12
علمي

مدرسة التميز النموذجية

(ابتدائي - متوسط - ثانوي)

بنك الأسئلة

الرياضيات

الصف الثاني عشر

2024 / 2023

الفصل الدراسي الثاني

الرياضيات

أوجد

$$\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx$$

الحل :

بفرض $u = x^2+4x-1$

$$du = (2x+4)dx \quad , \quad \frac{1}{2}du = (x+2)dx$$

$$\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx = \int u^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}\,du\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}\,u^{\frac{4}{3}}\right] + C$$

$$\therefore \int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx = \frac{3}{8}(x^2+4x-1)^{\frac{4}{3}} + C$$

أوجد

$$\int \frac{5}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^3}\,dx$$

الحل :

بفرض $u = \sqrt{x} + 2$

$$\therefore \quad du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Longrightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{5}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^3}\,dx = \int \frac{5}{u^3}(2du)$$

$$= \int \frac{10du}{u^3}$$

$$= 10\int u^{-3}du$$

$$= -5\,u^{-2} + C$$

$$= \frac{-5}{(\sqrt{x}+2)^2} + C$$

أوجد $\int \frac{(\frac{1}{x}+3)^4}{x^2}\, dx$

الحل :

$u = \frac{1}{x} + 3$

قاعدة التفاضل :

$$du = -\frac{1}{x^2}dx \Rightarrow -du = \frac{1}{x^2}dx$$

$$\int \frac{(\frac{1}{x}+3)^4}{x^2}\, dx = \int -u^4 du$$

$$= -\frac{u^5}{5} + c$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x}+3\right)^5 + c$$

أوجد :

$$\int \frac{1}{x^2(\frac{1}{x}+2)^5}\,dx$$

الحل

$$u=\frac{1}{x}+2 \quad , \quad du=-\frac{1}{x^2}\,dx \;\Rightarrow\; -du=\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^2(\frac{1}{x}+2)^5}\,dx=-\int \frac{(\frac{1}{x}+2)^{-5}}{-x^2}\,dx$$

$$=-\int u^{-5}\,du$$

$$=-\left[\frac{u^{-4}}{-4}+C_1\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{u^4}+C_1\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+2\right)^4}+C_1\right]$$

$$=\frac{1}{4\left(\frac{1}{x}+2\right)^4}+C \qquad : C=\frac{1}{4}C_1$$

أوجد

$$\int x^3\sqrt{x^2-2}\ dx$$

الحل :

بفرض $u = x^2 - 2 \rightarrow x^2 = u + 2$

$$\therefore\ du = 2x\,dx \rightarrow x dx = \frac{1}{2}du$$

$$\int x^3\sqrt{x^2-2}\ dx = \int \sqrt{x^2-2}\ (x^2)\ (x dx)$$

$$= \int \sqrt{u}\,(u+2)\,(\frac{1}{2}du)$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\ (u+2)du$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(u^{\frac{3}{2}} + 2u^{\frac{1}{2}}\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + 2\times\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

تعويض $\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{5}(x^2-2)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x^2-2)^{\frac{3}{2}} + C$$

أوجد :

$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x)\sqrt{1+\cot x}}$$

الحل

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1+\cot x}} = \int \frac{\csc^2 x\, dx}{\sqrt{1+\cot x}}$$

$$u = 1+\cot x \quad , \quad du = -\csc^2 x\, dx$$

$$\int \frac{\csc^2 x\, dx}{\sqrt{1+\cot x}} = -\int \frac{1}{\sqrt{u}}\, du$$

$$= -\int u^{-\frac{1}{2}}\, du$$

$$= -2u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -2(1+\cot x)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -2\sqrt{1+\cot x} + C$$

أوجد :

$$\int (x+1)\, e^{x^2+2x+3}\, dx$$

الحل

$$u = x^2+2x+3$$

$$du = (2x+2)\, dx \Rightarrow du = 2(x+1)\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} du = (x+1)\, dx$$

$$\therefore \int (x+1)\, e^{x^2+2x+3}\, dx = \frac{1}{2}\int e^u\, du$$

$$= \frac{1}{2}\, e^u + C$$

$$= \frac{1}{2}\, e^{x^2+2x+3} + C$$

أوجد التكامل: $\int cos^3(2x-3)\cdot \sin(2x-3)dx$

الحل :

$$u = \cos(2x-3)$$

قاعدة التفاضل :

$$du = -2\sin(2x-3)dx \Rightarrow -\frac{1}{2}du = \sin(2x-3)dx$$

$$\therefore \int cos^3(2x-3)\cdot \sin(2x-3)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int u^3 du$$

$$= -\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}u^4 + C$$

$$= -\frac{1}{8}cos^4(2x-3) + C$$

أوجد :

$$\int x \sin x \, dx$$

$$u = x \qquad dv = \sin dx$$

$$du = dx \qquad v = -\cos x$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x - \int (-\cos x) \, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C$$

أوجد

$$\int x \cos 3x \, dx$$

الحل :

$u = x \qquad dv = \cos 3x \, dx$

$du = dx \qquad v = \frac{1}{3}\sin 3x$

$$\int u \, dv = u\,v - \int v \, du$$

$$\int x \cos 3x \, dx = \frac{x}{3}\sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3x \, dx$$

$$\int x \cos 3x \, dx = \frac{x}{3}\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C$$

أوجد التكامل :

$$\int (4x-1)\ln x \ dx$$

الحل :

$u = \ln x$ $\qquad$ $dv = (4x-1)dx$

$du = \frac{1}{x}dx$ $\qquad$ $v = 2x^2 - x = x(2x-1)$

$$\int u\, dv = u\,.v - \int v\, du$$

$$\int (4x-1)\ln x \ dx$$

$$= x(2x-1)\ln x - \int \frac{1}{x}\,.x(2x-1)dx$$

$$= x(2x-1)\ln x - \int (2x-1)dx$$

$$= x(2x-1)\ln x - (x^2 - x) + c$$

$$= x(2x-1)\ln x - x^2 + x + c$$

أوجد :

$$\int (2x+1)\ln x\, dx$$

الحل

$u = \ln(x)$ | $dv = (2x+1)\, dx$

$du = \frac{1}{x}\, dx$ | $v = x^2 + x$

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

$$\int (2x+1)\ln(x)\, dx = (x^2+x)\ln(x) - \int \frac{x^2+x}{x} dx$$

$$= (x^2+x)\ln(x) - \int \frac{x(x+1)}{x} dx$$

$$= (x^2+x)\ln(x) - \int (x+1)\, dx$$

$$= (x^2+x)\ln x - (\frac{1}{2}x^2 + x) + C$$

$$= (x^2+x)\ln x - \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

أوجد :

$$\int x \sin x \, dx$$

الحل :

$$u = x \qquad dv = \sin x \, dx$$

$$du = dx \qquad v = -\cos x$$

$$\int u \, dv = u\,v - \int v \, du$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + c$$

أوجد :

$$\int x e^{x} \, dx$$

الحل

$$u = x \qquad dv = e^{x} \, dx$$

$$du = dx \qquad v = e^{x}$$

$$\int u \, dv = u\,v - \int v \, du$$

$$\int x e^{x} dx = x e^{x} - \int (e^{x}) \, dx$$

$$= x e^{x} - e^{x} + C$$

$$= e^{x}(x - 1) + C$$

أوجد

$$\int x^2 \cos x \, dx$$

الحل :

$$u = x^2 \qquad dv = \cos x \, dx$$
$$du = 2x \, dx \qquad v = \sin x$$

$$\int u \, dv = u\,v - \int v \, du$$

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx \quad \ldots (1)$$

$$u = 2x \qquad dv = \sin x \, dx$$
$$du = 2 \, dx \qquad v = -\cos x$$

$$\int 2x \sin x \, dx = 2x(-\cos x) - \int 2\,(-\cos x) \, dx$$

$$= -2x \cos x + 2 \int \cos x \, dx$$

$$= -2x \cos x + 2 \sin x + C_1 \quad \ldots (2)$$

من (1) ، (2) نحصل على :

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

لتكن الدالة f :

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 4x + 3}$$

فأوجد :

(1) الكسور الجزئية

(2) $\int f(x)dx$

الحل

(1) $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

$$\frac{2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$$

$$2 = A(x-3) + B(x-1)$$

بالتعويض عن $x = 1$:

$$2 = A(1-3) + B(1-1)$$

$$2 = -2A + 0 \Rightarrow A = -1$$

بالتعويض عن $x = 3$:

$$2 = A(3-3) + B(3-1)$$

$$2 = 0 + 2B \Rightarrow B = 1$$

$$\frac{2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-3}$$

(2) $\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{2}{x^2 - 4x + 3}\right) dx$

$$= \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-3}\right) dx = -\int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x-3} dx$$

$$= -\ln|x-1| + \ln|x-3| + C$$

أوجد التكامل : $\int \frac{3x-13}{x^2-8x+15}\,dx$

الحل :

حلل المقام :

$$x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$$

$$\frac{3x-13}{x^2-8x+15}=\frac{A_1}{(x-3)}+\frac{A_2}{(x-5)}$$

$$3x-13=A_1(x-5)+A_2(x-3)$$

عوض عن x بـ 3

$$3(3)-13=A_1(3-5)+A_2(3-3)$$

$$\therefore A_1=2$$

عوض عن x بـ 5

$$3(5)-13=A_1(5-5)+A_2(5-3)$$

$$\therefore A_2=1$$

عوض عن A_2 و A_1 بقيمتيهما

$$\frac{3x-13}{x^2-8x+15}=\frac{2}{(x-3)}+\frac{1}{(x-5)}$$

$$\int \frac{3x-13}{x^2-8x+15}\,dx=\int\left(\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x-5}\right)dx$$

$$=\int \frac{2}{x-3}\,dx+\int \frac{1}{x-5}\,dx$$

$$=2ln|x-3|+\ ln|x-5|+C$$

أوجد :

$$\int \frac{5x-2}{x^2-5x+4}\,dx$$

الحل :

حلل المقام : $x^2-5x+4=(x-4)(x-1)$

$$\frac{5x-2}{x^2-5x+4}=\frac{A_1}{x-4}+\frac{A_2}{x-1}$$

اضرب طرفي المعادلة في $(x-4)(x-1)$ وبسّط

$$5x-2=A_1(x-1)+A_2(x-4)$$

عوض عن x بـ 4 :

$$5(4)-2=A_1(4-1)+A_2(4-4)\rightarrow A_1=6$$

عوض عن x بـ 1 :

$$5(1)-2=A_1(1-1)+A_2(1-4)\rightarrow A_2=-1$$

$$\frac{5x-2}{x^2-5x+4}=\frac{6}{x-4}+\frac{-1}{x-1}$$

$$\int \frac{5x-2}{x^2-5x+4}\,dx=\int\left(\frac{6}{x-4}-\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$=6\int\frac{1}{x-4}\,dx-\int\frac{1}{x-1}\,dx$$

$$=6ln|x-4|-ln|x-1|+C$$

أوجد

$$\int \frac{12}{x^2+2x-3}\,dx$$

الحل

$$\frac{12}{x^2+2x-3} = \frac{12}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$$

وبضرب طرفي المعادله ب $(x-1)(x+3)$

$$12 = A\ (x+3) + B(x-1)$$

بالتعويض عن $x = -3$: $12 = -4B \Rightarrow B = -3$

بالتعويض عن $x = 1$: $12 = 4A \Rightarrow A = 3$

$$\frac{12}{x^2+2x-3} = \frac{12}{(x-1)(x+3)} = \frac{3}{x-1} - \frac{3}{x+3}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{3}{x-1} - \frac{3}{x+3}\right) dx$$

$$= 3\int \frac{1}{x-1}\,dx - 3\int \frac{1}{x+3}\,dx$$

$$= 3\ln|x-1| - 3\ln|x+3| + C$$

أوجد

$$\int \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 2x}\, dx$$

الحل :

$$\frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 2x} = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x} + \frac{4}{x^2 - 2x}$$

$$= 1 + \frac{4}{x^2 - 2x}$$

$$x^2 - 2x = x\,(x - 2)$$

$$\frac{4}{x\,(x-2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2}$$

بضرب طرفي المعادلة في $x\,(x-2)$

$$4 = A_1(x-2) + A_2 x$$

بالتعويض عن x بـ 0 :

$$4 = -2A_1 \quad \rightarrow \quad A_1 = -2$$

بالتعويض عن x بـ 2 :

$$4 = 2\,A_2 \quad \rightarrow \quad A_2 = 2$$

$$\frac{4}{x\,(x-2)} = \frac{-2}{x} + \frac{2}{x-2}$$

$$\int \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 2x}\, dx = \int \left(1 + \frac{-2}{x} + \frac{2}{x-2}\right) dx$$

$$= \int 1\, dx + \int \frac{-2}{x}\, dx + \int \frac{2}{x-2}\, dx$$

$$= x - 2ln|x| + 2ln|x-2| + C$$

أوجد :

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \quad dx$$

الحل

$$u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x \; dx$$

عندما $x = 0$ $\Leftarrow$ $u = \tan(0) = 0$

عندما $x = \frac{\pi}{4}$ $\Leftarrow$ $u = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \quad dx = \int_{0}^{1} u \quad du$$

$$= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

أوجد :

$$\int_{1}^{4} |x-2| \; dx$$

الحل

$$\int_{1}^{4} |x-2| \; dx = \int_{1}^{2} |x-2| \; dx + \int_{2}^{4} |x-2| \; dx$$

$$= \int_{1}^{2} (2-x) \; dx + \int_{2}^{4} (x-2) \; dx$$

$$= \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_2^4$$

$$= \left[(4-2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right)\right] + [(8-8) - (2-4)]$$

$$= \left[2 - 1\frac{1}{2}\right] + [0 - (-2)]$$

$$= \frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{2}$$

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن :

$$\int_0^2 (x^2 - 2x - 3)\, dx \le 0$$

الحل :

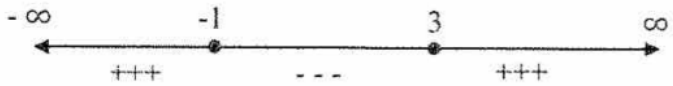
بفرض : $f(x) = x^2 - 2x - 3$

وهي دالة متصلة على $[0\,,2]$

نضع $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -1 \quad \text{أو} \quad x = 3$$



$$[0\,,2] \subseteq [-1\,,3]$$

$$f(x) \le 0 \;, \forall\; x \in [0\,,2]$$

$$\therefore \int_0^2 f(x)dx \le 0 \quad , \quad \forall\; x \in [0\,,2]$$

$$\therefore \int_0^2 (x^2 - 2x - 3)dx \le 0$$

أوجد :

$$\int_{-2}^{0} \frac{5x-1}{x^2+2x-3}\,dx$$

الحل

$$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$$

$$\frac{5x-1}{x^2+2x-3}=\frac{5x-1}{(x+3)(x-1)}=\frac{A_1}{x+3}+\frac{A_2}{x-1} \quad [0.5]$$

$$\Rightarrow\ 5x-1=A_1(x-1)+A_2(x+3)$$

بالتعويض عن $x=1$: $4=4A_2 \Rightarrow A_2=1$

بالتعويض عن $x=-3$: $-16=-4A_1 \Rightarrow A_1=4$

$$\frac{5x-1}{x^2+2x-3}=\frac{4}{x+3}+\frac{1}{x-1}$$

$$\int_{-2}^{0}\left(\frac{5x-1}{x^2+2x-3}\right)dx=\int_{-2}^{0}\left(\frac{4}{x+3}+\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$=4[\ln|x+3|]_{-2}^{0}+[\ln|x-1|]_{-2}^{0}$$

$$=4[\ln 3-\ln 1]+[\ln 1-\ln 3]$$

$$=3\ln 3$$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة : $y_1 = 3 - x^2$

والمستقيم : $y_2 = -2x$

الحل :

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقطتي التقاطع :

نضع $y_1 = y_2$

$$\therefore 3 - x^2 = -2x$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = 3 \quad \text{أو} \quad x = -1$$

نأخذ قيمة اختيارية تنتمي إلى الفترة $(-1, 3)$ ولتكن $x = 0$

$$y_1 = 3 - (0)^2 = 3$$

$$y_2 = -2(0) = 0$$

$$\because y_1 \geq y_2 \quad \forall \; x \in [-1, 3]$$

$\therefore$ مساحة المنطقة هي :

$$A = \int_{-1}^{3} (y_1 - y_2)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{3} (3 - x^2 + 2x)\, dx$$

$$= \left[3x - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-1}^{3}$$

$$= \left[3(3) - \frac{(3)^3}{3} + (3)^2\right] - \left[3(-1) - \frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2\right]$$

$$= \frac{32}{3} \text{ (وحدة مربعة)}$$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 4x - x^2$

و منحنى الدالة g : $g(x) = 5 + x^2$ والمستقيمين $x = 0$, $x = 2$

علما بأن منحنيي الدالتين f, g غير متقاطعين

الحل

$\because$ المنحنيين غير متقاطعين

$\therefore$ نأخذ قيمة إختيارية تنتمي للفترة $(0,2)$ و لتكن $x = 1$

$f(1) = 3 \quad , \quad g(1) = 6$

$\therefore g(x) > f(x) \qquad \forall x \in [0,2]$

$$A = \int_0^2 \big(g(x) - f(x)\big)\, dx$$

$$= \int_0^2 \big((5 + x^2) - (4x - x^2)\big)\, dx$$

$$= \int_0^2 (2x^2 - 4x + 5)\, dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 5x\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{16}{3} - 8 + 10\right] - 0$$

$$= \frac{22}{3} \quad (\text{وحدة مربعة})$$

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ والمستقيم $y = 2$ في الفترة $[-2,2]$

الحل :

بفرض $g(x) = y = 2$

نأخذ قيمة اختيارية في $[-2,2]$ ولتكن $x = 0$

$$g(0) = 2 \quad , \quad f(0) = 0$$

$$\therefore g(x) \geq f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-2,2]$$

$\therefore$ حجم المجسم الناتج عن الدوران :

$$V = \pi \int_{-2}^{2} [(g(x))^2 - (f(x))^2]\, dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} \left[(2)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} \left[4 - \frac{1}{4}x^4\right] dx$$

$$= \pi \left[4x - \frac{1}{20}x^5\right]_{-2}^{2}$$

$$= \pi \left[\left(4(2) - \frac{1}{20}(2)^5\right) - \left(4(-2) - \frac{1}{20}(-2)^5\right)\right]$$

$$V = \frac{64}{5}\pi \text{ (وحدة مكعبة)}$$

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنيي الدالتين : $f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x}$

الحل :

المنطقة المستوية محددة بمنحنيي الدالتين ، نجد نقط التقاطع بوضع:

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 = \sqrt{x} \qquad : (x > 0)$$

بتربيع الطرفين

$$x^4 = x$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

نحصل على

$$x = 0 \quad , \quad x = 1$$

نأخذ قيمة اختيارية في $(0\,,1)$ ولتكن $x = \frac{1}{4}$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} \quad , \quad g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore g(x) \geq f(x) \geq 0 \quad , \quad \forall x \in [0\,,1]$$

$\therefore$ حجم المجسم الناتج :

$$V = \pi \int_0^1 [(g(x))^2 - (f(x))^2]\, dx$$

$$= \pi \int_0^1 [x - x^4]\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$\therefore V = \pi \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - 0\right] = \frac{3}{10}\pi \text{ (وحدة مكعبة)}$$

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$

و محور السينات في الفترة $[-1, 1]$

الحل

∴ حجم المجسم الناتج عن الدوران هو :

$$\therefore \; V = \pi \int_{-1}^{1} \left(f(x)\right)^2 \; dx$$

$$\therefore \; V = \pi \int_{-1}^{1} (x^2 + 2)^2 \; dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 4x^2 + 4) \; dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 + 4x \right]_{-1}^{1}$$

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{3} + 4 \right) - \left(\frac{-1}{5} - \frac{4}{3} - 4 \right) \right]$$

$$= \frac{166}{15}\pi \quad \text{units cube}$$

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة دورة كاملة حول محور السينات و المحدده بمنحنيي الدالتين :

$$y_1 = x + 3 \quad , y_2 = x^2 + 1$$

الحل

$$y_1 = y_2$$

$$x + 3 = x^2 + 1 \quad \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-2)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \ , \quad x = -1$$

بأخذ قيمة إختيارية $\in (-1\,,2)$ ولتكن $x = 0$ ، نجد أن

$$y_1 = 3 \ , \ y_2 = 1$$

$$y_1 \geq y_2 \geq 0 \qquad \forall\, x \in [-1, 2]$$

$$\therefore \ V = \pi \int_{-1}^{2} ({y_1}^2 - {y_2}^2)\, dx$$

$$\therefore \ V = \pi \int_{-1}^{2} [(x+3)^2 - (x^2+1)^2]\ dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} [x^2 + 6x + 9 - x^4 - 2x^2 - 1]\ dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} (-x^4 - x^2 + 6x + 8)\ dx$$

$$= \pi \left[\frac{-x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x\right]_{-1}^{2}$$

$$= 23\frac{2}{5}\,\pi \quad cube\ units$$

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x , y) هو :

$2x + 5$ فأوجد معادلة منحنى الدالة f إذا كان يمر بالنقطة $P(-2 , 3)$

الحل :

ميل العمودي $= \frac{-1}{f'(x)}$ حيث $f'(x) \neq 0$

$$\therefore f'(x) = \frac{-1}{2x+5}$$

$$f(x) = \int f'(x)\ dx$$

$$\therefore f(x) = \int \frac{-1}{2x+5}\ dx$$

$$f(x) = \frac{-1}{2} ln|2x+5| + C$$

لتعيين الثابت C نعوض بالنقطة $P(-2 , 3)$ في المعادلة السابقة فنحصل على

$$3 = \frac{-1}{2} ln|1| + C$$

$$C = 3$$

$\therefore$ معادلة المنحنى f المطلوب هي :

$$f(x) = \frac{-1}{2} ln|2x+5| + 3$$

إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x , y) هو $3x^2$
فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $A(1, 5)$

الحل

ميل العمودي $= \dfrac{-1}{f'(x)}$ حيث $f'(x) \neq 0$

$$3x^2 = \frac{-1}{f'(x)}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{3x^2}$$

معادلة المنحنى هي : $f(x) = \int f'(x)\, dx$

$$f(x) = \int \frac{-1}{3x^2} dx = \int \frac{-1}{3} x^{-2}\, dx$$

$$= \frac{1}{3} x^{-1} + C$$

$$f(x) = \frac{1}{3x} + C$$

$$f(1) = 5$$

$$5 = \frac{1}{3} + C \Rightarrow C = 5 - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow C = \frac{14}{3}$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{1}{3x} + \frac{14}{3}$$

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x , y) هو $4x^3 + 6x^2 - 2x + 1$ ويمر بالنقطة $P(0 , 1)$

الحل :

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x + 1$$

$$\therefore f(x) = \int (4x^3 + 6x^2 - 2x + 1)dx$$

$$f(x) = 4\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + x + C$$

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + x + C$$

لتعيين الثابت C نعوض بالنقطة $P(0 , 1)$ في المعادلة السابقة فنحصل على :

$$1 = (0)^4 + 2(0)^3 - (0)^2 + 0 + C$$

$$C = 1$$

$\therefore$ معادلة المنحنى f المطلوب هي :

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 1$$

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f :

$f(x) = \frac{1}{3}(3+2x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0\ ,\ 2]$

الحل :

$$f'(x) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}(3+2\,x)^{\frac{1}{2}} \times 2$$

$$= (3+2\,x)^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{1+(\,(3+2\,x)^{\frac{1}{2}})^2}\ dx$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{1+(3+2\,x)}\ dx$$

$$= \int_0^2 \sqrt{4+2x}\ dx$$

$$= \int_0^2 (4+2\,x)^{\frac{1}{2}}\ dx$$

$$g(x) = 4+2\,x \quad \Rightarrow g'(x) = 2$$

$$L = \frac{1}{2}\int_0^2 2\,(4+2\,x)^{\frac{1}{2}}\ dx$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\left[(4+2\,x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{3}\left[(4+2\,(2))^{\frac{3}{2}} - (4+2\,(0))^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$L = \frac{1}{3}\left[16\sqrt{2}-8\right]\ units$$

$$L \approx 4.87\ units$$

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f :

$f(x) = 5 + 2\sqrt{x^3}$ في الفترة $\left[0, \frac{1}{3}\right]$

الحل :

$$f(x) = 5 + 2x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + 9x}\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} (1 + 9x)^{\frac{1}{2}}\ dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^{\frac{1}{3}} 9\ (1 + 9x)^{\frac{1}{2}}\ dx$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}(1 + 9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{2}{3}\left[(4)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\therefore L = \frac{14}{27}$$ (وحدة طول)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $A(-1,4)$, $B(1,4)$ ثم أوجد بؤرته ومعادلة دليله

الحل :

∵ منحنى القطع المكافئ يمر بالنقطتين $A(-1,4)$, $B(1,4)$ ورأسه نقطة الأصل

∴ معادلة القطع المكافئ هي : $x^2 = 4Py$

بالتعويض عن (x, y) بإحداثيات النقطة B نحصل على :

$$(1)^2 = 4P(4)$$

$$1 = 16P$$

$$P = \frac{1}{16}$$

∴ معادلة القطع المكافئ هي : $x^2 = \frac{1}{4}y$

البؤرة : $F(0, P) = F(0, \frac{1}{16})$

معادلة الدليل :

$$y = -\frac{1}{16}$$

للقطع الزائد الذي معادلته :

$$\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{16} = 1$$

أوجد كلا من :

(1) الرأسين (2) البؤرتين

الحل

(1) $a^2 = 7 \implies a = \sqrt{7}$

$b^2 = 16 \implies b = 4$

$A_1(-\sqrt{7}, 0)$, $A_2(\sqrt{7}, 0)$ رأسا القطع الزائد هما

(2) $c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 7 + 16$

$c = \sqrt{23}$

$F_1(-\sqrt{23}, 0)$, $F_2(\sqrt{23}, 0)$ البؤرتان هما

أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه $(0,0)$ وإحدى بؤرتيه $F(4,0)$ ويمر بالنقطة $A(6,0)$

الحل

$\because$ البؤرة $F(4,0)$ تقع على محور السينات

فتكون معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل هي :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$c=4$$

$$a^2=b^2+c^2$$

$$a^2=b^2+16$$

$\because$ القطع الناقص يمر بالنقطة $A(6,0)$

$$\frac{36}{a^2}+\frac{0}{b^2}=1$$

$$\therefore\ a^2=36$$

$$\because\ b^2=36-16=20$$

$\therefore$ المعادلة هي :

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$$

أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه $(0,0)$ وطول محوره الأكبر $16\ cm$ و ينطبق على المحور الصادي والمسافة بين البؤرتين $10\ cm$

الحل

$\because$ طول المحور الأكبر $= 16\ cm$

$\therefore \quad 2a = 16$

$a = 8$

$\because$ المسافة بين البؤرتين $= 10\ cm$

$\therefore \quad 2c = 10$

$c = 5$

$\because \quad a^2 = b^2 + c^2$

$\therefore \quad b^2 = a^2 - c^2$

$b^2 = (8)^2 - (5)^2$

$= 64 - 25 = 39$

$\because$ المحور الأكبر ينطبق على المحور الصادي

$\therefore$ معادلة القطع الناقص هي :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{39} + \frac{y^2}{64} = 1$$

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وأحد رأسيه $A(\frac{2}{3}, 0)$ ويمر بالنقطة $(1, 1)$ ثم أوجد معادلتا الخطين المقاربين

الحل :

أحد رأسي القطع الزائد : $A(\frac{2}{3}, 0)$

∴ المحور القاطع ينطبق على محور السينات

ومعادلة القطع الزائد هي : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

من المعطيات $a = \frac{2}{3}$ فيكون : $\frac{x^2}{\frac{4}{9}} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{9x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

يمر القطع بالنقطة $(1, 1)$ بالتعويض :

$$\frac{9}{4} - \frac{1}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{b^2} = \frac{9}{4} - 1$$

$$\frac{1}{b^2} = \frac{5}{4} \rightarrow b^2 = \frac{4}{5}$$

معادلة القطع الزائد هي : $\frac{x^2}{\frac{4}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{5}} = 1$

$$\frac{9x^2}{4} + \frac{5y^2}{4} = 1$$

معادلتا الخطين المقاربين هما : $y = \pm\frac{b}{a}x \rightarrow y = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}x$

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $F_1(0, -\sqrt{5})$ ، ومعادلة أحد خطيه المقاربين : $y = 2x$

الحل :

$\because$ إحدى البؤرتين $F_1(0, -\sqrt{5})$

$\therefore$ المحور القاطع ينطبق على محور الصادات ومعادله القطع الزائد هي :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$c = \sqrt{5} \Rightarrow c^2 = 5$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore 5 = a^2 + b^2 \qquad (1)$$

معادلة المقارب : $y = \frac{a}{b}x$ حيث من المعطى $y = 2x$

$$\therefore \frac{a}{b} = 2 \Rightarrow a = 2b$$

بالتعويض في (1)

$$\therefore 5 = 4b^2 + b^2$$

$$\therefore 5 = 5b^2$$

$$\therefore b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$a = 2(1) = 2 \Rightarrow a^2 = 4$$

معادلة القطع الزائد هي :

$$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$$

(b) أوجد الاختلاف المركزي للقطع الذي معادلته

$$x^2 - 25y^2 = 1$$

الحل :

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{25}} = 1$$

بالمقارنة قطع زائد معادلته: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$a^2 = 1 \quad \rightarrow a = 1$$

$$b^2 = \frac{1}{25} \quad \rightarrow b = \frac{1}{5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 1 + \frac{1}{25}$$

$$c^2 = \frac{26}{25}$$

$$c = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

الاختلاف المركزي : $e = \frac{c}{a}$

$$e = \frac{\frac{\sqrt{26}}{5}}{1}$$

$$e = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

عند رمي حجر نرد مرة واحدة ، إذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن :
((مربع العدد الظاهر مطروحًا منه 1 عندما يكون العدد الظاهر أصغر من 4 ، و2- لغير ذلك))
فأوجد :

1) فضاء العينة (S) وعدد عناصر $n(s)$
2) مدى المتغير العشوائي X
3) احتمال وقوع كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X
4) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X

الحل :

1) فضاء العينة : S = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 ,6 }

، عدد عناصر فضاء العينة (S) : $n(s) = 6$

2)

عناصر فضاء العينة	عناصر مدى المتغير العشوائي
1	0
2	3
3	8
4	-2
5	-2
6	-2

مدى المتغير العشوائي: X= {-2 , 0 , 3 , 8 }

3)

$$P(X=-2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \quad , \quad P(X=0)=\frac{1}{6}$$

$$P(X=3)=\frac{1}{6} \quad , \quad P(X=8)=\frac{1}{6}$$

4) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X :

x	-2	0	3	8
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & : 0 \le x \le 3 \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

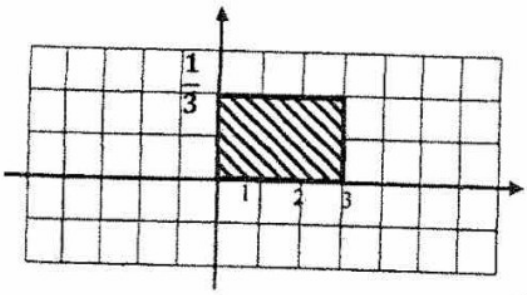
a) اثبت أن f هي دالة كثافة احتمال

b) اثبت أن f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم

c) أوجد التوقع والتباين للدالة f

الحل :

نرسم بيان الدلة f :



1) المساحة تحت المنحنى من الشكل هي

مساحة المنطقة المستطيلة = الطول × العرض

$$= 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

$\therefore$ الدالة f هي دالة كثافة احتمال

2) لإثبات أن الدالة تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم يجب أن تكون الدالة على الصورة :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : a \le x \le b \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$\because a = 0 \ , b = 3 \rightarrow b - a = 3$$

$$\therefore \frac{1}{b-a} = \frac{1}{3} \rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & : 0 \le x \le 3 \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$\therefore$ الدالة f هي دالة تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم

3) التوقع : $\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$

التباين : $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(3-0)^2}{12} = \frac{3}{4}$

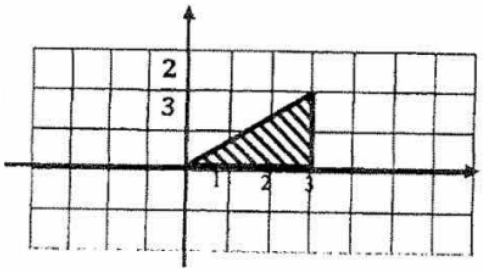
إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلا ودالة كثافة الاحتمال له هي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x & : 0 \le x \le 3 \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد : 1) $p(0 < X \le 3)$ 2) $p(X \ge 2)$ 3) $P(X = 1)$

الحل :

نرسم بيان الدلة f :

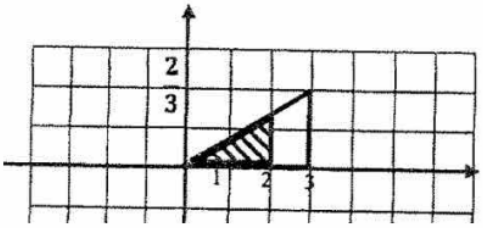


1) مساحة المنطقة المظللة :

$$p(0 < X \le 3) = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{2}{3}$$

$$= 1$$

2) مساحة المنطقة غير المظللة من المثلث :



$$p(X \ge 2) = 1 - p(X < 2)$$

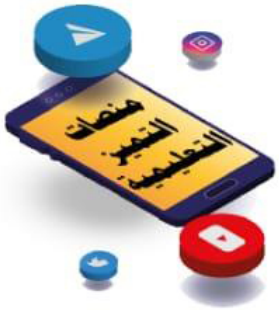
$$= 1 - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4}{9}$$

$$= \frac{5}{9}$$

مدرسة التميز النموذجية
(ابتدائي - متوسط - ثانوي)
الجهاز الفني التربوي

منصات التميز التعليمية

لزيارة منصة التميز التعليمية في اليوتيوب إمسح الباركودالتالي :



لزيارة منصة التميز التعليمية في تليجرام إمسح الباركود الخاص بقناة كل فصل مما يلي :

الصف الأول | الصف الثاني | الصف الثالث | الصف الرابع

الصف الخامس | الصف السادس | الصف السابع | الصف الثامن | الصف التاسع

الصف العاشر | الصف الحادي عشر أدبي | الصف الحادي عشر علمي | الصف الثاني عشر علمي | الصف الثاني عشر أدبي

لزيارة صفحتنا في الإنستقرام

لزيارة صفحتنا في تويتر

عنواننا : خيطان - ق ٤ - ش ١٠٠