

رياضيات

الصف العاشر

# الداثرة

الفصل الدراسي الثاني

2023 - 2024

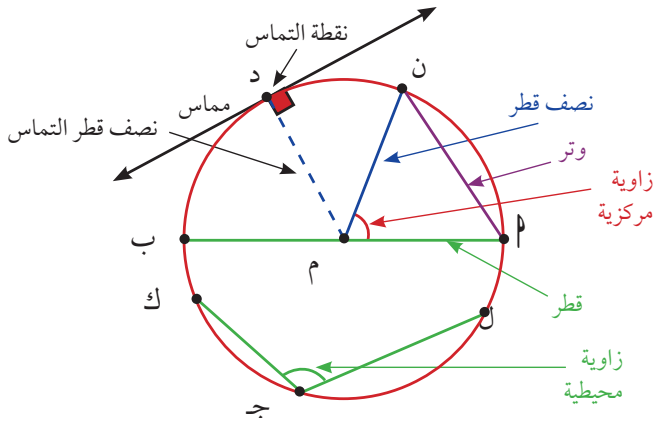
أ : سلامة علي الركاض



## تعريف الدائرة

الدائرة هي مجموعة نقاط المستوى التي تبعد كل منها عن نقطة ثابتة  $M$  في المستوى بعدًا ثابتًا.

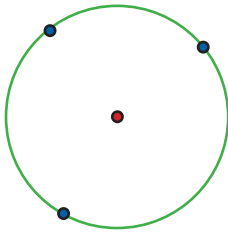
تسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة ويسمى البعد الثابت طول نصف القطر ويرمز إليه عادة بالرمز  $r$ .



## نظرية 1

## نظرية (١)

كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.



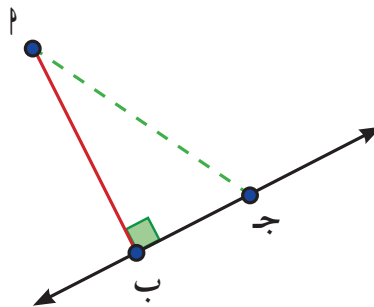
## استنتاج

**استنتاج ١:** من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بهذه النقطة وعمودي على المستقيم المعلوم.

لاحظ أنه في  $\triangle ABP$ ،  $AB > AP$  مهما كان موضع النقطة  $P$  على المستقيم (جـ لا تنطبق على ب).

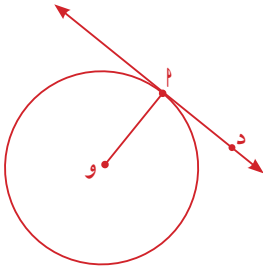
**استنتاج ٢:** أقصر بعد بين نقطة ومستقيم هو البعد العمودي.

كلما ابتعدت  $P$  عن  $B$  على المستقيم أصبح طول  $AP$  أكبر.



## المماس

المماس للدائرة هو مستقيم في المستوي يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة.  
نقطة التقاطع تسمى **نقطة التماس**.



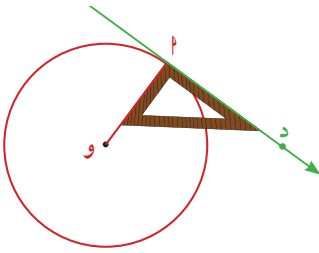
$\overleftrightarrow{d}$  مماس.

$\overleftrightarrow{d}$  شعاع مماس.

$\overline{OP}$  قطعة مماسية

$\overline{OP}$  أو نصف قطر التماس

## نظرية 2



المماس عمودي على نصف قطر التماس.

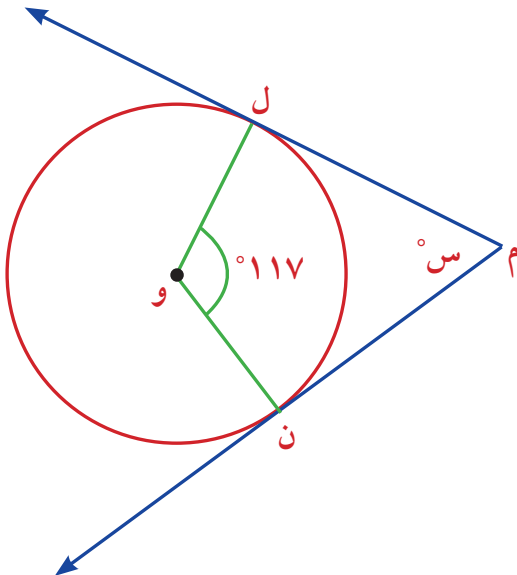
إذا كان مستقيم مماساً للدائرة، فإنه يكون متعامداً مع نصف القطر

المرار بنقطة التماس.

أي أن  $\overleftrightarrow{d} \perp \overline{OP}$ .

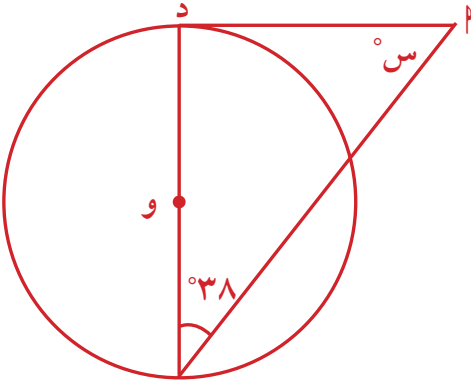
## مثال 2

في الشكل المقابل  $\overleftrightarrow{ML}$  ،  $\overleftrightarrow{MN}$  مماسان للدائرة التي مركزها O.  
أوجد قياس الزاوية  $\angle M$ .



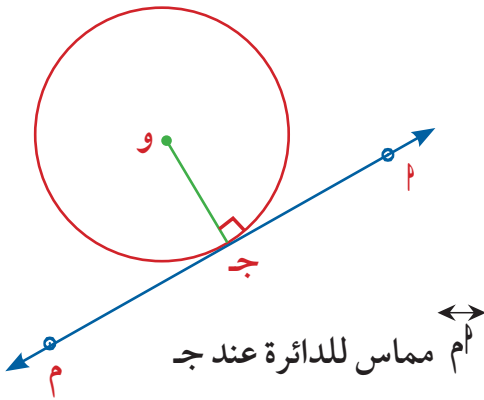
## حاول أن تحل 2

في الشكل المقابل،  $\overleftrightarrow{AD}$  مماس للدائرة التي مركزها  $O$ .  
أوجد قيمة  $\angle S$ .



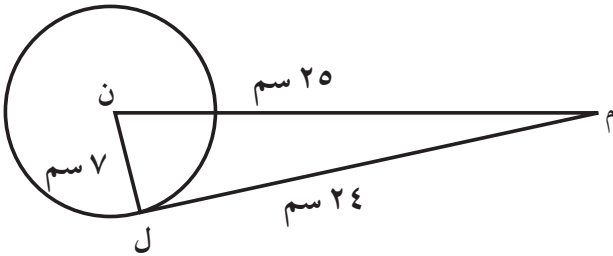
## نظرية 3

المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماساً لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

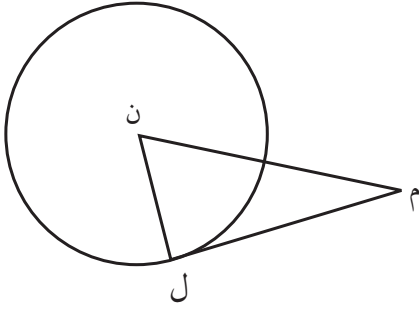


## مثال 4

في الشكل المقابل،  $N$ ،  $L = 7$  سم،  $L = M = 24$  سم،  $N = M = 25$  سم.  
أثبت أن  $\overleftrightarrow{LM}$  مماس للدائرة التي مركزها  $N$ .



#### حاول أن تحل 4

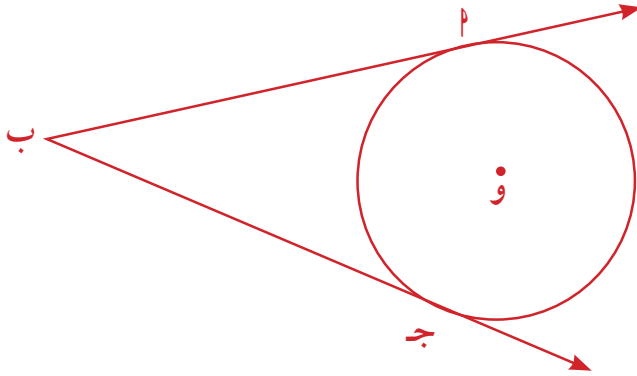


في الشكل المقابل، إذا كان  $\angle N = 8^\circ$ ،  $\angle M = 7^\circ$ ،  $\angle L = 4^\circ$ ،  
فهل  $\vec{ML}$  مماس للدائرة؟ فسّر إجابتك.

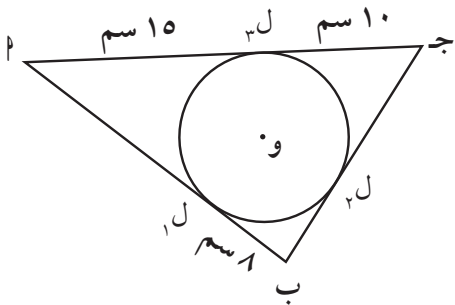
#### نظرية 4

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

$$\overline{AB} \cong \overline{CB}$$



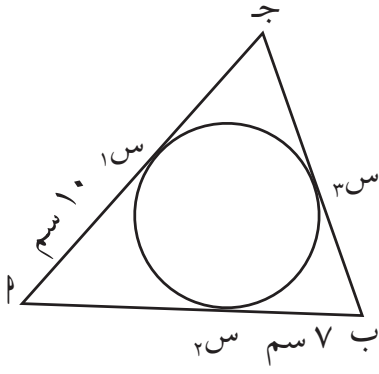
#### مثال 6



في الشكل المقابل، أوجد محيط المثلث  $\triangle ABC$ .

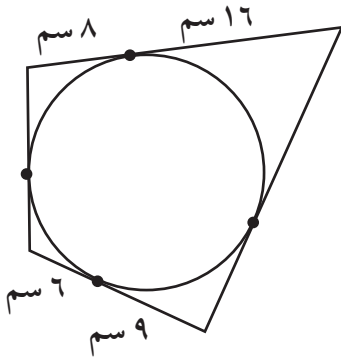
## حاول أن تحل 6

في الشكل المقابل إذا كان محيط المثلث  $ABJ = 50$  سم،  
فأوجد طول  $\overline{BJ}$ .

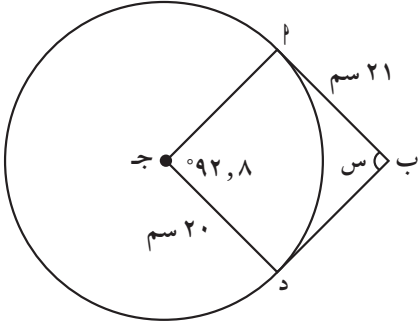


## كراسة التمارين

في التمرين (٧)، يحيط المضلع بدائرة. أوجد محيط المضلع.



## كراسة التمارين



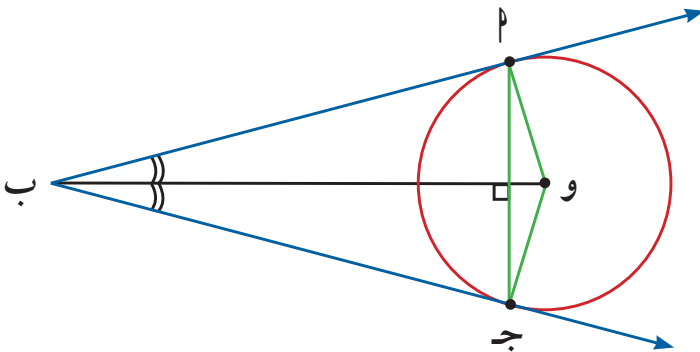
(٥)  $\vec{BP}$  ،  $\vec{BQ}$  مماسان للدائرة.

(أ) أوجد قيمة س.

(ب) أوجد محيط الشكل الرباعي BPCQ.

(ج) أوجد B.

## نتائج النظرية



$\triangle BPC \cong \triangle BQD$  متطابق الضلعين من النظرية السابقة.

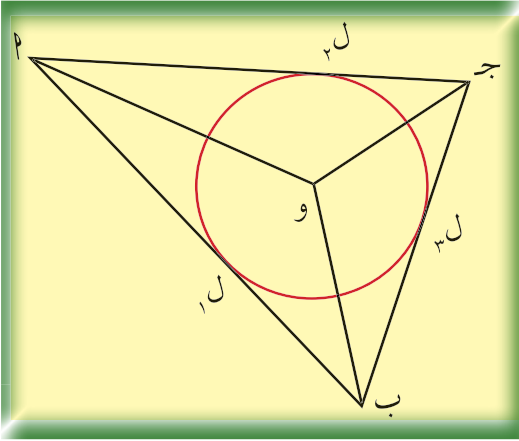
١  $\vec{BP}$  و  $\vec{BQ}$  منصف الزاوية  $\angle B$

٢  $\vec{BP}$  و  $\vec{BQ}$  منصف الزاوية  $\angle POC$

٣  $\vec{BP} \perp \vec{BQ}$

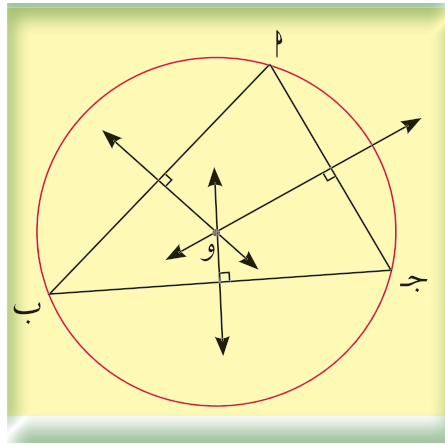
## الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلية)

هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.  
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث



## الدائرة المحيطة لمثلث (الخارجية)

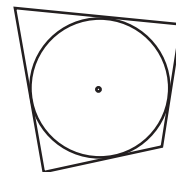
هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة.  
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث (نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث).



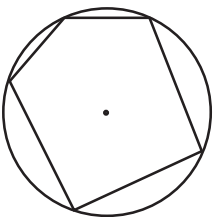
## كراسة التمارين

في التمرينين (٥-٦)، حدّد ما إذا كانت الدائرة محاطة بمضلع (داخلية) أو محيطة بمضلع (خارجية).

(٥)



(٦)





## كراسة التمارين

في التمارين (٨-١١)، اختر الإجابة الصحيحة:

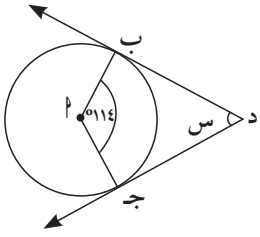
(٨) إذا كان  $\overrightarrow{دب}$ ،  $\overrightarrow{دج}$  مماسان للدائرة. فإن  $س =$

(أ) ٢٦°

(ب) ٥٧°

(ج) ٦٦°

(د) ١١٤°



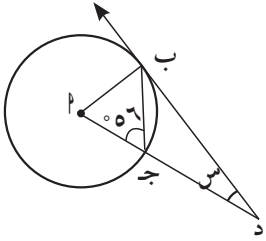
(٩) إذا كان  $\overrightarrow{دب}$  مماس للدائرة. فإن  $س =$

(أ) ٢٢°

(ب) ٢٨°

(ج) ٣٤°

(د) ٤٠°



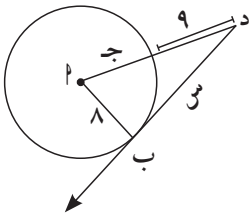
(١٠) إذا كان  $\overrightarrow{دب}$  مماس للدائرة. فإن  $س =$

(أ) ٨

(ب) ٩

(ج) ١٥

(د) ١٧



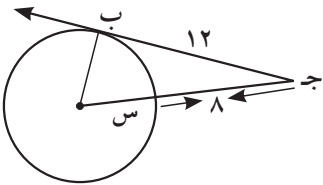
(١١) إذا كان  $\overrightarrow{دب}$  مماس للدائرة. فإن  $س =$

(أ) ٢

(ب) ٣

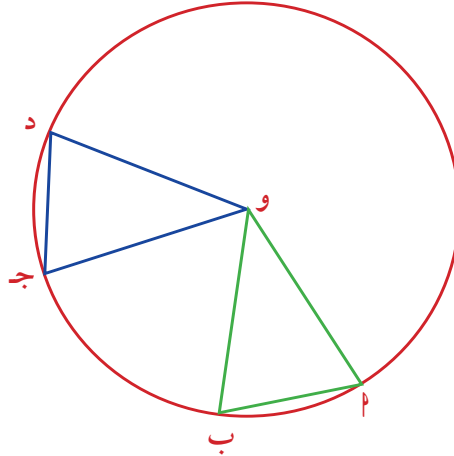
(ج) ٤

(د) ٥



في دائرة أو في دوائر متطابقة:

- ١ للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.
- ٢ الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.
- ٣ للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة.



$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \leftarrow$$

$$\textcircled{1} \quad \angle AOB = \angle COD$$

$$\widehat{AB} \cong \widehat{CD} \leftarrow$$

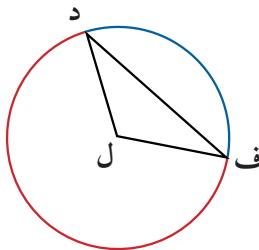
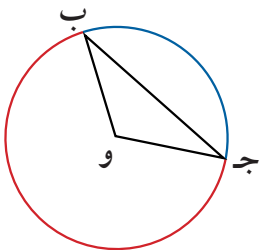
$$\textcircled{2} \quad \overline{AB} \cong \overline{CD}$$

$$\angle AOB = \angle COD \leftarrow$$

$$\textcircled{3} \quad \widehat{AB} \cong \widehat{CD}$$

## مثال 1

في الشكل المقابل الدائرتان متطابقتان،  $\widehat{B} \cong \widehat{D}$ . ماذا تستنتج؟



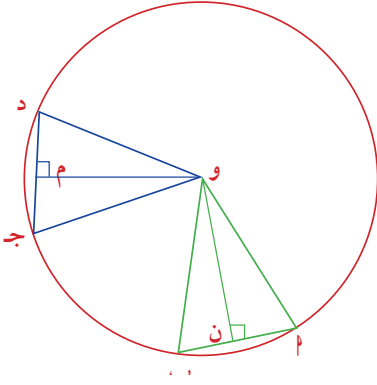
حاول أن تحل 1

في الرسم أعلاه، إذا كان  $\widehat{B} \cong \widehat{D}$ ، فماذا تستنتج؟

## نظرية 2

١ الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.

٢ الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.



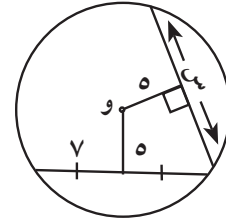
$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \quad \leftarrow \quad \overline{ON} \cong \overline{OM}$$

$$\overline{ON} \cong \overline{OM} \quad \leftarrow \quad \overline{AB} \cong \overline{CD}$$

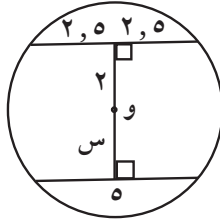
## كراسة التمارين

(١) أوجد قيمة س في الأشكال التالية:

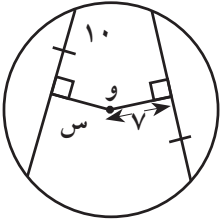
(أ)



(ب)

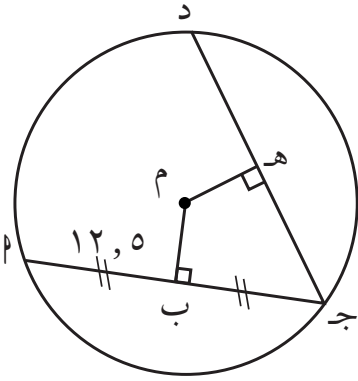


(ج)



## مثال 2

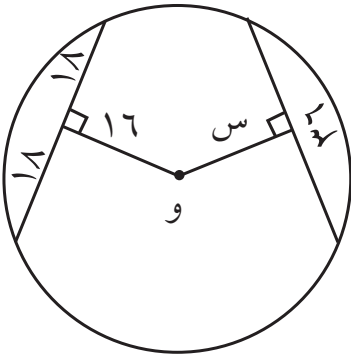
في الشكل المقابل ليكن م مركز الدائرة. م ب = م هـ، أوجد طول جـ د. فسّر.



## حاول أن تحل 2

دائرة مركزها و.

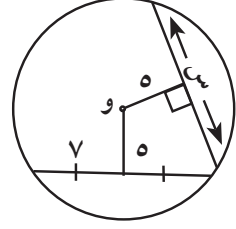
أوجد قيمة س في الشكل المقابل، وفسّر إجابتك.



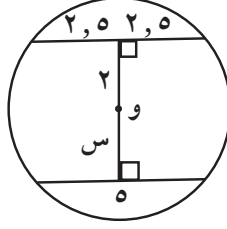
## كراسة التمارين

(١) أوجد قيمة س في الأشكال التالية:

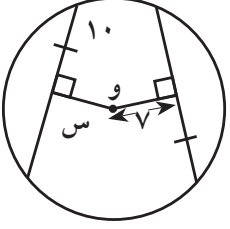
(أ)



(ب)



(ج)

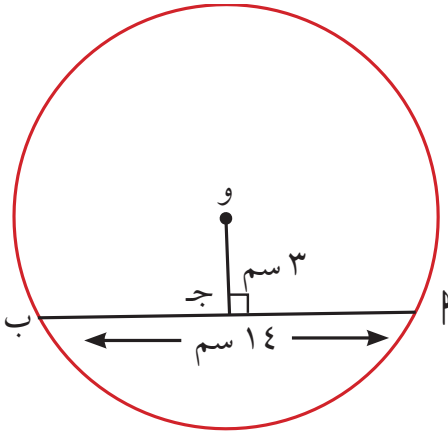


### نظرة 3

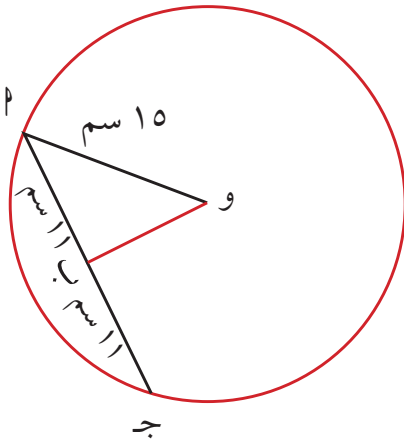
- ١ القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلاً من قوسيه.
- ٢ القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) في دائرة يكون عمودياً على هذا الوتر.
- ٣ العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة.

### مثال 3

أ في الشكل المقابل، أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و.



ب في الشكل المقابل أوجد البعد بين مركز الدائرة والوتر.

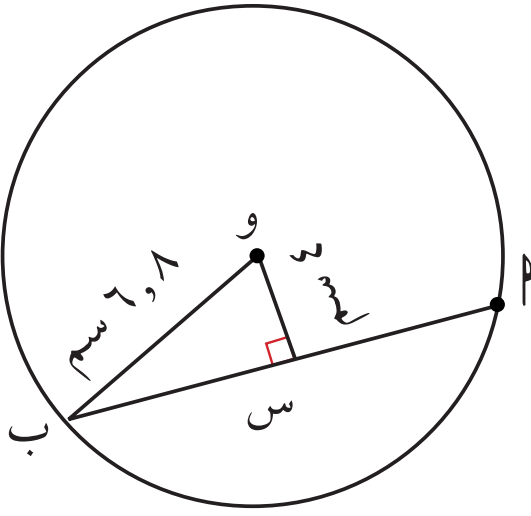


### حاول أن تحل 3

استخدم الشكل المقابل لإيجاد:

أ طول الوتر  $\overline{AB}$ .

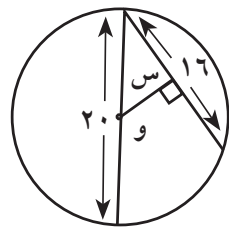
ب المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر  $\widehat{AB}$ .



### كراسة التمارين

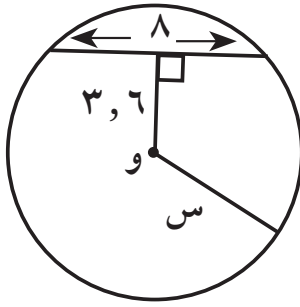
(٣) أوجد قيمة س في الأشكال التالية:

(أ)



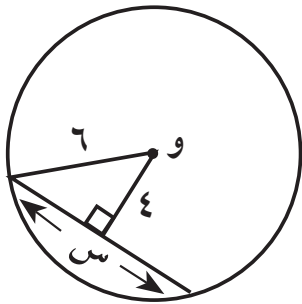
## كراسة التمارين

(ب)



(٣) أوجد قيمة س في الأشكال التالية:

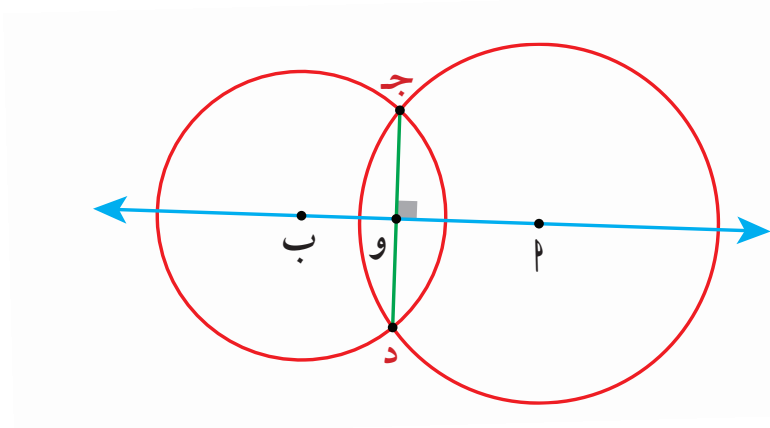
(ج)





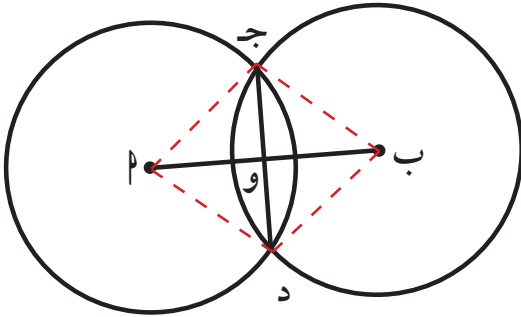
## نتيجة

خط المراكزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك وينصفه.



### مثال 4

يمثل الشكل المقابل دائرتين متطابقتين. جـ د وتر مشترك. إذا كان  $AB = 2$  سم،  $BE = 13$  سم. فما طول جـ د؟




---

---

---

---

---

في مثال (٤)، إذا كان جـ د = ١٤ سم،  $BE = 13$  سم، فأوجد طول  $AB$ .

### حاول أن تحل 4

---

---

---

---

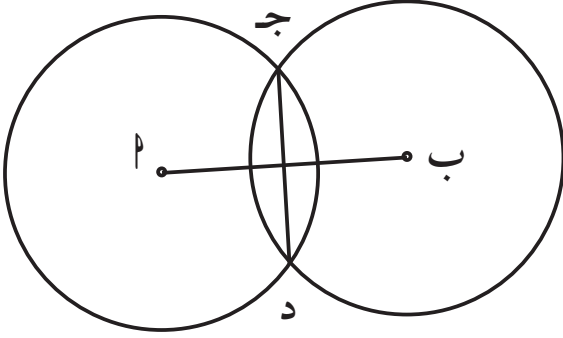
---

## كراسة التمارين

(٥) ب مركزا دائرتين متطابقتين. جد وتر مشترك للدائرتين.

(أ) إذا كان  $AB = 8$  سم، جد  $CD = 6$  سم. فما طول نصف القطر؟

(ب) إذا كان  $AB = 24$  سم، نصف القطر  $= 13$  سم. فما طول  $CD$ ؟




---

---

---

---

---

---

---

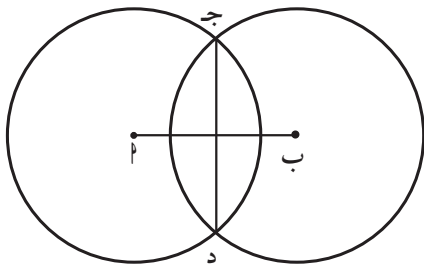
---

## كراسة التمارين

(٨) دائرتان مركزاهما على الترتيب أ، ب تتقاطعان بالنقطتين ج، د.

وطول نصف قطر كل دائرة ٦ سم.

أوجد طول ج د إذا كان طول  $AB$  يساوي ٨ سم.




---

---

---

---

---

---

---

---

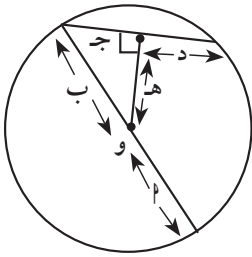
## كراسة التمارين

في التمرينين (٩-١٠)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٩) إذا كان طول قطر دائرة يساوي ٢٥ سم وطول أحد أوتارها ١٦ سم فإن البعد بين مركز الدائرة والوتر هو تقريبًا:

- (أ) ٩ سم (ب) ٦, ٩ سم (ج) ١٨ سم (د) ٢, ١٩ سم

(١٠) في الشكل المقابل العبارة الخاطئة فيما يلي هي:



(ب)  $AG = GB$

(أ)  $CG = GD$

(د)  $EG = GF$

(ج)  $CG^2 = EG^2 + GF^2$

## الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

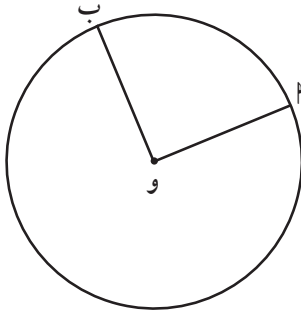
### تعريف

- ١ الزاوية التي رأسها مركز الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى بالزاوية المركزية.
- ٢ الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى بالزاوية المحيطية.

### نظرية 1

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة.

### مثال 1

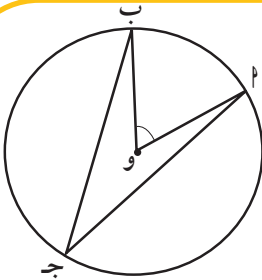


في الشكل المقابل دائرة مركزها و. إذا كان  $\angle AOB = 90^\circ$ .  
فأوجد  $\angle AOB$ .

### حاول أن تحل 1

إذا كان قياس زاوية مركزية  $35^\circ$ ، فأوجد قياس القوس على الدائرة المحصور بين ضلعيها.

### نظرية 2



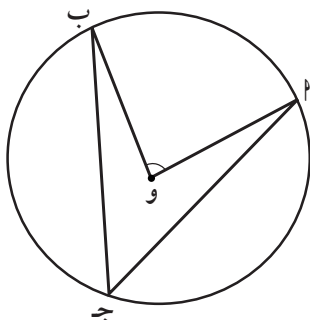
في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \angle AOB$$

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.

## مثال 2

في الشكل المقابل: إذا كان  $\angle (أب) = 80^\circ$  فأوجد  $\angle (ج ب)$ .



## حاول أن تحل 2

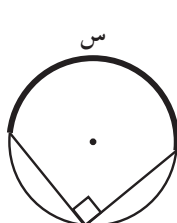
إذا كان قياس زاوية محيطية في دائرة يساوي  $54^\circ$ ، فأوجد قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

## كراسة التمارين

(١) أوجد قيمة المجهول في كل من الأشكال التالية:



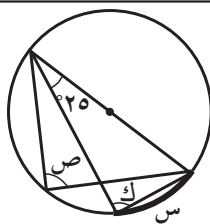
(ج)



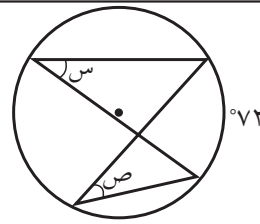
(ب)



(أ)



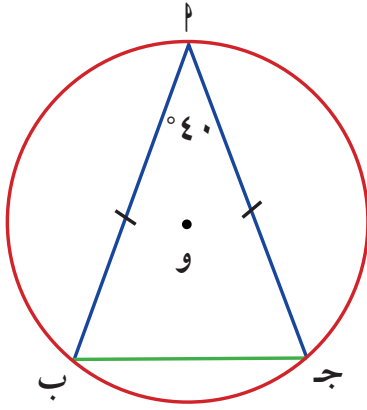
(هـ)



(د)

### مثال 3

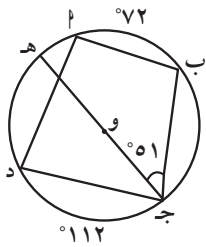
في الشكل المقابل  $\Delta$  ب ج مثلث متطابق الضلعين حيث  $\angle$  ب، ج نقاط على الدائرة التي مركزها و،  $\angle$  ب ج =  $40^\circ$ .  
أوجد قياس كل من الأقواس  $\widehat{اب}$ ،  $\widehat{ب ج}$ ،  $\widehat{ج ا}$ .



### حاول أن تحل 3

في المثال (٣) إذا كان ج هـ، منتصف الزاوية الداخلية  $\angle$  ج ب ويقطع الدائرة في النقطة هـ.  
ما قياس القوس الأصغر  $\widehat{ا هـ}$ ؟

### كراسة التمارين



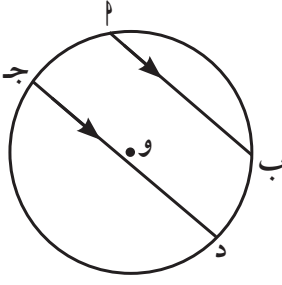
(٤) في الشكل المقابل، أوجد قياس كل من:

(أ) القوس الأصغر  $\widehat{ب ج}$ .

(ب)  $\angle$  ب (ب).

(ج)  $\angle$  ب ج د.

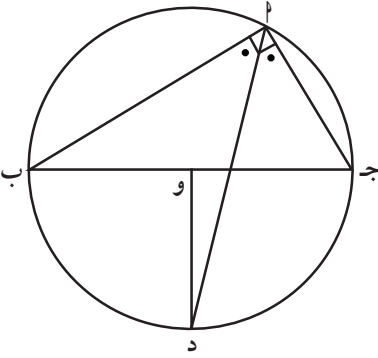
## كراسة التمارين



(٥) في الشكل المقابل فيه الوتر  $\overline{BD}$ .  
أثبت أن:  $\widehat{B} \cong \widehat{D}$ .

### مثال 4

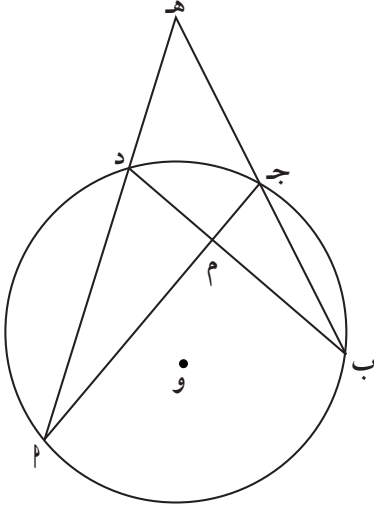
في الشكل المقابل دائرة مركزها O. أثبت أن  $\overline{DO} \perp \overline{AB}$ .



في المثال (٤)، إذا كان  $\angle B = 30^\circ$ ، أوجد  $\angle ADB$ .

حاول أن تحل 4

### مثال 5



في الشكل المقابل، أثبت أن:  $\frac{\angle (PBM) + \angle (PJD)}{2} = \angle (BPG)$

---

---

---

---

---

### حاول أن تحل 5

في المثال (5)، أثبت أن  $\frac{\angle (PBM) - \angle (PJD)}{2} = \angle (BPG)$

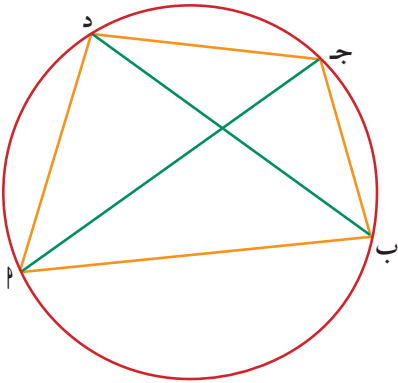
---

---

---

---

---



أ ب ج د شكل رباعي دائري.  
أثبت أن  $\angle (ACB) = \angle (ADB)$

### مثال 6

---

---

---

---

---

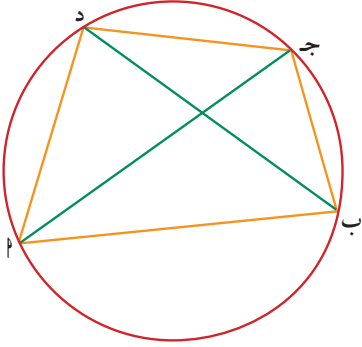


### معلومة رياضية:

الشكل الرباعي الدائري  
هو مضلع رباعي تقع  
رؤوسه على دائرة.

### حاول أن تحل 6

في المثال (٦)، أثبت أن  $\angle \text{ب} = \angle \text{د}$  و  $\angle \text{ج} = \angle \text{ا}$




---

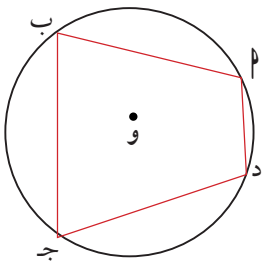
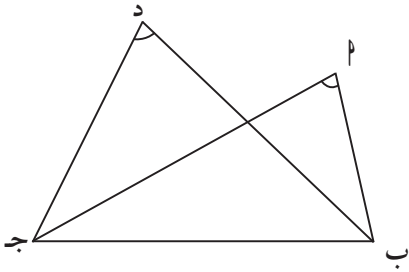
---

---

---

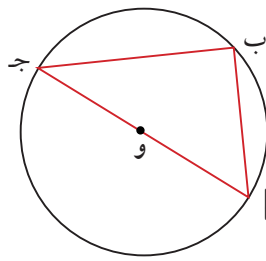
### نتائج

- ١ كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.
- ٢ كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.
- ٣ كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة)، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.
- ٤ في الشكل إذا تطابقت الزاويتان  $\hat{ا}$ ،  $\hat{د}$  المرسومات على القاعدة ب ج وفي جهة واحدة منها. كان الشكل ا ب ج د رباعياً دائرياً.



$$\angle \text{ا} + \angle \text{ج} = 180^\circ$$

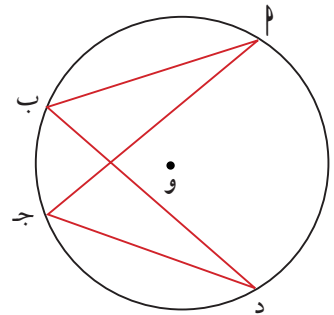
$$\angle \text{ب} + \angle \text{د} = 180^\circ$$



$$\angle \text{ا} \text{ تحصر } \widehat{\text{بج}} \text{ (نصف دائرة)}$$

$$\therefore \angle \text{ا} = 90^\circ$$

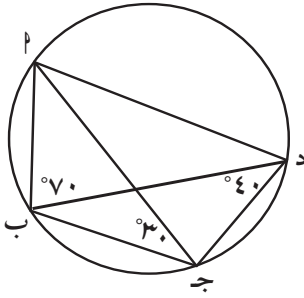
( $\angle \text{ا}$ ) زاوية محيطية مرسومة على قطر  
الدائرة وهي زاوية قائمة



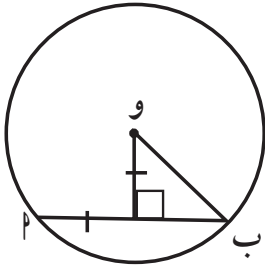
$$\angle \text{ا} \text{، } \angle \text{د} \text{ تحصران } \widehat{\text{بج}}$$

$$\therefore \angle \text{ا} = \angle \text{د}$$

## كراسة التمارين



(٧) في الشكل المقابل أوجد  $\angle$  (ج ب د).



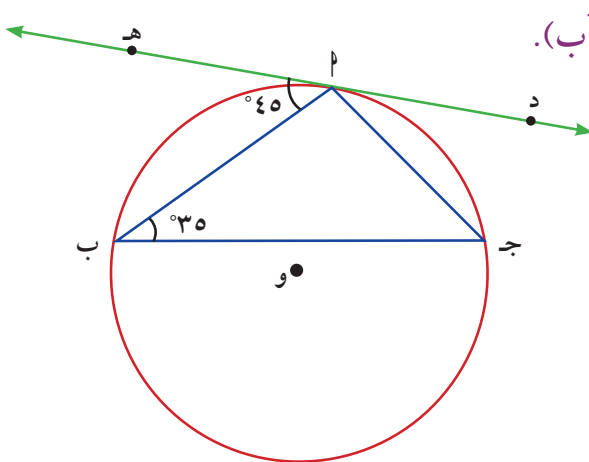
(٨) في الشكل المقابل، أوجد قياس القوس الأصغر  $\widehat{AB}$ .

### نظرية 3

(١) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.

(٢) قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

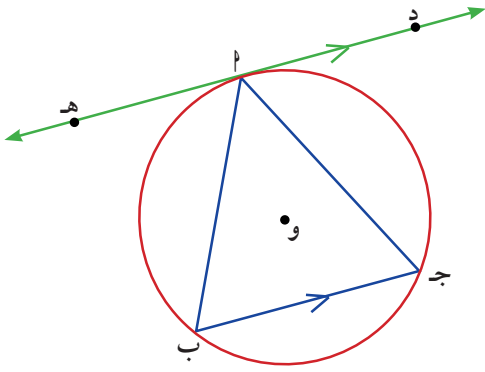
### مثال 7



في الشكل المقابل إذا كان  $\widehat{D}$  مماساً للدائرة عند P، فأوجد  $\angle$  (ج ب د).

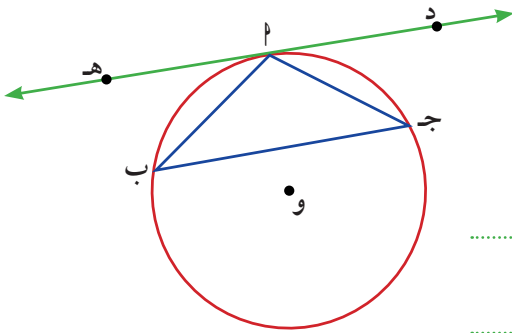


## مثال 9



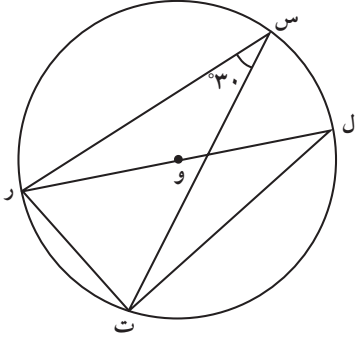
في الشكل المقابل،  $\overleftrightarrow{DE}$  مماس للدائرة عند النقطة  $P$ ،  
 $\overline{AB}$  وتر في الدائرة موازٍ للمماس  $\overleftrightarrow{DE}$ .  
 أثبت أن المثلث  $APB$  جـ متطابق الضلعين.

## حاول أن تحل 9



في الشكل المقابل، إذا كان لدينا  $\overleftrightarrow{DE}$  مماس للدائرة عند النقطة  $P$ .  
 المثلث  $APB$  جـ متطابق الضلعين ( $\angle A = \angle B$ ).  
 أثبت أن  $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{AB}$

## كراسة التمارين



(١١) مستخدماً معطيات الشكل المقابل حيث و مركز الدائرة:

(أ) ما نوع المثلث ر ل ت؟

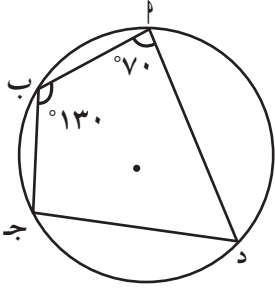
\_\_\_\_\_

(ب) أوجد  $\angle$  (ل ر ت).

\_\_\_\_\_

(ج) أوجد محيط  $\Delta$  ر ل ت بدلالة  $\pi$ .

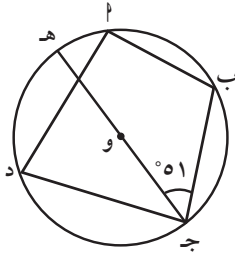
\_\_\_\_\_



(٤) أ ب ج د رباعي دائري (محوط بدائرة).  $\angle \hat{P} = 70^\circ$ ،  $\angle \hat{B} = 130^\circ$ .

أوجد  $\angle$  (ج)،  $\angle$  (د).

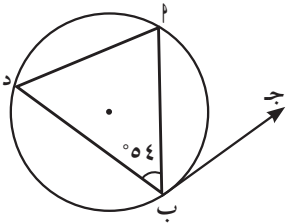
\_\_\_\_\_



(٦) في الشكل المقابل، إذا كان  $\angle \hat{P} = 72^\circ$ ،  $\angle \hat{B} = 51^\circ$ .

فإن قياس القوس  $\widehat{P} =$

(أ)  $30^\circ$  (ب)  $102^\circ$  (ج)  $72^\circ$  (د)  $68^\circ$



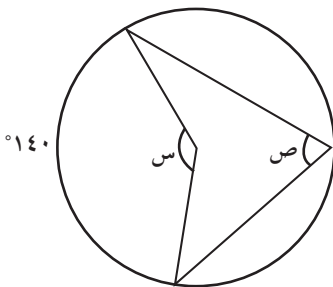
(٧) في الشكل المقابل، إذا كان  $\angle \hat{B} = 140^\circ$ ، فإن  $\angle \hat{P} =$

(أ)  $70^\circ$  (ب)  $50^\circ$  (ج)  $56^\circ$  (د)  $124^\circ$

(٨) في الشكل المقابل، قيمة كل من س، ص على الترتيب هما:

(أ)  $140^\circ$ ،  $280^\circ$  (ب)  $70^\circ$ ،  $35^\circ$

(ج)  $140^\circ$ ،  $40^\circ$  (د)  $140^\circ$ ،  $70^\circ$

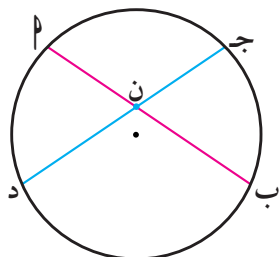


## أولاً : تقاطع الأوتار داخل الدائرة

## نظرية 1

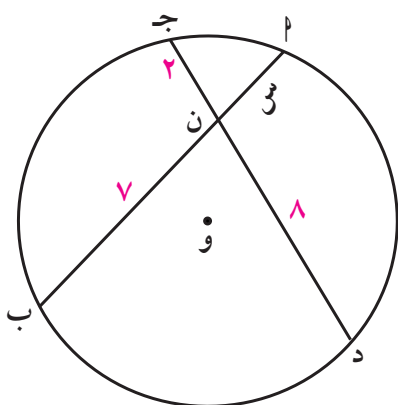
إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزئي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزئي الوتر الآخر.

$$ن م \times ن ب = ن ج \times ن د$$



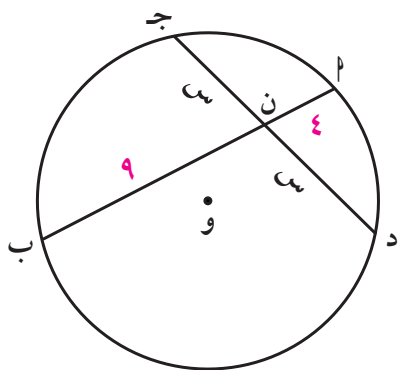
## مثال 1

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



## حاول أن تحل 1

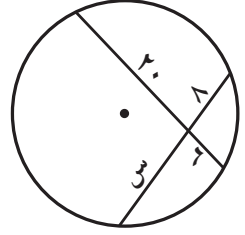
في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



## كراسة التمارين

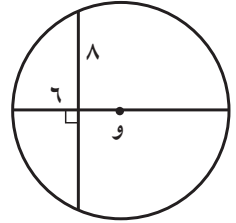
في التمرينين (٣-٤)، أوجد قيمة كل متغير.

(٣)



في التمرينين (٥-٦)، أوجد طول قطر كل دائرة.

(٥)



### ثانياً : تقاطع الأوتار خارج الدائرة

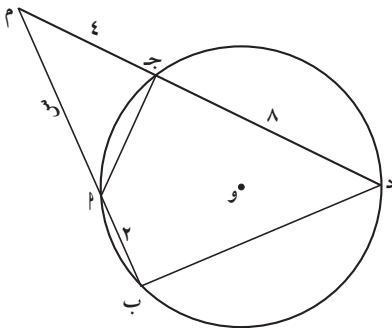
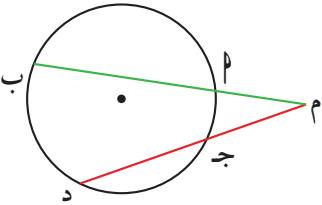
#### نتيجة 1

إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.

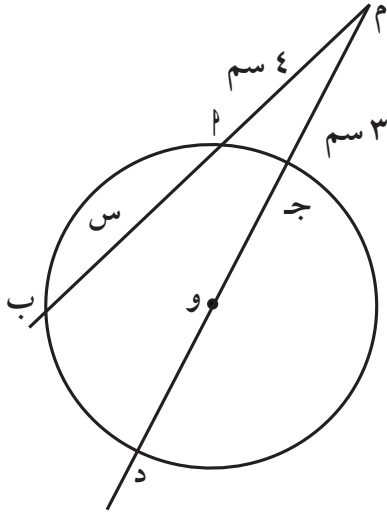
$$م \times ب = م \times ج \times د.$$

#### مثال 3

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



### حاول أن تحل 3



في الشكل المقابل، دائرة مركزها و. طول نصف قطرها يساوي ٤ سم. أوجد قيمة س.

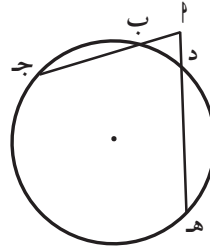
### كراسة التمارين

(١) في الشكل المقابل:

$$٢٠ = \text{ب ج} = ١٥$$

$$\text{هـ} = ٢٥$$

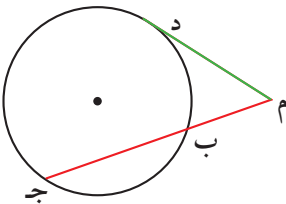
أوجد: د هـ.



ثالثاً : تقاطع مماس وقاطع الدائرة من نقطة خارج دائرة

### نتيجة 2

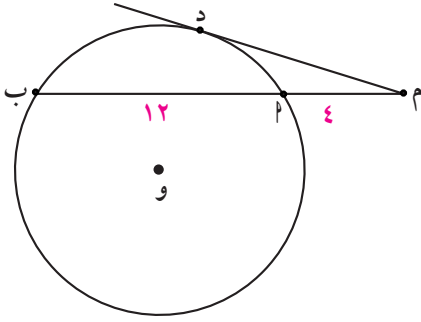
إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.  
 $(\text{م د})^2 = \text{م ب} \times \text{م ج}.$





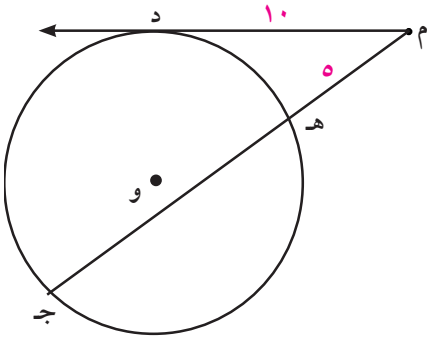
#### مثال 4

في الشكل المقابل، أوجد طول القطعة المماسية  $\overline{MD}$  علمًا بأن:  $AM = 4$  سم ،  $AB = 12$  سم.



#### حاول أن تحل 4

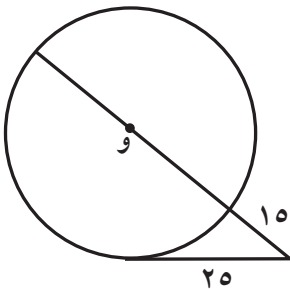
في الشكل المقابل،  $\overline{MD}$  قطعة مماسية حيث  $MD = 10$



#### كراسة التمارين

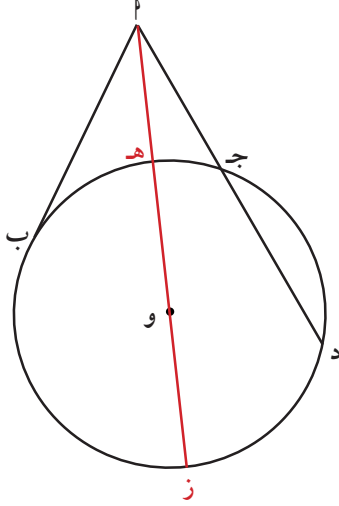
أوجد طول قطر كل دائرة.

(٦)



## مثال 5

أراد أحد الأشخاص معرفة طول القطعة المماسية من النقطة  $P$  إلى النقطة  $B$  على الدائرة، فأخذ مسطرة ووضع الصفر عند النقطة  $P$  فوجد أن المسطرة تتقاطع مع الدائرة عند النقطة  $J$  بحيث  $BJ = 4$  سم وعند النقطة  $D$  بحيث  $PD = 9$  سم. ما طول القطعة المماسية  $\overline{PB}$ ؟



حاول أن تحل 5 في المثال (٥). أوجد طول نصف قطر الدائرة إذا كانت  $PH = 2$  سم.

## كراسة التمارين

أوجد قيمة كل من  $s$ ،  $v$ .

(٤)

