نماذج أجابة أسئله توقعات نصار 11علمى

عمل / أ . أحمد نصار

(1)

اكتب العدد $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$ في الصورة الجبرية

ثم حوله للصورة المثلثية مستخدما السعة الأساسية

الحل :

$$\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\times\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}$$

$$=\frac{2-2\sqrt{3}i}{3+1}$$

$$=\frac{2-2\sqrt{3}i}{4}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x=\frac{1}{2}\quad,y=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{1}=1$$

نفرض أن α زاوية الاسناد

$$tan\,\alpha=\left|\frac{y}{x}\right|=\left|\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right|=\sqrt{3}$$

$$\therefore \alpha=\frac{\pi}{3}$$

θ تقع في الربع الرابع

$$x>0\quad,y<0$$

$$\theta=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$$

الصورةالمثلثية هي :

$$\left(cos\frac{5\pi}{3}+i\,sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

(2)

إذا كان : $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 5 - 2i$
فأوجد كلا مما يلي في الصورة الجبرية:

$\overline{3z_1 - 2\,z_2}$

الحل :

$$\overline{3z_1 - 2z_2} = \overline{3(3 + 4i) - 2(5 - 2i)}$$
$$= \overline{9 + 12i - 10 + 4i}$$
$$= \overline{-1 + 16i}$$
$$= -1 - 16i$$

2) $\frac{z_2}{z_1}$

الحل :

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{5 - 2i}{3 + 4i} \times \frac{3 - 4i}{3 - 4i}$$
$$= \frac{15 - 20i - 6i - 8}{3^2 + 4^2}$$
$$= \frac{7 - 26i}{25}$$
$$= \frac{7}{25} - \frac{26}{25}i$$

(3)

إذا كان : $z_1 = -2 + 2i$ ، $z_2 = 1 - i$

(1) ضع z_1 في الصورة المثلثية

(2) حل المعادلة : $2z + \overline{z_1} = 3i\ (z_2)^2$

الحل :

(1) $z_1 = -2 + 2i$

$x = -2$ ، $y = 2$

$$r = |z_1| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

نفرض أن α زاوية الإسناد

$$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = |-1| = 1$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$x < 0$ ، $y > 0$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثاني

$$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

الصورة المثلثية هي : $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

(2) $2z + \overline{z_1} = 3i\ (z_2)^2$

$$2z + \overline{(-2 + 2i)} = 3i\ (1 - i)^2$$

$$2z + (-2 - 2i) = 3i\ (1 - 2i - 1)$$

$$2z + (-2 - 2i) = 3i\ (-2i)$$

$$2z + (-2 - 2i) = -6i^2$$

$$2z + (-2 - 2i) = 6$$

$$2z = 6 + 2 + 2i = 8 + 2i$$

$$z = 4 + i$$

(4)

(a) حول الاحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية حيث $N\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$

الزوج المرتب $(5, \frac{\pi}{4})$ يمثل الإحداثيات القطبية للنقطة N حيث

$r = 5, \theta = \frac{\pi}{4}$

$x = r\cos\theta = 5\cos\frac{\pi}{4}$

$= 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$y = r\sin\theta = 5\sin\frac{\pi}{4}$

$= 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

∴ الزوج المرتب الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية للنقطة N :

$\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

.....

(b) إذا كان $z_2 = 3 - 5i$

(1) اوجد : z_2^{-1}

الحل :

$$z_2^{-1} = \frac{1}{3 - 5i} \times \frac{3 + 5i}{3 + 5i}$$

$$= \frac{3 + 5i}{9 + 25}$$

$$= \frac{3}{34} + \frac{5}{34}i$$

(5)

أوجد مجموعة حل المعادلة : $4z^2+16z+25=0$ في C

الحل : نحسب المميز Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (16)^2 - 4(4)(25)$$

$$= -144$$

$$= (-1) \times (12)^2$$

$$= i^2 \times (12)^2$$

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16-12i}{2\times 4} = -2-\frac{3}{2}i$$

$$z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16+12i}{2\times 4} = -2+\frac{3}{2}i$$

مجموعة الحل $= \{ -2-\frac{3}{2}i , -2+\frac{3}{2}i \}$

(6)

أوجد الزوج المرتب (r , θ) للنقطة D (3 $\sqrt{3}$, 3) حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$

الحل :

$$r = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (3)^2} = \sqrt{36} = 6$$

نفرض أن α زاوية الاسناد

$$\therefore \tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{3}{3\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

وبالتالي : $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

∴ D تنتمي إلى الربع الأول ⟵ $\because x > 0 , y > 0$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

وبالتالي : الاحداثيات القطبية هي $D\left(6 , \frac{\pi}{6}\right)$

(7)

أوجد السعة و الدورة للدالة : $y = -3cos(2x) \quad , -\pi \leq x \leq \pi$

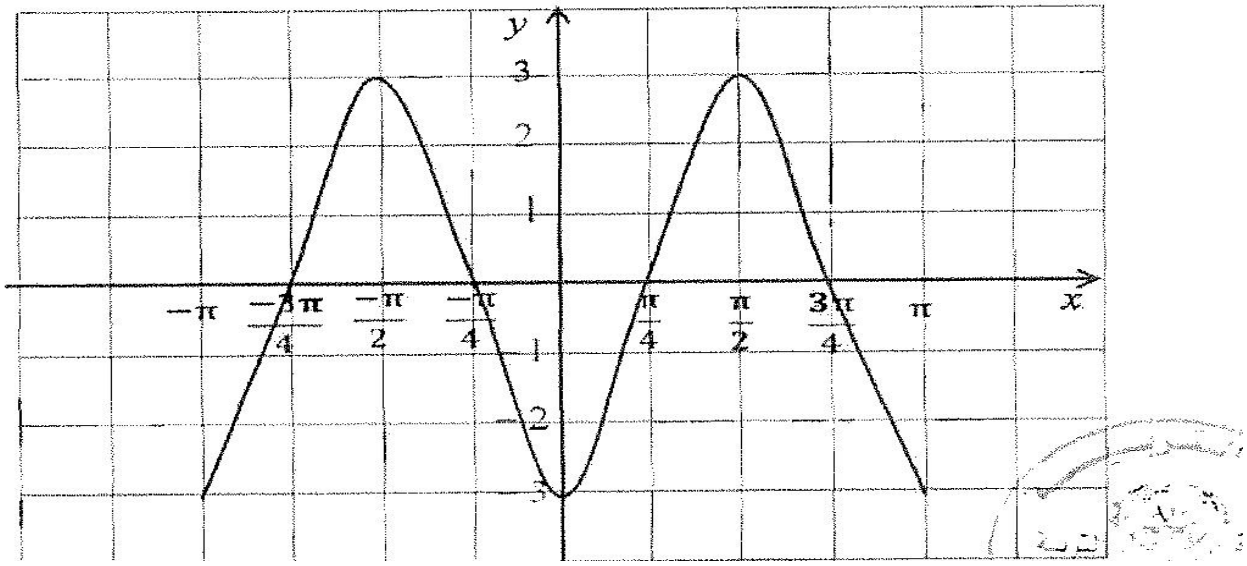
ثم ارسم بيانها

السعة : $|a| = |-3| = 3$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

ربع الدورة $= \frac{\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$cos(2x)$	1	0	-1	0	1
$y = -3cos(2x)$	-3	0	3	0	-3



(8)

(a) أوجد السعة و الدورة ثم ارسم بيان الدالة :

$y = \frac{1}{2} \cos(-x)$: $x \in [-2\pi , 2\pi]$

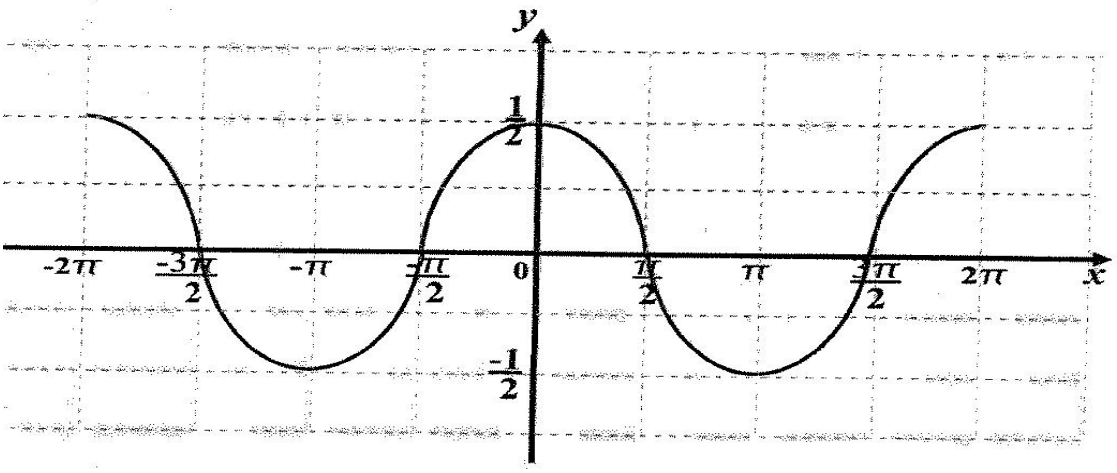
الحل :

السعة : $|a| = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

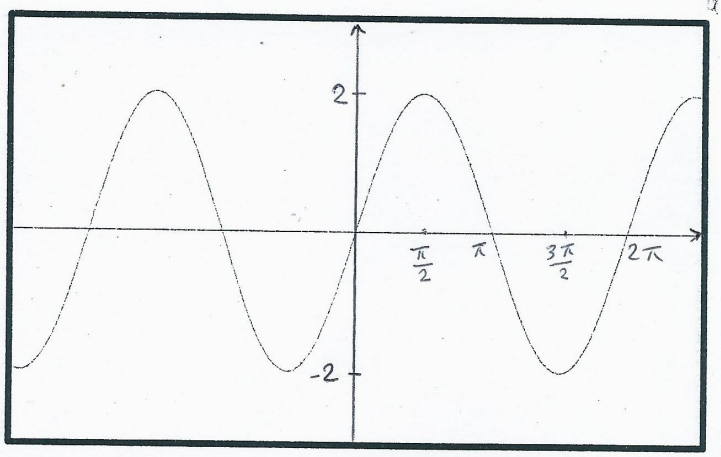
∴ ربع الدورة : $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$-x$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	-2π
$\cos(-x)$	1	0	-1	0	1
$\frac{1}{2}\cos(-x)$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$



(9)

(a) $y = \sin X$



الحل: الدالة دورية مجالها $\mathbb{R}$

السعة: $|a| = |2| = 2$

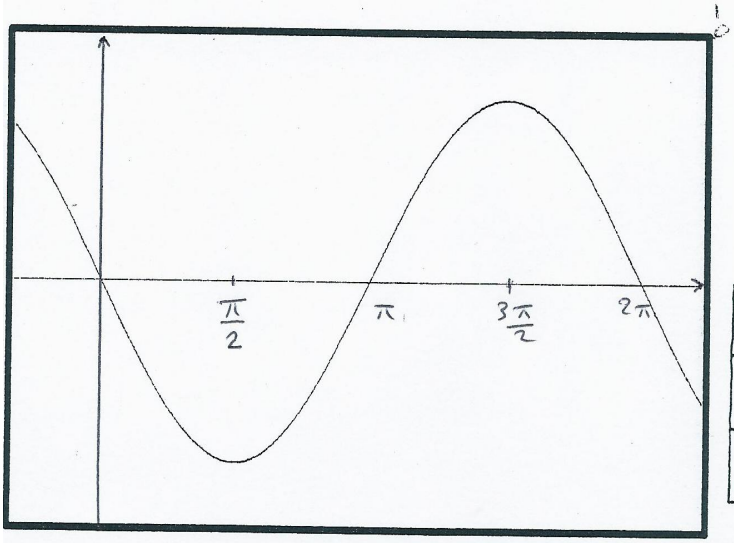
الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

∴ ربع الدورة $\frac{\pi}{2}$

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin X$	0	1	0	-1	0
$2\sin X$	0	2	0	-2	0

.....

(b) $y = -3 \sin X$



الحل: الدالة دورية مجالها $\mathbb{R}$

السعة: $|a| = |-3| = 3$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

∴ ربع الدورة $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin X$	0	1	0	-1	0
$-3\sin X$	0	-3	0	3	0

(10)

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -3 - 4i$

الحل:

ليكن $w = m + ni$ جذرا تربيعيا للعدد z ، فيكون $w^2 = z$

بالتعويض $(m + ni)^2 = -3 - 4i$

خاصية ضرب كثيرات الحدود $m^2 - n^2 + 2mni = -3 - 4i$

خاصية المساواة لعددين مركبين

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -3 & ----\rightarrow (1) \\ 2mn = -4 & ----\rightarrow (2) \end{cases}$$

نضيف المعادلة: $|w|^2 = |z|$

$$\left(\sqrt{m^2 + n^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}\right)$$

$$m^2 + n^2 = 5 \quad ----\rightarrow (3)$$

بجمع المعادلتين (3) , (1) نحصل على:

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -3 \\ m^2 + n^2 = 5 \end{cases}$$

$$2m^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

بالتعويض في (1) نحصل على: $\therefore n^2 = 4 \Rightarrow n = \pm 2$

$$\begin{cases} m = 1 \ , \ m = -1 \\ n = 2 \ , \ n = -2 \end{cases}$$

من المعادلة $2mn = -4$ نستنتج أن m , n لهما إشارتان مختلفتان

$\therefore m = 1 \ , \ n = -2$ أو $m = -1 \ , \ n = 2$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = -3 - 4i$

هما: $w_1 = 1 - 2i \ , \ w_2 = -1 + 2i$

(11)

أوجد مجموعة حل المعادلة في c :

$$z + \frac{4}{z} = 2$$

$$z^2 + 4 = 2z$$

$$z^2 - 2z + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(4)$$

$$\Delta = -12$$

$$= 12 \times (-1)$$

$$= 12 \times i^2 \qquad i^2 = -1$$

$$z = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-2\sqrt{3}i}{2(1)} = 1 - \sqrt{3}i$$

$$z = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+2\sqrt{3}i}{2(1)} = 1 + \sqrt{3}i$$

$$\text{م.ح} = \{1 - \sqrt{3}i \ , \ 1 + \sqrt{3}i\}$$

(12)

اوجد مجموعة حل المعادلة : $z+i=2\overline{z}+1$ في C

$$\bar{z}=x-yi \quad \text{و} \quad z=x+yi$$

$$x+yi+i=2(x-yi)+1$$

$$x+yi+i=2x-2yi+1$$

$$x+yi-2x+2yi=1-i$$

$$-x+3yi=1-i$$

$$-x=1 \quad \Longrightarrow \quad x=-1$$

$$3y=-1 \quad \Longrightarrow \quad y=-\frac{1}{3}$$

$$\text{الحل مجموعة} = \left\{-1-\frac{1}{3}i\right\}$$

(13)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i\overline{z} = 5 - 2i$ في $\mathbb{C}$.

الحل:

لتكن $z = x + yi$ حيث x, y عددان حقيقيان.

$$2z + i\overline{z} = 5 - 2i$$

عوّض عن z بـ $x + yi$

$$2(x + yi) + i(\overline{x + yi}) = 5 - 2i$$

مرافق $x + yi$ هو $x - yi$

$$2(x + yi) + i(x - yi) = 5 - 2i$$

$$2x + 2yi + xi - y(i)^2 = 5 - 2i$$

$i^2 = -1$

$$2x + 2yi + xi + y = 5 - 2i$$

تجميع الأعداد الحقيقية معًا والأعداد التخيلية معًا

$$2x + y + (x + 2y)i = 5 - 2i$$

خاصية تساوي عددين مركبين

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$$

بحل المعادلتين نحصل على:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$$

مجموعة الحل: $= \{4 - 3i\}$.

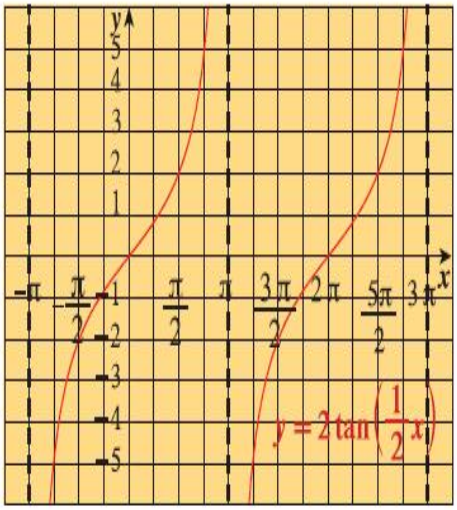
(14)

الدالة $y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$ هي دالة دورية.

الدورة: $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{2}$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\frac{1}{2}x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف
$y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$	غير معرف	-2	0	2	غير معرف

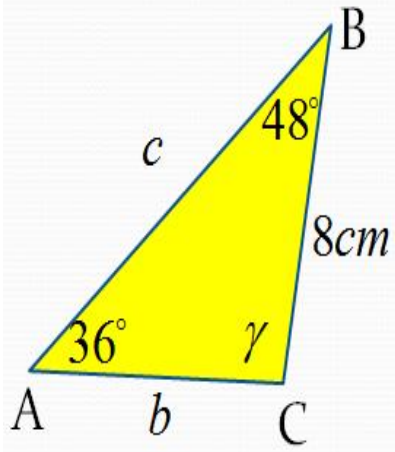


(15)

ΔABC حل المثلث

$\alpha = 36^\circ, \beta = 48^\circ, a = 8cm$ حيث

الحل



مجموع قياسات زوايا المثلث = 180

$\gamma = 180^\circ - (36^\circ + 48^\circ)$

$\gamma = 96^\circ$

قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 48^\circ}{b} = \frac{\sin 96^\circ}{c}$$

$$\frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 48^\circ}{b} \Rightarrow \quad b = \frac{8 \times \sin 48^\circ}{\sin 36^\circ} \approx 10.115cm$$

$$\frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 96^\circ}{c} \Rightarrow \quad c = \frac{8 \times \sin 96^\circ}{\sin 36^\circ} \approx 13.536cm$$

(16)

حل ΔABC حيث: $a = 3\,\text{cm}\ ,\ b = 2\,\text{cm}\ ,\ \alpha = 40^\circ$

الحل:

نستخدم قانون الجيب لإيجاد β

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

$$\frac{\sin 40^\circ}{3} = \frac{\sin\beta}{2}$$

عوّض

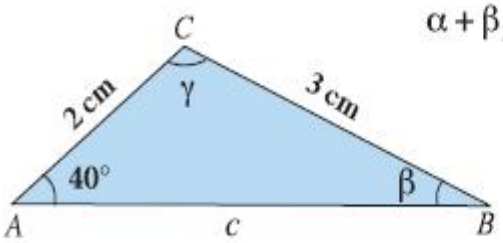
$$\sin\beta = \frac{2 \times \sin 40^\circ}{3} \implies \sin\beta \approx 0.43$$

توجد زاويتان β، $0^\circ < \beta < 180^\circ$ تحققان $\sin\beta = 0.43$

$$\beta_1 \approx 25.4^\circ \quad \text{أو} \quad \beta_2 \approx 154.6^\circ$$

الحالة $\beta_2 \approx 154.6^\circ$ مرفوضة، لأن $\alpha + \beta_2 \approx 194.6^\circ$

وهو أكبر من 180°



باستخدام $\beta_1 \approx 25.4^\circ$ نحصل على:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta_1$$

$$\approx 180^\circ - 40^\circ - 25.4^\circ$$

$$\gamma \approx 114.6^\circ$$

يمكن الآن معرفة طول الضلع الثالث c

قانون الجيب

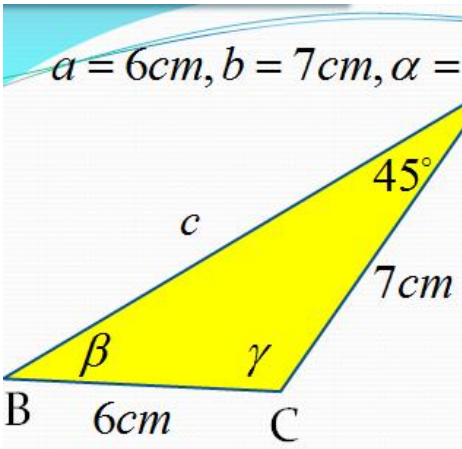
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 40^\circ}{3} = \frac{\sin 114.6^\circ}{c}$$

$$c = \frac{3\sin 114.6^\circ}{\sin 40^\circ}$$

$$c \approx 4.24\,\text{cm}$$

(17)



حل المثلث ΔABC حيث $a=6cm, b=7cm, \alpha=45^\circ$

قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{6}=\frac{\sin\beta}{7}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{6}=\frac{\sin\beta}{7}\Rightarrow \sin\beta=\frac{7\times\sin 45^\circ}{6}$$

$$\sin\beta\approx 0.824$$

إما $\beta_1\approx 55.58^\circ$

$\gamma_1\approx 180^\circ-(45^\circ+55.58^\circ)=$

$\gamma_1\approx 79.42^\circ$

إما $\beta_2\approx 180^\circ-55.58^\circ\approx 124.42^\circ$

$\alpha+\beta_2=45^\circ+124.42^\circ=169.42^\circ$

$169.42^\circ<180^\circ$

$\gamma_2\approx 180^\circ-169.42^\circ=$

$\gamma_2\approx 10.58^\circ$

إما $\gamma_1\approx 79.42^\circ$

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{6}=\frac{\sin 79.42^\circ}{c}$$

$$c=\frac{6\times\sin 79.42^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$c\approx 9.73cm$$

إما $\gamma_2\approx 10.58^\circ$

$$\frac{\sin 45^\circ}{6}=\frac{\sin 10.58^\circ}{c}$$

$$c=\frac{6\times\sin 10.58^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$c\approx 1.82cm$$

(18)

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\csc\theta$

الحل :

الطرف الأيسر

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+1+\cos^2\theta+2\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

يتم عمل توحيد مقامات

$$=\frac{2(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

وبأستخدام متطابقه فيثاغورث

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$=2\csc\theta$$

(19)

أثبت صحة المتطابقة: $2\cot x\csc x = \frac{1}{\sec x-1}+\frac{1}{\sec x+1}$

الحل:

نبسط الطرف الأيمن إلى صورة الطرف الأيسر

أوجد مقامًا مشتركًا

$$\frac{1}{\sec x-1}+\frac{1}{\sec x+1}=\frac{(\sec x+1)+(\sec x-1)}{(\sec x-1)(\sec x+1)}$$

بسّط

$$=\frac{2\sec x}{\sec^2 x-1}$$

$$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$

متطابقة فيثاغورث

$$=\frac{2\sec x}{\tan^2 x}$$

استخدم متطابقة المقلوب

$$=2\sec x\cot^2 x$$

بسّط

$$=\frac{2}{\cos x}\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{2\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}$$

$$=2\cot x\csc x$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(20)

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$

الحل:

نبدأ بالطرف الأيسر ونصل إلى صورة الطرف الأيمن

ضرب كل من البسط والمقام في $(1+\sin x)$

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{\cos x}{1-\sin x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x}$$

$$= \frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$\boldsymbol{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

متطابقة فيثاغورث

$$= \frac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x}$$

اختصار العامل المشترك

$$= \frac{1+\sin x}{\cos x}$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(21)

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = (\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$

الحل :

$$\frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = \frac{\csc^2\theta - 1}{1+\csc\theta}$$

$$= \frac{(\csc\theta - 1)(\csc\theta + 1)}{1+\csc\theta}$$

$$= \csc\theta - 1$$

$$(\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} - 1$$

$$= \csc\theta - 1$$

$$\therefore \frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = (\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$$

(22)

أثبت أن: $\frac{\sec x+\tan x}{\cot x+\cos x}=\sin x+\sin x\tan^2 x$

الحل :

توحيد مقامات

$$\frac{\sec x+\tan x}{\cot x+\cos x}=\frac{\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x}+\cos x}$$

القسمه = الضرب فى المقلوب

$$=\frac{(1+\sin x)}{\cos x}\times\frac{\sin x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$

$$=\sin x(1+\tan^2 x)$$

$$=\sin x+\sin x\tan^2 x$$

نستنتج أن: $\frac{\sec x+\tan x}{\cot x+\cos x}=\sin x+\sin x\tan^2 x$

(23)

حل المعادلة: $2\cos x+\sqrt{3}=0$

الحل:

$$2\cos x+\sqrt{3}=0$$

$$2\cos x=-\sqrt{3}$$

$$\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$$\therefore\ \cos\alpha=|\cos x|$$

$$=\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{6}$$

$$\because\ \cos x<0$$

$\therefore\ x$ تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث

عندما x تقع في الربع الثاني: $k\in\mathbb{Z}$ $\quad x=\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi,$

$$\therefore\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$$

وعندما x تقع في الربع الثالث: $k\in\mathbb{Z}$ $\quad x=\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi,$

$$=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$$

$\therefore$ حل المعادلة: $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ أو $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$ حيث

(24)

حل المعادلة: $4\sin\theta + 1 = \sin\theta$، حيث $0 \le \theta < 2\pi$

الحل:

$$4\sin\theta + 1 = \sin\theta$$

فصل المتغير

$$4\sin\theta - \sin\theta = -1$$

بسّط

$$3\sin\theta = -1$$

$$\sin\theta = -\frac{1}{3}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\therefore \sin\alpha = |\sin\theta|$$

$$= \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0.34 \text{ radians}$$

$\because \sin\theta < 0 \quad \therefore \theta$ تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع

عندما θ تقع في الربع الثالث

$$\therefore \theta \approx \pi + 0.34$$

$$\approx 3.4816 \quad , \quad 3.4816 \in [0, 2\pi)$$

عندما θ تقع في الربع الرابع

$$\therefore \theta \approx 2\pi - 0.34$$

$$\approx 5.9432 \quad , \quad 5.9432 \in [0, 2\pi)$$

حل المعادلة: $\theta \approx 5.9432$ أو $\theta \approx 3.4816$

ملاحظة:

$$2\pi \approx 6.2832$$

(25)

حل المعادلة: $\tan x = \sqrt{3}$

الحل:

$\tan x = \sqrt{3}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x.

$\therefore \tan\alpha = |\tan x|$

$= |\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\because \tan x > 0 \quad \therefore x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث

ولكن الدالة $\tan x$ هي دالة دورية ودورتها π

فيكون: $\tan(\pi + x) = \tan x$

ومنه يكون حل المعادلة: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

(26)

حل المعادلة: $2\cos\theta\sin\theta = -\sin\theta$

الحل:

$2\cos\theta\sin\theta = -\sin\theta$

$2\cos\theta\sin\theta + \sin\theta = 0$

$\sin\theta(2\cos\theta + 1) = 0$

تحليل إلى عوامل

$\sin\theta = 0$ أو $2\cos\theta + 1 = 0$

خاصية الضرب في الصفر

$\sin\theta = 0$ أو $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\sin\theta = 0$ أو $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$\therefore \cos\alpha = |\cos\theta|$

$= \left|-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\right|$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\because \cos\theta < 0$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثاني أو في الربع الثالث.

عندما تقع θ في الربع الثاني:

$\theta = (\pi - \alpha) + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

$= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

عندما θ تقع في الربع الثالث

$\therefore \theta = \pi + \alpha + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

$= \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

$\therefore \theta$ زاوية ربعية

$\therefore \theta = 0$ أو $\theta = \pi$

$\therefore \theta = 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

حل المعادلة: $\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi$ أو $\theta = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

(27)

حل المعادلة: $\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

الحل :

$\cos\theta(\sin\theta - 1) = 0$

$\cos\theta = 0$ أو $\sin\theta = 1$

$\cos\theta = 0$

$\therefore$ θ زاوية ربعية

$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

, $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$: $k \in \mathbb{Z}$

أو

$\sin\theta = 1$

$\therefore$ θ زاوية ربعية

$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(28)

المعادلة: $4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$ هي معادلة تربيعية في $\sin x$

بالتحليل:

$(2\sin x - 1)(2\sin x - 3) = 0$

$2\sin x - 1 = 0$ أو $2\sin x - 3 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$ أو $\sin x = \frac{3}{2}$

أو

$\sin x = \frac{3}{2}$

$\because$ $y = \sin x$ مداها $[-1, 1]$

$\frac{3}{2} \notin [-1, 1]$

$\therefore$ $\sin x = \frac{3}{2}$ ليس لها حل

$\sin x = \frac{1}{2}$

نأخذ $\sin x = \frac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x.

$\therefore \sin\alpha = |\sin x|$

$= \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$

$\because \sin x > 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الثاني.

عندما x تقع في الربع الأول

$\therefore x = \alpha + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

عندما x تقع في الربع الثاني

$\therefore x = (\pi - \alpha) + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

$= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

حل المعادلة: $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

(29)

حل المعادلة: $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$

الحل :

بالتحليل لمعادلة من الدرجه الثانيه $(cosx + 1)(cosx + 2) = 0$

كل قوس يتم مساواته ب صفر

$cosx = -2$ ليس لها حل

أو

$cosx = -1$ $x = \pi + 2k\pi$

حل المعادلة $x = \pi + 2k\pi$ حيث $k \in Z$

(30)

ABC مثلث فيه $a = 3\ cm\ ,\ b = 8\ cm\ ,\ c = 7\ cm$

أوجد : (1) قياس أكبر زاوية

(2) مساحة سطح المثلث ABC مستخدماً قاعدة هيرون

الحل:

(1) قياس أكبر زاوية هو β لأنها تقابل أطول ضلع

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$= \frac{3^2 + 7^2 - 8^2}{2\,(3)\,(7)} = \frac{-1}{7}$$

$$\therefore\ \beta \approx 98.21^\circ$$

(2)

$$s = \frac{1}{2}\,(a + b + c)$$

$$= \frac{1}{2}\,(3 + 8 + 7) = 9$$

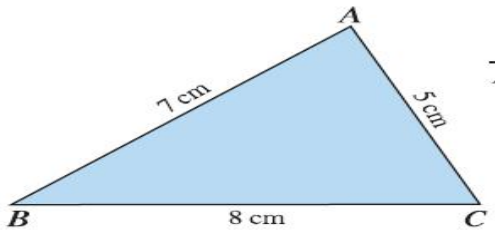
$$\text{Area} = \sqrt{s\,(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{9(9-3)(9-8)(9-7)}$$

$$= \sqrt{108} = 6\sqrt{3}\ cm^2$$

(31)

بدون أستخدام قاعدة هيرون :

أوجد مساحة المثلث ABC حيث $a = 8\text{ cm}$ ، $b = 5\text{ cm}$ ، $c = 7\text{ cm}$



الحل:

ليكن α قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين $\overline{AC}$, $\overline{AB}$

باستخدام قانون جيب التمام يمكننا إيجاد $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\alpha = \frac{25 + 49 - 64}{2 \times 5 \times 7} = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$$

$$\because \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\therefore \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

في كل مثلث، جيب الزاوية هو موجب

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

نوجد مساحة المثلث ABC باستخدام:

$$\text{Area} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\text{Area} = 10\sqrt{3} \approx 17.32$$

(32)

حل ΔABC حيث: $a = 4\,\text{cm}\ ,\ b = 3\,\text{cm}\ ,\ c = 6\,\text{cm}$

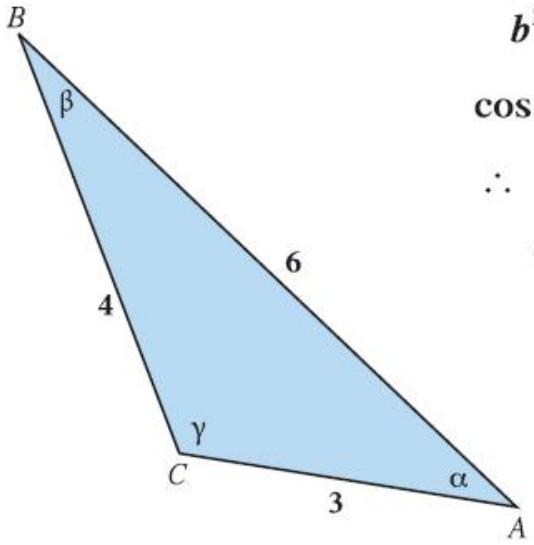
الحل:

يتوجب علينا إيجاد قياسات الزوايا الثلاث في ΔABC

نستخدم قانون جيب التمام: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9 + 36 - 16}{2 \times 3 \times 6} = \frac{29}{36}$$

$$\therefore\ \alpha \approx 36.4^\circ$$



كذلك: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{16 + 36 - 9}{2 \times 4 \times 6} = \frac{43}{48}$$

$$\therefore\ \beta \approx 26.4^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\gamma \approx 180^\circ - 36.4^\circ - 26.4^\circ$$

$$\approx 117.2^\circ$$

(33)

الحل :

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\cos^2\alpha = \frac{16}{25} \longrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{4}{5}$$ α زاوية حادة

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

$$\sin^2\beta = 1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2$$

$$\sin^2\beta = \frac{49}{625} \qquad \sin\beta = \pm\frac{7}{25}$$

$$\therefore \sin\beta = \frac{7}{25}$$ β زاوية حادة

$$(1)\quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{24}{25}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{7}{25}\right)$$

$$= \frac{117}{125}$$

$$(2)\quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\beta$$

$$= \frac{24}{25}$$

(34)

إذا كان: $\sin\alpha = \frac{4}{5}\ ,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos\beta = \frac{-12}{13}\ ,\ \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

أوجد كلًّا مما يلي:

(a) $\sin(\alpha+\beta)$ (b) $\cos(\alpha-\beta)$ (c) $\tan(\alpha-\beta)$

الحل:

نوجد أولًا: $\cos\alpha\ ,\ \sin\beta\ ,\ \tan\alpha\ ,\ \tan\beta$

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ متطابقة فيثاغورث

$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$ تعويض

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}$ فصل المتغير

$\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$ بسّط

$\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ أو $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

$\because\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha > 0$

$\therefore\ \cos\alpha = \frac{3}{5}$

- $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ متطابقة فيثاغورث

$\sin^2\beta + \left(\frac{-12}{13}\right)^2 = 1$ تعويض

$\sin^2\beta = 1 - \frac{144}{169}$ فصل المتغير

$\sin^2\beta = \frac{25}{169}$ بسّط

$\sin\beta = -\frac{5}{13}$ أو $\sin\beta = \frac{5}{13}$

$\because\ \pi < \beta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin\beta < 0$

$\therefore\ \sin\beta = \frac{-5}{13}$

تابع الحل :

- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{4}{3}$
- $\tan\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{\frac{-5}{13}}{\frac{-12}{13}} = \dfrac{5}{12}$

a $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)$$

$$= \frac{-48}{65} - \frac{15}{65} = -\frac{63}{65}$$

b $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)$$

$$= \frac{-36}{65} - \frac{20}{65} = -\frac{56}{65}$$

c $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$= \frac{\frac{4}{3} - \frac{5}{12}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{12}\right)}$$

$$= \frac{\frac{11}{12}}{\frac{56}{36}} = \frac{33}{56}$$

(35)

اكتب المقدار على صورة جيب أو جيب التمام أو ظل الزاوية.

- $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$
- $\dfrac{\tan 2y + \tan 3x}{1 - \tan 2y \tan 3x}$

الحل

$\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$

$= \sin(3x - x) = \sin 2x$

.....

$\dfrac{\tan 2y + \tan 3x}{1 - \tan 2y \tan 3x} = \tan(2y + 3x)$

(36)

أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

$$2\csc 2x = \csc^2 x \tan x$$

الحل:

$$\frac{2}{\sin 2x} = \frac{2}{2\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin^2 x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \csc^2 x \tan x$$

.....

$$\sin 3x = (\sin x)(4\cos^2 x - 1)$$

الحل:

$$\sin 3x = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2\sin x \cos^2 x + (2\cos^2 x - 1)\sin x = \sin x(4\cos^2 x - 1)$$

.....

$$\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$$

الحل:

$$\cos 4x = \cos 2(2x) = 1 - 2\sin^2 2x = 1 - 2(2\sin x \cos x)^2 = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$$

(37)

أثبت صحة المتطابقة: $\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

الحل:

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

المقام المشترك

$$= \frac{\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

بسّط

$$= \frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

متطابقة فيثاغورث

$$= \cos^2\theta-\sin^2\theta$$

متطابقة الضعف

$$= \cos 2\theta = \text{الطرف الأيسر}$$

(38)

أثبت صحة المتطابقة: $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$$\sin(3\theta) = \sin(2\theta + \theta)$$

$$= \sin 2\theta \cos\theta + \cos 2\theta \sin\theta$$

$$= 2\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)$$

$$= 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta) + \sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)$$

$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

(39)

إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ، فأوجد $\sin 2\theta$.

الحل:

متطابقة فيثاغورث

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$= 1 - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}$$

$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad \therefore \cos\theta < 0$

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

متطابقة جيب ضعف الزاوية

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \times \frac{-1}{\sqrt{2}} \times \frac{-1}{\sqrt{2}} = 1$$

(40)

إذا كانت: $180° < \theta < 270°$ ، $\sin\theta = -\frac{24}{25}$ ،

فأوجد $\sin\frac{\theta}{2}$.

الحل:

نوجد أولًا $\cos\theta$

متطابقة فيثاغورث $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

عوّض $\cos^2\theta + \left(\frac{-24}{25}\right)^2 = 1$

$$\cos^2\theta = \frac{49}{625}$$

لأن θ في الربع الثالث $\cos\theta = \frac{-7}{25}$

نوجد الآن $\frac{\theta}{2}$ $\because\ 180° < \theta < 270°$

ومنه $\frac{\theta}{2}$ في الربع الثاني $\therefore\ 90° < \frac{\theta}{2} < 135°$

متطابقة نصف الزاوية $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

عوّض، اختر الجذر الموجب، لأن $\frac{\theta}{2}$ في الربع الثاني $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{-7}{25}\right)}{2}} = \frac{4}{5}$

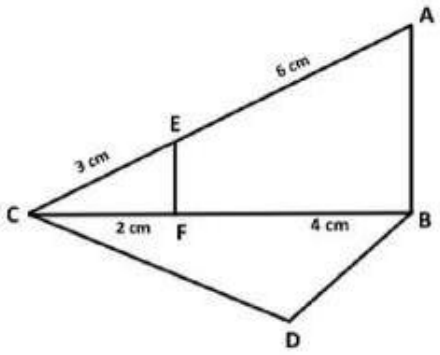
(41)

في الشكل المقابل: $\overline{AB} \perp (BCD)$

CE= 3 cm , EA = 6 cm , CF = 2 cm , FB = 4 cm

أثبت أن :

$\overline{EF} \perp \overline{BD}$



في $\blacktriangle ABC$

$\frac{CE}{EA} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{CF}{FB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\therefore \overline{EF} // \overline{AB}$

$\overline{AB} \perp (DBC)$

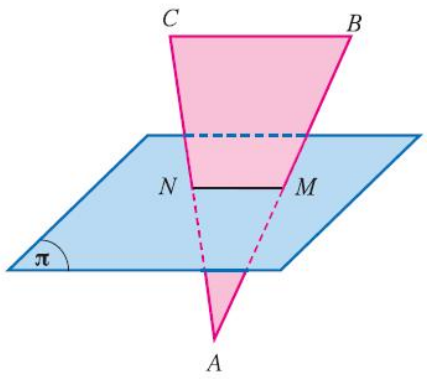
$\therefore \overline{EF} \perp (DBC)$

$\overline{DB}\ c\ (DBC)$

$\therefore \overline{EF} \perp \overline{BD}$

(يوجد حل أخر باستخدام تشابه المثلثات بدلا من نظريه طاليس)

(42)



في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{AC}$،
M ، N تنتميان إلى المستوي π .
أثبت أن $\overleftrightarrow{BC} \parallel \pi$.

البرهان

$\because$ M منتصف $\overline{AB}$

$\because$ N منتصف $\overline{AC}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{MN}$

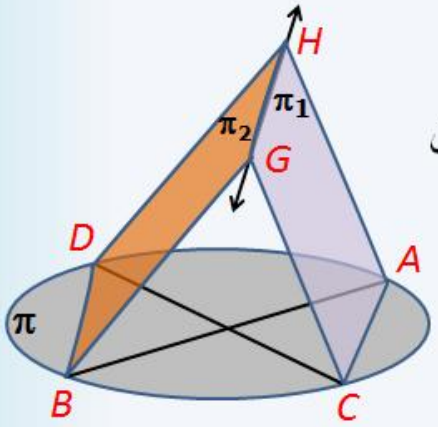
$\because$ $\overleftrightarrow{MN} \subset \pi$ (معطى)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BC} \parallel \pi$ (نظرية)

(43)

في الشكل المقابل : $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ قطران في مستوي الدائرة π

$\overleftrightarrow{GH}$ يوازي π اثبت أن مستوي الدائرة $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$



البرهان

∵ $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ قطران في الدائرة

∴ ينصف كل منهما الأخر و متطابقان

∴ الشكل $ACBD$ مستطيل

∵ $\overline{AC} // \overline{DB}$

∵ $\overleftrightarrow{AC} \subset \pi_1$ $\overleftrightarrow{DB} \subset \pi_2$

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

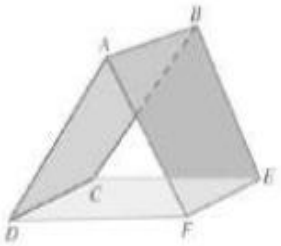
$\therefore \overleftrightarrow{GH} // \overleftrightarrow{AC} // \overleftrightarrow{DB}$

∵ $\overline{GH} // \overline{AC}$ $\overleftrightarrow{AC} \subset \pi$

$\therefore \overleftrightarrow{GH} // \pi$

أي أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$

(44)



في الشكل المقابل:

$ABEF, ABCD$ مستطيلان

أثبت أن: $(AFD) \parallel (BEC)$

الحل: ABEFمستطيل

$$\overline{AB} \perp \overline{AF}$$

ABCDمستطيل

$$\overline{AB} \perp \overline{AD}$$

$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AF}$ مستقيمان متقاطعان في A فهما يعينان مستو وحيد هو (AFD)

$$\overleftrightarrow{AB} \perp (AFD) \rightarrow 1$$

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$ بالمثل

$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BE}$ مستقيمان متقاطعان في B فهما يعينان مستو وحيد هو(BEC)

$$\overleftrightarrow{AB} \perp (BEC) \rightarrow 2$$

$$(AFD) // (BEC)$$

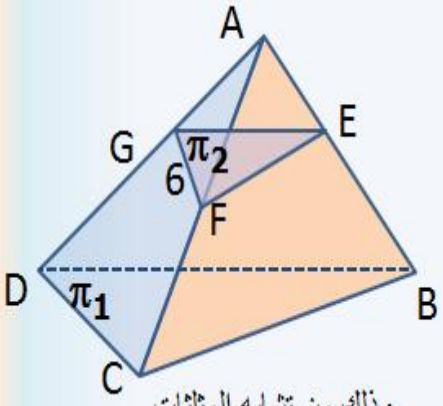
(45)

في الشكل المقابل : $ABCD$ هرم ثلاثي .

المستويان π_1 ، π_2 متوازيان إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ ،

$FG = 6$ cm فأوجد DC

البرهان



$\because \frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ $\therefore \frac{AE}{AB+EB} = \frac{1}{1+3}$

$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{1}{4}$

$\because \pi_1 // \pi_2$, $ABC \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{DB}$

$ABC \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GE}$

وذلك من تشابه المثلثات
(AFE, ACB)
(AGF, ADC)

$\therefore \overleftrightarrow{DB} // \overleftrightarrow{GE}$ $\therefore \frac{AG}{AD} = \frac{1}{4}$

و بالمثل يمكن إثبات أن $\overleftrightarrow{GF} // \overleftrightarrow{DC}$

$\therefore \frac{AG}{AD} = \frac{GF}{DC}$

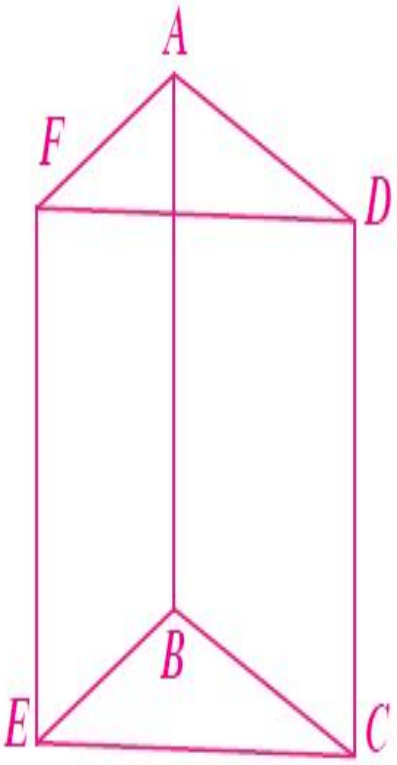
$\therefore \frac{GF}{DC} = \frac{1}{4}$ $\therefore \frac{6}{DC} = \frac{1}{4}$

$DC = 24$ cm

(46)

$ABEF$, $ABCD$ متوازيا أضلاع غير مستويين معًا ويتقاطعان في $\overleftrightarrow{AB}$

أثبت أن: $CDFE$ متوازي أضلاع



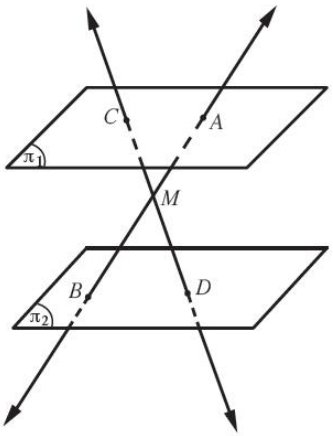
$AB = EF , \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ ∵

$AB = CD , \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ ∵

$EF = CD , \overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ ∵

ومنه $CDFE$ متوازي الأضلاع.

(47)



في الشكل المقابل π_1, π_2 مستويان متوازيان، M نقطة واقعة بينهما،
حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$
أثبت أن: $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$

∵ $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ يتقاطعان ∴ يشكلان مستويًا وهذا المستوي يقطع المستويين المتوازيين π_1، π_2 بمستقيمين متوازيين فيكون

$\overleftrightarrow{AC} // \overleftrightarrow{BD}$ وبالتالي المثلثان: MAC، MBD متشابهان.

ومنه نستنتج: $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$

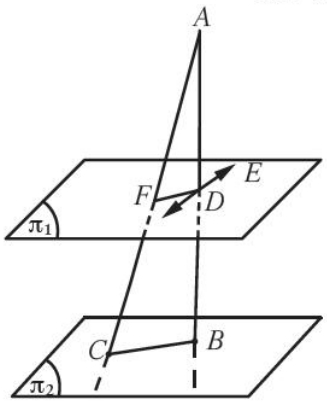
(ويتشابه المثلثان لان جميع الزوايا المتناظره متطابقه)

(48)

في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على المستوي π_2 , $\overleftrightarrow{DE} \subset \pi_1$, $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DE}$

فإذا كانت D منتصف $\overline{AB}$، F منتصف $\overline{AC}$

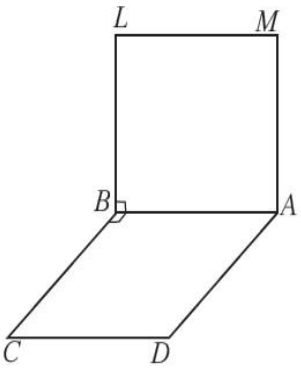
أثبت أن: $\pi_1 \parallel \pi_2$



في المثلث ABC لدينا $\overleftrightarrow{FD} \parallel \overleftrightarrow{CB}$ ولكن $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ فيكون $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{FD}$ كما أن $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{DE}$ لذا $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ في النقطة D.

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$، $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$ $\therefore \pi_1 \parallel \pi_2$.

(49)



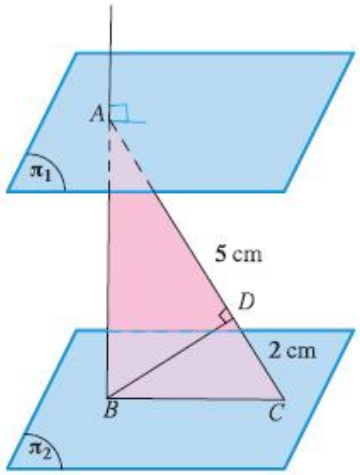
$ABCD$، $ABLM$ مربعان ليسا في مستو واحد، لهما ضلع مشترك $\overline{AB}$،

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$

$\because \overleftrightarrow{LM} // \overleftrightarrow{BA} // \overleftrightarrow{CD} \quad \therefore \overleftrightarrow{LM} \perp \overleftrightarrow{BL}$ و $\overleftrightarrow{LM} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ومنه $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$.

(من خواص المربع... الاضلاع المتقابله متوازيه والمتجاوره متعامده)

(50)



في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$ ، $A \in \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ ، $\pi_1 \parallel \pi_2$

رسم: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوي ABC

إذا كان: $AD = 5\text{ cm}$ ، $DC = 2\text{ cm}$

أوجد: BD

الحل:

المعطيات:

$\pi_1 \parallel \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$

$AD = 5\text{ cm}$ ، $DC = 2\text{ cm}$

المطلوب:

إيجاد BD

البرهان:

$\because \pi_1 \parallel \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$ (نظرية 7)

$\therefore \overline{AB}$ عمودي على كل مستقيم في π_2

$\because \overline{BC} \subset \pi_2$

$\therefore \overline{AB} \perp \overline{BC}$

في المثلث ABC القائم الزاوية في B

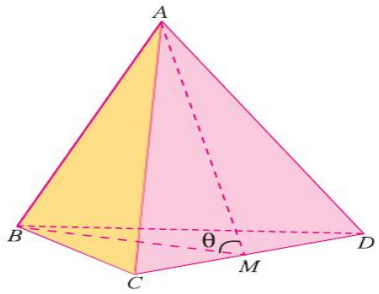
$\because \overline{BD} \perp \overline{AC}$

$\therefore (BD)^2 = AD \times DC$

$= 5 \times 2 = 10$

$BD = \sqrt{10}\text{ cm}$

(51)



يبيّن الشكل المقابل هرمًا ثلاثي القاعدة أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع طول حرفه 8 cm

M منتصف $\overline{DC}$

a حدد الزاوية المستوية بين المستويين BDC , ADC

b أوجد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

المعطيات: $ABCD$ هرم أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع.

طول الحرف $= 8\text{ cm}$ ، M منتصف $\overline{DC}$.

a المطلوب: تحديد الزاوية المستوية بين المستويين: BDC , ADC

البرهان:

نحدّد الزاوية المستوية بين المستويين: BDC , ADC

$\overleftrightarrow{DC}$ حافة الزاوية الزوجية (1)

المثلث ADC متطابق الأضلاع.

$\because$ M منتصف $\overline{CD}$ من خواص Δ متطابق الأضلاع

$\therefore$ $\overline{AM} \perp \overleftrightarrow{DC}$ حيث $\overline{AM} \subset (ADC)$ (2)

$\therefore$ $\overline{BM} \perp \overleftrightarrow{DC}$ حيث $\overline{BM} \subset (BDC)$ (3)

وبالمثل نجد أن: $A\widehat{M}B$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

b المطلوب

إيجاد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

البرهان:

$\because$ المثلث AMD قائم الزاوية في M.

متطابقة فيثاغورث

$$(AM)^2 = (AD)^2 - (DM)^2$$

$$(AM)^2 = 8^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

$$(AM)^2 = 64 - 16 = 48$$

$$AM = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}\text{ cm}$$

$$BM = AM = 4\sqrt{3}\text{ cm}$$

في المستوي AMB:

لإيجاد قياس الزاوية المستوية AMB نستخدم قانون جيب التمام في المثلث ABM.

$$(AB)^2 = (AM)^2 + (MB)^2 - 2 \cdot AM \cdot MB \cdot \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{(AM)^2 + (MB)^2 - (AB)^2}{2AM \cdot MB}$$

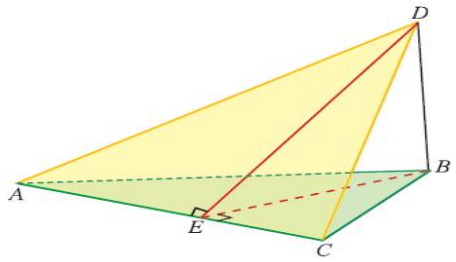
$$\cos\theta = \frac{48 + 48 - 64}{2 \times 4\sqrt{3} \times 4\sqrt{3}} = \frac{32}{96} = \frac{1}{3}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70.5287^\circ$$

أي $70^\circ 31' 43.61''$

$\therefore$ قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية حوالى $70^\circ 31' 44''$

(52)



في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

$m(B\hat{A}C)=\frac{\pi}{6}$ ، $AB=10\text{ cm}$ ، $DB=5\text{ cm}$

$\overline{DB}\perp(ABC)$

$\overline{DE}\perp\overline{AC}$ ، $\overline{BE}\perp\overline{AC}$

أوجد:

a BE , DE

b قياس الزاوية الزوجية بين المستويين DAC , BAC

الحل:

المعطيات:

D نقطة خارج (ABC)

$m(\widehat{BAC})=\frac{\pi}{6}$

$DB=5\text{ cm}$, $AB=10\text{ cm}$, $\overline{DB}\perp(ABC)$

$\overline{DE}\perp\overline{AC}$, $\overline{BE}\perp\overline{AC}$

a المطلوب: إيجاد BE , DE

البرهان:

فرضًا

$\because\ \overline{BE}\perp\overline{AC}\Rightarrow\ \therefore\ m(B\hat{E}A)=\frac{\pi}{2}$

$\because\ m(\widehat{BAC})=\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ AEB$ مثلث ثلاثيني — ستيني

خاصيّة المثلث ثلاثيني — ستيني

$\therefore\ BE=\frac{1}{2}AB=5\text{ cm}$

فرضًا

$\overline{DB}\perp(ABC)$, $\overline{BE}\subset(ABC)$

خاصيّة المستقيم العمودي على مستو

$\therefore\ \overline{DB}\perp\overline{BE}$

في المستوي DBE:

المثلث DBE قائم في $\widehat{B}$، متطابق الضلعين.

طول الوتر في المثلث القائم متطابق الضلعين

$\therefore\ DE=BE\times\sqrt{2}$

$=5\sqrt{2}\text{ cm}$

b المطلوب: إيجاد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين (DAC) , (BAC)

البرهان:

$\overleftrightarrow{AC}$ هو خط تقاطع المستويين DAC ، BAC

$\overline{BE}\perp\overline{AC}$ في المستوي BAC

$\overline{DE}\perp\overline{AC}$ في المستوي DAC

$\therefore$ الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين DAC ، BAC هي $\widehat{BE}D$

$\because\ \Delta DBE$ قائم في $\widehat{B}$ ومتطابق الضلعين.

$\therefore\ m(\widehat{BE}D)=\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $=\frac{\pi}{4}$

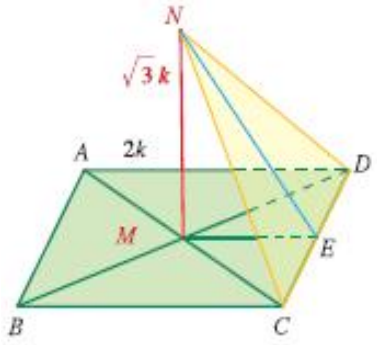
(53)

$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M، وفيه $AD = 2k$

أقيم $\overline{NM}$ عمودًا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}k$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD , $ABCD$

الحل:



المعطيات: $ABCD$ مستطيل، $\overline{AC} \cap \overline{DB} = \{M\}$

$\overline{MN} \perp (ABCD)$, $MN = \sqrt{3}k$, $AD = 2k$

المطلوب: إيجاد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NDC , $ABCD$

العمل: نرسم $\overline{ME}$ حيث E منتصف $\overline{CD}$

البرهان: $\overline{CD}$ هي الحافة المشتركة بين المستويين $NCD, ABCD$

$\because \overline{MN} \perp (ABCD)$, $\overline{CD} \subset (ABCD)$

$\therefore \overline{MN} \perp \overline{CD}$ (1)

في المثلث CDM المتطابق الضلعين

$\because E$ منتصف $\overline{CD}$ (عملًا)

$\therefore \overline{ME} \perp \overline{CD}$ (2)

من (1), (2) نجد أن:

$\overline{CD} \perp (MNE)$, $\overline{NE} \subset (MNE)$

$\therefore \overline{NE} \perp \overline{CD}$

$\therefore \widehat{MEN}$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overline{CD}$

في المثلث BCD

M منتصف $\overline{BD}$ (من خواص المستطيل)

E منتصف $\overline{CD}$ (عملًا)

$\therefore ME = \frac{1}{2}AD$

$= \frac{1}{2} \times 2k = k$

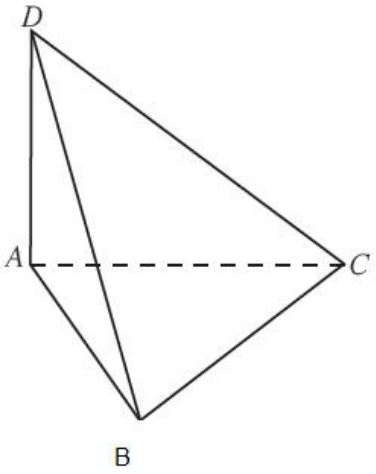
في المثلث MEN القائم الزاوية في M (من خواص المستقيم العمودي مع مستوي)

$$\tan(\widehat{MEN}) = \frac{MN}{ME} = \frac{\sqrt{3}k}{k} = \sqrt{3}$$

$\therefore m(\widehat{MEN}) = 60^\circ$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $NCD, ABCD$ هو 60°

(54)



ABC مثلث متطابق الأضلاع.

$\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC

أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DAB, \overleftrightarrow{DA}, DAC)$

$\overleftrightarrow{DA}$ هو خط تقاطع المستويين DAB , DAC

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوى ADC

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ في المستوى ADB

∴ الزاوية $(B\hat{A}C)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(DAB, \overleftrightarrow{DA}, DAC)$

∵ المثلث ABC متطابق الأضلاع فزواياه متطابقة .

∴ $m(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{3}$

(55)

حل المعادلة : $_6p_r = 4 \times {}_6p_{r-1}$

الحل :

$$_6p_r = 4 \times {}_6p_{r-1}$$

$$\frac{6!}{(6-r)!} = 4 \times \frac{6!}{(6-(r-1))!}$$

$$\frac{6!}{(6-r)!} = \frac{4 \times 6!}{(6-r+1)!}$$

$$\frac{6!}{(6-r)!} = \frac{4 \times 6!}{(7-r) \times (6-r)!}$$

$$\frac{6!}{(6-r)!} \times \frac{(6-r)!}{6!} = \frac{4 \times 6!}{(7-r) \times (6-r)!} \times \frac{(6-r)!}{6!}$$

$$1 = \frac{4}{(7-r)}$$

$$7 - r = 4$$

$$r = 7 - 4$$

$$r = 3$$

(56)

a

أوجد الحد الذي يحتوي على $x^3 y^4$ في مفكوك $(2x + 3y)^7$

الحل:

الحد الذي رتبته $r+1$ هو : $T_{r+1} = {}_n C_r \cdot x^{n-r} \cdot y^r$

في مفكوك كثيرة الحدود $(2x + 3y)^7$, $n = 7$

∵ أس y يساوي 4 ∴ $r = 4$

$$T_5 = {}_7 C_4 \cdot (2x)^3 \cdot (3y)^4$$
$$= (35)\, 2^3 x^3 \cdot 3^4 y^4$$
$$= (35)(8)(81)\, x^3 y^4$$
$$= 22680\, x^3 y^4$$

.....

b

في مفكوك: $(2x - 3y^2)^{10}$ أوجد الحدّ السابع.

الحل:

تكتب $(2x - 3y^2)^{10}$ على الصورة $(2x + (-3y^2))^{10}$

الحدّ السابع هو: $T_{r+1} = {}_n C_r \cdot x^{n-r} \cdot y^r$

$$T_7 = T_{6+1}$$
$$T_7 = {}_{10} C_6 (2x)^4 \times (-3y^2)^6$$
$$= (210)(2^4)(-3)^6 (x^4)(y^2)^6$$
$$= 2\,449\,440\, x^4 y^{12}$$

(57)

(1) استخدم نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(x-2y)^3$

الحل:

$$(x-2y)^3 = {}_3C_0\,(x)^3 + {}_3C_1\,(x)^2(-2y) + {}_3C_2(x)(-2y)^2 + {}_3C_3(-2y)^3$$

$$(x-2y)^3 = x^3 + 3\,x^2\,(-2y) + 3\,x\,(-2y)^2 + (-2y)^3$$

$$(x^2-2y)^3 = x^3 - 6\,x^2\,y + 12\,x\,y^2 - 8\,y^3$$

---

(2) حل المعادلة: ${}_nP_4 = 5 \times {}_nP_3 \quad , \quad n \geq 4$

الحل:

$$\frac{n!}{(n-4)!} = 5 \times \frac{n!}{(n-3)!}$$

$$\frac{1}{(n-4)!} = \frac{5}{(n-3)(n-4)!}$$

$$n-3 = 5$$

$$n = 8$$

(58)

يحتوي كيس على 4 كرات زرقاء اللون و كرتين حمراء اللون .أخذت كرتان معا من دون النظر داخل الكيس . أوجد احتمال كل حدث مما يلي :

1) الكرتان زرقاوان

2) كرة زرقاء و كرة حمراء

الحل:

1) $n(S) = {}_6C_2 = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = 15$

الحدث A : الكرتان زرقاوان

$n(A) = {}_4C_2 = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = 6$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

2) الحدث B : كرة زرقاء و كرة حمراء

$n(B) = {}_4C_1 \times {}_2C_1$

$= \frac{4!}{(4-1)! \times 1!} \times \frac{2!}{(2-1)! \times 1!} = 4 \times 2 = 8$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{8}{15}$

ممكن ايضا مطلوب ثالث

c) الكرتان من اللون نفسه .

ⓒ $p(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{{}_4C_2 + {}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{\left(\frac{4!}{2!(4-2)!}\right) + 1}{\left(\frac{6!}{2!(6-2)!}\right)} = \frac{7}{15}$ كرتان زرقاوان أو كرتان حمراوان

(59)

حل المعادلة : ${}_nC_4 = {}_nC_{n-2}$

الحل:

$$\frac{n!}{(n-4)! \times 4!} = \frac{n!}{2! \times (n-2)!}$$

$$\frac{1}{(n-4)! \times 4 \times 3 \times 2!} = \frac{1}{2! \times (n-2)(n-3)(n-4)!}$$

$$\frac{1}{4 \times 3} = \frac{1}{(n-2)(n-3)}$$

$$4 \times 3 = (n-2)(n-3)$$

$$12 = n^2 - 5n + 6$$

$$n^2 - 5n - 6 = 0$$

$$(n-6)(n+1) = 0$$

$n = 6$, $n = -1$ مرفوضة

(60)

رُمي حجر نرد منتظم. فما احتمال الحصول على أحد مضاعفات العدد 3 أو عدد زوجي؟

الحل:

$$S=\{1,2,3,4,5,6\} \quad \Longrightarrow \quad n(S)=6$$

ليكن الحدث A: «مضاعفات العدد 3»

$$A=\{3,6\} \quad \Longrightarrow \quad P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

الحدث B: «عدد زوجي»

$$B=\{2,4,6\} \quad \Longrightarrow \quad P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

الحدثان A، A غير متنافيين لأن

$$A\cap B=\{6\} \quad \Longrightarrow \quad P(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

$$\therefore\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

احتمال الحصول على عدد من مضاعفات العدد 3 أو عدد زوجي يساوي $\frac{2}{3}$

طريقة أخرى:

$$A\cup B=\{2,3,4,6\}$$

$$P(A\cup B)=\frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

(61)

خلال شهر التسوق يقدم أحد المحلات العرض التالي: عند شراء كل صنف تحصل على بطاقة. تفوز 40% من البطاقات بجوائز ويتم اختيار هذه البطاقات الرابحة بشكل عشوائي. مع راشد 3 بطاقات. ما احتمال أن يفوز راشد بجائزتين؟

الحل:

نفرض الحدث A: «فوز راشد بجائزة» $P(A) = m = 0.40$

الحدث B: «عدم فوز راشد بجائزة» $P(B) = 1 - m = 0.60$

والحدث E: «فوز راشد بجائزتين»

فيكون: $n = 3$ و $k = 2$

$$P(E) = {}_nC_k \cdot (m)^k \cdot (1-m)^{n-k}$$

$$= {}_3C_2 (0.4)^2 (0.6)^1$$

$$= 0.288$$

احتمال فوز راشد بجائزتين يساوي 0.288

(62)

a

$$\frac{\frac{(2n)!}{(2n-n-2)!}}{\frac{2n!}{(2n-n+1)!}} = 60$$

$$\frac{(2n)!}{(n-2)!} \times \frac{(n+1)!}{(2n)!} = 60 \Longrightarrow \frac{(n+1)!}{(n-2)!} = 60$$

$$\frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 60$$

$$(n+1)(n)(n-1) = 60$$

$$(n+1)(n)(n-1) = 5 \times 4 \times 3 = 60$$ خمّن

$$\therefore \ n = 4$$

b $$\frac{{}_nC_7}{{}_{(n-1)}C_6} = \frac{8}{7}$$

$$\frac{\frac{n!}{(n-7)! \times 7!}}{\frac{(n-1)!}{(n-1-6)! \times 6!}} = \frac{8}{7}$$

$$\frac{n \times (n-1)!}{(n-7)! \times 7 \times 6!} \times \frac{(n-7)! \times 6!}{(n-1)!} = \frac{8}{7}$$

$$\frac{n}{7} = \frac{8}{7}$$

$$n = 8$$