Thursday, 25 April 2024

مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL

تطبيقات على التكامل المحدود

6.4 طول القوس ومساحة السطح

+971566151988/
أ/ محمد طه

نواتج التعلم

- ايجاد طول القوس في فترة معينة باستخدام التكامل المحدود
- إيجاد مساحة سطح مجسم دوراني باستخدام التكامل المحدود
- حل المسائل الرياضية التي تتضمن تطبيقات على طول القوس أو مساحة السطح

أولاً :إيجاد طول قوس من منحنى دالة معطاة في فترة معطاة باستخدام التكامل المحدود.




Thursday, 25 April 2024

التقييم القبلي

Khan Academy

https://www.khanacademy.org/math/old-integral-calculus/area-and-arc-length-ic/area-between-curves/e/area-between-a-curve-and-an-axis?modal=1

03:00

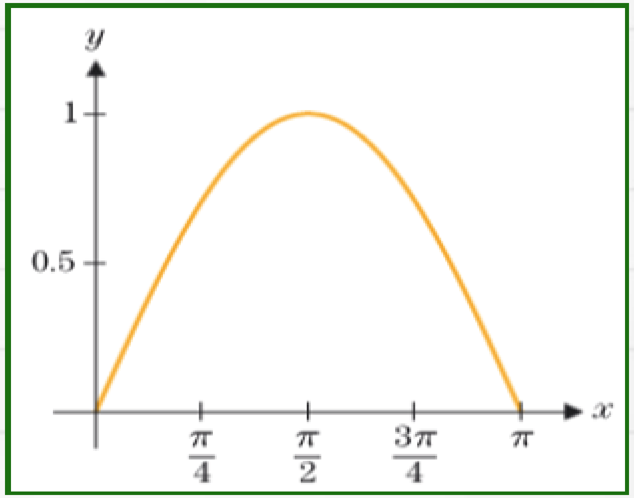
مقدمة

https://www.khanacademy.org/math/ap-calculus-bc/bc-applications-of-integration-new/bc-8-13/v/arc-length-formula

+971566151988/

أ/ محمد طه

طول القوس

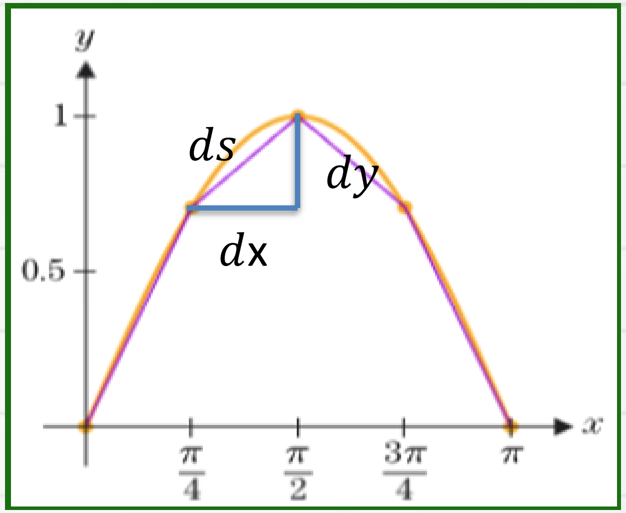


بتقسيم المنحنى إلى عدة مقاطع خطية يبلغ طول كل قطعة منها :

كلما قمنا بزيادة عدد المقاطع سنحصل على تقدير تقريبي أفضل لطول القوس

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$= \sqrt{(dx)^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$



$$\text{طول القوس} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Thursday, 25 April 2024

مثال (Q7) :صفحة446:

احسب بالضبط طول القوس $y = 4x^{\frac{3}{2}} + 1, \qquad 1 \le x \le 2$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^{\frac{1}{2}}$$

طول القوس $= \int_a^b \sqrt{(1 + (f'(x)^2)}\, dx$

$$= \int_1^2 \sqrt{1 + \left(6x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{1 + 36x}\, dx$$

$$u = 1 + 36x \qquad \frac{du}{dx} = 36,\ dx = \frac{du}{36}$$

$$x = 1, \qquad u = 37$$

$$x = 2, \qquad u = 73$$

$$\int_{37}^{73} \sqrt{u}\frac{du}{36} = \frac{\sqrt{u^3}}{54}\Bigg]_{37}^{73} = \frac{\sqrt{73^3}}{54} - \frac{\sqrt{37^3}}{54} = 7.3824$$

مثال (Q8): صفحة446:

قم بتقريب طول القوس

$$y = \frac{1}{2}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right), \qquad 0 \le x \le 1$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} - e^{-2x}$$

طول القوس $= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + (e^{2x} - e^{-2x})^2}\, dx$$

يمكنك استخدام الآلة الحاسبة

$$= \int_0^1 \sqrt{e^{4x} - 1 + e^{-4x}}\, dx \quad = 3.056$$

مثال : قم بتقريب طول القوس

$$f(x) = x^2, \qquad [0,1]$$

$$f'(x) = 2x$$

طول القوس $= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

يمكنك استخدام الآلة الحاسبة

طول القوس ≈ 1.4789

Thursday, 25 April 2024

مثال :

قم بتقريب طول القوس

$$f(x) = x^4, \quad [0,1]$$

$$f'(x) = 4x^3$$

$$\text{طول القوس} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + (4x^3)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 16x^6}\, dx$$

يمكنك استخدام الآلة الحاسبة

$$\text{طول القوس} \approx 1.6002$$

الحالة العامة

كيفية إيجاد طول القوس ؟

$$\text{طول القوس} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

إذا كانت الدالة معطاة بدلالة فإن طول القوس

$$\text{طول القوس} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(y))^2}\, dy$$

مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL

Thursday, 25 April 2024

التقييم الختامي

Khan Academy

https://www.khanacademy.org/math/old-integral-calculus/area-and-arc-length-ic/arc-length-ic/e/arc-length-of-functions-in-one-variable?modal=1

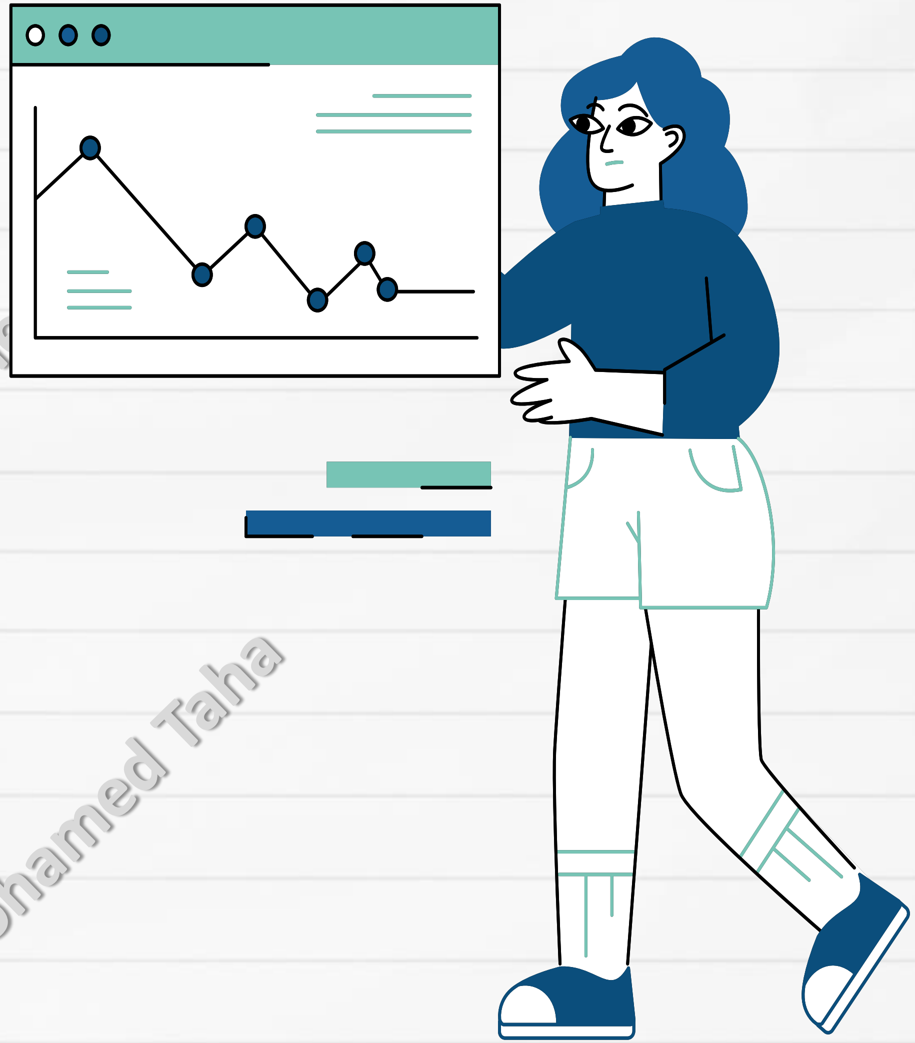
05:00

الواجب 6.4

صفحة :446

Q9,Q12,Q14
Q15,Q16
Q27

الحصة الثانية



مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL

Thursday, 25 April 2024

ثانيا :إيجاد مساحة سطح مجسم دوراني باستخدام التكامل المحدود

من منحنى دالة معطاة في فترة معطاة باستخدام التكامل المحدود.

+971566151988/

Thursday, 25 April 2024

التقييم القبلي

https://bit.ly/3sQddga

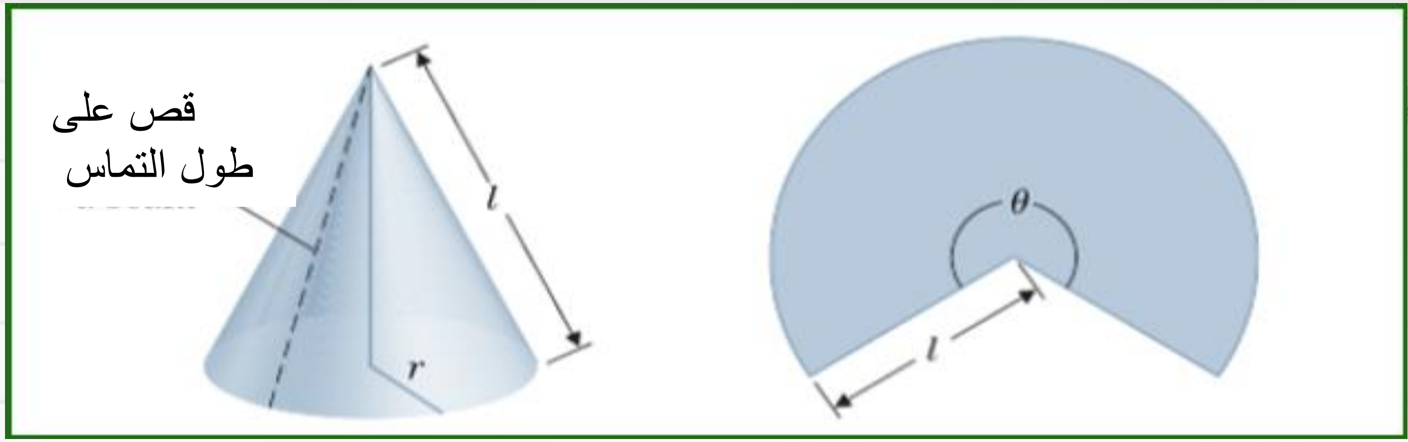
03:00

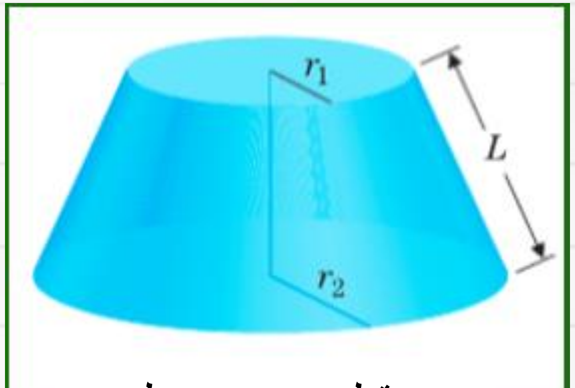
+971566151988/

أ/ محمد طه

Thursday, 25 April 2024

مساحة السطح



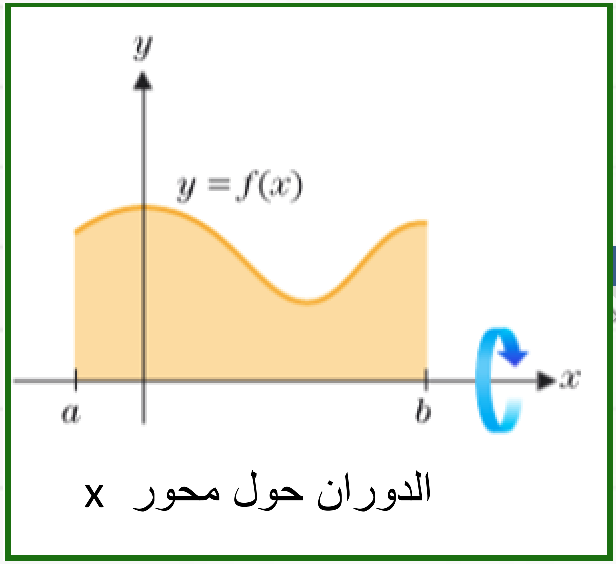


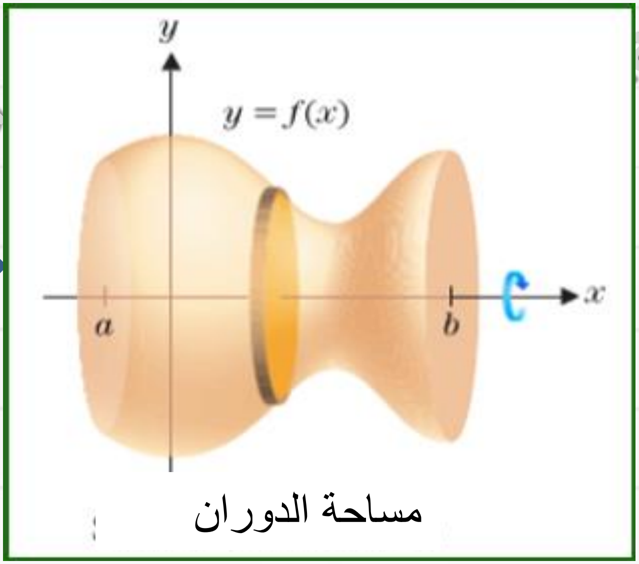
مقطع من مخروط

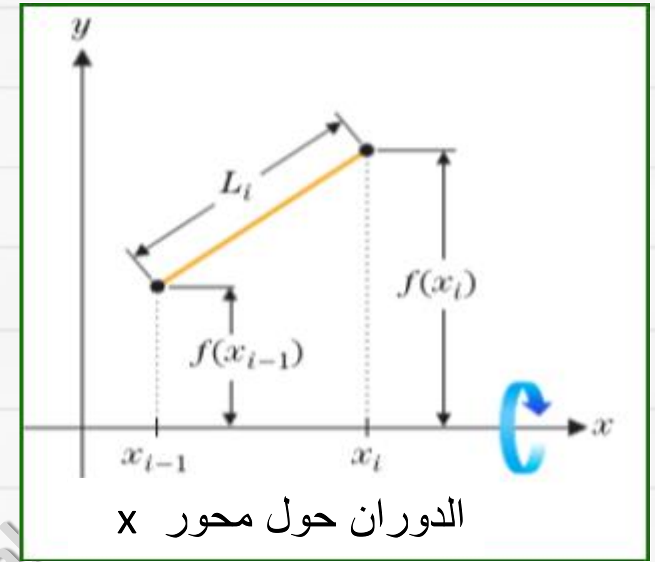
مساحة المخروط الجانبية= $\pi r l$

مساحة المخروط الجانبية= $\pi(r_2 - r_1)l$

مساحة السطح







$(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ and $(x_i, f(x_i))$ نجد أن طول القوس متصل

$$L_i = \sqrt{(1 + (f'(c_i)^2)}\Delta x$$

مساحة السطح S_i للجزء الواقع في الفترة $[x_{i-1},x_i]$ تساوي تقريباً مساحة القطعة المنخفضة

$$S_i \approx \pi[f(x_i)+f(x_{i-1})]\sqrt{(1+(f'(c_i)^2)}\Delta x$$

$$S_i \approx 2\pi f(c_i)\sqrt{(1+(f'(c_i)^2)}\Delta x$$

$$f(x_i)+f(x_{i-1}) = 2f(c_i)$$

إجمالي مساحة السطح $S \approx \sum_{i=1}^{n}\left(2\pi f(c_i)\sqrt{(1+(f'(c_i)^2)}\Delta x\right)$

مساحة السطح

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(2\pi f(c_i)\sqrt{(1+(f'(c_i)^2)}\Delta x\right) = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{(1+(f'(x)^2)}dx$$

مثال Q29 :صفحة447:

أوجد مساحة السطح المحدد بمنحنى الدالة والفترة

$$y = x^2, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

الحل

$$y = x^2, 0 \leq x \leq 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

$$S = \int_0^1 2\pi x^2\sqrt{1 + [2x]^2}\,dx$$

$$S = 2\pi \int_0^1 x^2\sqrt{1 + 4x^2}\,dx$$

أوجد قيمة التكامل ممكن استخدام حاسبتك

$$S = 3.8097$$

مثال Q34 :صفحة447:

أوجد مساحة السطح المحدد بمنحنى الدالة والفترة $1 \le x \le 2$ $y = lnx,$ بالدوران حول محور X

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \qquad S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$S = \int_1^2 2\pi lnx \sqrt{1 + \left[\frac{1}{x}\right]^2}\, dx = 2\pi \int_1^2 lnx \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx$$

$$\boldsymbol{S = 2.86563}$$

أوجد القيمة العددية للتكامل بأي طريقة

الحالة العامة

الحصول على مساحة السطح بالدوران

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{(1 + (f'(x)^2)}\, dx$$

إذا قمت بتدوير المنطقة المحددة حول محور y فكيف يمكنك الحصول على مساحة السطح

$$S = \int_a^b 2\pi f(y)\sqrt{(1 + (f'(y)^2)}\, dy$$

Thursday, 25 April 2024

مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL

مثال Q39(b) :صفحة447:

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين معادلة الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ بالدوران حول محور y

الحل

الدوران حول محور y وبالتالي التكامل بالنسبة لمحور y

$$x^2 + y^2 = 1$$

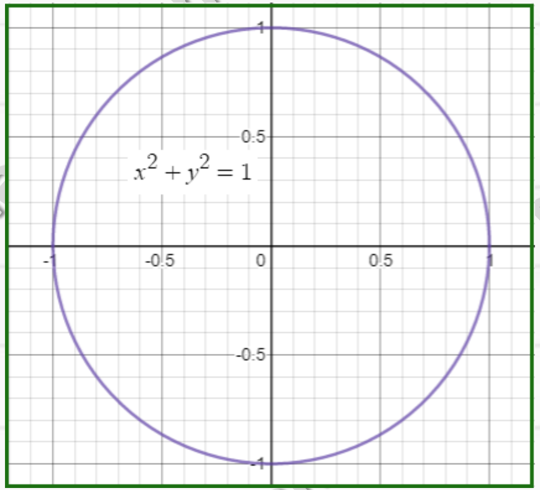
$$x = \sqrt{1 - y^2}, \ y\epsilon[-1,1]$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$S = \int_a^b 2\pi f(y)\sqrt{1 + [f'(y)]^2}dy$$

$$S = \int_{-1}^{1} 2\pi\sqrt{1 - y^2} \times \sqrt{1 + \left[\frac{-y}{\sqrt{1 - y^2}}\right]^2} dy$$

$$S = \int_{-1}^{1} 2\pi\sqrt{1 - y^2} \times \sqrt{1 + \frac{y^2}{1-y^2}} dy$$



$$S = \int_{-1}^{1} 2\pi\sqrt{1 - y^2} \times \sqrt{\frac{1}{1 - y^2}} dy = \int_{-1}^{1} 2\pi dy$$

$$S = 2\pi(1 - -1) = 4\pi$$

الجسم تتشكل تدوير عند الدائرة $x^2 + y^2 = 1$

الدوران حول محور yبنصف القطر يساوي $1 = r$

مساحة الكرة $= 4\pi r^2$

$$= 4\pi(1)^2 = 4\pi$$

يمكن الحصول على الناتج من التكامل السابق

+971566151988/

أ/ محمد طه

Thursday, 25 April 2024

التقييم الختامي

Khan Academy

https://www.khanacademy.org/math/old-integral-calculus/area-and-arc-length-ic/arc-length-ic/e/arc-length-challenge?modal=1

05:00

الواجب 6.4

صفحة :447

Q30
Q31
Q36

الحصة الثالثة

ثالثاً :حل مسائل رياضية كتطبيقات على طول القوس و مساحة السطح.

مثال Q22 :صفحة447:

قم بإيجاد قيمة التكامل لحساب طول القوس وقرب الناتج

$$y = \int_0^x e^{-u} sinu\, du, \qquad 0 \le x \le \pi$$

الحل

كيفية إيجاد المشتقة الأولى :

$$y = \int_0^x e^{-u} sinudu, \qquad 0 \le x \le \pi$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} sinx$$

$$\text{طول القوس} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{1 + (e^{-x} sinx)^2}\, dx$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{1 + e^{-2x} sin^2 x}\, dx$$

$$\text{طول القوس} \approx 3.2023$$

قرب الناتج

شكل السلسلة

الصيغة العامة :

$$y = a\ \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}\right)$$

مثال Q23: صفحة446: إذا تم تعليق حبل بين عمودين تفصل بينهما مسافة 40 مترًا وكان الحبل يأخذ شكلة السلسلة (مرتخي)

$$y = 10\left(e^{\frac{x}{20}} + e^{\frac{-x}{20}}\right), -20 \le x \le 20$$

احسب طول الحبل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{20}} - e^{\frac{-x}{20}}\right)$$

طول القوس= طول الحبل $= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

$$= \int_{-20}^{20} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{20}} - e^{\frac{-x}{20}}\right)\right)^2}\, dx$$

$$= \int_{-20}^{20} \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{10}} - 2 + e^{\frac{-x}{10}}\right)}\, dx$$

$$= \int_{-20}^{20} \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{10}} - 2 + e^{\frac{-x}{10}}\right)}\, dx$$

$$= \int_{-20}^{20} \sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{10}} + 2 + e^{\frac{-x}{10}}\right)}\, dx$$

$$= \int_{-20}^{20} \sqrt{\frac{1}{4}\left(\left(e^{\frac{x}{20}} + e^{\frac{-x}{20}}\right)^2\right)}\, dx$$

$$= \int_{-20}^{20} \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{20}} + e^{\frac{-x}{20}}\right) dx$$

$$= 10\left(e^{\frac{x}{20}} + e^{\frac{-x}{20}}\right)\Big]_{-20}^{20} =$$

$$= 10\left(e^{\frac{20}{20}} + e^{\frac{-(20)}{20}}\right) - 10\left(e^{\frac{-20}{20}} + e^{\frac{-(-20)}{20}}\right)$$

$$= 47.008$$

مثال Q25 :صفحة447:

يتم تعليق حبل بين عمودين تفصل بينهما مسافة 20 مترًا إذا كان الحبل يأخذ شكل السلسلة

$$y = 5\left(e^{\frac{x}{10}} + e^{\frac{-x}{10}}\right), -10 \le x \le 10$$

A. احسب طول الحبل

B. احسب الارتخاء في الحبل وهو الفرق بين $y - values$ في منتصف الحبل عند $x = 0$ وعند $x = 10$

الحل

طول الحبل

$$\text{طول الحبل} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$s = \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + \left(\frac{e^{x/10}}{2} - \frac{e^{-x/10}}{2}\right)^2}\, dx = \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{x/5} - 2 + e^{-x/5}\right)}\, dx$$

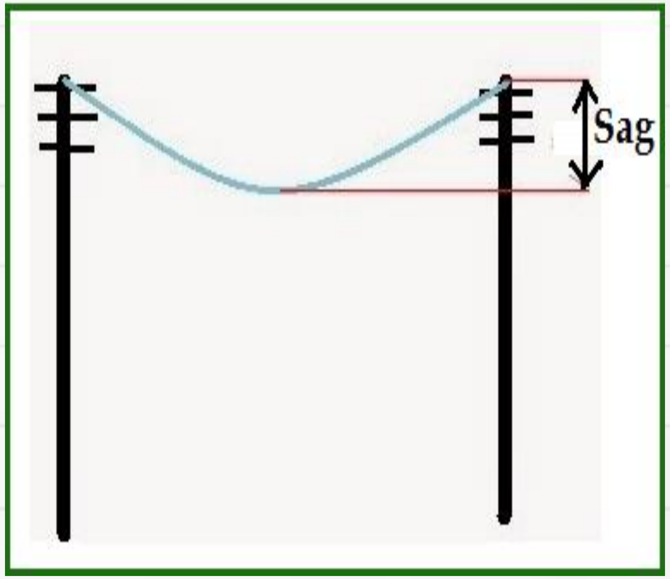
$$= \int_{-10}^{10} \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\left(e^{x/5} + 2 + e^{-x/5}\right)\right)^2}\, dx = \int_{-10}^{10} \sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{x/10} + e^{-x/10}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_{-10}^{10} \frac{1}{2}\left(e^{x/10} + e^{-x/10}\right) dx = 5\left(e^{x/10} + e^{-x/10}\right)\Big|^{x=10}$$

$$= 10\left(e - e^{-1}\right)$$

$$\approx 23.504 feet$$

الارتخاء في الحبل



$$y = 5\left(e^{\frac{x}{10}} + e^{\frac{-x}{10}}\right)$$

$$at\ x = 10, \qquad y = 5\left(e^{\frac{10}{10}} + e^{\frac{-10}{10}}\right) = 15.43$$

$$at\ x = 0, \qquad y = 5\left(e^{\frac{0}{10}} + e^{\frac{0}{10}}\right) = 10$$

$$Sag = 15.43 - 10 = 5.43m$$

الحالة العامة

ما الوظيفة العامة للحبل المعلق؟

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}\right)$$

ماذا نعني بالارتخاء ؟

الفرق بين $y - values$ في منتصف الحبل عند القطب وعنده

الواجب

6.4

صفحة :447

Q19
Q21
Q24