x = \frac{1}{2}(u^3 - 1)$$

$$x \rightarrow 0$$

$$u \rightarrow 1$$

(1) لتكن: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-a}-3}{x-1}$ موجودة فاوجد قيمة الثابت a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-a} - 3 = 0$$

نبدأ بـ 0 = 3

$$\sqrt{1-a} - 3 = 0$$

$$\sqrt{1-a} = 3$$

$$1-a = 9 \Rightarrow a = -8$$

(2) لتكن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+1} - \sqrt{2x+1}}{x} = 4$ فاوجد قيمة الثابت a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+1} - \sqrt{2x+1}}{x} \times \frac{\sqrt{ax+1} + \sqrt{2x+1}}{\sqrt{ax+1} + \sqrt{2x+1}} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax+1 - (2x+1)}{x(\sqrt{ax+1} + \sqrt{2x+1})} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(a-2)}{x(\sqrt{ax+1} + \sqrt{2x+1})} = 4$$

$$\begin{aligned} \frac{a-2}{2} &= 4 \\ a-2 &= 8 \\ a &= 10 \end{aligned}$$

(3) لتكن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1$ فاوجد قيمة الثوابت a, b

(1) نبدأ بـ 0 = 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{ax+b} - 2 = 0$$

$$\sqrt{b} - 2 = 0$$

$$\sqrt{b} = 2$$

$$b = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} \times \frac{\sqrt{ax+b}+2}{\sqrt{ax+b}+2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax+b-4}{x(\sqrt{ax+b}+2)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax+4-4}{x(\sqrt{ax+4}+2)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{x(\sqrt{ax+4}+2)} = 1$$

$$\frac{a}{4} = 1 \Rightarrow a = 4$$

(6) الدوال المثلثية (الدائرية)

النسب المثلثية والمتطابقات المهمة

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

المتطابقات

النسبية

متطابقات

المقلوب

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \tan^2 x + 1 = \sec^2 x, \cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

متطابقات

فيثاغورس

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \sec x = \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \csc x = \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

متطابقات

الزوايا المتتامه

$$\sin(-x) = -\sin x, \tan(-x) = -\tan x, \cos(-x) = \cos x$$

$$\csc(-x) = -\csc x, \cot(-x) = -\cot x, \sec(-x) = \sec x$$

متطابقات الدوال

الزوجية والفردية

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x, \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

متطابقات

ضعف

الزاوية

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

متطابقات

المجموع والفرق

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}, \tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\csc^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\cot^{-1}(x) = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ \pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) & x < 0 \end{cases}$$

متطابقات

الدوال المثلثية العكسية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{bx} = \frac{\sin(ax)}{\tan bx} = \frac{\tan(ax)}{\sin bx} = \frac{a}{b} \quad b \neq 0$$

$$x \approx \sin x \approx \tan x \approx \sin^{-1} x \approx \tan^{-1} x$$

اي ان عندما تقترب x من الصفر فان

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (\sin x + \cos x) = \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (x \tan x) = \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} = \frac{0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{2x \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{2x} \cdot \frac{1}{\cos 3x} = \frac{6}{2} \cdot \frac{1}{1} = 3$$

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{5x} = \frac{1}{5}$$

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{3x}}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan 2x} \cdot e^{3x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$(9) \quad \lim_{x \rightarrow 0} 3x \cot 2x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\tan 2x} = \frac{3}{2}$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{x[x]} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{x(-1)} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin|x|}{x} - 2[x-2] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-x)}{x} - 2(-3)$$

$$= -1 + 6 = 5$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 4x} = \frac{3}{4}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (\tan 2x \csc \pi x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin \pi x} = \frac{2}{\pi}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0^-} [x](x \cot 2x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) \frac{x}{\tan 2x}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \left(\cot x - \frac{3}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{3}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \cos x - \frac{3 \sin x}{x}$$

$$= 1 - 3 = -2$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 5x}{\sin^2 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x} \cdot \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{9}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x \tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \cdot \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$$

$$= 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 3x}{3x|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{\sin 3x}{|x|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{\sin 3x}{-x} = \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{-1} = -3$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \csc^2 5x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 5x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 5x} \cdot \frac{x}{\sin 5x}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 \csc 3x \cot 2x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\sin 3x} \cdot \frac{1}{\tan 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{x}{\tan 2x} = \frac{3}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} = (-1)(1) = -1$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x^2 + x) \csc 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x^2 + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{1}{x+1} = (1)(1) = 2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x + \tan 3x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{x} + \frac{\tan 3x}{x}$$

$$= 2(0) + 3 = 3$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \tan x}{4x - \sin x}$$

بقسمة كل حد من

الحدود على x

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{2+1}{4-1} = 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x \sin^2 8x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{x \sin^2 8x}{x^3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{\sin 8x}{x} \cdot \frac{\sin 8x}{x}}$$

$$= \sqrt[3]{8 \times 8} = 4$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{x} \quad \begin{matrix} |\sin x| \\ \text{مثل } |x| \end{matrix}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \sqrt{1+x}} \times \frac{1 + \sqrt{1+x}}{1 + \sqrt{1+x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 + \sqrt{1+x})}{1 - (1+x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 + \sqrt{1+x})}{-x} = (-1)(2) = -2$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin x (1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \sin x (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = (1) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin |x|}{x}$$

$$|x| \frac{-x}{0} \quad \begin{matrix} x \\ 0 \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-x)}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin |x|}{x} \text{ غ.م}$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{2x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{2(x-1)} = \frac{1}{2}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب
يمكن حل السؤال بالفرض $u = x-1$

ملاحظة

إذا كان $f(0) = 0$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\tan(f(x))}{f(x)} = 1$$

أو ممكن استخدام الفرض

$$u = f(x)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} \cdot \frac{1}{x+2} = (1) \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \frac{\sin x}{x} = 0(1) = 0$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

ليس مراضة

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{3x} \times \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot \frac{x}{3} = (1) \cdot \left(\frac{0}{3} \right) = 0$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{2x} \times \frac{\tan x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{2x} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2-4)}{x^2+x-6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2-4)}{(x-2)(x+3)} \times \frac{x+2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{x+3} = \frac{1}{5}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(7) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{x - \frac{\pi}{2}} = -1$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

يمكنه يفرض

$$u = x - \frac{\pi}{2}$$

(1) إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x+1|-2}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin kx}$ فاوجد قيمة k

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x+1|-2}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin kx}$$

$$|x+1| = \frac{-(x+1)}{-1} = \frac{x+1}{-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-2}{x^2-x} = \frac{5}{k}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x(x-1)} = \frac{5}{k}$$

$$1 = 5/k \Rightarrow k = 5$$

(2) إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} a[x]$ فاوجد قيمة a

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} a[x]$$

$$|\sin x| = \frac{-\sin x}{0} = \frac{\sin x}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x} = a(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x} = 2a$$

$$-1 = 2a \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

(3) إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow k} 4^x$ فاوجد قيمة k

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x - 1}{x} = 4^k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - 1}{x} = 4^k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin 2x - 1}{x} = 4^k$$

$$2 = 4^k$$

$$\ln 2 = \ln 4^k$$

$$\ln 2 = k \ln 4 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{\ln 4} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

إذا كان $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ لكل $x \neq c$ في فترة حول c

وكان $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = l$

فإن $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية باستخدام نظرية الشطيرة:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x}$

نعلم ان $-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$

بالضرب في x^2 $-x^2 \leq x \cos \frac{1}{x} \leq x^2$

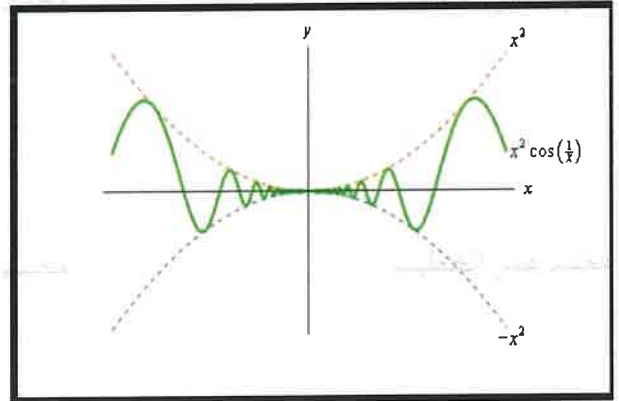
نأخذ نهاية x كدالة واحد الاخرى .

$\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0$

من نظرية
الشطيرة .



(2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sin^2 \frac{1}{x}$

$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$

★ $0 \leq \sin^2 \frac{1}{x} \leq 1$

$0 \leq \sqrt{x} \sin^2 \frac{1}{x} \leq \sqrt{x}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sin^2 \frac{1}{x} = 0$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2 x + x^2 \sin \frac{1}{x})$$

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

$$\cos^2 x - x^2 \leq \cos^2 x + x^2 \sin \frac{1}{x} \leq \cos^2 x + x^2 \sin \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x - x^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x + x^2 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x + x^2 \sin \frac{1}{x} = 1$$

من نظرية الشطيرة

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (e^{x^2 \sin \frac{1}{x}})$$

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

$$e^{-x^2} \leq e^{x^2 \sin \frac{1}{x}} \leq e^{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2 \sin \frac{1}{x}} = 1$$

من نظرية الشطيرة

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x^2 + 1}$$

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2 + 1} < 1$$

$$\text{عندما } x > 0 \text{ : نظرب في } 2x$$

$$0 \leq \frac{2x^3}{x^2 + 1} < 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3}{x^2 + 1} = 0$$

$$\text{عندما } x < 0 \text{ : نظرب في } 2x$$

$$0 > \frac{2x^3}{x^2 + 1} > 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^3}{x^2 + 1} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x^2 + 1} = 0$$

محمد عمر الخطيب
(1) إذا كانت: $|g(x)| \leq M$ حيث M عدد حقيقي موجب فبين ان: $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 g(x) = 0$ محمد عمر الخطيب

$$|g(x)| \leq M$$

$$-M \leq g(x) \leq M$$

محمد عمر الخطيب
 $-Mx^2 \leq x^2 g(x) \leq Mx^2$ محمد عمر الخطيب
 $\lim_{x \rightarrow 0} -Mx^2 = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0} Mx^2 = 0$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x^2 g(x) = 0$ منظرية

(2) اوجد $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ حيث $|g(x) + 4| \leq 2(3 - x)^4$ باستخدام نظرية الشطيرة

$$-2(3-x)^4 \leq g(x) + 4 \leq 2(3-x)^4$$

$$-2(3-x)^4 - 4 \leq g(x) \leq 2(3-x)^4 - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} -2(3-x)^4 - 4 = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} 2(3-x)^4 - 4 = -4$$

منظرية الشطيرة

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -4$$

(3) اوجد $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ حيث $\frac{\sin x}{\tan 3x} \leq f(x) \leq \frac{x^2 + x}{3x}$ محمد عمر الخطيب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan 3x} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{3x} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{3}$$

(4) اوجد $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ حيث $x^2 - x^3 \leq x^2 f(x) \leq \sin^2 x$ محمد عمر الخطيب

$$\frac{x^2 - x^3}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1-x)}{x^2} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

منظرية الشطيرة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 1$$

(5) اوجد $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$ حيث $\sin x \leq f(x) \leq x$ محمد عمر الخطيب

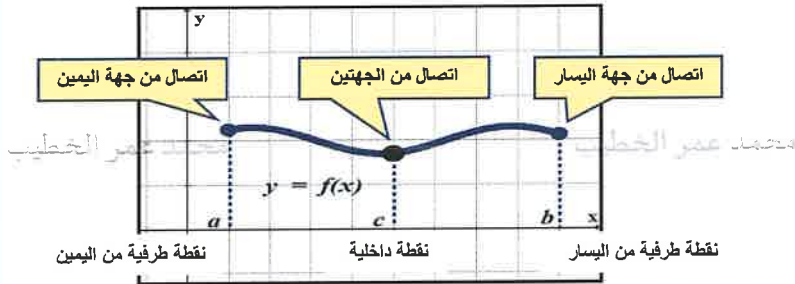
$$\frac{\sin x}{x} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = 1$$

منظرية الشطيرة

الاتصال عند نقطة



(1) نقطة داخلية: تكون الدالة $y = f(x)$ متصلة عند نقطة داخلية c في مجالها اذا كان

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

(1) $f(c)$ موجودة (للدالة صورة عند $x = c$)

$$(2) \lim_{x \rightarrow c} f(x) \text{ موجودة (اي ان } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x))$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

(2) نقطة طرفية : تكون الدالة $y = f(x)$ متصلة عند

(أ) نقطة طرفية a لها نهاية من جهة اليمين اذا كان

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

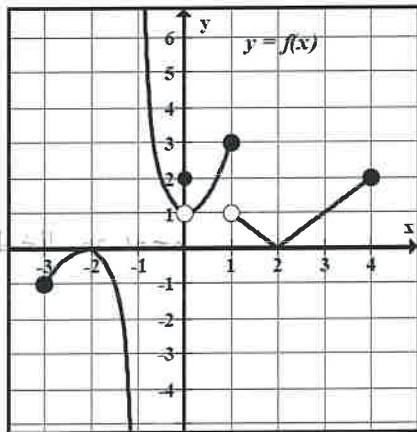
بداية الفترة المغلقة

(ب) نقطة طرفية b لها نهاية من جهة اليسار اذا كان

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

نهاية الفترة المغلقة

اعتمد على الرسم المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ للإجابة عن الاسئلة التالية



(1) هل الدالة متصلة عند $x = 1$ لا

(2) هل الدالة متصلة عند $x = 0$ لا

(3) هل الدالة متصلة عند $x = -1$ لا

(4) هل الدالة متصلة عند $x = 2$ نعم

(5) هل الدالة متصلة عند $x = 4$ لا

(6) هل الدالة متصلة عند $x = 4$ من جهة اليسار نعم

$$(1) f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 1 \\ 2-x & , x > 1 \end{cases}$$

الدالة غير متصلة عند $x=1$

لأن الدالة غير متصلة عند $x=1$ (لا يوجد صورة للعدد)

$$(2) f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

الدالة غير متصلة عند $x=1$

الدالة غير متصلة عند $x=1$

العدد 1 صورة للمقام

تذكر

شروط الاتصال عند النقطة الداخلية

محمد عمر الخطيب
 $x=c$

(1) الدالة معرفة عند $x=c$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \quad (3)$$

يمكن البحث

عن نقاط انفصال الدالة عند

(1) اصفار المقام (اكيد)

(2) نقاط التفرع (ممكن)

ملاحظة: أي نقطة خارج مجال

الدالة تعتبر نقطة انفصال للدالة

$$(3) f(x) = [x]$$

$$f(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} [x] \text{ م.ع}$$

الدالة غير متصلة عند $x=1$

$$(4) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & , x \neq 1 \\ 3 & , x = 1 \end{cases}$$

$$\frac{x^2-1}{x-1}$$

(3)

$$\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$f(1) = 3$$

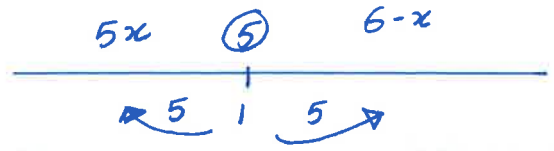
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$$

الدالة غير متصلة عند $x=1$

اي من الدوال التالية تكون متصلة عند $x = 1$ مع ذكر السبب.

$$(1) f(x) = \begin{cases} 5x & , x < 1 \\ 5 & , x = 1 \\ 6-x & , x > 1 \end{cases}$$



$$f(1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

الشرط تحقق
∴ الدالة متصلة
عند $x=1$

$$(2) f(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

$$f(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

الدالة متصلة
عند $x=1$

$$(3) f(x) = |x-1|$$

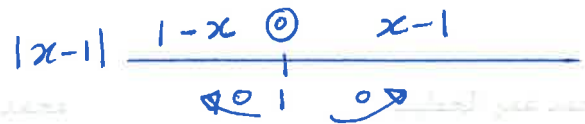
$$f(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(0)$$



الدالة متصلة عند $x=1$

$$(4) f(x) = \frac{\sin(x-1)}{x-1}$$

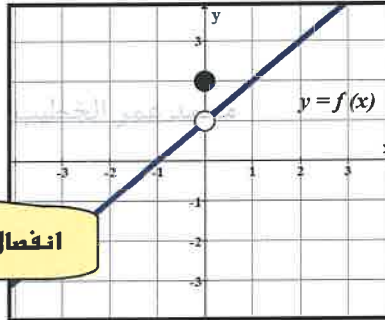
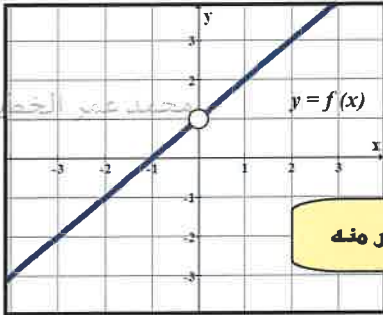
الدالة غير متصلة

عند $x=1$

لأن الدالة غير

معروفة عند $x=1$ (حينها ليقام)

(1) الفجوة (قابل للإزالة) أو (يمكن التخلص منه)

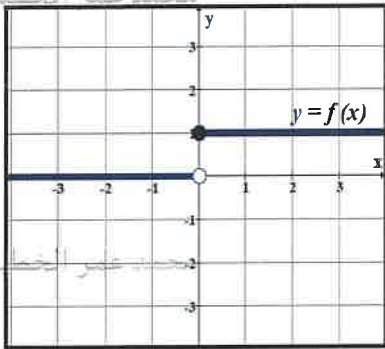


انفصال يمكن التخلص منه

النهاية موجودة

ولكن لا تساوي الصورة

أو الصورة غير موجودة



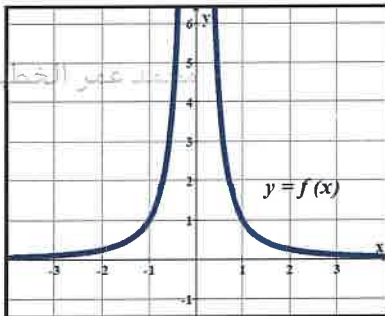
(2) القفزة (غير قابل للإزالة)

النهاية غير موجودة

النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار

ولكن كلاهما عدد حقيقي

(3) لا نهائي / خطوط التقارب (غير قابل للإزالة)



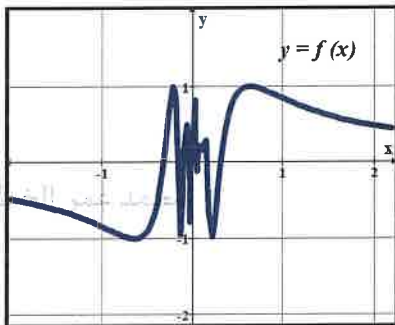
النهاية غير موجودة أو ملانهاية

أحدى النهايتين تساوي ملانهاية أو كلاهما

(4) التذبذبي (غير قابل للإزالة)

النهاية غير موجودة

الدالة تتذبذب كثيراً عند نقطة الانفصال



أمثلة $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $g(x) = \cos \frac{1}{x^2}$, $h(x) = \tan \frac{1}{x}$

ملاحظة: يمكن البحث عن نقاط
انفصال الدالة عند
(1) اصفار المقام (اكيد)
(2) نقاط التفرع (ممكن)

نجد نهاية الدالة عند نقطة الانفصال

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

النهاية غير موجودة

النهاية موجودة

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الدالة تتذبذب
كثيرا

أحدى النهايتين أو
كلاهما مالا نهاية

كلا النهايتين
أعداد حقيقية

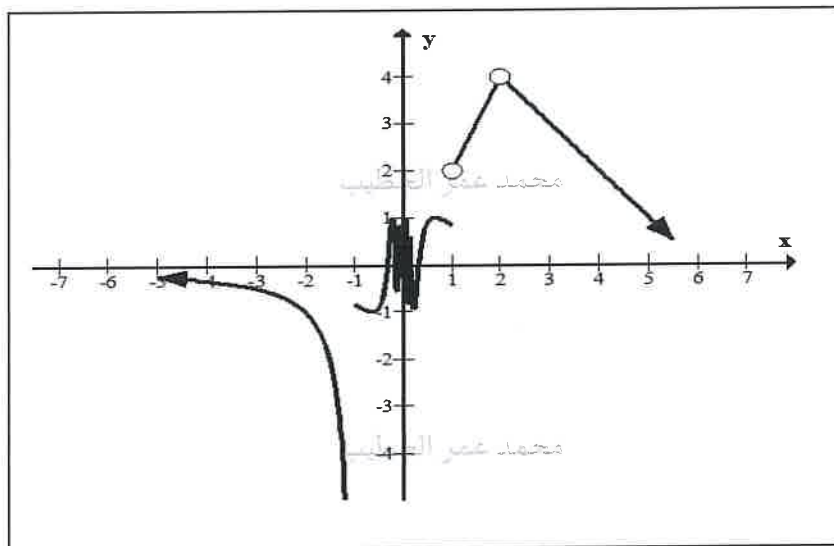
قابلة للإزالة

غير قابلة للإزالة (تذبذبي)

غير قابلة للإزالة (لانهائي)

غير قابلة للإزالة (قفزة)

في الشكل المجاور أوجد نقاط انفصال الدالة (نقاط عدم الاتصال) ، ثم حدد نوع كل منها:



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

نوع الانفصال	نقطة انفصال الدالة	$x = 2$	$x = 1$	$x = 0$	$x = -1$
قفزة	قفزة	قفزة	تذبذبي	لانهائي	لانهائي

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اكمل الجدول التالي:

ملاحظة: يمكن البحث عن نقاط انفصال الدالة عند

(1) اصفار المقام (اكيد)

(2) نقاط التقعر (ممكن)

نوع الانفصال	نقطة (نقاط) الانفصال	الدالة
فجوة	$x=3$ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3} = 4$	(1) $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-3}$
فجوة	$x=0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5$	(2) $f(x) = \frac{\sin 5x}{x}$
قفزة	$x=1$ $\frac{x^2}{x^2} \quad \frac{3-x}{3-x}$	(3) $f(x) = \begin{cases} 3-x, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$
لا نهائي	$x=3$ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{x-3} \rightarrow \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$	(4) $f(x) = \frac{2}{x-3}$
قفزة	$x=0$ $\frac{-1}{0}$	(5) $f(x) = \frac{ x }{x}$
لا نهائي	$x=-3$ $x=5$	(6) $f(x) = \frac{x-5}{x^2-2x-15}$ $= \frac{x-5}{(x-5)(x+3)}$
فجوة	$x=0$ $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$	(7) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$
لا نهائي	$x=0$ $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = -\infty$	(8) $f(x) = \ln x^2$

تكون الدالة $y = f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ اذا كانت

(1) متصلة على كل نقطة في الفترة المفتوحة (a, b)

(2) متصلة عند النقطة a من جهة اليمين اي ان $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

(3) متصلة عند النقطة b من جهة اليسار اي ان $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

وتكون الدالة $y = f(x)$ متصلة على مجموعة الأعداد الحقيقية اذا كانت متصلة عند كل نقطة

تعتبر النقطة الطرفية نقطة انفصال لان الدالة غير معرفة عند احدى الجهتين

اما اذا كان المطلوب فترة الاتصال فيجب دراسة الاتصال من جهة واحدة واذا تحقق شرط الاتصال

تكون ضمن فترة الاتصال

ملاحظات مهمة

اولاً: الدوال المتصلة على مجالها فترة الاتصال هي مجال الدالة

(1) كثيرات الحدود (2) الدوال النسبية (3) الدوال الجذرية (4) الدوال المثلثية

(5) دوال المطلق (6) الدوال الاسية (7) الدوال اللوغارتمية

ثانياً: الدوال المتصلة على جزء من مجالها فترة الاتصال هي مجال الدالة او جزء من مجال الدالة

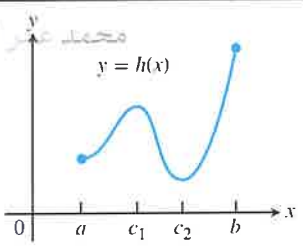
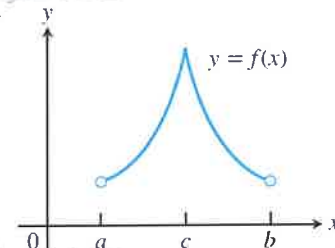
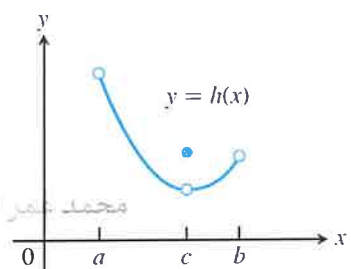
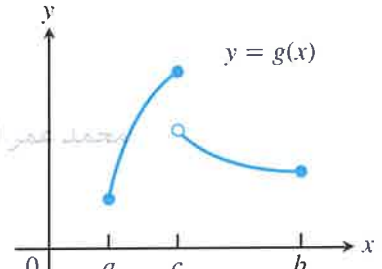
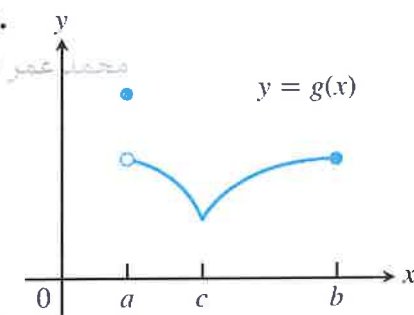
بعض الدوال المتفرعة مثل دالة الصحيح

ثالثاً: العمليات على الدوال المتصلة

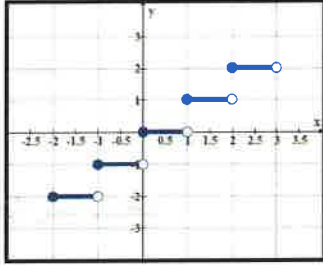
(1) حاصل جمع وطرح وضرب دالتين متصلتين هي دالة متصلة

(2) حاصل قسمة دالتين متصلتين هي دالة متصلة بشرط ان المقام لا يساوي صفر

(3) حاصل تركيب دالتين متصلتين هي دالة متصلة

الدالة	فترة الاتصال
1. 	$[a, b]$
2. 	(a, b)
3. 	$(a, c) \cup (c, b)$
4. 	$[a, c) \cup (c, b]$
5. 	$(a, b]$

دالة الصحيح : $y = [x]$



(1) اعتمد على الدالة $f(x) = [x]$ للإجابة عن الأسئلة التالية

(أ) هل الدالة متصلة عند $x = 1$ من جهة اليمين نعم

$$f(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1 \quad \int \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

(ب) هل الدالة متصلة عند $x = 2$ من جهة اليسار لا

$$f(2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 1 \quad \int \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq f(2)$$

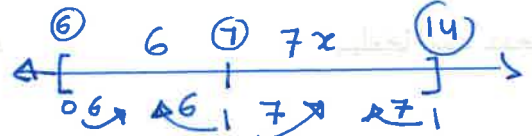
(ج) هل الدالة متصلة على $(1, 2)$ نعم

(د) هل الدالة متصلة على $[1, 2]$ لا لكنه متصلة على الفترة $[1, 2)$

(2) أي من الدوال الآتية متصلة على الفترة $[0, 2]$ وإذا كانت غير ذلك، اكتب فترة الاتصال

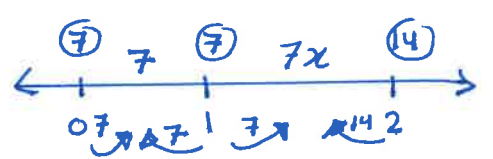
(a) $f(x) = \begin{cases} 6 & 0 \leq x < 1 \\ 7x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$$



الدالة غير متصلة على $[0, 2]$
لكنها متصلة على $[0, 1) \cup [1, 2]$

(b) $f(x) = \begin{cases} 7 & 0 \leq x < 1 \\ 7x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$



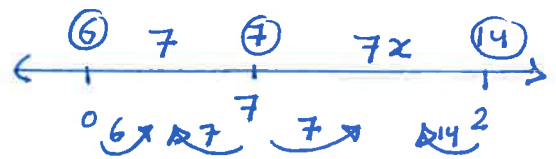
الدالة متصلة على $[0, 2]$ تحققت جميع الشروط
* انظر الى الشكل

(c) $f(x) = \begin{cases} 6 & x = 0 \\ 7 & 0 < x < 1 \\ 7x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

$$f(0) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq f(0)$$



الدالة غير متصلة على $[0, 2]$
لكنها متصلة على $(0, 2]$

حدد الفترة التي تكون فيها الدالة متصلة:

نجد المجال أولاً

(1) $f(x) = x^2 + 5x - 1, x \in [1, 2]$

فترة الاتصال $[1, 2]$

(2) $f(x) = \sqrt{x-1}$

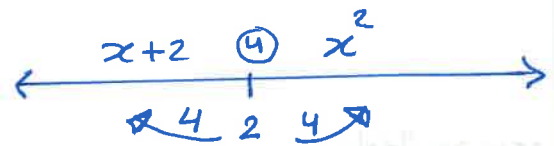
$x-1 \geq 0$

$x \geq 1$

فترة الاتصال هي $[1, \infty)$

$D = [1, \infty)$

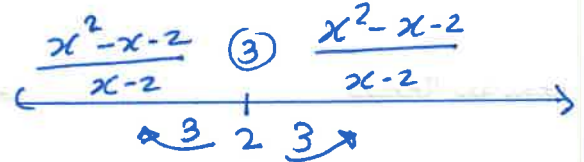
(3) $f(x) = \begin{cases} x+2 & , x \leq 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$



فترة الاتصال $(-\infty, \infty)$

$D = (-\infty, \infty)$

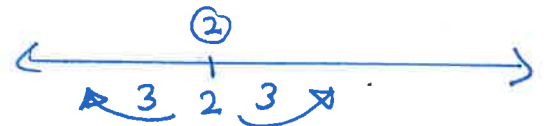
(4) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & , x \neq 2 \\ 3 & , x = 2 \end{cases}$



فترة الاتصال $(-\infty, \infty)$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = 3$

(5) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & , x \neq 2 \\ 2 & , x = 2 \end{cases}$



فترة الاتصال $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

$= (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

(6) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

لا يوجد انفصال مقام

فترة الاتصال $(-\infty, \infty)$

حدد الفترة التي تكون فيها الدالة متصلة:

(1) $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$

أيضا، الحقام
فترة الاتصال $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

(2) $f(x) = (x-1)^{\frac{3}{2}} + e^x$
 $= (\sqrt{x-1})^3 + e^x$

$x-1 \geq 0$

$x \geq 1$

$D = [1, \infty)$

فترة الاتصال $[1, \infty)$

(3) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

فترة الاتصال

$[-2, 2]$

$4-x^2 \geq 0$
أيضا،
 $4-x^2$

$D = [-2, 2]$

(4) $f(x) = \sqrt{x^2-3x}$

فترة الاتصال

$(-\infty, 0] \cup [3, \infty)$

$x^2-3x \geq 0$
أيضا،
 x^2-3x

$D = (-\infty, 0] \cup [3, \infty)$

(5) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x-1}$

فترة الاتصال

$(0, \infty)$

أيضا، الحقام
 $e^x-1=0$
 $e^x=1$
 $x=0$

الحكام
 R

المجال
الربط
 $x \geq 0$

$D = (0, \infty)$

(6) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}+e^x}{x^2-4}$

فترة الاتصال

$[-1, 2) \cup (2, \infty)$

أيضا، الحقام
 $x = \pm 2$

الحكام
 R

المجال
الربط
 $x+1 \geq 0$
 $x \geq -1$



$D = [-1, 2) \cup (2, \infty)$

حدد الفترة التي تكون فيها الدالة متصلة:

(1) $f(x) = \ln(x-2)$

فترة الاتصال $(2, \infty)$

المجال
 $x-2 > 0$
 $x > 2$

(2) $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$

فترة الاتصال

$(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

المجال
 $x^2 - x - 6 > 0$
 $++ \quad 0 \quad -- \quad 0 \quad ++$
 $-2 \quad 3$

$D = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

(3) $f(x) = \frac{1}{\ln(x-2)}$

فترة الاتصال

$(2, 3) \cup (3, \infty)$

المقام
 $\ln(x-2) = 0$
 $x-2 = 1$
 $x = 3$

المجال
 $x > 2$

$D = (2, 3) \cup (3, \infty)$

(4) $f(x) = \frac{3}{\ln x^2}$

فترة الاتصال

$R \setminus \{0, \pm 1\}$

المقام
 $\ln x^2 = 0$
 $x^2 = 1$
 $x = \pm 1$

المجال
 $R \setminus \{0\}$

$D = R \setminus \{0, \pm 1\}$

ملاحظة:

$\ln x^2 = 2 \ln |x|$

(5) $f(x) = \frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{x}}$

فترة الاتصال

$(0, 1)$

المقام
 $x = 0$

$D = (0, 1)$

المجال
 $x > 0$

البسط
 $1-x^2 > 0$

$D = (0, 1)$

(6) $f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x^2-2x}}$

فترة الاتصال

$(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

المقام
 $x = 0, 2$

$D = (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

المجال
 $x^2 - 2x > 0$

البسط
 $x^2 - 1 > 0$

$D = (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

حدد الفترة التي تكون فيها الدالة متصلة:

(1) $f(x) = \sin^{-1}(x+2)$

المجال

$$-1 \leq x+2 \leq 1$$

$$-3 \leq x \leq -1$$

$$D = [-3, -1]$$

فترة الاتصال

$$[-3, -1]$$

(2) $f(x) = \tan^{-1}(2x+1)$

المجال

$$-\infty < 2x+1 < \infty$$

$$-\infty < 2x < \infty$$

$$-\infty < x < \infty$$

فترة الاتصال

$$(-\infty, \infty)$$

(3) $f(x) = \tan x$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

المجال

$$R / \left\{ \frac{\pi}{2} \pm n\pi \right\}$$

فترة الاتصال

$$R / \left\{ \frac{\pi}{2} \pm n\pi \right\}, n \in \mathbb{N}$$

(4) $f(x) = \ln(\sin x)$

المجال

$$\sin x > 0$$

في الربع الأول، الثاني

$$0 < x < \pi$$

فترة الاتصال

$$(0, \pi) \pm 2n\pi, n \in \mathbb{N}$$

أو

$$(0, \pi) + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$D = (0, \pi) \pm 2n\pi, n \in \mathbb{N}$$

الدالة الموسعة (إزالة الفجوة)

إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة على مجال معين باستثناء نقطة (أو عدد محدود من النقاط) التي عندها انفصال نوعه فجوة (يمكن إزالته) فإنه يمكن تعريف دالة جديدة متصلة عند هذه النقطة وتعتمد على الدالة $f(x)$ وتسمى الدالة الموسعة

ملاحظة: لا يمكن إيجاد الدالة الموسعة لدالة لها نقطة انفصال نوعه (قفزة، لانهائي، تذبذبي)

(1) اكتب الدالة الموسعة للدالة : $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ حتى تصبح متصلة عند $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)} = 5$$

نجد النهاية

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} & , x \neq 3 \\ 5 & x = 3 \end{cases}$$

الدالة الموسعة

(2) اكتب الدالة الموسعة للدالة : $f(x) = x \cot x$ حتى تصبح متصلة عند $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} x \cot x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

اعد تعريف الدالة الآتية عند النقطة المشار إليها لتصبح الدالة متصلة عند النقطة المشار إليها.

(اكتب الدالة الممتدة او الموسعة).

$$(1) f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}, x=8$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8} \times \frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt{x+1}+3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x+1-9}{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)} = \frac{1}{6}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8} & x \neq 8 \\ \frac{1}{6} & x = 8 \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}, x=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{e^x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x)^2-1}{e^x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x-1} = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x+1}{2} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \frac{x+3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{3}}, x=-3$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{3}} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\frac{3+x}{3x}} = \lim_{x \rightarrow -3} 3x = -9$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{3}} & x \neq -3 \\ -9 & x = -3 \end{cases}$$

اعد تعريف كل من الدوال الآتية عند النقطة المشار إليها لتصبح الدالة متصلة عند النقطة المشار إليها.

(اوجد الدالة الممتدة او الموسعة).

$$(1) f(x) = \frac{|x-2|-1}{x-3}, \quad x=3 \quad |x-2| = \frac{2-x}{2} + \frac{x-2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-2|-1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2-1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x-3} = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|-1}{x-3} & x \neq 3 \\ 1 & x = 3 \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin x}, \quad x=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin x} \times \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{\sin x (\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x (\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin x} & x \neq 0 \\ 1/4 & x = 0 \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \frac{3}{\ln x^2}, \quad x=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\ln x^2} = \frac{3}{-\infty} = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{\ln x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

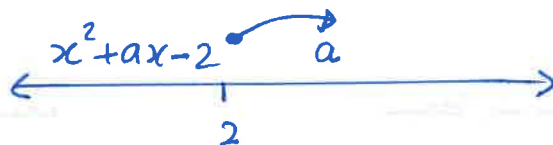
ملاحظه
 $\ln 0^+ = -\infty$
 حفظ

نسبة = عدد
 ملاحظة

ايجاد الثوابت من خلال تعريف الاتصال

(1) اوجد قيمة الثابت a حتى تصبح الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = 2$ حيث:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 2, & x < 2 \\ a, & x \geq 2 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

الدالة متصلة

∴ إلّا لا يوجد

$$2^2 + 2a - 2 = a$$

$$2a + 2 = a$$

$$a = -2$$

(2) اوجد قيمة الثابت c حتى تصبح الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 2x}{6x^2}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1 - \cos 2x}{6x^2} \bigg|_{x=0} \text{ (C)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$c = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{6x^2} = c$$

$$c = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{6x^2} = c$$

(3) اوجد قيمة الثوابت a, b حتى تصبح الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin x}{x}, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ b \cos x - 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$\frac{2 \sin x}{x} \bigg|_{x=0} \text{ (a)} \quad b \cos x - 1 \bigg|_{x=0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin x}{x} = a$$

$$b - 1 = a$$

$$b - 1 = 2$$

$$2 = a$$

$$b = 3$$

(1) اوجد قيمة الثوابت a, b حتى تصبح الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan 5x}{x} & , x < 0 \\ a & , x = 0 \\ b \cos x + e^x & , x > 0 \end{cases}$$

$$\frac{\tan 5x}{x} \quad \textcircled{a} \quad b \cos x + e^x$$

0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$5 = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$b \cos 0 + e^0 = a$$

$$b + 1 = a$$

$$b + 1 = 5$$

$$b = 4$$

(2) اوجد قيمة الثوابت a, b حتى تصبح الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & , x < 0 \\ b & , x = 0 \\ \frac{\sin ax}{2x} & , x > 0 \end{cases}$$

$$\frac{|x|}{x} \quad \textcircled{b} \quad \frac{\sin ax}{2x}$$

0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = b$$

$$-1 = b$$

$$b = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin ax}{2} = b$$

$$\frac{a}{2} = b$$

$$\frac{a}{2} = -1$$

$$a = -2$$

(1) اوجد قيمة الثوابت a, b حتى تصبح الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 - a & , x < 3 \\ 9 & , x = 3 \\ ax + 6 & , x > 3 \end{cases}$$

$$\frac{bx^2 - a \quad (9) \quad ax + 6}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$$

$$b(3)^2 - a = 9$$

$$a(3) + 6 = 9$$

$$9b - a = 9$$

$$3a + 6 = 9$$

$$3a = 3$$

$$a = 1$$

$$9b - a = 9$$

$$9b - 1 = 9 \Rightarrow b = \frac{10}{9}$$

(2) اوجد قيمة الثوابت a, b حتى تصبح الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 5 & , x > -1 \\ 7 & , x = -1 \\ x - b & , x < -1 \end{cases}$$

$$\frac{x - b \quad (7) \quad ax^2 + 5}{-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$$

$$-1 - b = 7$$

$$a(-1)^2 + 5 = 7$$

$$-b = 8$$

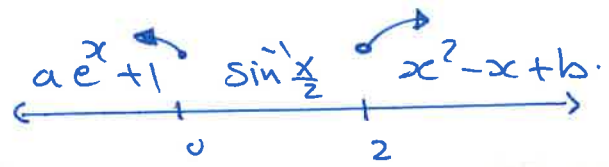
$$a + 5 = 7$$

$$b = -8$$

$$a = 2$$

(1) اوجد قيمة الثوابت a, b حتى تصبح الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x) = \begin{cases} ae^x + 1 & , x \leq 0 \\ \sin^{-1} \frac{x}{2} & , 0 < x < 2 \\ x^2 - x + b & , x \geq 2 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$ae^0 + 1 = \sin^{-1} \frac{0}{2}$$

$$a + 1 = 0$$

$$a = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

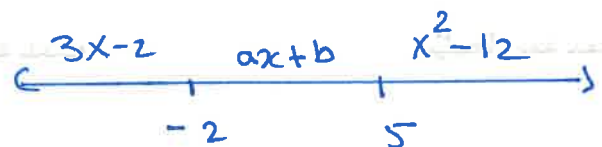
$$\sin^{-1} 1 = 2^2 - 2 + b$$

$$\frac{\pi}{2} = 2 + b$$

$$b = \frac{\pi}{2} - 2$$

(2) اوجد قيمة الثوابت a, b حتى تصبح الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & , x \leq -2 \\ ax + b & , -2 < x < 5 \\ x^2 - 12 & , x \geq 5 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$$

$$3(-2) - 2 = a(-2) + b$$

$$-8 = -2a + b$$

$$-2a + b = -8$$

$$2a - b = 8 \quad \text{--- (1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$$

$$a(5) + b = 5^2 - 12$$

$$5a + b = 13 \quad \text{--- (2)}$$

$$5a + b = 13$$

$$2a - b = 8$$

$$\text{المجموع} \quad \frac{5a + b = 13}{2a - b = 8} \quad \text{---}$$

$$7a = 21$$

$$a = 3$$

$$\Rightarrow b = -2$$

(1) اوجد قيمة الثوابت a, b حتى تصبح الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & , x \leq 1 \\ x^2 - 2x & , 1 < x < 3 \\ b - a & , x \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} 2x+a \quad x^2-2x \quad b-a \\ | \quad | \\ 1 \quad 3 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$2 + a = -1$$

$$a = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

$$3 = b - a$$

$$3 = b - (-3)$$

$$b = 0$$

(2) اوجد قيمة الثوابت a, b حتى تصبح الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x) = \begin{cases} a(\tan^{-1} x + 2) & , x < 0 \\ 2b^x - 7 & , 0 \leq x \leq 3 \\ \ln(x-2) + x^2 & , x > 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} a(\tan^{-1}x+2) \quad 2b^x-7 \quad \ln(x-2)+x^2 \\ | \quad | \quad | \\ 0 \quad 3 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$a(2) = 2 - 7$$

$$2a = -5$$

$$a = -5/2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

$$2b^3 - 7 = 9$$

$$2b^3 = 16$$

$$b^3 = 8$$

$$b = 2$$

(1) اوجد قيمة الثوابت m, n حتى تصبح الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - mx + 2}{x - 1} & , x \neq 1 \\ n & , x = 1 \end{cases}$$

$$\frac{x^2 - mx + 2}{x - 1} \quad \text{---} \quad \frac{x^2 - mx + 2}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - mx + 2}{x - 1} = n$$

النهاية موجودة، لنظام هن
لذلك يجب ان يكون نهاية لبطا

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - mx + 2 = 0$$

$$1 - m + 2 = 0 \Rightarrow m = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = n$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-1)}{x-1} = n$$

$$1 - 2 = n$$

$$n = -1$$

(2) اوجد قيمة الثوابت a, b حتى تصبح الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - a}{x - 2} & , x < 2 \\ bx + 6 & , x \geq 2 \end{cases}$$

$$\frac{2x^2 - a}{x - 2} \quad \text{---} \quad bx + 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - a}{x - 2} \quad \text{عدد موجود}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 - a = 0$$

$$8 - a = 0$$

$$a = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} bx + 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2(x-2)(x+2)}{x-2} = 2b + 6$$

$$8 = 2b + 6$$

$$2b = 2$$

$$b = 1$$

(3) حدد جميع قيم x حتى تصبح الدالة $f(x)$ متصلة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{عدد نسبي } x \\ 4x & \text{عدد غير نسبي } x \end{cases}$$

$$x^2 + 3 = 4x$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = 1, 3$$

ملاحظة

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{عدد نسبي } x \\ 0 & \text{عدد غير نسبي } x \end{cases} \quad \text{الدالة}$$

غير متصلة عن اي نقطة في مجالها

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ والدالة $f(x)$ دالة متصلة عند L فإن

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x))$$

إذا كانت نهاية الدالة الداخلية $g(x)$ موجودة والدالة الخارجية $f(x)$ متصلة عند قيمة النهاية فإن النهاية تدخل بدخل الدالة (يمكن تبديل الدالة مع النهاية)

ملاحظة: إذا لم تتحقق إحدى الشروط يجب إيجاد نتائج تركيب الدالتين ثم إيجاد النهاية أو فرض الدالة الداخلية //

(1) إذا كانت الدالة $g(x) = \begin{cases} 2 & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$ والدالة $f(x) = 2x - 5$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x))$$

$$= f(\lim_{x \rightarrow 1} g(x))$$

$$= f(2)$$

$$= 2(2) - 5$$

$$= 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) \text{ اوجد}$$

الدالة الداخلية

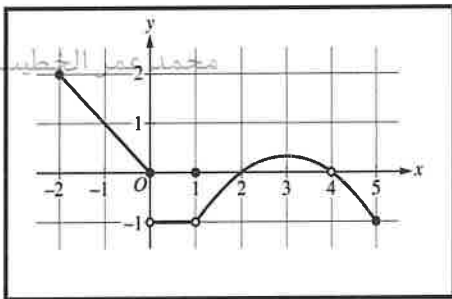
$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$$

محمد عمر الخطيب $x \rightarrow 1$

والدالة f متصلة عند $x = 2$

∴ عليه تطبيق النظرية

(2) اعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$



$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ والدالة}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) \text{ اوجد}$$

الدالة الداخلية

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

والدالة الخارجية f متصلة عند $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x))$$

$$= f(\lim_{x \rightarrow 1} g(x))$$

$$= f(2) = 0$$

(1) إذا كانت الدالة $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 4 & x = 0 \end{cases}$ والدالة $g(x) = 2x$ أوجد

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

(a) $f(\lim_{x \rightarrow 0} (g(x))) = f(0) = 4$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) =$ لا نستطيع تطبيق النظرية
الدالة f غير معرفة عند $x=0$

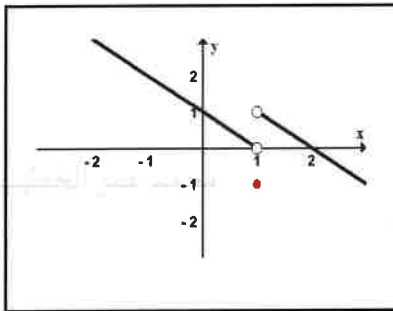
مساعدة...

ممکن تفرض

$u = 2x$

$\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 0$

$x \rightarrow 0$
 $u \rightarrow 0$



(2) اعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ أوجد

لا يجوز تطبيق النظرية

أوجد

مساعدة... افرض

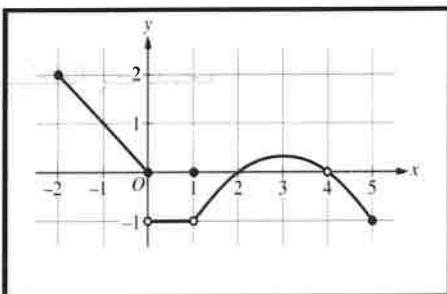
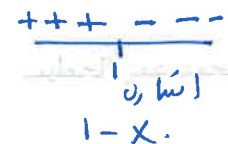
$u = 1 - x$

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(1-x) = \lim_{u \rightarrow 1^-} f(u) = 0$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(1-x) = \lim_{u \rightarrow 1^+} f(u) = 1$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(1-x)$ غ.م

$x \rightarrow 0^+$
 $u \rightarrow 1^-$
 $x \rightarrow 0^-$
 $u \rightarrow 1^+$



(3) اعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ أوجد

لا يجوز تطبيق النظرية

أوجد

مساعدة... افرض

$u = x^2 - x$

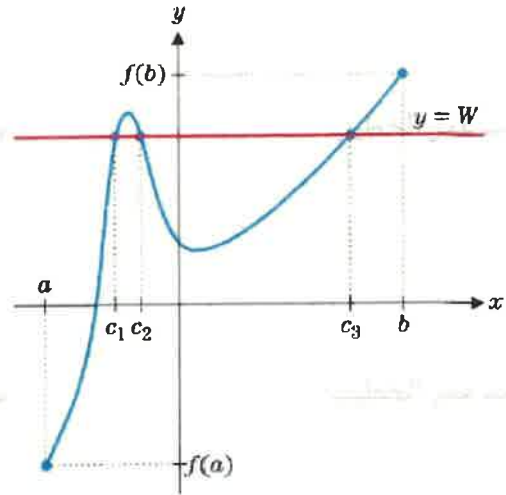
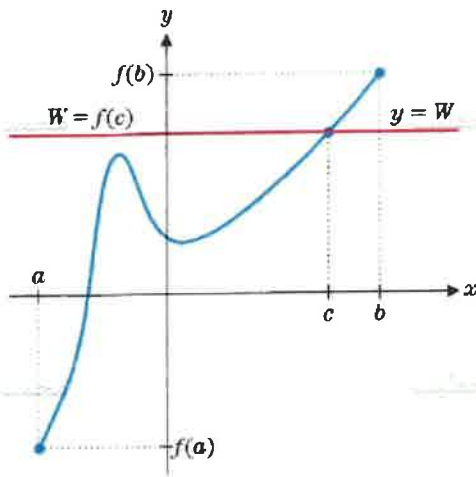
(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2 - x) = \lim_{u \rightarrow 0^-} f(u) = 0$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2 - x) = \lim_{u \rightarrow 0^+} f(u) = -1$

$x^2 - x$ ، نسا 0



إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، وكانت W أي عدد يقع بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد على الأقل مثل c ينتمي إلى الفترة $[a, b]$ بحيث $f(c) = W$



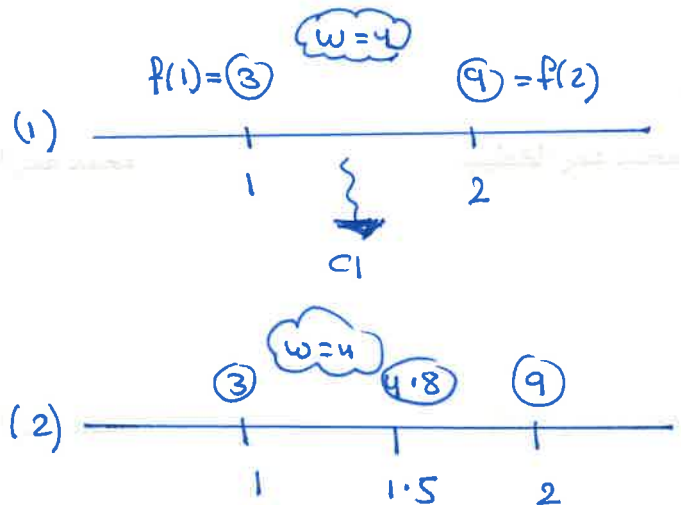
إذا كانت $f(x) = x^3 - x + 3$ دالة متصلة على الفترة $[1, 2]$ فاوجد التقريب الثاني للعدد c والذي ينتمي إلى الفترة ويحقق $f(c) = 4$

التقريب الأول

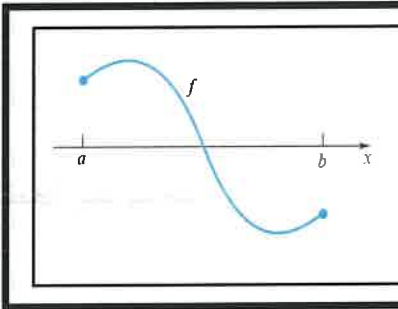
$$c_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

التقريب الثاني

$$c_2 = \frac{1+1.5}{2} = 2.25$$



نتيجة نظرية القيمة الوسطية (نظرية بلزانو) التصنيف



إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ وكانت $f(a)$ و $f(b)$ لهما اشارتان مختلفتان فإنه يوجد عدد على الاقل مثل r ينتمي الى الفترة (a, b) بحيث $f(r) = 0$

(1) إذا كانت $f(x) = x^2 - 7$ دالة متصلة على الفترة $[2, 3]$ فاوجد قيمة تقريبية لصفر الدالة مقرباً

لأقرب منزلتين عشريتين

$$f(2) = 2^2 - 7 = -3$$

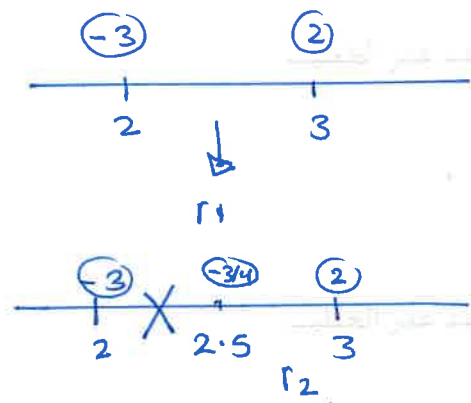
$$f(3) = 3^2 - 7 = 2$$

لم اكن ربيقتين

فانه يوجد جذر بينهما

$$r_1 = \frac{2+3}{2} = 2.5$$

$$r_2 = \frac{2.5+3}{2} = 2.75$$



الجذر بين عدد بينهم هو مختلفه بالاساره

(2) إذا كانت $f(x) = e^x + x$ فاوجد قيمة تقريبية لصفر الدالة مقرباً لأقرب منزلتين عشريتين

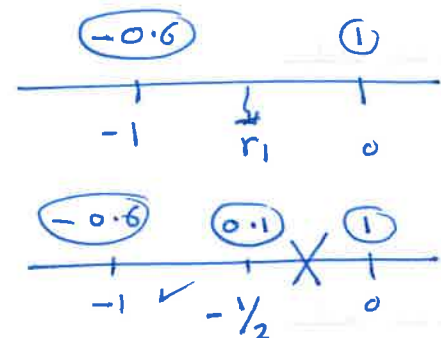
لما انه لا يوجد فترة لذلك نبه عن عدد من متباين لهم
صور مختلفه بالاساره التجريب او الافضل الآله الحاسه

$$f(0) = e^0 + 0 = 1$$

$$f(-1) = e^{-1} - 1 = -0.6$$

$$r_1 = \frac{-1+0}{2} = -1/2$$

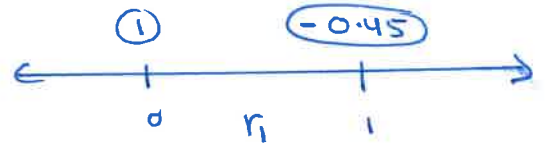
$$r_2 = \frac{-1 + -1/2}{2} = -3/4$$



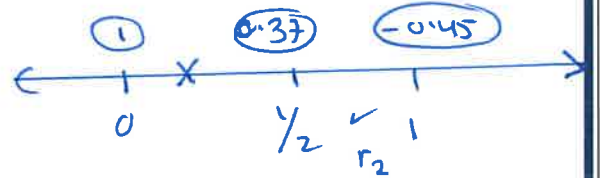
(1) اوجد قيمة تقريبية لحل المعادلة $\cos x = x$ في الفترة $[0, 1]$ مقرباً لأقرب منزلتين عشريتين

$$f(x) = \cos x - x$$

$$r_1 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$



$$r_2 = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4}$$



(2) اذا كانت $f(x) = x^3 - x - 1$ دالة متصلة على الفترة $[1, 2]$ استخدم طريقة التصنيف لايجاد فترة

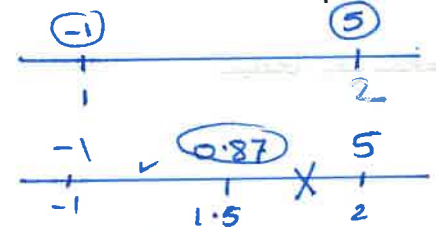
$$r_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

حول لفته 1

طولها $\frac{1}{4}$ تحتوي صفر الدالة .

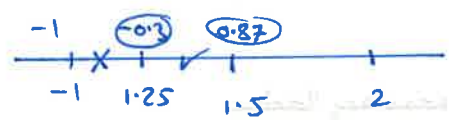
$$r_2 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$$

حول لفته $\frac{1}{2}$



$$r_3 = \frac{1.25+1.5}{2} = 1.375$$

حول لفته $\frac{1}{4}$



مساعدة : افرض الدالة

$$g(x) = f(x) - x$$

(3) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[a, b]$

حيث $f(b) > b$ و $f(a) < a$

$$f(b) - b > 0 \text{ و } f(a) - a < 0$$

فأثبت انه يوجد عدد مثل c ينتمي الى الفترة (a, b) ويحقق $f(c) = c$

الاثبات : نكتب الدالة $g(x) = f(x) - x$

هذه الدالة متصلة على $[a, b]$ لانها حاصل طرح دالتين متصلتين

صبي

$$g(a) = f(a) - a < 0$$

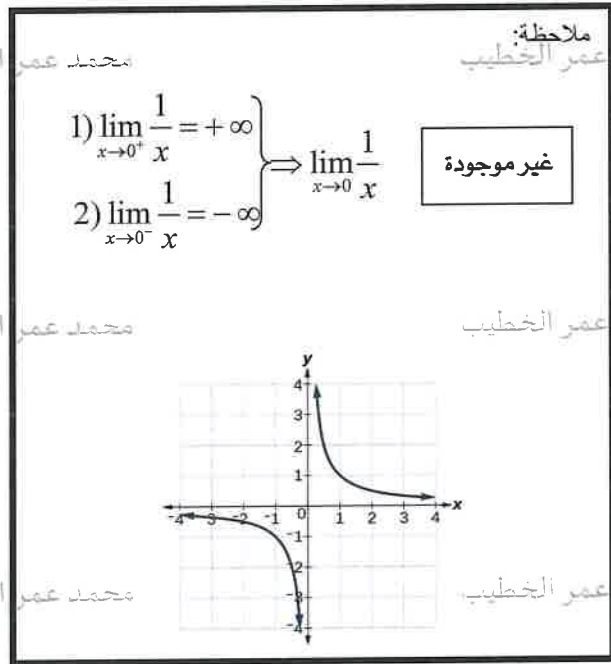
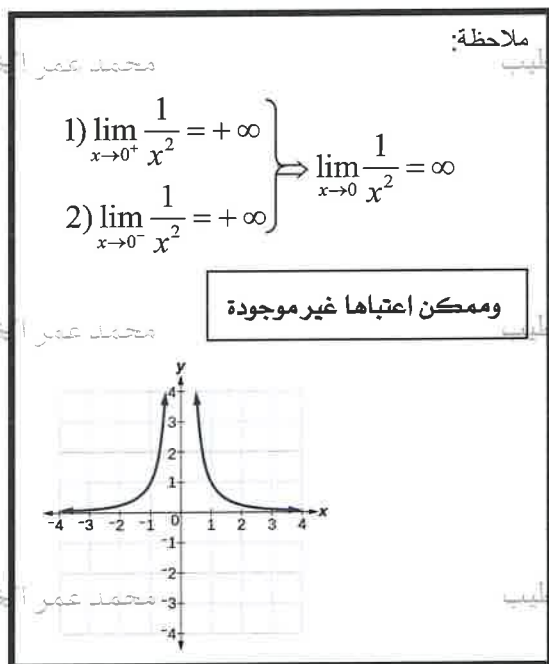
$$g(b) = f(b) - b > 0$$

من نتيجة نظرية القيمة الوسطية (بازانو) يوجد عدد مثل c

ينتمي الى لفته (a, b) حيث

$$g(c) = 0 \Rightarrow f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c \quad \#$$

أولاً: نهاية الدالة عند ما تساوي ملانهاية (خطوط التقارب الرأسية)



الكميات غير المعينة (الصيغ غير المحددة) (7 كميات)

$\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	→	صيغة المقسمة
$\infty - \infty$	→	صيغة الطرح
$0 \times \infty$	→	صيغة الضرب
0^0 , ∞^0 , 1^∞	→	الصيغ الأسية

الكميات المعينة (أي صيغة غير الصيغ السابقة)

$$\frac{a}{0} \rightarrow \pm\infty , \quad \frac{a}{\pm\infty} \rightarrow 0 , \quad \frac{0}{\pm\infty} \rightarrow 0 , \quad \frac{\infty}{0} \rightarrow \pm\infty \quad \boxed{a \neq 0}$$

$$\infty \pm a = \infty , \quad \infty + \infty = \infty$$

$$a \times \infty = \pm\infty$$

$$a^0 = 1 , \quad \infty^0 = \infty$$

$$b^\infty = \begin{cases} \infty & \text{if } b > 1 \\ 0 & \text{if } b < 1 \end{cases} \quad \boxed{b > 0}$$

أوجد قيمة كل مما يأتي :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{(x-2)}$$

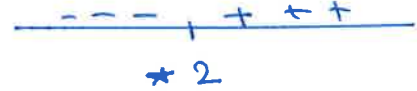
$$= -\infty$$

عدد (1)

منز
موجب
سالب

(2)

إشارة المقام
 $x-2$



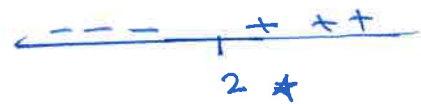
$$(2) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{(x-2)}$$

$$= \infty$$

عدد (2)

منز
موجب
موجب

إشارة المقام
 $(x-2)$



$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(x-2)}$$

غير موجود

عدد (3)

إشارة المقام
 $x-2$



$$(4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x}{(x+1)^2}$$

$$= \infty$$

عدد (4)

منز
موجب
موجب

إشارة المقام
 $(x+1)^2$



$$(5) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1-2x}{x^2-1}$$

$$= -\infty$$

عدد (5)

منز
موجب
سالب

إشارة المقام
 x^2-1



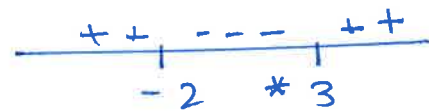
$$(6) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{x^2-x-6}$$

$$= -\infty$$

عدد (6)

منز
موجب
سالب

إشارة المقام
 x^2-x-6



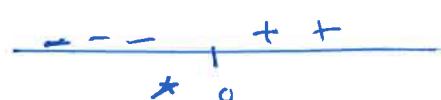
$$(7) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + \cos x}{x}$$

$$= -\infty$$

عدد (7)

منز
موجب
سالب

إشارة المقام
 x



اوجد قيمة كل مما ياتي

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^x}{x^2 - 4} = -\infty$$

أو، $x^2 - 4$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 - 2x - 3)^{-2/3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2 - 2x - 3})^2} = \infty$$

المقام
تربيع
موجب

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\infty} = \infty$$

$$x \rightarrow 0^+ \\ \frac{1}{x} \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = \begin{cases} \infty & , b > 1 \\ 0 & , 0 < b < 1 \end{cases}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

$$x \rightarrow 0^- \\ \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$$

غير موجود

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2}} = e^{\infty} = \infty$$

$$x \rightarrow 0 \\ \frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{-2}{x^3}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

$$x \rightarrow 0^+ \\ \frac{-2}{x^3} \rightarrow -\infty$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty$$

أو، $\cos x$

$$(9) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0^-} \cot x = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{\sin x} = -\infty$$

أو، $\sin x$

اوجد قيمة كل مما ياتي :

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \sec^2 x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos^2 x} = \infty$$

عدد
موجب
موجب

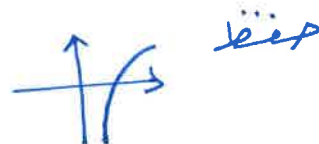
$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} e^{\tan x} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$
 $\tan x \rightarrow -\infty$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} e^{\tan x} = e^{\infty} = \infty$$

$x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$
 $\tan x \rightarrow \infty$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$



$$(5) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x \sin x) = \ln(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \sin(e^{-1/x^2}) = \sin(e^{-\infty}) = \sin(1/e^{\infty}) = \sin 0 = 0$$

$x \rightarrow 0$
 $-1/x^2 \rightarrow -\infty$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan^{-1}(\ln x) = \tan^{-1}(-\infty) = -\tan^{-1}(\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0^-} \cot^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \pi + \tan^{-1}(-\infty) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

نقطة



منه من السؤال من الرسم

اذا كانت الدالة : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ او $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ (احدهما يكفي) حيث L عدد حقيقي
فان للدالة $f(x)$ خط تقارب افقي معادلة $y = L$

ملاحظات مهمة:

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كانت k عدد حقيقي فان : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} k = k$

(2) اذا كانت n عدد صحيح موجب فان : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{k}{x^n} = 0$ حيث k عدد حقيقي لا يساوي صفر

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(3) اذا كانت n عدد صحيح موجب زوجي فان : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$

(4) اذا كانت n عدد صحيح موجب فردي فان :

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = \begin{cases} -\infty, & a > 0 \\ \infty, & a < 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$$

عند الملائهاة

تعمل كل الحدود في

الدالة الحدودية ما

عند الحد الذي له

الأس الأكبر

(5) اذا كانت $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ كثيرة حدود فان :

محمد عمر الخطيب

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n$$

(6) نهاية الدالة النسبية تكون حسب القاعدة التالية او (نقسم كل من البسط والمقام على أعلى درجة في

المقام)

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$m < n$
درجة البسط اصغر من درجة المقام
 0

$m = n$
درجة البسط تساوي درجة المقام
 $\frac{a_m}{b_n}$

$m > n$
درجة البسط اكبر من درجة المقام
 $\pm\infty$

اوجد قيمة كل مما ياتي:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 - 5x + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 = \infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} -x^7 - 5x^4 + 8 = \lim_{x \rightarrow \infty} -x^7 = -\infty$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 - 5x^5 + 7 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^5 = \infty$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} e^x + x = e^\infty + \infty = \infty$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = \begin{cases} \infty & , b > 1 \\ 0 & , 0 < b < 1 \end{cases}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} (0.8)^x = 0$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-|x|} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = 0$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} 5 - \frac{2}{x} = 5 - 0 = 5$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow \infty} x - \frac{3}{x} = \infty - 0 = \infty$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = \infty$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-5)^{-2/3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(\sqrt[3]{x-5})^2} = 0$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + 4x - 5}{x^4 - 1} = 0$$

درجه لايه
اعلى منه درجه المقام

اوجد قيمة كل مما ياتي :

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 5x^2}{10x^2 - 5x + 1} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + x^5}{x^4 + 1} = -\infty \quad \frac{x^5}{x^4} = x$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + 1}{x^2 + 1} = \infty \quad \frac{x^6}{x^2} = x^4$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2x} = 0 \quad \frac{1}{2} \text{ ليس}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x}{2x^2 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \cot^{-1} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \tan^{-1}(0) = 0.$$



$$(7) \lim_{x \rightarrow -\infty} \cot^{-1} x = \pi + \lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \pi + \tan(0) = \pi.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 5}\right) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5}\right) = \ln(1) = 0$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x - 5}\right) = \ln(\infty) = \infty$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x + 1}{x^2 - 5}\right) = \ln(0) = -\infty$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow \infty} \log\left(\frac{10x + \sin x}{x + \cos x}\right) = \log(10) = 1$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(ex - 2) - \ln(x + 4) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{ex - 2}{x + 4}\right) = \ln(e) = 1$$

ملاحظة:

يمكن تبديل النهاية

مع الدالة المتصلة

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{2x} + 2)}{\ln(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln e^{2x}}{\ln e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x \ln e}{x \ln e} = 2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(x^2+3x-3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\ln x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{2 \ln x} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\tan^{-1} x) = \sin(\lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} x) = \sin(\tan^{-1} \infty) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \sec^{-1}\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos^{-1}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right) = \cos^{-1}\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2+1}\right) = \cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(x+1)/(x^2+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2+1}} = e^0 = 1$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2/(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x+1} = -\infty = \frac{1}{e} = 0$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\cos(1/x)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos(1/x)} = e^{\cos 0} = e^1 = e$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow -\infty} 4 \tan^{-1}(3x-1) = 4 \tan^{-1}(-\infty) = 4\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\pi$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0^+} \cot^{-1}(\sin x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sin x}\right) \right] = \pi + \tan^{-1}(-\infty) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^2$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1/2}{x}\right)^x = \frac{1}{2} = \sqrt{e}$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{u}\right)^u = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

تعريف العدد e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad a \neq 0$$

افرض $u = \frac{1}{x}$
 $\Rightarrow x = \frac{1}{u}$
 $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow u \rightarrow \infty$

اوجد قيمة كل مما ياتي :

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{300}{9(0.8)^x + 1} = \frac{300}{9(0) + 1} = 300$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{-3} + 6}{x^{-2} + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x^3} + 6}{\frac{1}{x^2} + 2} = \frac{6}{2} = 3.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{80x^{-0.3} + 60}{2x^{-0.3} + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{80}{x^{0.3}} + 60}{\frac{2}{x^{0.3}} + 5} = \frac{60}{5} = 12$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2}} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{-x} = 1.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2(1 + \frac{4}{x^2})}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{|x| \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{-x \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 1} - 2x \quad \text{افض}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x + 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x + 1}{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{\sqrt{4x^2 + 2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{2x + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{4x} = -\frac{1}{2}$$

ملاحظة :

$\infty - \infty$

كمية غير معينة وليس صفر

ولا يجوز حذف حدود في هذه

الحالة الا بعد تحويلها الى

قسمة

ملاحظة
تحويل
الى
قسمة

خطوط التقارب للدوال النسبية

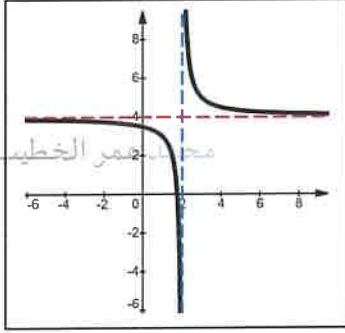
$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

(1) يجب كتابة الدالة النسبية في أبسط صورة قبل إيجاد خطوط التقارب وإذا تم اختصار أحد العوامل

وليكن $x - a$ عامل غير مكرر

واختفى من المقام فإن للدالة فجوة عند $x = a$ وليس خط تقارب رأسي

(2) يكون للدالة النسبية خطوط تقارب رأسيّة عند اصفار المقام وتكون معادلة على الصورة $x = a$



(3) يكون للدالة النسبية خطوط تقارب أفقية إذا كانت درجة البسط

أصغر من أو تساوي درجة المقام وتكون معادلة على الصورة $y = a$

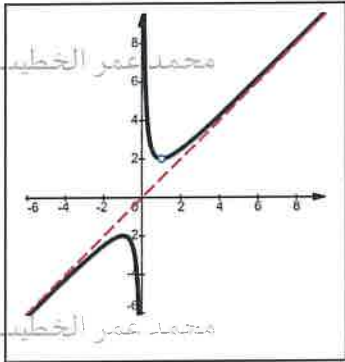
(4) يكون للدالة النسبية خط تقارب مائل إذا كانت

درجة البسط أكبر من درجة المقام بواحد .

وتكون معادلة على الصورة $y = ax + b$

ونستخدم القسمة المطولة أو القسمة التركيبية لإيجاد

لا يجوز أن يكون للدالة خط تقارب أفقي ومائل في نفس الوقت



خطوط التقارب للدوال غير النسبية

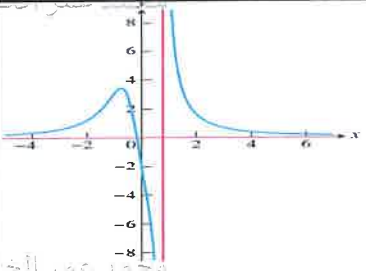
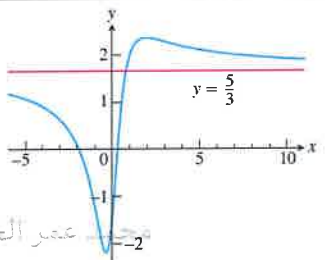
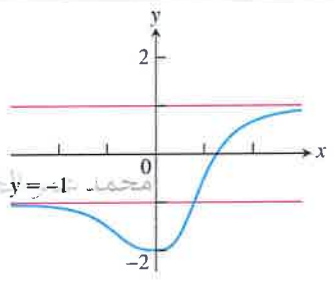
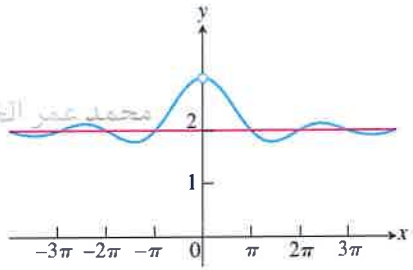
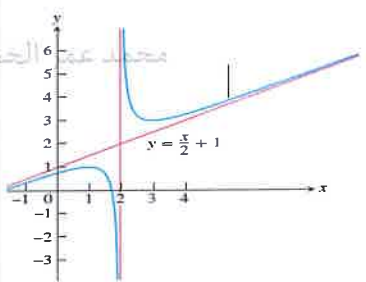
(1) يكون للدالة خطوط تقارب رأسيّة عند $x = k$

إذا كانت واحدة من العبارات التالية صحيحة

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = +\infty \text{ or } -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = +\infty \text{ or } -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = +\infty \text{ or } -\infty$$

(2) يكون للدالة خطوط تقارب أفقية عند $y = l$

إذا كانت أحد الشروط التالية صحيحة $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$

خطوط التقارب المائلة	خطوط التقارب الأفقية	خطوط التقارب الرأسية	الفجوات	التمثيل البياني للدالة
لا يوجد	$y = 0$	$x = 1$	لا يوجد	
لا يوجد	$y = 5/3$	لا يوجد	لا يوجد	
لا يوجد	$y = 1$ $y = -1$	لا يوجد	لا يوجد	
لا يوجد	$y = 2$	لا يوجد	$x = 0$	
لا يوجد	$y = \frac{x}{2} + 1$	لا يوجد	$x = 2$	

$$(1) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$$

محمد عمر الخطيب

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = 1$$

محمد عمر الخطيب

الافقية

$$y = 1$$

الرأسية

هنا المقام

$$x^2 - 4 = 0 \\ x = \pm 2$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(2) f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 6}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الافقية

$$y = 0$$

الرأسية

هنا المقام

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = 3, x = -2$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(3) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 6} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+2)}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الافقية

$$y = 1$$

الرأسية

$$x = 3$$

الفجوة

محمد عمر الخطيب

$$x = -2$$

$$(4) f(x) = \frac{2}{x-3} + 1$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الافقية

$$y = 1$$

الرأسية

$$x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x-3} + 1 = 1$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(1) f(x) = \frac{x^2 + 4x - 2}{x + 1}$$

محمد عمر الخطيب

$$= x + 3 + \frac{-5}{x + 3}$$

$$y = x + 3$$

$$\begin{array}{r} \text{المائله} \\ x+3 \cdot \\ x+1 \sqrt{x^2+4x-2} \\ \ominus x^2+x \\ \hline 3x-2 \\ 3x+3 \\ \hline -5 \end{array}$$

الرأسية

$$x = -1$$

محمد عمر الخطيب

$$(2) f(x) = \frac{x^3}{4 - x^2}$$

محمد عمر الخطيب

$$= -x + \frac{4x}{4 - x^2}$$

$$y = -x$$

المادة لتركيب

محمد عمر الخطيب

$$\begin{array}{r} \text{المائله} \\ -x \cdot \\ -2x^2+4 \sqrt{x^3} \\ \ominus x^3+4x \\ \hline 4x \end{array}$$

الرأسية

$$4 - x^2 = 0$$

$$x = \pm 2$$

$$(3) f(x) = \frac{x^4}{x^3 + 2}$$

محمد عمر الخطيب

$$= x + \frac{-2x}{x^3 + 2}$$

$$y = x$$

محمد عمر الخطيب

$$\begin{array}{r} \text{المائله} \\ x \cdot \\ x^3+2 \sqrt{x^4} \\ \ominus x^4+2x \\ \hline -2x \end{array}$$

محمد عمر الخطيب

الرأسية

$$x^3 + 2 = 0$$

$$x^3 = -2$$

محمد عمر الخطيب

$$x = \sqrt[3]{-2}$$

$$(4) f(x) = x + \frac{2}{x + 1}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

المائله

$$y = x$$

الرأسية

$$x = -1$$

محمد عمر الخطيب

خطوط التقارب للدوال غير النسبية

أوجد خطوط التقارب الأفقية والرأسية (إن وجدت)

$$(1) f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

الرأسية : اصغار المقام لا يوجد

الأفقية

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x} = 2. \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x} = -2. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} y = \pm 2. \end{array} \right\}$$

$$(2) f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

الرأسية
 $u - x^2 = 0$
 $x = \pm 2$

الأفقية لا يوجد

ملاحظة مجال الدالة $(-2, 2)$

$$(3) f(x) = \frac{x-4}{|x|-1}$$

الرأسية
 $|x|-1=0$
 $|x|=1$
 $x = -1, x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4}{|x|-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4}{x+1} = 1$$

الأفقية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-4}{|x|-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-4}{-x-1} = -1$$

$y = 1, y = -1$

$$(4) f(x) = \frac{1}{e^x-3}$$

الرأسية
 $e^x-3=0$
 $e^x=3$
 $x = \ln 3$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x-3} = \frac{1}{\infty} = 0$$

الأفقية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x-3} = \frac{1}{0-3} = -\frac{1}{3}$$

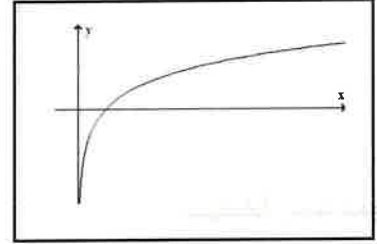
$y = 0, y = -\frac{1}{3}$

$e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$

أوجد خطوط التقارب الأفقية والرأسية (ان وجدت)

(1) $f(x) = 3\ln(x-1)$

الرأسية



لا يوجد خطوط تقارب أفقية

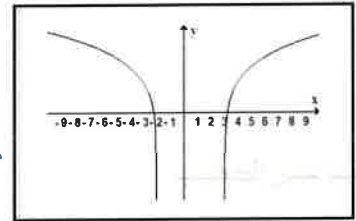
$$x-1=0$$

$$x=1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3\ln(x-1) = \infty$$

(2) $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$

الرأسية



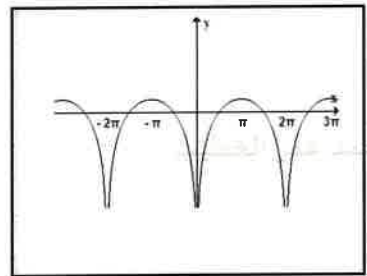
$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = 3, x = -2$$

لا يوجد خطوط تقارب أفقية

(3) $f(x) = \ln(1 - \cos x)$

الرأسية



لا يوجد خطوط تقارب أفقية

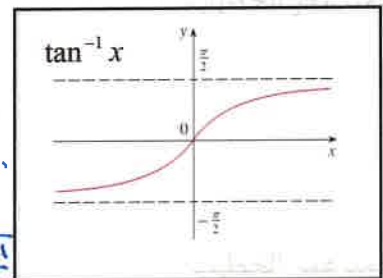
$$1 - \cos x = 0$$

$$\cos x = 1$$

$$x < 0 \quad \pi < x < 2\pi$$

$$x = 2n\pi$$

(4) $f(x) = 3\tan^{-1} x$ لا يوجد خطوط تقارب رأسية



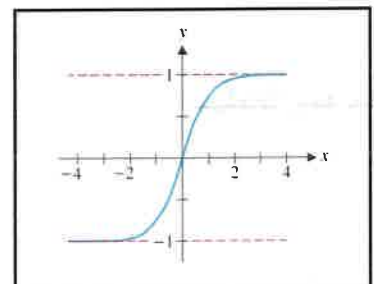
$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3\tan^{-1} x = 3\tan^{-1}(\infty) = 3 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3\tan^{-1} x = 3\tan^{-1}(-\infty) = -3 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$$

$$y = \pm \frac{3\pi}{2}$$

(5) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

لا يوجد خطوط تقارب رأسية



$$e^x + e^{-x} = 0$$

لا يوجد

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -1$$

$$y = \pm 1$$

(1) إذا كانت للدالة: $f(x) = \frac{ax}{bx+6}$ خط تقارب رأسي معادلته: $x = -2$ وخط تقارب افقي

معادلته $y = -3$ فاوجد قيمة الثوابت a, b

الافقى

$$\frac{a}{b} = -3$$

$$a = -3b$$

$$a = -3(3)$$

$$a = -9$$

$x = -2$ خط تقارب رأسي

منه صفر للمقام

$$b(-2) + 6 = 0$$

$$-2b + 6 = 0$$

$$b = 3$$

(2) إذا كانت للدالة: $f(x) = \frac{2}{x-a} + b$ خط تقارب رأسي معادلته: $x = 1$ وخط تقارب افقي

معادلته $y = -3$ فاوجد قيمة الثوابت a, b

خط التقارب الافقى

$$y = b$$

$$b = -3$$

$x = 1$ صفر للمقام

$$1 - a = 0$$

$$a = 1$$

(3) إذا كانت للدالة: $f(x) = \frac{ax^2}{x+b}$ خط تقارب رأسي معادلته: $x = 1$ وخط تقارب مائل

معادلته $y = 2x + 2$ فاوجد قيمة الثوابت a, b

نجد خط التقارب المائل من القسمة الطويلة

$$\begin{array}{r} ax \\ x+b \overline{) ax^2} \\ \underline{- ax^2 + abx} \end{array}$$

$$-abx$$

بمقارنته نأخذ إفتحة مع معادلته الخطية للتقارب

نتنبع ان

$$a = 2$$

$x = 1$ صفر للمقام

$$1 + b = 0$$

$$b = -1$$

(1) إذا كانت للدالة النسبية: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{q(x)}$ لها خط تقارب رأسي وحيد معادلته $x = 3$

$$q(x) = a(x-2)^2$$

خط التقارب الأفقي

وخط تقارب أفقي معادلته $y = -\frac{1}{2}$ فاوجد الدالة $q(x)$

يجب أن تكون الدالة $q(x)$ من الدرجة الأولى
لأنها مكررة وهو $x=3$

$$\frac{1}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -2$$

$$q(x) = -2(x-2)^2$$

(2) إذا كانت للدالة النسبية: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{q(x)}$ لها خطين تقارب رأسيين معادلتهما $x = \pm 3$

$$q(x) = a(x-3)(x+3)$$

خط التقارب الأفقي

وخط تقارب أفقي معادلته $y = 2$ فاوجد الدالة $q(x)$

يجب أن تكون الدالة $q(x)$ من الدرجة الثانية
لأنها أصغر هي ± 3

$$\frac{1}{a} = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$q(x) = \frac{1}{2}(x-3)(x+3)$$

(3) إذا كانت للدالة النسبية: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{q(x)}$ لها خط تقارب رأسي معادلته $x = 3$ وفجوة عند $x = 2$

$$q(x) = a(x-2)(x-3)$$

خط التقارب الأفقي

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2$$

$$q(x) = 2(x-2)(x-3)$$

$x = 2$ وخط تقارب أفقي معادلته $y = \frac{1}{2}$ فاوجد الدالة $q(x)$

يجب أن تكون الدالة $q(x)$ من الدرجة الأولى
لأنها أصغر هي $x = 3, 2$

(4) إذا كانت للدالة النسبية: $f(x) = \frac{x^3 - 3}{q(x)}$ لها خط تقارب مائل معادلته $y = x$

$$q(x) = x^2 + 1$$

يوجد أكثر من إجابة صحيحة.

وليس له خط تقارب رأسي ، فاوجد الدالة $q(x)$

يجب أن تكون الدالة $q(x)$ من الدرجة الثانية ولا تقل

(5) إذا كانت للدالة: $f(x) = \frac{x-4}{q(x)}$ خطين تقارب أفقيين هما $y = \pm 1$ وليس له خط تقارب رأسي ،

$$q(x) = |x| + 1$$

أو

$$q(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

فاوجد الدالة $q(x)$ (الدالة $q(x)$ ليست حدودية)

الحل بالتخمين

(1) إذا كان طول حيوان بعد عدة أيام من الولادة يعطى بالعلاقة : $h(t) = \frac{300}{1 + 9(0.8)^t}$

(أ) اوجد طول الحيوان عند الولادة ($t = 0$)

$$h(0) = \frac{300}{1 + 9(0.8)^0} = \frac{300}{1 + 9} = 30$$

(ب) اوجد طول الحيوان النهائي ($t \rightarrow \infty$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{300}{1 + 9(0.8)^t} = \frac{300}{1 + 9(0)} = 300$$

(2) في إحدى الدراسات على عيون الحيوانات وجد إن قطر البؤبؤ $f(x)$ للحيوان يتناسب عكسياً مع شدة الإضاءة x التي تسقط على عينيه وفق العلاقة :

$$f(x) = \frac{80x^{-0.03} + 60}{8x^{-0.03} + 15}$$

(أ) اوجد نهاية قطر البؤبؤ عندما تنعدم الرؤية ($x \rightarrow 0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{80}{x^{0.03}} + 60}{\frac{8}{x^{0.03}} + 15}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{80 + 60x^{0.03}}{x^{0.03}}}{\frac{8 + 15x^{0.03}}{x^{0.03}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{80 + 60x^{0.03}}{8 + 15x^{0.03}} = \frac{80}{8} = 10$$

(ب) اوجد نهاية قطر البؤبؤ عند الحد الأقصى من الرؤية ($x \rightarrow \infty$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{80}{x^{0.03}} + 60}{\frac{8}{x^{0.03}} + 15} = \frac{0 + 60}{0 + 15} = 4$$

"حل سمارين كامة لوجهة لثانية"

$$① \quad f(x) = x^2, \quad [0, 1], \quad n=2$$

$$\Delta x = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow P = 0, \frac{1}{2}, 1 \quad \text{قيم } x$$

$$\begin{matrix} \rightarrow f(x) \\ (0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}), (1, 1) \end{matrix} \quad \text{النقاط هي}$$

$$d_1 = \sqrt{(\frac{1}{2}-0)^2 + (\frac{1}{4}-0)^2} \approx 0.56$$

$$d_2 = \sqrt{(1-\frac{1}{2})^2 + (1-\frac{1}{4})^2} \approx 0.90$$

$$d = d_1 + d_2 = 0.56 + 0.90 \approx 1.46 \quad \textcircled{A}$$

$$② \quad f(x) = \cos x, \quad [0, \frac{\pi}{2}], \quad n=2$$

$$\Delta x = \frac{\pi/2 - 0}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow P = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$$

$$(0, 1), (\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\pi}{2}, 0) \quad \text{النقاط هي}$$

$$d_1 = \sqrt{(\frac{\pi}{4}-0)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}-1)^2} \approx 0.84$$

$$d_2 = \sqrt{(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})^2 + (0-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} \approx 1.05$$

$$d = d_1 + d_2 = 0.84 + 1.05 = 1.89 \approx 1.90 \quad \textcircled{D}$$

③ $f(x) = \sqrt{x+1}$, $[0, 3]$, $n=2$

$\Delta x = \frac{3-0}{2} = 1.5 \Rightarrow P \rightarrow 0, 1.5, 3$ نقطة

$(0, 1), (1.5, \sqrt{2.5}), (3, 2)$

$d_1 = \sqrt{(1.5-0)^2 + (\sqrt{2.5}-1)^2} \approx 1.6$

$d_2 = \sqrt{(3-1.5)^2 + (2-\sqrt{2.5})^2} = 1.56$

$d = d_1 + d_2 = 1.61 + 1.56 \approx 3.17$

⑬

④

$(1.9, 4.61), (2, 5)$

منه لتقطين

$m = \frac{5-4.61}{2-1.9} = 3.9$

$(1.99, 4.9601), (2, 5)$

$m = \frac{5-4.9601}{2-1.99} = 3.99$

$(2, 5), (2.1, 5.41)$

$m = \frac{5.41-5}{2.1-2} = 4.1$

$(2, 5), (2.01, 5.041)$

$m = \frac{5.041-5}{2.01-2} = 4.01$

$\overline{3.9} \quad \overline{3.99} \quad \overline{4.01} \quad \overline{4.0}$

$m_t \approx 4$

⑭

$$\textcircled{1} \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -11 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3} f(x) \text{ غير موجودة} \quad \textcircled{D}$$

$$\textcircled{2} \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ ع.م} \quad \textcircled{D}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3. \quad \textcircled{B}$$

$$\textcircled{4} \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1 \quad \textcircled{B}$$

٥) محله من السؤال بالتكر من طريقة

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 1 \quad \textcircled{B}$$

عند رسم الدالة $|f(x)|$ من الدالة $f(x)$ نقوم بعكس اي جزء من الدالة $f(x)$ الواقع تحت محور x الى فوق محور x .

$$\textcircled{6} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{g(x)} \quad \text{ع.م} \quad \textcircled{D}$$

لان الدالة $g(x)$ تأخذ قيم سالبة عند $x = -2$ من جهة اليسار والجذر التربيعي لا يقبل سالبة.

⑦ $\lim_{x \rightarrow 0} P(2 + 3 P(x - P(x)))$, $P(x) = x - 1$

$$= P(2 + 3 P(0 - P(0)))$$

$$= P(2 + 3 P(0 - -1))$$

$$= P(2 + 3 P(1))$$

$$= P(2 + 3(0)) = P(2) = 1 \quad \textcircled{A}$$

⑧

العبارة (a) خطأ لأن $f(b) = 2$ من الرسم

العبارة (b) خطأ لأن $f(c)$ غير ع

العبارة (c) خطأ لأن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$

الإجابة $\textcircled{D}$

⑨ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

$\textcircled{B}$

عند $a = 2, a = 4$

⑩ لا نجد النهاية من كل جهة مع توزيع النهاية

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 2 + 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 + 3 = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 3 \quad \textcircled{A}$$

لا يجوز استخدام خواص النهايات مباشرة لأن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ غير معرف

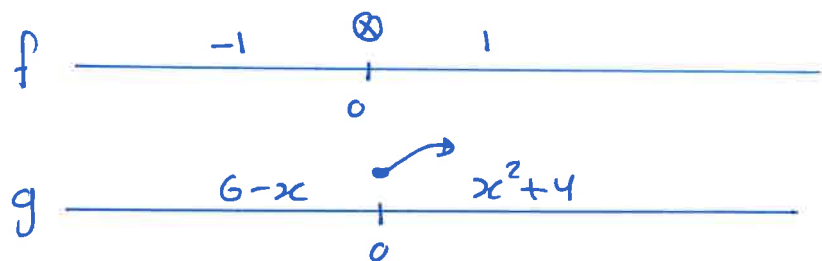
لذا نأخذ النهايات من كل جهة

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f \times \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f \times \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1 \times 0 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} (f \times g)(x) = 0 \quad \textcircled{A}$$

(12)



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1 + 6 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1 + 4 = 5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 5 \quad \textcircled{c}$$

- أسئلة الدرس الثالث -

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin^{-1} \left(\frac{x+1}{2} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) = \pi/6 \quad \textcircled{C}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos^{-1} \left(\frac{x-1}{2} \right) = \cos^{-1} \left(-1/2 \right) = 2\pi/3 \quad \textcircled{A}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{\tan^{-1} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^{-1} x}{x}}{\frac{\tan^{-1} x}{x}} = \frac{1}{1} = 1 \quad \textcircled{B}$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3 \sin x}{|x|} - [x] \quad |x| \xleftarrow{-x} \overset{x}{0} \rightarrow, [0^-] = -1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3 \sin x}{-x} - (-1)$$

$$= -3 + 1 = -2 \quad \textcircled{B}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x^2-1}$$

* (x^2-1)
فروق بين مربعين
 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$$

$$= \frac{1-1}{1+1} = 0 \quad \textcircled{A}$$

$$\textcircled{6} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x} \cdot \frac{1}{\cos 2x} = \frac{4}{2} \cdot 1 = 2 \quad \textcircled{C}$$

$$\textcircled{7} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h} \quad \text{فروق بين مكعبين}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{((2+h) - 2) ((2+h)^2 + 2(2+h) + 2^2)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{(h)}((2+h)^2 + 2(2+h) + 4)}{\cancel{h}}$$

$$= 2^2 + 2(2) + 4 = 12 \quad \textcircled{C}$$

* مكمّل
السؤال بفهم
 $u = 2+h$

- تابع حل اسئلة الدرس الثالث -

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

$$u = \sqrt[3]{x}$$

$$u^3 = x$$

$$x \rightarrow 1$$

$$u \rightarrow 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^3-1}{u-1}$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u-1)(u^2+u+1)}{u-1}$$

$$= 1^2 + 1 + 1 = 3 \quad (D)$$

$$(9) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{e^x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x)(1 + e^x)}{e^x - 1}$$

$$= - (1 + e^0) = -2 \quad (B)$$

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin |x|}{x} \quad \text{p.g.} \quad (D)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-x)}{x} = -1$$

لوجود للطلق، نأخذ النهايات من اليمين واليسار، نلاحظ أنهم $\neq$

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{1 - e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 - e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{e^x}}{1 - e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{e^x} = -1 \quad (C)$$

- تابع حل اسئلة الدرس الثالث -

$$(12) \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x+1|}{x^2-1}$$

$$|x+1| \quad \frac{-(x+1)}{-1} \quad x+1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2} \quad (A)$$

$$(13) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$u = \sqrt{x}$$

$$u^2 = x$$

$$x \rightarrow 1$$

$$u \rightarrow 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^2 \cdot u - 1}{u - 1}$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^3 - 1}{u - 1}$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u-1)(u^2+u+1)}{u-1} = 3 \quad (D) \quad * \text{ يمكن حل السؤال بالمرافق }$$

$$(14) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x - \sin x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin x (1 + \cos x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \sin x (1 + \cos x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\sin x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (A)$$

$$(15) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{2x^2 (1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x^2 (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)(1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \quad (C)$$

- تابع حل أسئلة الدرس الثالث -

$$(16) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - |x|}{|x| - 2x}$$

$$|x| \begin{array}{c} -x \quad x \\ \hline 0 \end{array}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x + x}{-x - 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x}{-3x} = -1 \quad (B)$$

$$(17) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x^2 - 9)}{x - 3} \cdot \frac{x + 3}{x + 3}$$

ضرب لبط، لبطام
في $x+3$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x^2 - 9)(x + 3)}{x^2 - 9}$$

$$= (1)(3 + 3) = 6 \quad (A)$$

$$(18) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2 \sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = (1)(1) = 1 \quad (C)$$

$$(19) \quad \lim_{x \rightarrow 1} 3(x-1)^2 \sin \frac{2}{x-1}$$

من نظرية الشطيرة :

$$-1 \leq \sin \frac{2}{x-1} \leq 1$$

$$= 0 \quad (A)$$

$$-3(x-1)^2 \leq 3(x-1)^2 \sin \frac{2}{x-1} \leq 3(x-1)^2$$

$\searrow \quad \quad \quad \searrow$
 $0 \quad \quad \quad 0$

$$(20) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin x + 1} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{\sin x + 1} + 1}{\sqrt{\sin x + 1} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 1 - 1}{x(\sqrt{\sin x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin x + 1} + 1} = \frac{1}{2} \quad (A)$$

- تابع حل اسئلة الدرس الثالث -

$$\begin{aligned}
 (21) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2 - \sqrt{x+4}} \cdot \frac{2 + \sqrt{x+4}}{2 + \sqrt{x+4}} \\
 = & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x(2 + \sqrt{x+4})}{4 - (x+4)} \\
 = & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x(2 + \sqrt{x+4})}{4 - x - 4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x(2 + \sqrt{x+4})}{-x} \\
 = & -(3(2 + \sqrt{4})) = -12 \quad (A)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (22) \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x} \\
 = & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2 \sin^2 \frac{1}{2} x}}{x} \\
 = & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2} \left| \sin \frac{1}{2} x \right|}{x} \cdot \frac{1}{2} \\
 = & \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (A)
 \end{aligned}$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} x$$

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{1}{2} x$$

يمكن حل السؤال
بالقرب من
 $\sqrt{1 + \cos x}$

$$\begin{aligned}
 (23) \quad & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\sin x - \cos x} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \\
 = & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - 1}{\sin x - \cos x} \\
 = & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}}{\sin x - \cos x} \\
 = & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} = \sqrt{2} \quad (B)
 \end{aligned}$$

- تابع حد اسئلة الدرس الثالث -

$$(24) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi}$$

$$* \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$u = \frac{\pi}{2} - x$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{2(-u)}$$

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$u \rightarrow 0$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{-2u}$$

$$= -\frac{1}{2} \quad (B)$$

$$(25) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} \cdot \frac{1 + \cos \sqrt{x}}{1 + \cos \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2 \sqrt{x}}{x(1 + \cos \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \sqrt{x}}{x(1 + \cos \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1 + \cos \sqrt{x}}$$

$$= (1)(1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 1/2 \quad (A)$$

$$(26) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{x}-1}{(\cancel{x}-1)(x+1)} = 1/2 \quad (B)$$

- تابع حل اسئلة الدرس الثالث -

$$(27) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)} = \frac{9}{2} \quad (B)$$

$$(28) \quad \lim_{x \rightarrow 16} \frac{x - \sqrt{x} - 12}{\sqrt{x} - 4}$$

$u = \sqrt{x}$
 $u^2 = x \Rightarrow x = u^2$
 $x \rightarrow 16$
 $u \rightarrow 4$

$$\lim_{u \rightarrow 4} \frac{u^2 - u - 12}{u - 4}$$

$$\lim_{u \rightarrow 4} \frac{(u-4)(u+3)}{(u-4)} = 7 \quad (A)$$

$$(29) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (A)$$

$$(30) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax - 6}{x - 3} \quad \text{موجوده}$$

يجب أن يكون البسط عند $x = 3$

$$3^2 + a(3) - 6 = 0$$

$$3a - 6 + 9 = 0$$

$$3a + 3 = 0$$

$$a = -1 \quad (B)$$

يساوي صفر

- تابع حد اسئلة الدرس الثالث -

(31) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-a} - 3}{x-1}$ موجودة

يجب أن تكون نهاية البسط = صفر

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-a} - 3 = 0$$

$$(\sqrt{1-a})^2 = (3)^2$$

$$1-a = 9$$

$$a = -8 \quad (C)$$

(32) $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$

$$4a = a^2(1) + 4$$

$$a^2 - 4a + 4 = 0$$

$$(a-2)^2 = 0$$

$$a = 2 \quad (C)$$

(33) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} a[x]$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x} = a(2)$$

$$-1 = 2a$$

$$a = -1/2 \quad (B)$$

$$|x| \quad \frac{-x}{0} \quad x$$

$$|\sin x| \quad \frac{-\sin x}{0} \quad \sin x$$

(34) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\ln e^{ax}} = \frac{1}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{ax} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 6$$

$$(D)$$

- تابع حل أسئلة الدرس الثالث -

(35)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+ax} - \sqrt{2}}{x} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+ax} - \sqrt{2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{2+ax} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+ax} + \sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{2} + ax - \cancel{2}}{x(\sqrt{2+ax} + \sqrt{2})} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{x(\sqrt{2+ax} + \sqrt{2})} = \sqrt{2}$$

$$\frac{a}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{a}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad a = 4 \quad (D)$$

(36)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + 5}{x - 3} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -5$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + b) = 2$$

$$-5 + b = 2 \Rightarrow b = 7 \quad (A)$$

(37)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + bx + 2}{x - 1} = 1$$

* نصيحة السبيل تساوي صفر عند $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} ax^2 + bx + 2 = 0$$

$$a + b + 2 = 0 \Rightarrow a + b = -2$$

- تابع حل أسئلة الدرس الثالث -

(38)

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{x-b}{x^2-2x-15} \quad \text{موجود}$$

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{(x-b)}{(x-5)(x+3)}$$

$$b = 5 \quad , \quad b = -3 \quad \textcircled{D}$$

(39)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(ax)}{x^2} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} \cdot \frac{\sin(ax)}{x} = 4$$

$$a \cdot a = 4$$

$$a^2 = 4$$

$$a = \pm 2 \quad \textcircled{A}$$

(40)

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \quad \text{من نظرية السطيرة :}$$

$$e^{-1} \leq e^{\sin \frac{1}{x}} \leq e^1$$

$$\underset{\rightarrow 0}{e^{-1} x^2} \leq \underset{\rightarrow 0}{x^2} \underset{\rightarrow 0}{e^{\sin \frac{1}{x}}} \leq \underset{\rightarrow 0}{e x^2} = \textcircled{A}$$

(41)

$$|g(x) - 4| \leq 2(2-x)$$

$$-2(2-x) \leq g(x) - 4 \leq 2(2-x)$$

$$-2(2-x) + 4 \leq g(x) \leq 2(2-x) + 4$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 2} -2(2-x) + 4 &= 4 \\ \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 2} 2(2-x) + 4 &= 4 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4 \quad \textcircled{B}$$

- تابع حد اسئلة الدرس الثالث -

(42)

$$|g(x)| \leq M$$

$$-M \leq g(x) \leq M$$

$$-Mx^2 \leq x^2 g(x) \leq Mx^2$$

• $\lim_{x \rightarrow 0} -Mx^2 = 0$ } من نظرية الشطيرة : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 g(x) = 0$ (A)

• $\lim_{x \rightarrow 0} Mx^2 = 0$ } $\Rightarrow$

(43)

$$x^2 - x^3 \leq x^2 f(x) \leq \sin^2 x$$

بالقسمة على x^2 :

$$\frac{x^2 - x^3}{x^2} \leq \frac{x^2 f(x)}{x^2} \leq \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\frac{x^2 - x^3}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1-x)}{x^2} = 1$

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 1$

(B) ... $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ من نظرية الشطيرة

(44) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x + \cos x - 2}{\sin^2 x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x + 2)(\cos x - 1)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = -\frac{3}{2} \quad (B)$$

©

$$\begin{array}{r} x+3 \\ \hline x+3 \end{array}$$

$$= 1 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \quad \textcircled{A}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan(\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} = -1(1) = -1 \quad (B)$$

- حل أسئلة الدرس الرابع -

① الانفصال الوحيد الذي يمكن إزالته هو الفجوة .. (C)

② $f(x) = \frac{x}{x^3+x^2} = \frac{x}{x^2(x+1)}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(x+1)} \begin{matrix} \nearrow +\infty \\ \searrow -\infty \end{matrix} \Rightarrow \text{ف. م. غ.}$

انفصال لا نهائي .. (C)

③ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|2-x|}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{2(x-2)}$

• $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{2(x-2)} = \frac{\cancel{x-2}}{2(\cancel{x-2})} = \frac{1}{2}$ $|x-2| \frac{2-x}{2} \frac{x-2}{2}$

• $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{2(x-2)} = \frac{\cancel{2-x}}{2(\cancel{x-2})} = -\frac{1}{2}$

نوع الانفصال قفزة (B)

④ $g(x) = \frac{2x-6}{x^2-9} = \frac{\cancel{2(x-3)}}{(x-3)(x+3)}$ فجوة

عند $x=-3$ انفصال لا نهائي .. (B)

⑤ $f(x) = \frac{1}{\ln x^2} = \frac{1}{2 \ln |x|}$

فجوة $x=0$
 لا نهائي $x=1$: نقاط الانفصال (3)
 لا نهائي $x=-1$ (C)

⑥ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln x^2} = \frac{1}{-\infty} = 0$

نوع الانفصال فجوة ..
 يمكن إزالته (A)

- تابع حل اسئلة الدرس الرابع -

7) $f(x) = \frac{x^2 + x}{x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x} = 1$

(A)

النهاية موجودة للدالة أعلاه .. لها نقطة انفصال يمكن التخلص منها عند $x=0$

8) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 - x} & x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$

* نقاط الانفصال :- أصفار المقام
* نقاط التفرع :- ممكن

أصفار المقام :

$x^2 - x = 0$

$x = 0, x = 1$

وهي تنتمي للمجال الفرعي

$x \leq 2$

نقاط التفرع $x = 2$:

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 = 1$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ م. غ}$

* نقاط الانفصال عددها (3) وهي : 0, 1, 2 ... (C)

9) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

من نظرية الشطيرة :

$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$

$-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$
 $\rightarrow 0$

(A) نوع الانفصال فتحة قابلة للإزالة

10) $f(x) = \frac{1}{|x|}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = \infty$

(D) انفصال لانهاغي ..

- تابع حل أسئلة الدرس الرابع -

(11)

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$$

$$= \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$$

لكن فترة الانحصار هو المجال .. فالحل هو $D: (-\infty, \infty)$ (A)

(12)

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$4 - x^2 \geq 0$$

مجال الدالة $D: [-2, 2]$ (C)

بالنظر فترة الانحصار: $[-2, 2]$

(13)

$$g(x) = \cos(x-1)$$

تكون متصلة على مجالها ..

$$-1 \leq x-1 \leq 1$$

$$0 \leq x \leq 2$$

$D: [0, 2]$ (C)

(14)

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$$

تكون متصلة على مجالها ..

$$2x - x^2 > 0$$

$D: (0, 2)$ (D)

(15)

$$g(x) = \frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{x}}$$

فترة الانحصار هي المجال ..

أيضا المقام :

$$x = 0$$

مجال المقام :

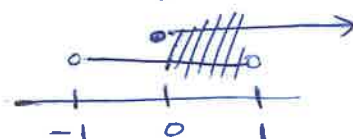
$$x \geq 0$$

مجال البسط :

$$1 - x^2 > 0$$

(A)

$D: (0, 1)$



- تابع حل أسئلة التمرين الرابع -

(16)

$$g(x) = \ln(\cos x)$$

$$\cos x > 0$$

موجب $\begin{cases} Q1 \\ Q4 \end{cases}$

S	A
T	C

الرابع ربع

الربع الأول

$$-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$$

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + 2n\pi \quad (C)$$

(17)

$$g(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln x}$$

الصفر، المقام :

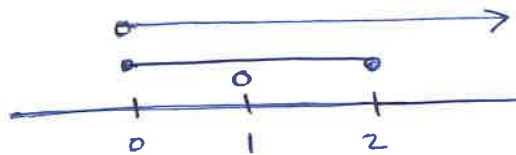
$$\ln x = 0$$

$$x = 1$$

مجال المقام :

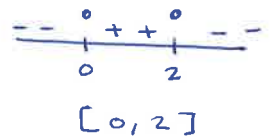
$$x > 0$$

$$(0, \infty)$$



مجال البسط :

$$2x - x^2 \geq 0$$



$$D: (0, 1) \cup (1, 2] = (0, 2] \setminus \{1\} \quad (B)$$

(18)

$$g(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x^2-2x}}$$

الصفر، المقام :

$$x = 0, 2$$

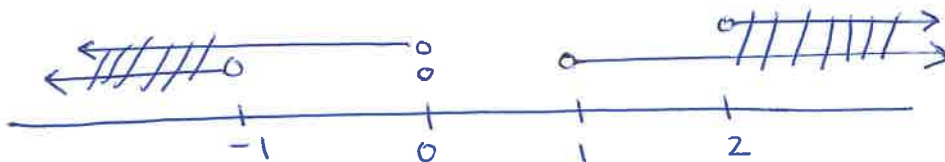
مجال المقام :

$$x^2 - 2x \geq 0$$



مجال البسط :

$$x^2 - 1 > 0$$



$$D: (-\infty, -1) \cup (2, \infty) \quad (A)$$

- تابع حل اسئلة الدرس الرابع -

(19) $g(x) = \ln(e^x - 1)$

$$e^x - 1 > 0$$

$$e^x > 1$$

$$x > \ln 1$$

$$x > 0 \quad D: (0, \infty) \quad (C)$$

(20) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x^3}}$

$$x^2 - x^3 > 0$$



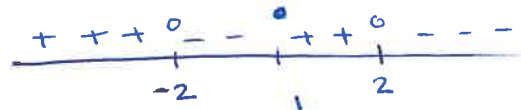
$$D: (-\infty, 0) \cup (0, 1) \quad (B)$$

(21) $g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{4-x^2}}$

* لا توجد الجذر -

$$\frac{x-1}{4-x^2} \geq 0$$

أصفر البسط $x = 1$
أصفر المقام $x = \pm 2$



$$D: (-\infty, -2) \cup [1, 2) \quad (C)$$

(22) $g(x) = \frac{1}{\sin^{-1} x}$

أصفر المقام:
 $x = 0$

مجال المقام:
 $[-1, 1]$

مجال البسط:
 $(-\infty, \infty)$

$$D: [-1, 0) \cup (0, 1] \quad (C)$$

(23) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1} + e^x}{x^2 - 2}$

مجال البسط: $x \geq 1$
مجال المقام: R
أصفر المقام: $x = \pm \sqrt{2}$

فترة التعريف هي المجال

$$[1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$$



- تابع حل اسئلة الترس الرابع -

$$(24) \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - x}{[x] - 1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - 3}{2 - 1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) - 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6$$

$$f(3) = 6 \quad (A)$$

$$(25) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 f(x) - \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$= 2 f(0) - 1$$

$$= 2(-3) - 1 = -7 \quad (B)$$

$$(26) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{\sin x}{x}\right) - 1 = 3$$

$$f\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}\right) - 1 = 3$$

$$f(1) - 1 = 3 \Rightarrow f(1) = 4 \quad (B)$$

$$(27) \quad g(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{1 - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x} = 3 \quad (C)$$

$$(28) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} \quad \text{نقطة الانفصال } x=0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^x - 1} = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases} \quad (A)$$

- تابع حل أسئلة الترس الرابع -

(29)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \\ &= (1)(0) = 0 \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos^2 x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (B)$$

(30)

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - 1}{\sin 3x} \cdot \frac{\sqrt{2x+1} + 1}{\sqrt{2x+1} + 1}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1-1}{\sin 3x (\sqrt{2x+1} + 1)}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \quad (A)$$

(31)

$$f(x) = \frac{9-x^2}{mx+2}$$

حتى تكون الدالة متصلة على $(-\infty, \infty)$ يجب أن يكون المقام عدد غير الصفر عند أي قيمة x لذلك يجب أن تكون $m=0$

(A)

(32)

$$\frac{a(\tan^{-1}x + 2)}{2b^x - 7} = \ln(x-2) + x^2$$

$\leftarrow 0 \rightarrow$ $\leftarrow 3 \rightarrow$

$$(a \tan^{-1} 0 + 2) = 2b^0 - 7$$

$$2a = 2 - 7$$

$$2a = -5$$

$$a = -\frac{5}{2}$$

(B)

$$2b^3 - 7 = \ln(3-2) + 3^2$$

$$2b^3 - 7 = 9$$

$$2b^3 = 16$$

$$b^3 = 8$$

$$b = 2$$

- تابع حل أسئلة الدرس الرابع -

$$(33) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{1-x} & x > 1 \\ a & x \leq 1 \end{cases}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(1+x)}{1-x} = -2 \quad (C)$$

$$(34) \quad a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2\sin^2 x)}{4x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{4x^2} = \frac{1}{2} \quad (B)$$

$$(35) \quad f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$$

من نظرية الشطيرة : $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$

$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$

$\rightarrow 0 \quad \rightarrow 0$

$c - 1 = 0$

$c = 1 \quad (B)$

$$(36) \quad \xleftrightarrow{x^2 + cx - 18} \quad \xleftrightarrow{x^2 \sin \pi x}$$

$$2^2 + 2c - 18 = 2^2 \sin 2\pi$$

$$2c - 14 = 0$$

$$c = 7 \quad (B)$$

$$(37) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - mx + 2}{x - 1} = n$$

(1) نهاية البسط = 0

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - mx + 2 = 0$$

$$1 - m + 2 = 0 \Rightarrow m = 3$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)} = n \Rightarrow 1 - 2 = n \Rightarrow n = -1 \quad (C)$$

(2)

$\frac{2x^2 - a}{x - 2}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 - a = 0$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x + 6$$

$$8 = 2b + 6 \Rightarrow b = 1 \text{ (A)}$$

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2+bx+6}$$

$$3^2 + b(3) + 6 = 0$$

40

$$x^2 + 3 = 4x$$

$$x^2 + 3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 1, 3 \quad \textcircled{c}$$

$12\% \cdot x$
 $16\% \cdot (x - 20000) + 6$

$\leftarrow 20,000 \rightarrow$

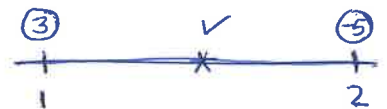
$$\frac{12}{100} (20000) = \frac{16}{100} (20000 - 20000) + b$$

$$2400 = b \quad (A)$$

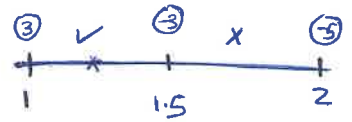
- تابع حد اسئلة التمرين الرابع -

(42)

طول الفترة 1 و الجذر 1.5



طول الفترة 1/2 و الجذر 1.25



طول الفترة 1/4 و الجذر 1.375



(C)

(43)

$\lim_{x \rightarrow b} f(x)$,,

موجودة والباله
 $f(x)$ غير منقطه عند
 $x = 1, 4$

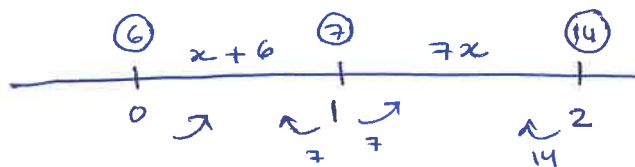
(C)

(44)

$$f(x) = \begin{cases} 6 & x=0 \\ x+6 & 0 < x < 1 \\ 7x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

(C)

تحقق شروط الاتصال
على الفترة $[0, 2]$



لان :

(45)

$$h(x) = \sqrt{1-x}$$

(B)

صحة الالهه تحقق شروط الاتصال على $[0, 1]$

(46)

$\lim_{x \rightarrow 1} g(f(x))$



لأن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ موجودة .. والالهه اكافيه $g(x)$ منقطه فان :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} g(f(x)) &= g(\lim_{x \rightarrow 1} f(x)) \\ &= g(2) = -1 \end{aligned}$$

(B)

(47)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sin \left[\frac{\pi}{2} f(x) \right]$$

لأن النهاية موجودة والالهه $\sin$ منقطه :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sin \left[\frac{\pi}{2} f(x) \right] = \sin \left(\frac{\pi}{2} (-1) \right) = -1$$

(C)

- تابع حد اسئلة الدرس الرابع -

(48)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(3-x)$$

$$u = 3-x$$

$$x \rightarrow 1^-$$

$$u \rightarrow 2^+$$

$$= \lim_{u \rightarrow 2^+} f(u) = 1 \quad (B)$$

(49)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x))$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) \quad \text{حد (1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$= 2$$

(2) الواجب انك، صيغ $f(x)$ متصلة عند $x=2$ فان :

(B)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow 1} g(x))$$

$$= f(2) = 0$$

(50)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2 - x)$$

$$u = x^2 - x$$

$$\begin{array}{c} \text{الاشارة} \\ x^2 - x \end{array} \quad \begin{array}{c} + \quad + \quad - \quad - \quad + \quad + \\ \hline 0 \quad \quad \quad 1 \end{array}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0^-} f(u)$$

$$x \rightarrow 0^+$$

لذلك

$$u \rightarrow 0^-$$

$$= 3 \quad (A)$$

(51)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2 - 2x + 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2 - 2(x-1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{x-1}$$

$$5 - 2 = 3 \quad (B)$$

- تابع حد استمرارية الدرس الرابع -

(52) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 5$ معلوم

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{f(x) - 2}$$

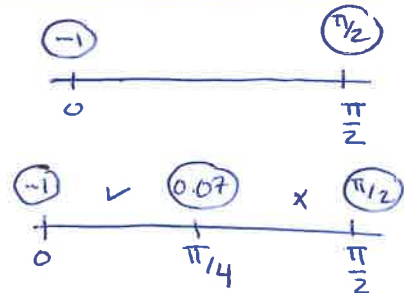
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^2 - 1}{x - 1}}{\frac{f(x) - 2}{x - 1}} \quad \text{بالقسمة على } (x - 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}}{\frac{f(x) - 2}{x - 1}} = \frac{2}{5} \quad (B)$$

(53) $f(x) = x - \cos x$

$$r_1 = \frac{0 + \pi/2}{2} = \pi/4$$

$$r_2 = \frac{0 + \pi/4}{2} = \pi/8 \quad (B)$$



(54) يجب أن تكون الدالة متصلة على الفترة $[0, 1]$...
وصورة الصفر وصورة الواحد في الدالة مختلفتان في الإشارة،

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 1} \quad \text{متصلة}$$

$$f(0) = -1$$

$$f(1) = 1/2$$

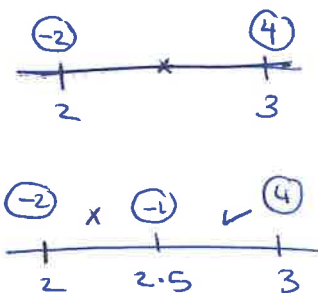
(D)

(55)

$$r_1 = \frac{2 + 3}{2} = 2.5$$

(C)

$$r_2 = \frac{2.5 + 3}{2} = 2.75$$



$$(56) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\sin \pi x}{x}\right)$$

$$= \cos\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{x}\right)$$

$$= \cos(\pi) = -1$$

(C)

$$(57) \quad f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad g(x) = x^2 - 5$$

$$f(g(x)) = f(x^2 + 5)$$

$$= \frac{1}{x^2 - 5 + 1}$$

$$= \frac{1}{x^2 - 4}$$

الزوال $f(g(x))$ غير معرف عند $x = \pm 2$ ، لنفهم

$$x = \pm 2 \quad (D)$$

- حل أسئلة التمرين الخامس -

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0 \quad \textcircled{A}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x = e^{-2} \quad \textcircled{D} \quad \dots \text{قاعدة}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^2 + x) - \ln x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x^2 + x}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x(x+1)}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+1) \\ &= \ln(1) = 0 \quad \textcircled{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad & \lim_{x \rightarrow 3^+} e^{\ln \frac{x-3}{x^2-9}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{x^2-9} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{x-3}}{(\cancel{x-3})(x+3)} = \frac{1}{6} \quad \textcircled{B} \end{aligned}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} = -1 \quad \textcircled{B}$$

$$\textcircled{6} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-|x|} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0 \quad \textcircled{D}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{7} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{x^2+2} - x \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+2} + x}{\sqrt{x^2+2} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x^2+2 - x^2)}{\sqrt{x^2+2} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{|x| + x} = 1 \quad \textcircled{A} \end{aligned}$$

- تابع $\rightarrow$ استعمل الدريج الكامل -

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2 + 10^{1/x}} = \frac{1}{2 + 10^{-\infty}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1000}} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2} \quad (A)$$

$$(9) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 3x^5}{2|x^5| + x}$$

$|x| \begin{array}{c} -x \\ 0 \\ x \end{array}$
 $|x^5| \begin{array}{c} -x^5 \\ 0 \\ x^5 \end{array}$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 3x^5}{-2x^5 + x} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \quad (A)$$

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \tan^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) \quad \text{من أجل } x \rightarrow 0$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) = \tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^-} \tan^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) = \tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

(D)

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{3e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \frac{2^x}{e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{e} \right)^x = \frac{1}{3} (0) = 0 \quad (C)$$

$$(12) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \cot^{-1} \left(\frac{x+1}{x^2+1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} \left(\frac{x^2+1}{x+1} \right) = \tan^{-1} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x+1} \right)$$

$$= \tan^{-1}(\infty) = \pi/2 \quad (A)$$

$$(13) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{-\tan^2 x} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0 \quad (D)$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$(14) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\cot x} = e^{-\infty} = 0 \quad (D)$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

- تابع حد مسئله الرئيس لافس -

$$\begin{aligned} (15) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(e^{-\frac{1}{x^2}} \right) \\ &= \sin \left(\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} \right) = \sin \left(e^{\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2}} \right) \\ &= \sin \left(e^{-\infty} \right) = \sin \left(\frac{1}{e^{\infty}} \right) = \sin(0) = 0 \quad (D) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (16) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+1} - x \quad (\infty - \infty) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0 \quad (A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (17) \quad & \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{3 + \tan^{-1} 1/x} \\ &= \sqrt{3 + \tan^{-1}(-\infty)} = \sqrt{3 - \frac{\pi}{2}} \quad (B) \end{aligned}$$

$$(18) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sec^{-1} \left(\frac{x^2+1}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos^{-1} \left(\frac{x+1}{x^2+1} \right) = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2} \quad (C)$$

$$\begin{aligned} (19) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x-2) - \ln(ex+4) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x-2}{ex+4} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{ex+4} \right) \\ &= \ln \left(\frac{1}{e} \right) = -1 \quad (C) \end{aligned}$$

- تابع حل أسئلة الدرس الخامس -

$$(20) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 1} - 2x \cdot \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2x}{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x + 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x + 1}{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2x}$$

↓ تهميل
↓ تهميل

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{\sqrt{4x^2} + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{2x + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{4x} = -\frac{1}{2} \quad (A)$$

$$(21) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = 1 \quad (C)$$

$$(22) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 + 1)^2 - 2x^6}{1 - x^6}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - \dots - 2x^6}{1 - x^6}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^6 + \dots}{1 - x^6} = \frac{-1}{-1} = 1 \quad (D)$$

- تابع حد اسئلة الدرس الخامس -

$$(23) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\tan^{-1} x)$$

$$= \sin(\tan^{-1} \infty) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad (A)$$

$$(24) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sin x + e^x)}{\ln(2e^x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^x)}{\ln 2 + \ln e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln e^x}{\ln e^x} = 1 \quad (B)$$

$$(25) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x)^{2/x}$$

★

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{2u}$$

$$u = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{1}{u}$$

$$x \rightarrow 0^+$$

$$u \rightarrow \infty$$

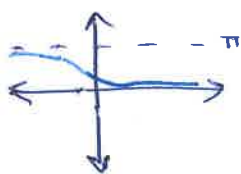
$$= \left[\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{u}\right)^u \right]^2 = (e^{-1})^2 = e^{-2} \quad (B)$$

$$(26) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \cot^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

★

$$= \pi + \tan^{-1}(0)$$

$$= \pi \quad (B)$$



* يمكن حل السؤال من الرسم

$$(27) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan^{-1}(\ln x)$$

$$= \tan^{-1}(-\infty) = -\tan^{-1}(\infty) = -\frac{\pi}{2} \quad (B)$$

- كتاب حل أسئلة الدرس الخامس -

$$(28) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \sec^2 x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos^2 x} = \frac{\pi/2}{0} = +\infty$$

$$(29) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \sec^{-1}(\ln x) \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos^{-1}\left(\frac{1}{\ln x}\right) \\ = \cos^{-1}(0) = \pi/2 \quad (A) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{-\infty} = 0 \end{array} \right.$$

(30) حتى يكون للدالة خط تقارب مائل يجب أن تكون درجة البسط أكبر من درجة المقام بواحد لذلك (C)

$$(31) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} - 1 = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1/x} - 1 = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$y = 0 \quad (A)$$

$$(32) \quad g(x) = \frac{3}{e^x - 2}$$

أصفاء المقام:

$$e^x - 2 = 0$$

$$e^x = 2$$

$$\ln e^x = \ln 2$$

$$x = \ln 2 \quad (D)$$

- تابع حل أسئلة التمرين الخامس -

(33)

$$g(x) = 2 \ln(2x - 6) + 1$$

خط التقارب الرأسي :

$$2x - 6 = 0$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

(C)

(34)

$$g(x) = 2x + \frac{1}{x-1}$$

(D)

خط التقارب المائل هو $y = 2x$ لأن $\frac{1}{x-1}$ يقترب من الصفر...

* يمكن توصيف المقامات ثم القسمة الطويلة...

(35)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -1$$

خطوط التقارب الأفقية هي $y = \pm 1$

(36)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2e^x + 1 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x + 1 = 2 \cdot \frac{1}{e^\infty} + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$\Rightarrow y = 1$$

خط التقارب الأفقي

(B)

- تابع حل أسئلة الدرس الخامس -

$$(37) \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{4x^{-1} - 10}{x^{-1} + 5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\frac{4}{x} - 10}{\frac{1}{x} + 5} = \frac{-10}{5} = -2$$

$$y = -2 \quad (B)$$

$$(38) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4}{|x|-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4}{x-2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-4}{|x|-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-4}{-x-2} = -1$$

$$y = \pm 1 \quad (A)$$

$$(39) \quad g(x) = \frac{x-2}{|x|-2}$$

(1) نجد أولاً أصفار المقام :

$$|x| - 2 = 0$$

$$|x| = 2$$

$$x = \pm 2$$

(2) نجد النهاية عند كل قيمة

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{|x|-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{|x|-2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{-x-2} = \pm \infty$$

* يوجد خط تقارب رأسي عند $x = -2$ وحيد

(C)

- تابع خذ اسئلة الرئيس الخامس -

(40)

$$g(x) = \frac{x^3}{4 - x^2}$$

الناتج $-x$

خط المقارب المائل

$$y = -x \quad (B)$$

قسمة مطولة :

$$\begin{array}{r} -x \\ -x^2 + 4 \overline{) x^3} \\ \underline{-(x^3 - 4x)} \\ 4x \end{array}$$

(41)

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

* عند خطوط المقارب الرأسية لا نهائي
لأن أصفار المقام عدد لا نهائي

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \pm n\pi$$

(42)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2 f(x) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2(2) = 4 \quad (D)$$

(43)

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{g(x)} = \frac{(x-2)(x+2)}{g(x)}$$

* المقام يجب أن يحتوي على $x-3$ لوجود خط مقارب رأسي

* المقام يجب أن يحتوي على $x-2$ لوجود الفجوة عند $x=2$

$$g(x) = 2(x-3)(x-2) \quad (C)$$

لأن خط المقارب الأفقي $y = \frac{1}{2}$

- تابع حل أسئلة الدرس الخامس -

$$\textcircled{44} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|a|x^3 - 4}{2 + 3x^3} = 1$$

$$\frac{|a|}{3} = 1 \Rightarrow |a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3. \textcircled{D}$$

$$\textcircled{45} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{kx^2 + 1}{(1 - 2x)^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{kx^2 + 1}{1 - 4x + 4x^2} = 1$$

$$\frac{k}{4} = 1 \Rightarrow k = 4 \textcircled{A}$$

$$\textcircled{46} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + 2x^3 - 1}{1 - 5x^4} = 2$$

الأسئلة موجودة :

$$\bullet \quad n = 4$$

$$\bullet \quad \frac{a}{-5} = 2 \Rightarrow a = -10$$

$$\bullet \quad a + n = -10 + 4 = -6. \textcircled{C}$$

$$\textcircled{47} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3+m)x^4 - 2x^3 - 1}{2x^4 + 2x^3 - x} = 4$$

$$\frac{3+m}{2} = 4 \Rightarrow 3+m = 8$$

$$m = 5 \textcircled{B}$$

- تابع حد اسبقه الاربى الخامس -

(48)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 (K|x| - 1)}{1 - 3x^3} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 (K(-x) - 1)}{1 - 3x^3} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-Kx^3 - x^2}{1 - 3x^3} = 2$$

$$-\frac{K}{-3} = 2 \Rightarrow K = 6 \quad (B)$$

(49)

$x = -3$ ليس من المقام صفر

$$\begin{aligned} -3 + c &= 0 \Rightarrow c = 3 \\ \frac{a}{1} &= 2 \Rightarrow a = 2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} -3 + c &= 0 \\ \frac{a}{1} &= 2 \end{aligned}} \right\} a + c = 5$$

(C)

(50)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{70}{1 + 3e^{-0.2t}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{70}{1 + \frac{3}{e^{0.2t}}} = \frac{70}{1 + 0} = 70\% \quad (A)$$

★

(51)

$$x-1 \leq [x] \leq x$$

نظام ان

البقيّة على x

$$\frac{x-1}{x} \leq \frac{[x]}{x} \leq \frac{x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x} = 1$$

من البقيّة

(52)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x} + kx = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + kx^2}{x} = 2$$

يجب ان يكون البسط فيكون فقط x وليس x^2

(A)

$$k = -1$$

لذلك

(53)

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + x - 6}$$

المائل

$$x - 1$$

$$x^2 + x - 6 \mid x^3$$

$$\ominus x^3 \oplus x^2 \ominus 6x$$

$$\oplus -x^2 \oplus 6x$$

$$\oplus -x^2 \oplus 6x - 6$$

$$7x - 6$$

$$y = x - 1$$

الرأسية

المقام

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = -3, x = 2$$