إجابة الامتحان التجريبي(1)
لمادة الرياضيات
للصف الثاني عشر المتقدم

الفصل الدراسي الثاني
2023 – 2024 م

إعداد الأستاذ / محمد عبدالحميد الطحاوي

Part I :- Circle the letter corresponding to the correct answer :-

1) Find all critical numbers of $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 5$	(1 أوجد النقاط الحرجة للدالة $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 5$

A) $x = -1 , 1$

B) $x = 0 , 3$

C) $x = 0 , 2$

D) $x = 0 , -2$

2) Find the absolute maximum of: $f(x) = xe^{-2x}$ **on interval** $[0, 1]$	(2 اوجد القيمة العظمى المطلقة للدالة $f(x) = xe^{-2x}$ في الفترة $[0, 1]$

A) $\left(-\frac{1}{2} , \frac{-e}{2}\right)$

B) $\left(1 , \frac{1}{e^2}\right)$

C) $\left(\frac{1}{2} , \frac{1}{2e}\right)$

D) $(0, 0)$

$f'(x) = 1e^{-2x} + x(-2e^{-2x})$

$= e^{-2x}(1-2x)$

$e^{-2x} \neq 0 \; , \; 1-2x = 0$

$x = \frac{1}{2}$

$f(0) = 0$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2e} \approx 0.18 \longrightarrow$ Abs max

$f(1) = 1/e^2 \approx 0.14$

3) Determine where the function is increasing of $f(x) = sinx + cosx$ **on interval** $[0, 2\pi]$	(3 اوجد فترات التزايد للدالة $f(x) = sinx + cosx$ في الفترة $[0, 2\pi]$

A) increasing $\left(\frac{\pi}{4} , \frac{5\pi}{4}\right)$

B) increasing $\left(0 , \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} , 2\pi\right)$

C) increasing $\left(0 , \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4} , 2\pi\right)$

D) increasing $\left(0 , \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} , 2\pi\right)$

$f'(x) = \cos x - \sin x = 0$

$\frac{\cos x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\tan x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
f'		+		−		+	
f		↗		↘		↗	

4) Determine all local extrema $f(x) = 2x\sqrt{x+1}$	4) أوجد القيم القصوى المحلية للدالة $f(x) = 2x\sqrt{x+1}$

A) $x = -\frac{2}{3}$ $is\ a\ locl\ min.,\ x = 1\ is\ a\ locl\ max.$

B) $x = -\frac{2}{3}$ $is\ a\ locl\ min.,\ x = -1\ is\ a\ locl\ max.$

C) $x = \frac{2}{3}$ $is\ a\ locl\ min.,\ x = -1\ is\ a\ locl\ max.$

D) $x = -\frac{2}{3}$ $is\ a\ locl\ max.,\ x = -1\ is\ a\ locl\ min.$

5) Identify inflection points for the function $f(x) = x + 3(1-x)^{\frac{1}{3}}$	5) حدد نقاط الانعطاف للدالة $f(x) = x + 3(1-x)^{\frac{1}{3}}$

A) $(1, 1)$

B) $(-1, 0)$

C) $(0, 1)$

D) No inflection points لا توجد نقاط انعطاف

$f'(x) = 1 + (1-x)^{-2/3}(-1)$

$f''(x) = \frac{2}{3}(1-x)^{-5/3}(-1)$

$= \frac{-2}{3(1-x)^{5/3}} \longrightarrow x = 1$

x 1

f'' − | +

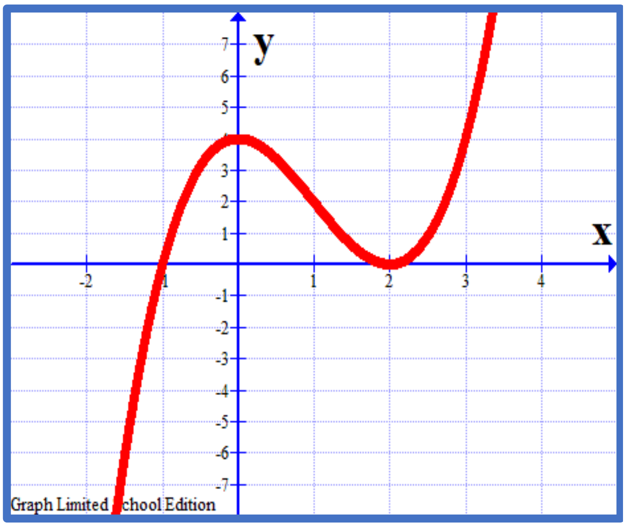
6) Determine the intervals of the function is concave up	6) حدد فترات التقعر لأعلى للدالة

A) $(1, \infty)$

B) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

C) $(-\infty, 1)$

D) $(0, 2)$



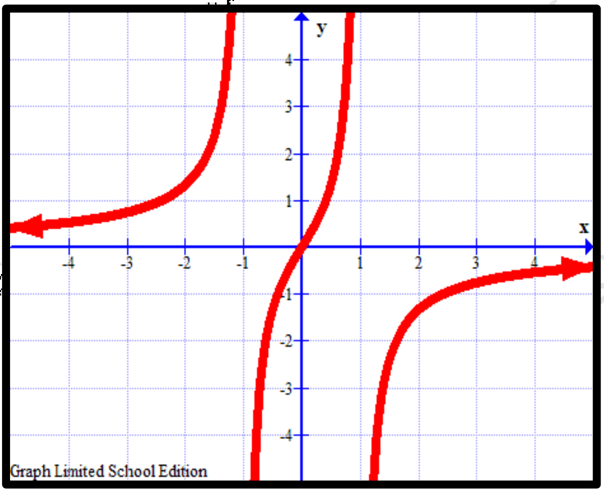
7) Graph the function

$$f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$

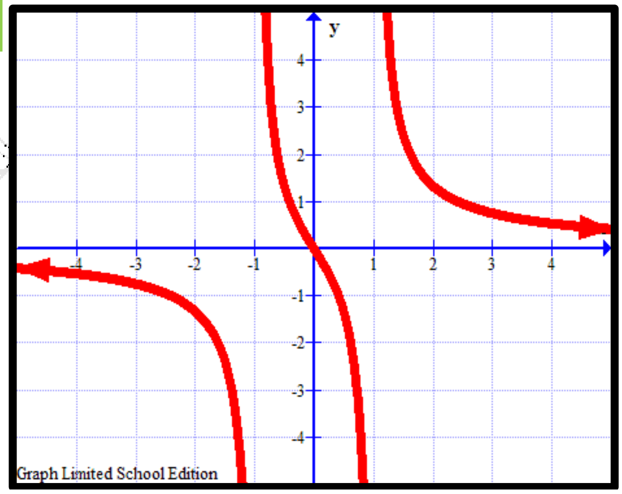
(7 ارسم الدالة ؟

$$f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$

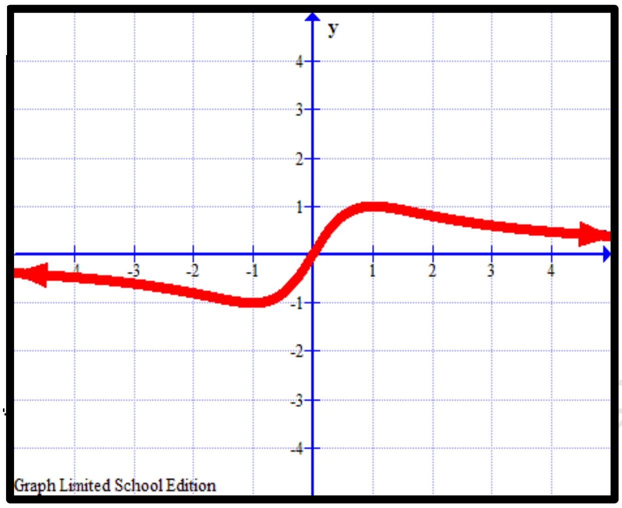
A)



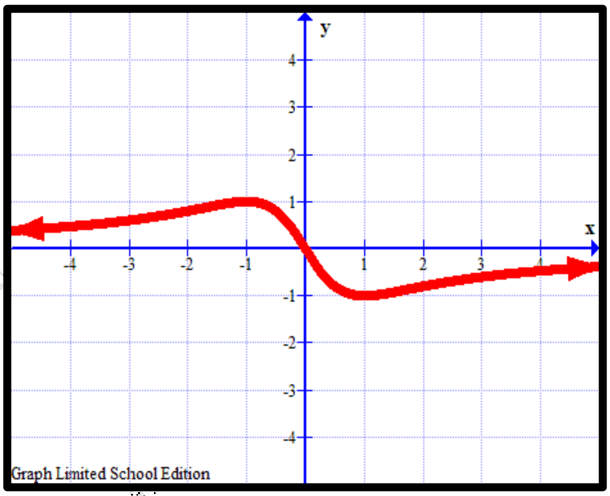
B)



C)



D)



8) Suppose that the charge in electrical circuit is $Q(t) = e^{-2t}(\cos 3t - 2\sin 3t)$ Coulombs. Find the current.

(8 على فرض أن الشحنة في الدائرة الكهربائية $Q(t) = e^{-2t}(\cos 3t - 2\sin 3t)$ كولوم . جد التيار .

A) $Q'(t) = e^{-2t}(-3\sin 3t - 6\cos 3t)$

B) $Q'(t) = -2e^{-2t}(-3\sin 3t - 6\cos 3t)$

C) $Q'(t) = e^{-2t}(\sin 3t - 8\cos 3t)$

D) $Q'(t) = e^{-2t}(-7\sin 3t - 8\cos 3t)$

9)Find the general antiderivative $\int \frac{5}{2x^2+2} dx$	9) أوجد المشتقة العكسية ؟ $\int \frac{5}{2x^2+2} dx$

A) $\frac{5}{2} ln\left|x^2 + 1\right| + c$

B) $\frac{5}{2} tan^{-1}(x^2 + 1) + c$

C) $\frac{5}{2} tan^{-1}(x) + c$

D) $\frac{2}{5} tan^{-1}(x) + c$

10) Determine the position function if the acceleration function is $a(t) = 12t^2 - 8\ ft/s^2, v(0) = 4\ , s(0) = 0$	10) حدد دالة الموضع إذا كانت دالة التسارع تعطى $a(t) = 12t^2 - 8\ ft/s^2\ , v(0) = 4\ , s(0) = 0$

A) $S(t) = t^4 - 4t^2 + 4t$

B) $S(t) = t^4 - 4t^2 + 4$

C) $S(t) = 4t^4 - 8t^2 + 4t$

D) $S(t) = t^4 - 8t^2 + 4$

11) Write out all terms and compute the sums $\sum_{i=1}^{4} cos(\pi i)$	**11)** اكتب جميع الحدود ثم جد المجموع $\sum_{i=1}^{4} cos(\pi i)$

A) $\sum_{i=1}^{4} cos(\pi i) = cos(\pi) + cos(2\pi) + cos(3\pi) + cos(4\pi) = 4$

B) $\sum_{i=1}^{4} cos(\pi i) = cos(\pi) + cos(2\pi) + cos(3\pi) + cos(4\pi) = 0$

C) $\sum_{i=1}^{4} cos(\pi i) = cos(0) + cos(\pi) + cos(2\pi) + cos(3\pi) = 0$

D) $\sum_{i=1}^{4} cos(\pi i) = cos(\pi) + cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$

12) Use the given function values to estimate the area under the curve using right endpoint evaluation	**12)** استخدم قيم الدالة المحددة لتقدير مساحة المنطقة تحت المنحنى باستخدام نقطة النهاية اليمنى

x	~~0.0~~	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	~~2.0~~	2.4	2.6	2.7	2.6	2.4	2.0	1.4	0.6

المجموع × ٠٫١ = ١٫٦٧

A) $A = 1.81$

B) $A = 1.74$

C) $A = 1.67$

D) $A = 6.47$

13) Assume that $\int_1^5 f(x)dx = 7$, $\int_1^5 2g(x)dx = -4$ and find $\int_1^5 3f(x) - g(x)dx$

A) 25

B) 19

C) 23

D) 17

14) Compute the average value by using geometric formula to compute the integral $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ on the interval $[0, 2]$

14) أوجد القيمة المتوسطة باستخدام القوانين الهندسية لإيجاد التكامل للدالة $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ في الفترة $[0, 2]$

A) $Average = \pi$

B) $Average = 2\pi$

C) $Average = \frac{\pi}{4}$

D) $Average = \frac{\pi}{2}$

15) Evaluate $\int_0^5 (sin^2x + cos^2x)dx$

A) 1

B) 5

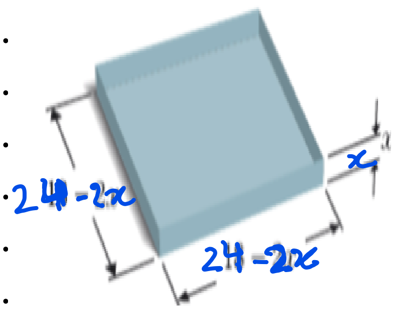
C) 10

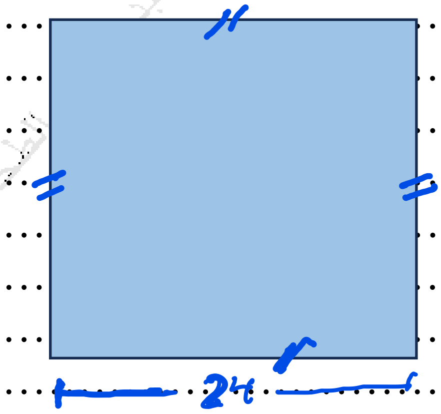
D) 2.5

Part II :-

16) A square sheet of cardboard 24 *in* is made into open box (there is no top), by cutting squares of equal size out of each corner and folding up the sides. Find the dimensions of the box with the maximum volume

16) ورقة مربعة من الورق المقوى طول ضلعها 24 ، يتم عمل صندوق مفتوح من أعلى بدون غطاء وثني الأجزاء البارزة لأعلى عن طريق قص أربع متساوية من أركانها . أوجد أبعاد الصندوق التي تعطي أكبر حجم ممكن .





الأبعاد $x \,,\, 24-2x \,,\, 24-2x$

$0 < x < 12$

$V(x) = x(24-2x)(24-2x)$

$x(576 - 48x - 48x + 4x^2)$

$V(x) = x(4x^2 - 96x + 576)$

$= 4x^3 - 96x^2 + 576x$

$V'(x) = 12x^2 - 192x + 576 = 0 \quad \div 12$

$x^2 - 16x + 48 = 0$

$\boxed{x = 12} \notin (0,12) \quad , \quad \boxed{x = 4} \in (0,12)$

$V''(x) = 24x - 192$

$V''(4) = 24(4) - 192 = \boxed{-96} < 0$

حجم الصندوق أكبر ما يمكن عندما تكون الأبعاد

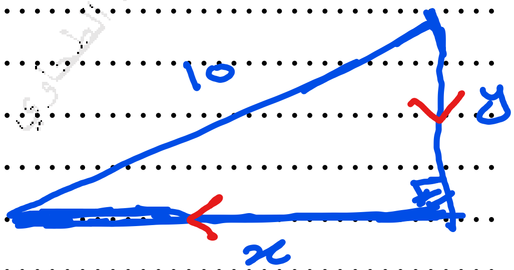
$4 \,,\, 16 \,,\, 16 \quad , \quad V = 1024$

17) A $10ft$ ladder leans against the side of a building. If the bottom of the ladder is pulled away from the wall at the rate of $3ft/sec$, and the ladder remains in contact with the wall

Find the rate at which the top of the ladder is dropping when the bottom is 6 ft from the wall.

17) يرتكز سلم بطول $10ft$ على جانب المبنى. إذا تم سحب الجزء السفلي من السلم بعيدا عن الجدار بمعدل $3ft/sec$، وبقي السلم ملامسا للجدار. أوجد معدل تغير الطرف العلوي للسلم عندما يبتعد الطرف السفلي $6\ ft$ من الجدار.

$\frac{dx}{dt} = 3$, $x = 6$



$y = \sqrt{10^2 - 6^2} = \boxed{8}$

$x^2 + y^2 = 10^2$

$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$

$2(6)(3) + 2(8)\frac{dy}{dt} = 0$

$36 + 16\frac{dy}{dt} = 0 \longrightarrow 16\frac{dy}{dt} = -36$

$\frac{dy}{dt} = \frac{-36}{16} = -\frac{8}{3}\ ft/s$

18) Suppose that a population grows according to the equation $p'(t) = 2p(t)[1 - p(t)]$ (logistic growth with $r = 2$ .Find the population for which the growth rate is a maximum

18) على فرض أن النمو السكاني يعطى بالمعادلة $p'(t) = 2p\,(t)[1 - p(t)]$ المعادلة اللوجستية باستخدام $r = 2$ أوجد التعداد السكاني الذي يكون فيه معدل النمو هو القيمة العظمى.

$f(p) = p'(t) = 2p(1-p)$

$= 2p - 2p^2$

$f'(p) = 2 - 4p = 0$

$p = \frac{1}{2}$

$f''(p) = -4$

$f''(\frac{1}{2}) = -4 < 0$

التعداد السكاني أكبر ما يمكن عندما $p = \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} \times 10^6$

$= \boxed{5\,000\,000}$

19) **Use Riemann sum and a limit to compute the exact area under the curve $f(x) = 4x^2 - x$ on the interval $[0, 3]$.**

19) باستخدام مجموع ريمان والنهاية أوجد المساحة الدقيقة تحت المنحنى $f(x) = 4x^2 - x$ في الفترة $[0, 3]$

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$

$x_i = a + i\Delta x = 0 + i\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{3}{n} i$

$f(x_i) = f\left(\frac{3}{n} i\right) = 4\left(\frac{3}{n} i\right)^2 - \frac{3}{n} i = \frac{36}{n^2} i^2 - \frac{3}{n} i$

$f(x_i) \cdot \Delta x = \frac{3}{n}\left(\frac{36}{n^2} i^2 - \frac{3}{n} i\right) = \frac{108}{n^3} i^2 - \frac{9}{n^2} i$

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x = \frac{108}{\cancel{n^3}\, n^2} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{9}{\cancel{n^2}\, n} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{2}$

$= \frac{108(2n^2 + 3n + 1)}{6n^2} - \frac{9n + 9}{2n}$

$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x = \lim_{n \to \infty} \frac{108(2n^2)}{6n^2} - \frac{9n}{2n}$

$= 36 - \frac{9}{2} = \frac{63}{2} = \boxed{31.5}$

20) **If $F(x) = \int_{2x}^{x^2} \sqrt{t^2 + 1}\, dt$, compute $F'(x)$**

$F(x) = \int_a^{x^2} \sqrt{t^2+1}\, dt - \int_a^{2x} \sqrt{t^2+1}\, dt$

$F'(x) = \sqrt{(x^2)^2 + 1} \cdot 2x - \sqrt{(2x)^2 + 1} \cdot 2$

$= 2x\sqrt{x^4 + 1} - 2\sqrt{4x^2 + 1}$