

درس (2-2) مفهوم النهاية

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

تمرين 76

أولاً: الدليل العددي (جدول القيم)

x	0.9	0.99	0.999	1	1.000	1.001	1.01	1.1
$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$	1.9	1.99	1.999	2	2.000	2.001	2.01	2.1

$$f(x) \rightarrow 2$$

$$2 \leftarrow f(x)$$

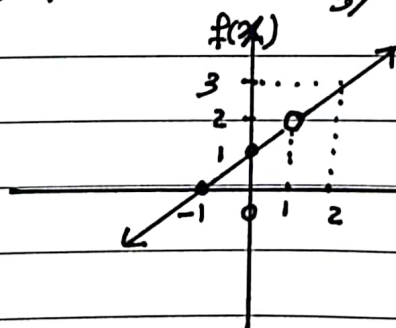
عندما $x \rightarrow 1^-$ (بقيم أصغر من 1) فإنه $f(x)$ تقترب من 2
وعندما $x \rightarrow 1^+$ (بقيم أكبر من 1) فإن $f(x)$ تقترب من 2

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

نكتب:

ثانياً: الدليل البياني:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	0	1	غير معرف	3



من الرسم البياني كلما اقتربت x نحو العدد 1

(من جهتي اليسار أو من جهتي اليمين) فإنه $f(x)$ تقترب من العدد 2

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$$

ثالثاً: استخدام التحليل:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \quad (x \neq 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{1} = 1 + 1 = 2$$

No:

Date:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2}$$

مركبي (2) ص 76

أول دليل العددي

x	-0.9	-0.99	-0.999	-0.9999	1	-1.0001	-1.001	-1.01	-1.1
$f(x)$	0.3103	0.3311	0.3331	0.3334	غير معرف	0.3334	0.3336	0.3355	0.3548

$$f(x) \rightarrow 0.333 \approx \frac{1}{3} \quad 0.333 \approx \frac{1}{3} \leftarrow f(x)$$

عندما $x \rightarrow -1^+$ (بقيم أكبر من -1) فإن $f(x)$ تقترب من $\frac{1}{3}$ حسبًا وبيانًا
وعندما $x \rightarrow -1^-$ (بقيم أصغر من -1) فإن $f(x)$ تقترب من $\frac{1}{3}$ حسبًا وبيانًا

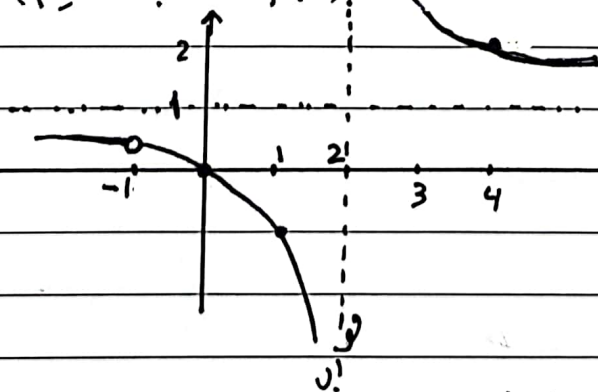
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{1}{3} \quad \text{نكتب:}$$

ثانيًا الدليل البياني: نرسم بيان $f(x)$ معرف عندما $x^2 + x - 2 \neq 0$
أي عندما $x \neq -2$ و $x \neq 1$

وعين ملاحظه

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2} = \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x}{x-2}$$

عند اختصار $x+1 \neq 0$ مبره $x \neq -1$ (مخوّه)
ولا يختصر $x+2$ فيكون $x \neq -2$ خط مقارب رأسي
رعين استخدام برامج الرسم للملاحظه بيان $f(x)$ أو مبر اول قيم



عند الرسم كلما اقتربت x من -1
(من جهة اليمين أو من جهة اليسار)
قلبت قيم $f(x)$ تقترب من $\frac{1}{3}$

ثالثًا باستخدام التحليل و مبرنا (مبدأ الاختصار)

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-2} \quad (x \neq -1)$$

$$= \frac{-1}{-1-2} = \frac{1}{3}$$

No:

Date:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$$

تمرين (3) ص 77

$x \rightarrow 2^-$					$x \rightarrow 2^+$			
x	1.9	1.99	1.999	1.9999	2.001	2.001	2.01	2.1
$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$	0.2564	0.2506	0.2501	0.25	عزوفون	2.25	0.2499	0.2494
$f(x)$	$\rightarrow 0.25 \approx \frac{1}{4}$				$\frac{1}{4} \approx 0.25 \leftarrow f(x)$			

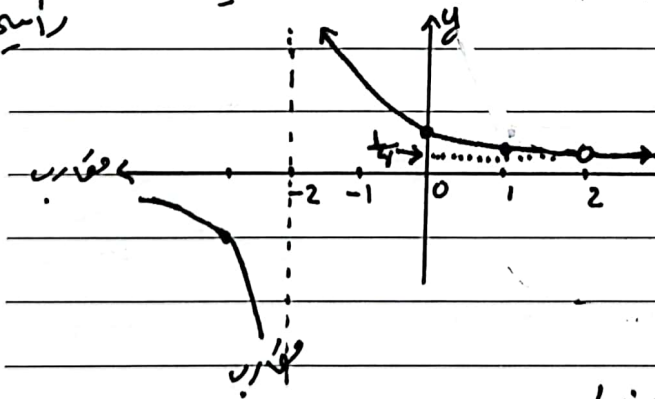
عندما $x \rightarrow 2^-$ فإن قيمة $f(x)$ تقرب من $\frac{1}{4}$
وعندما $x \rightarrow 2^+$ فإن قيمة $f(x)$ تقرب من $\frac{1}{4}$ متساويان

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{4} \quad \text{نكتب:}$$

ثانياً الدليل البياني: نرسم بيانه $f(x)$ (جدول قيم أو برمج رسم)
ونلاحظ: $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} =$

$$= \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} \quad (x \neq 2)$$

فيكون عند $x=2$ مجزوم
وعندما $x+2=0$ يكون $x=-2$ صفاب رأسي



من الرسم البياني نلاحظ:
كلما اقتربت x من 2
من جهتي اليمين أو من جهتي اليسار
فإن قيمة $f(x)$ تقرب من $\frac{1}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{4} \quad \text{! إذن:}$$

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{x+2} \quad \text{وإبنا:} \quad (x \neq -2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

No:

Date:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x^2+2x-3}$$

مركز (4) ص 77

أولاً: الدليل العددي:

$x \rightarrow 1^-$	x	0.9	0.99	0.999	0.9999	1	1.0001	1.001	1.01	1.1
	$f(x)$	-0.0256	-0.0025	-0.0003	-0.00003	غير معرف	0.00003	0.0003	0.0025	0.0244

عندما $x \rightarrow 1^-$ (بقيم أصغر من 1) قيم $f(x)$ تقترب من 0
وعندما $x \rightarrow 1^+$ (بقيم أكبر من 1) قيم $f(x)$ تقترب من 0

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

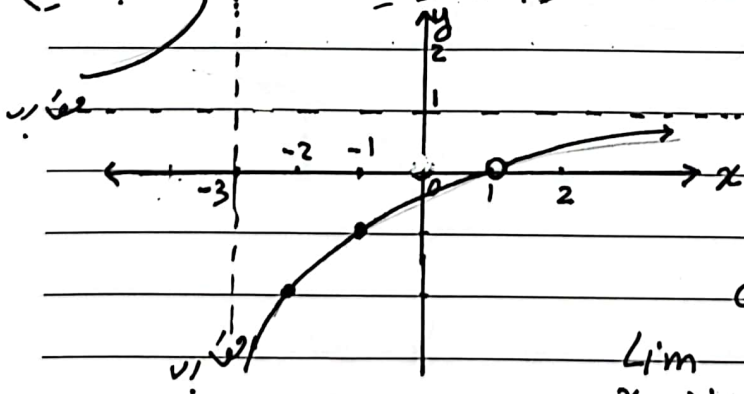
ثانياً: الدليل البياني

بأن نتخذ أقرب الج الرسوم (أو باختصار وجد للقيم) نرسم بيان $f(x)$ ونلاحظ:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+2x-3}$$

$$= \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+3)} = \frac{x-1}{x+3} \quad (x \neq 1)$$

فيكون عند $x=1$ فجوة وعند $x+3=0$ أي $x=-3$ خط عمودي رأسي



من الرسم البياني كلما اقتربت

 x من 1 (من جهة اليمين

أو من جهة اليسار)

قيمه $f(x)$ تقترب من العدد 0

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

ثالثاً: باستخدام التحليل وجدنا بعد الاختصار و

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+3} \quad (x \neq 1)$$

$$= \frac{1-1}{1+3} = 0$$

No:

Date:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-9}{x^2-5x+6}$$

معرني (5) ص 77

أولاً: بالدليل العددي

$x \rightarrow 3^-$	x	2.9	2.99	2.999	2.9999	3	3^+	x	3.0001	3.001	3.01	3.1
	$f(x)$	2.3333	2.0303	2.003	2.0003	عز صفر			2.9997	2.997	2.9703	2.7273

$$f(x) \rightarrow 3$$

$$3 \leftarrow f(x)$$

عندما نؤول x فإنه قيم $f(x)$ تقترب من 3
وعندما $x \rightarrow 3^-$ فإن قيم $f(x)$ تقترب من 3 (مستأديان)

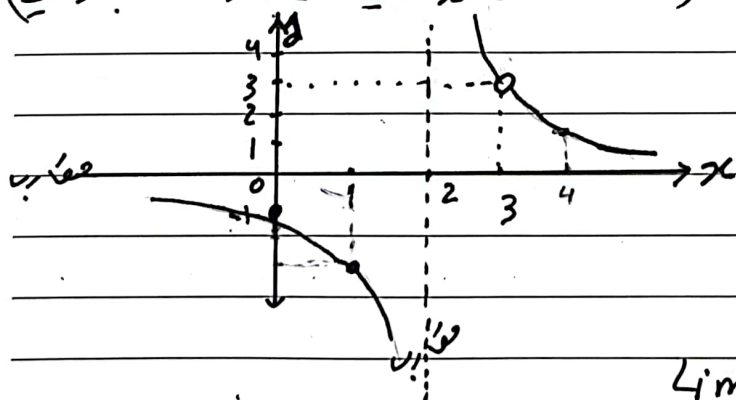
$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$$

نكتب:

ثانياً: بالدليل البياني: نرسم بيان $f(x)$ باستخدام برامج الرسم
(أو باختيار نقط مع ملاحظة:

$$f(x) = \frac{3(x-3)}{(x-3)(x-2)} = \frac{3}{x-2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{حيث } x-3 \neq 0 \\ x \neq 3 \end{array} \right)$$

فيكون عند $x=3$ فجوة) وعند $x-2=0$ أي $x=2$ مقارب رأسي



من الرسم البياني نلاحظ
كلما اقتربت x من 3 فإنه
قيم $f(x)$ تقترب من 3
(من اليمين ومن اليسار)

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$$

نقول

ثالثاً: باستخدام الكالكل: وجدنا بعد الكالكل والاختصار:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{x-2} \quad (x \neq 3)$$

$$= \frac{3}{3-2} = 3$$

No:

Date:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2+x}{x^2+2x}$$

مركبي (6) ص 77

أوّل: الدليل العددي:

x	-1.9	-1.99	-1.999	-1.9999	-2	-2.0001	-2.001	-2.01	-2.1
$f(x)$	0.5263	0.5025	0.5003	0.5000	غير معرف	0.49998	0.4998	0.4975	0.4762

$f(x) \rightarrow -0.5$ ($-\frac{1}{2}$) $-0.5 \leftarrow f(x)$ ($-\frac{1}{2}$)

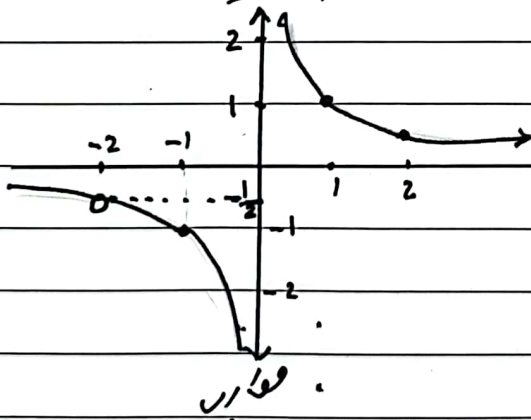
$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\frac{1}{2}$$

نقول

ثانياً: بالرسم البياني:

حسب برنامج الرسم (أرباقس، نقط) وملاحظة:

$$f(x) = \frac{2+x}{x^2+2x} = \frac{2+x}{x(x+2)} = \frac{1}{x} \quad (x \neq -2)$$

يكون عند $x = -2$ فجوة وعند $x = 0$ مقام برأسيعندما x تقترب من -2

(من اليمين أو من اليسار)

فإنه قيم $f(x)$ تقترب من $-\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\frac{1}{2}$$

نقول:

ثالثاً: باستخدام الكالكيلا إلى عوامل:

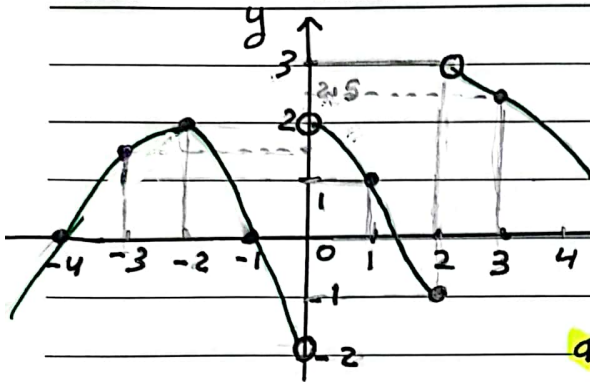
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

بعد التكامل ولاختصار
($x \neq -2$)

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

No:

Date:



تمرين (7) ص 77 من الرسم البياني

بتكبير الرسم قليلاً

نوضح النقط بدقة أكثر

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ غير موجودة } (c)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 2$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2$$

$$\Rightarrow f) \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2 \text{ موجودة}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

تمرين (8) ص 77 (الرسم السابق)

$$a) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

$$\Rightarrow c) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1 \text{ موجودة}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$$

$$\Rightarrow f) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ غير موجودة}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2.5$$

$$h) \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 1.5$$

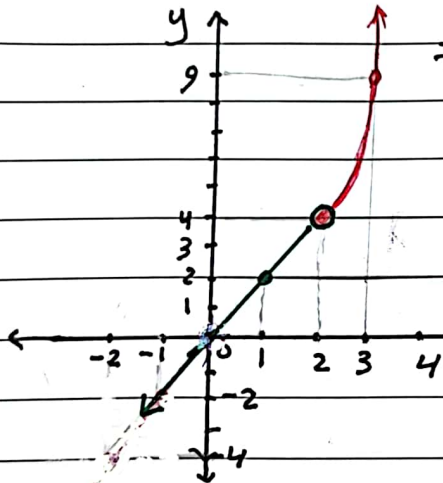
تمرين [9] ص 77 ارسم : $f(x) = \begin{cases} 2x & ; x < 2 \\ x^2 & ; x \geq 2 \end{cases}$

أولاً: عندما $x < 2$ يكون $f(x) = 2x$ (خطية والرسم جزء من مستقيم)

x	2	1	0
$f(x) = 2x$	4	2	0

ثانياً: عندما $x \geq 2$ يكون $f(x) = x^2$ (تربيعية والرسم جزء من قطع وكافئ)

x	2	3	4
$f(x) = x^2$	4	9	16



نلاحظ في الجزء الأسفل من الرسم حذف

النقطة (2,4) وفي الجزء الأعلى

لم نحذف ونظراً لارتباط

الجزئين عند هذه النقطة فهي

ليست محذوفة من الرسم النهائي

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$?

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$

c) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

($= \lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2(1) = 2$)

e) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 9$

($= \lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 3^2 = 9$)

من الأسفل
أو بالتعويض

No:

Date:

مركزي (10) ص 77 ارسام:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & : x < 0 \\ 0 & : x = 0 \\ \sqrt{x+1} - 2 & : x > 0 \end{cases}$$

أولاً: $x < 0$: $f(x) = x^3 - 1$ (جزء من مفتحي دالة تكعيبية)

x	-2	-1	0
$f(x) = x^3 - 1$	-9	-2	-1

محددة

ثانياً: $x = 0$ يكون $f(x) = 0$ نقطة (0,0) فقط
ثالثاً: $x > 0$: $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$ (جزء من مفتحي دالة جذرية)

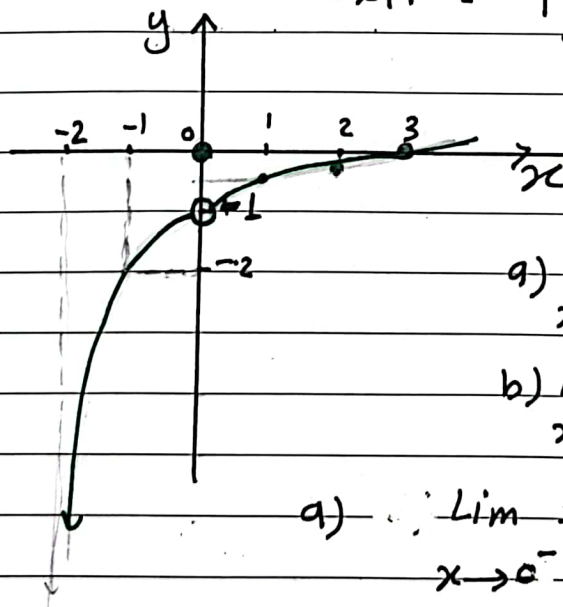
x	0	+1	+2	3
$\sqrt{x+1} - 2$	-1	-0.6	-0.3	0

محددة

تقريباً

تقريباً

حيث: $x+1 \geq 0$ ؟
 $x > -1$ ؟
 تحقق حيث $x > 0$



من الرسم:

$$\left. \begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= -1 \\ b) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

موجودة

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ مكان بالكل:

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 - 1) = 0^3 - 1 = -1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x+1} - 2 = \sqrt{0+1} - 2 = -1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 1) = (-1)^3 - 1 = -2 \quad (\text{أدمن/أرسام})$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x+1} - 2 = \sqrt{1+1} - 2 \approx -0.59 \quad (1 - 2 + \sqrt{2})$$

No:

Date:

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

مركزي (11) ص 77

$$f(1.01) = \frac{1.01-1}{\sqrt{1.01}-1} = 2.01 \quad (3)$$

$$f(1.1) = \frac{1.1-1}{\sqrt{1.1}-1} = 2.05 \quad (2)$$

$$f(1.5) = \frac{1.5-1}{\sqrt{1.5}-1} = 2.22 \quad (1)$$

$$f(1.001) = \frac{1.001-1}{\sqrt{1.001}-1} = 2.00 \quad (4)$$

يبدو أن قيم $f(x)$ تقترب من 2 عندما x تقترب من 1 من اليمين

$$f(0.5) = \frac{0.5-1}{\sqrt{0.5}-1} = 1.71$$

$$f(0.9) = \frac{0.9-1}{\sqrt{0.9}-1} = 1.95$$

$$f(0.99) = \frac{0.99-1}{\sqrt{0.99}-1} = 1.99$$

$$f(0.999) = \frac{0.999-1}{\sqrt{0.999}-1} = 2.00$$

يبدو أن قيم $f(x)$ تقترب من 2 عندما x تقترب من 1 من اليسار

مما سبق:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

No:

Date:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$$

عربي (12) ص 77

$$f(-1.5) = \frac{-1.5+1}{(-1.5)^2-1} = -0.4$$

$$f(-1.1) = \frac{-1.1+1}{(-1.1)^2-1} = -0.4762$$

$$f(-1.01) = \frac{-1.01+1}{(-1.01)^2-1} = -0.4975$$

$$f(-1.001) = \frac{-1.001+1}{(-1.001)^2-1} = -0.4998$$

يبدو أن قيم
 $f(x)$ تقترب من
عندما -0.5

تقترب قيم x من
من اليسار

$$f(-0.5) = \frac{-0.5+1}{(-0.5)^2-1} = -0.6667$$

$$f(-0.9) = \frac{-0.9+1}{(-0.9)^2-1} = -0.5263$$

$$f(-0.99) = \frac{-0.99+1}{(-0.99)^2-1} = -0.5025$$

$$f(-0.999) = \frac{-0.999+1}{(-0.999)^2-1} = -0.5003$$

يبدو أن قيم
 $f(x)$ تقترب من
عندما -0.5
تقترب قيم x
من 1 من اليمين

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -0.5$$

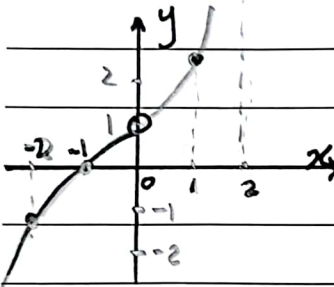
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{\sin x}$$

الآن لنجرب لوبيتال

لوعوضنا: $\frac{0^2 + 0}{\sin 0} = \frac{0}{0}$ غير صفر

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \times \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1 \times (0+1) = 1$$



	$x \rightarrow 0^-$	$0^- \leftarrow x$	
x	0.9	0.99	0.999
y	0.11	0.01	0.001

دليل عددي

$$f(x) \rightarrow 1 \quad 1 \leftarrow f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

هنا من الرسم البياني حول

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

	$x \rightarrow 1^-$	$1^- \leftarrow x$	
x	0.9	0.99	0.999
y	-19	-199	-1999

دليل عددي

تقارب لـ $f(x)$

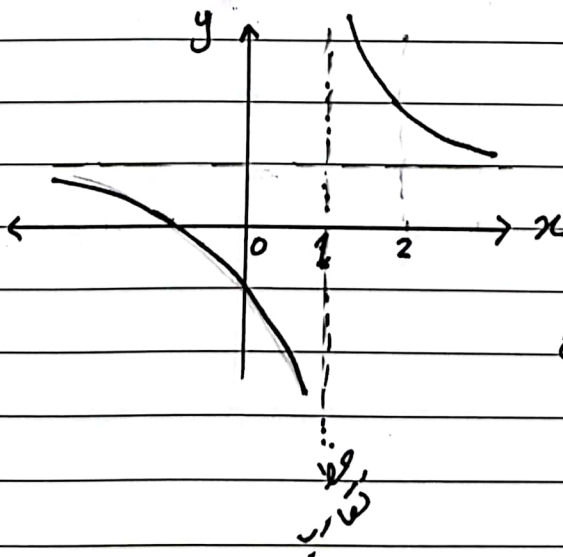
تقارب

تقارب لـ $f(x)$

$$f(x) \rightarrow -\infty$$

$$+\infty \leftarrow f(x)$$

يوجد خط تقارب رأسي عند $x=1$ ، والنهاية غير موجودة



بالرسم البياني نجد خط التقارب الرأسي $x=1$

ممكن ملاحظة:

$$\text{النهاية} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} \quad : (x \neq 1)$$

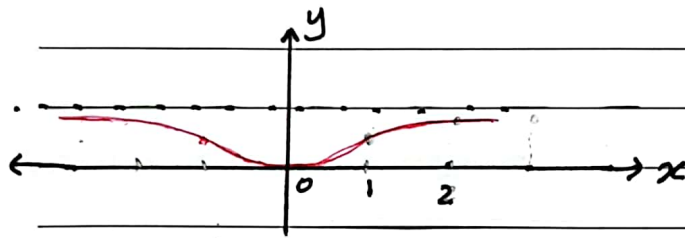
غير موجود

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

x	1	-0.5	-0.1	0	0.1	0.5	1
y	0.36	0.018	3.7×10^{-4}	غير محدد	3.7×10^{-4}	0.018	0.367

دليل عددي: عندما نأخذ قيم أقرب للعدد 0 سقطين بعض الآلات إجابته صفر مباشرة (قرينة) ونلاحظ من الجدول:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$



الرسم البياني: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

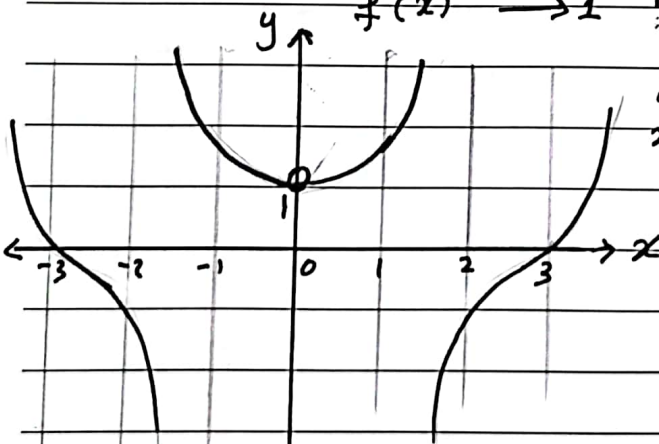
ملاحظة: $e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{e^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}}$

وعندما $x \rightarrow 0$ فإن $\left(\frac{1}{x^2}\right)$ تكبر بلائتنا ومقام الكسر يكبر بلائتنا وبالتالي الكسر تقرب بقيمة من 0

الآن بالبرهان

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad 77 م (17)$$

x	-1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	1
y	1.55	1.000003	1.0000003	غير محدد	1.0000003	1.000003	1.55
		$f(x) \rightarrow 1$		صفر		$1 \leftarrow f(x)$	



وبالتالي: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

وعتبر ملاحظة ذلك في

الرسم البياني

ملاحظة:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$= 1 \times \frac{1}{\cos 0} = 1 \times 1 = 1$$

تقريب

تقريب

No:

Date:

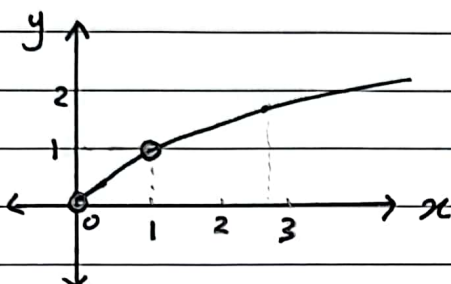
77 ص 16

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$$

x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
y	0.94	0.994	0.9994	غير معرف	1.0004	1.004	1.04

$$f(x) \rightarrow 1$$

$$1 \leftarrow f(x)$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

نقول:

(x ≠ 1 و x > 0) لـ (البياني)

77 ص 18

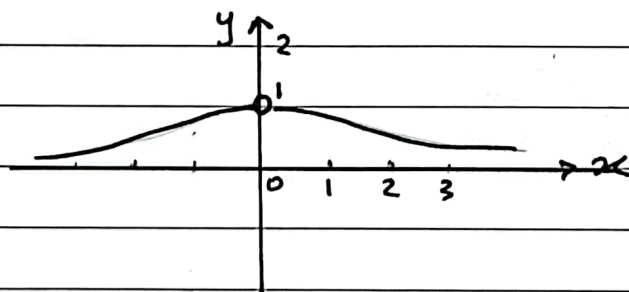
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x}{x}$$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1	1
y	0.999	0.9999	0.99999	غير معرف	0.99999	0.99999	0.99999	0.78

$$f(x) \rightarrow 1$$

$$1 \leftarrow f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$



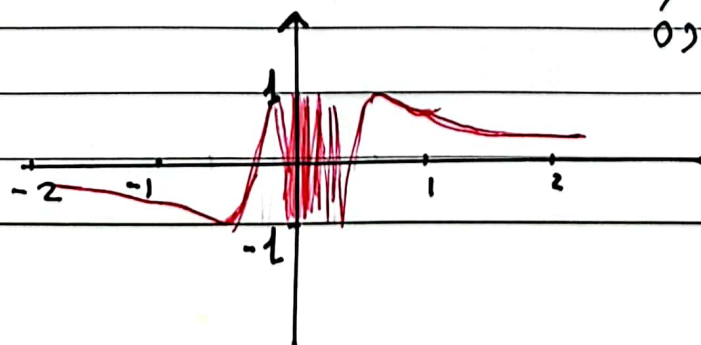
ونلاحظ ذلك في الشكل البياني

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

77 ص 19

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.544	0.506	-0.826	غير معرف	0.826	-0.506	-0.544

نم $f(x)$ تتذبذب قريباً من الصفر عابثاً - و ا + بحد
الفاية غير صفرية



No:

Date:

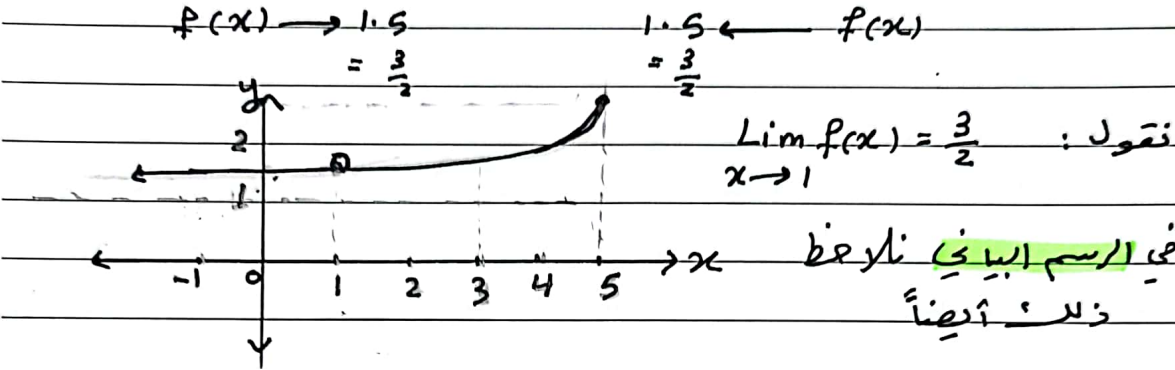
77 ص (20)

المجال $x < 1$ و $x \neq 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{9-x} - 2}{\sqrt{10-x} - 3}$$

لنعوضنا ببعض غير مكن $x \rightarrow 1^+$ $x \leftarrow 1^-$

x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
y	1.494	1.4994	1.4999	غير معرف	1.50009	1.5009	1.505



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{|x-2|}$$

77 ص (21)

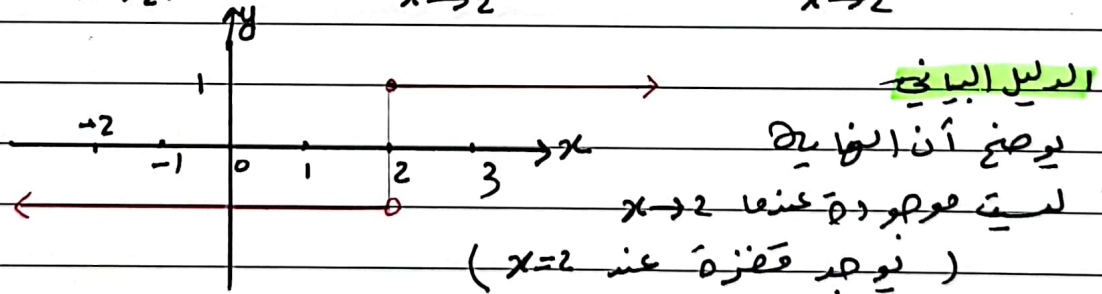
x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
y	-1	-1	-1	غير معرف	1	1	1

عندما x يقاربعندما $x > 2$: $f(x) = 1$ ثابتة $f(x) = -1$ ثابتة

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

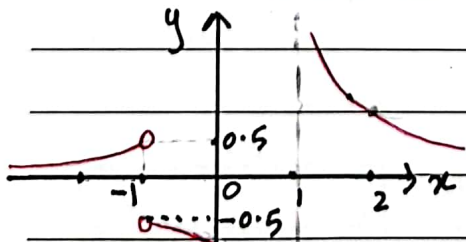
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ غير موجود}$$

معرف عندما $x \neq -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+1|}{x^2-1}$$

77 ص (22)



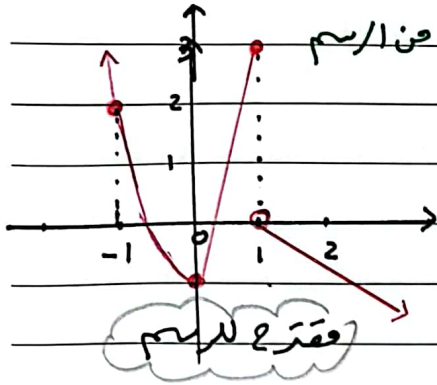
x	-1.1	-1.01	-1.001	-1	-0.999	-0.99	-0.9
y	0.47	-0.99	0.499	غير معرف	-0.5009	-0.509	-0.5

$$f(x) \rightarrow 0.5$$

$$-0.5 \leftarrow f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0.5, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -0.5, \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ غير موجود}$$

قفزة عند $x = -1$
 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
 غير موجود
 عندما $x \rightarrow -1$



نصين النقطة (193) تم (1-05) تم (1-02) من الرسم
ولذلك $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ غير موجودة

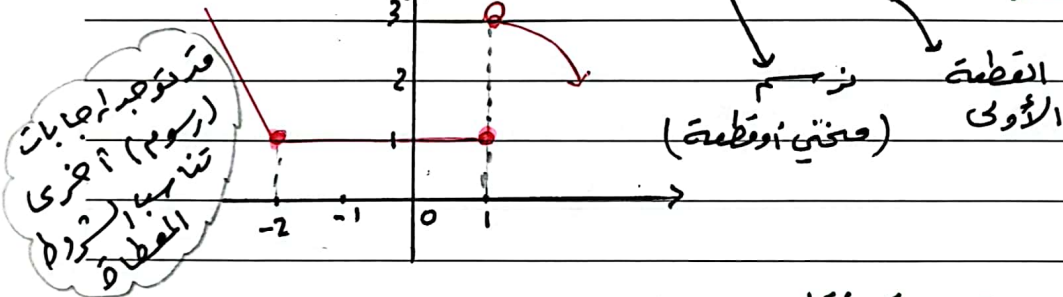
يمكن أن نرسم الرسم بحيث توجد قفزة عند $x=1$

أو يوجد مقارب عند $x=1$
(توجد أكثر من إجابات)

(24) ص 77 $f(x) = 1$ $1 \leq x < 2$ قطعة مستقيمة أفقية $\rightarrow$ بدايتها (1-02) $\rightarrow$ نهايتها (1-01)

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ نرسم على يمين $x=1$ (مخفي أو مستقيم) ينتهي عند نقطة (1-03)
(نلاحظ (1-01) معطاة من الرسم على القطعة فنكون (1-03) محذوفة)

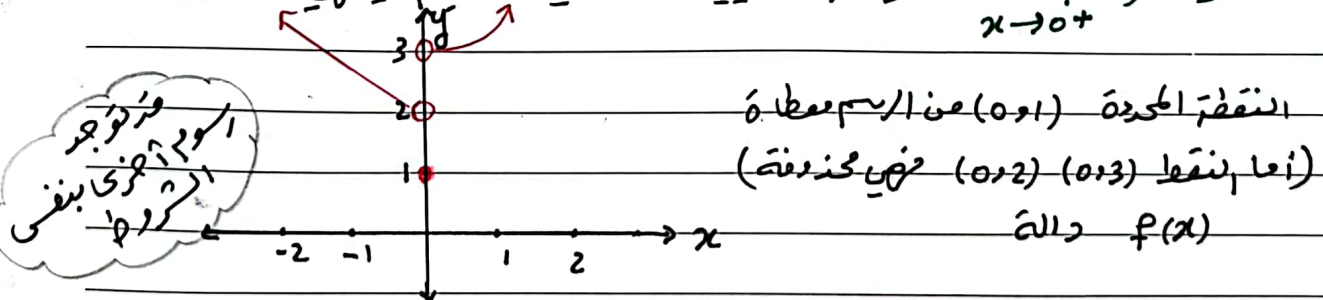
$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1$ على يمين وعلى يسار $x=2$ يتلاقى جزئياً الرسم عند نقطة (1-02)



(25) ص 77 $f(0) = 1$ محذوفة (1-01)

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$ نرسم على يسار $x=0$ (مخفي أو مستقيم) ينتهي عند (0-02)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$ نرسم على يمين $x=0$ (مخفي أو مستقيم) ينتهي عند (0-03)



النقطة المحذوفة (1-01) من الرسم معطاة

(أي أن نقط (0-02) (0-03) فهي محذوفة)

$f(x)$ دالة

(26) ص 77 $f(0) = 1$ نقطة (1-01)

$f(2) = 3$ نقطة (2-03)

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$ على يمين وعلى يسار $x=0$
ينتهي الرسم عند (0-02)

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ غير موجودة

توجد قفزة عند $x=2$ (أو مقارب)

و النقطة (0-02) محذوفة لوجود نقطة (1-01)

و النقطة (2-05) محذوفة لوجود نقطة (2-03)

No:

Date:

77 ص (27)

غير موجوده $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x-1}$ والها مقارب رأسي عند $x=1$

غير موجوده $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x^2-4}$ والها مقارب رأسي عند $x=2$ وعند $x=-2$

التخمين بشأن $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ حيث $g(a) \neq 0$ و $f(a) = 0$

هو أنها غير موجوده

(مثال / اسم أو الدرس لعددي) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2+1} = 0$

77 ص (28)

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} = 0$$

للبط $f(x) = f(-1) = -1+1=0$

للبط $g(x) = x^2+1 = (-1)^2+1=2 \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

ووجدنا

للبط $f(x) = \sin x = \sin \pi = 0$

للبط $g(x) = x = \pi \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

ووجدنا

التخمين: عند خلال المثالين:

$$f(a) = 0$$

$$g(a) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

نوصي عن طريق (27)

للبط $f(x) = x^2+1 = 1+1=2 \neq 0$

للبط $g(x) = x-1 = 1-1=0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$$

حيث اللب $f(x)$ و اللب $g(x)$ كثيرات حدود

للبط $x+1 = 2+1=3 \neq 0$

للبط $x^2-4 = 2^2-4=0$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x^2-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x^2-4}$$

ثانياً بنفس الاسم لو تخن

No:

Date:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{\pi}{x}$$

بأن

(29) 77

الحجة الأولى: $x \rightarrow 0^+$ فإن $\frac{\pi}{x}$ يزداد بلاتناه $(\frac{\pi}{x} \rightarrow \infty^+)$

حيث $\sin(\frac{\pi}{x})$ يتذبذب بين 1 و -1 (مما يثبت أنه لا يوجد حد) $\frac{\pi}{x} \rightarrow \infty^+$

صحيحة (الخاتمة غير موجودة)

الحجة الثانية: بدلالة القيم: $x=1 \rightarrow f(x) = \sin \frac{\pi}{1} = \sin \pi = 0$

$$x=0.1 \rightarrow f(x) = \sin \frac{\pi}{0.1} = \sin 10\pi = 0$$

$$x=0.01 \rightarrow f(x) = \sin \frac{\pi}{0.01} = \sin 100\pi = 0$$

$$x=0.001 \rightarrow f(x) = \sin \frac{\pi}{0.001} = \sin 1000\pi = 0$$

غير صحيحة (لأنها تبدو عند نقطة صحيحة)