

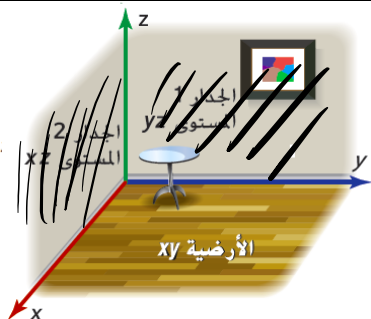


7-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

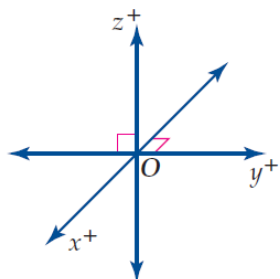
ورقة عمل الحادي عشر المتقدم

1- تحديد النقاط والمتجهات في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد. 2- التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًا وإجراء العمليات عليها.

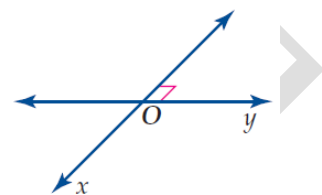
في هذا الدرس سوف نتعلم:



الشكل 1.4.3



الشكل 1.4.2

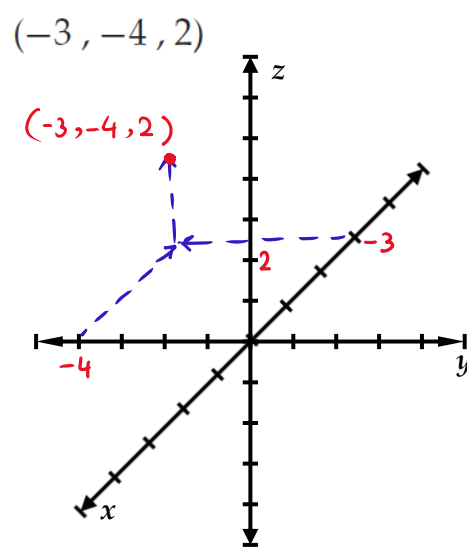
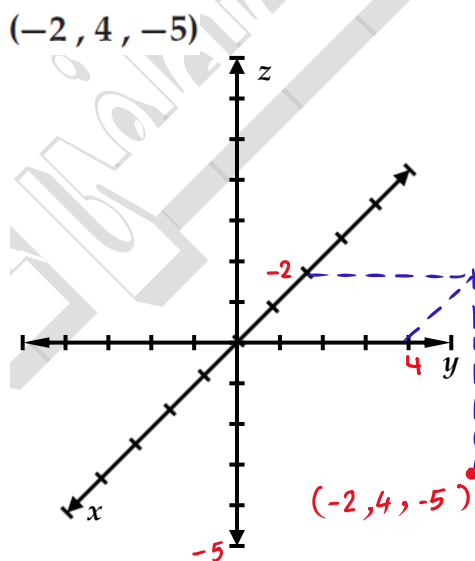
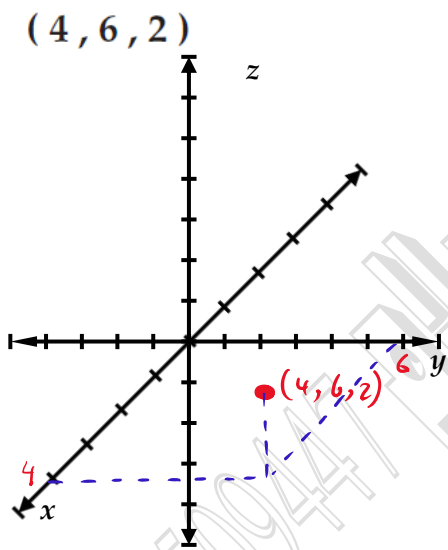


الشكل 1.4.1

تمثل النقطة في الفضاء بثلاثيات مرتبة من الأعداد الحقيقية (x, y, z) ، ولتعيين مثل هذه النقطة، عيّن أولاً النقطة (x, y) في المستوى xy ، ثم تحرك لأعلى، أو إلى أسفل موازيًا للمحور z ، بحسب المسافة المتجهة التي يُمثلها z .

تعيين نقطة في الفضاء

عيّن كلاً من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:



صيغتا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

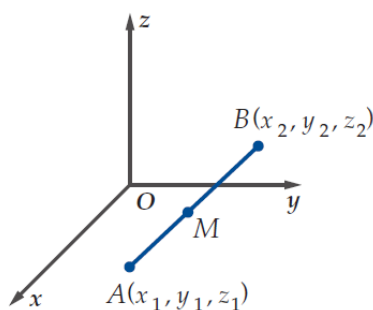
مفهوم أساسي

تُعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$ ، $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

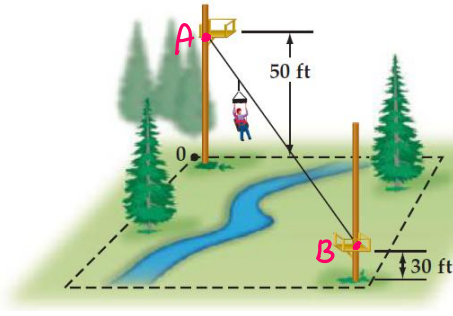
وتعطي نقطة المنتصف M لـ $\overline{AB}$ بالصيغة:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$





المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء



رحلة: تتحرك العربة في الشكل المجاور على

سلسلة مشدودة، تربط بين منصتين تسمح للمتنزهين

بالمرور فوق مناظر طبيعية خلابة. إذا مثلت المنصتان

بالتنظتين: $(10, 12, 50)$, $(70, 92, 30)$ ، وكانت

الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

(a) أوجد طول السلسلة اللازمة للربط بين المنصتين إلى أقرب قدم.

(b) أوجد إحداثيات منتصف المسافة بين المنصتين.

$$[a] \quad AB = \sqrt{(70-10)^2 + (92-12)^2 + (30-50)^2} = 20\sqrt{26} = 102 \text{ ft} \quad \text{تقريباً}$$

$$[b] \quad \text{منتصف } AB = \left(\frac{70+10}{2}, \frac{92+12}{2}, \frac{30+50}{2} \right) = (40, 52, 40)$$

الطائرات تتطلب لوائح السلامة أن تكون الطائرات على بعد 0.8 km على الأقل عند وجودها في السماء. تطير

طائرتان أعلى دبي بالإحداثيات $(90, 45, 9000)$ و $(135, -75, 8400)$. حيث يتم قياس الإحداثيات بالأمتار.

A. هل الطائرتان تنتهكان لوائح السلامة؟ اشرح.

B. إذا تم إطلاق ألعاب نارية وانفجرت بين الطائرتين مباشرة، فما إحداثيات نقطة انفجار الألعاب النارية؟

$$[A] \quad \text{المسافة بين الطائرتين} = \sqrt{(135-90)^2 + (-75-45)^2 + (8400-9000)^2} = 613.5 \text{ m}$$

$$613.5 \text{ m} \Rightarrow 0.6135 \text{ km}$$

الطائرتان تنتهكان لوائح السلامة لأن المسافة بينهما أقل من 0.8 km.

$$[B] \quad \text{نقطة المنتصف للطائرتين} = \left(\frac{135+90}{2}, \frac{-75+45}{2}, \frac{8400+9000}{2} \right) \\ = (112.5, -15, 8700)$$

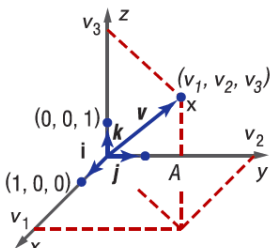
المتجهات في الفضاء إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا في الفضاء في وضع قياسي، وكانت (v_1, v_2, v_3) نقطة نهايته، فإننا نعبّر

عنه بالصورة الإحداثية $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ، كما يُعبّر عن المتجه الصفري بالصورة الإحداثية $\langle 0, 0, 0 \rangle$ ،

وعن متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$, $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ ، كما في

الشكل 1.4.4، ويمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ كما يأتي:

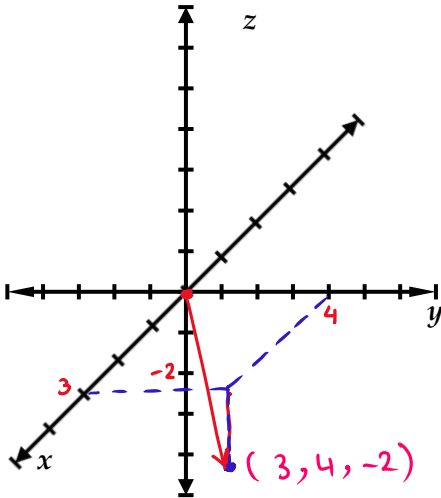
$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$



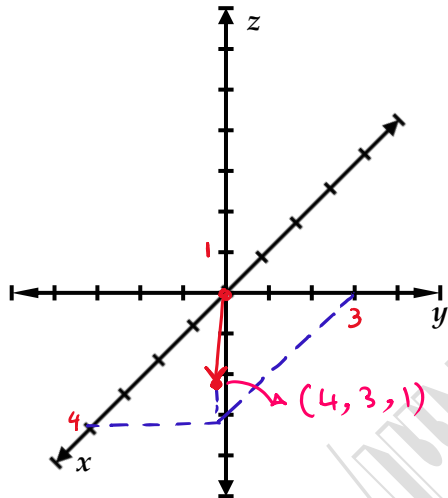


مثل بيانياً كلاً من المتجهات الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

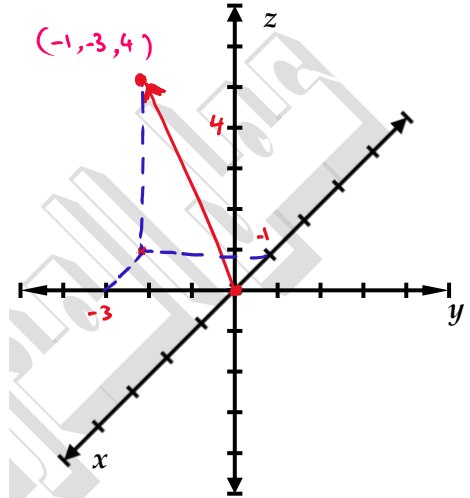
$$\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2 \rangle$$



$$\mathbf{p} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$



$$\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$



التعبير عن المتجهات في الفضاء جبرياً

جد الصورة المركبة وطول $\overline{AB}$ (مقدار) المعطاة نقطتا بدايته ونهايته، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overline{AB}$ في كلٍ مما يأتي:

$$A(-4, -2, 1), B(3, 6, -6)$$

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle \\ &= \langle 3 - (-4), 6 - (-2), -6 - 1 \rangle \\ &= \langle 7, 8, -7 \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{AB}| &= \sqrt{7^2 + 8^2 + (-7)^2} \\ &= 9\sqrt{2} = \boxed{12.7}\end{aligned}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{\langle 7, 8, -7 \rangle}{9\sqrt{2}}$$

$$= \left\langle \frac{7}{9\sqrt{2}}, \frac{8}{9\sqrt{2}}, \frac{-7}{9\sqrt{2}} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{7\sqrt{2}}{18}, \frac{4\sqrt{2}}{9}, -\frac{7\sqrt{2}}{18} \right\rangle$$

$$A(-2, -5, -5), B(-1, 4, -2)$$

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \langle -1 - (-2), 4 - (-5), -2 - (-5) \rangle \\ &= \langle 1, 9, 3 \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{AB}| &= \sqrt{1^2 + 9^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{91} = \boxed{9.5}\end{aligned}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{\langle 1, 9, 3 \rangle}{\sqrt{91}}$$

$$= \left\langle \frac{1}{\sqrt{91}}, \frac{9}{\sqrt{91}}, \frac{3}{\sqrt{91}} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{\sqrt{91}}{91}, \frac{9\sqrt{91}}{91}, \frac{3\sqrt{91}}{91} \right\rangle$$

$$A(-1, 4, 6), B(3, 3, 8)$$

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \langle 3 - (-1), 3 - 4, 8 - 6 \rangle \\ &= \langle 4, -1, 2 \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{AB}| &= \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{21} = \boxed{4.6}\end{aligned}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{\langle 4, -1, 2 \rangle}{\sqrt{21}}$$

$$= \left\langle \frac{4}{\sqrt{21}}, -\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{4\sqrt{21}}{21}, -\frac{\sqrt{21}}{21}, \frac{2\sqrt{21}}{21} \right\rangle$$



العمليات على المتجهات في الفضاء

مفهوم أساسي

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ متجهين في الفضاء، وكان k عددًا حقيقيًا، فإن :

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle \quad \text{جمع متجهين}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle \quad \text{طرح متجهين}$$

$$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle \quad \text{ضرب متجه في عدد حقيقي}$$

العمليات على المتجهات في الفضاء

أوجد كلاً مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle$ ، $\mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle$ ، $\mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$
 $4\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$ (a)

$$4\mathbf{y} + 2\mathbf{z} = 4\langle 3, -6, 2 \rangle + 2\langle -2, 0, 5 \rangle$$

$$= \langle 4(3) + 2(-2), 4(-6) + 2(0), 4(2) + 2(5) \rangle$$

$$= \langle 8, -24, 18 \rangle$$

$$2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y} \quad (\mathbf{b})$$

$$2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y} = 2\langle -1, 4, -4 \rangle - \langle -2, 0, 5 \rangle + 3\langle 3, -6, 2 \rangle$$

$$= \langle 2(-1) - (-2) + 3(3), 2(4) - 0 + 3(-6), 2(-4) - 5 + 3(2) \rangle$$

$$= \langle 9, -10, -7 \rangle$$

أوجد كلاً مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle$ ، $\mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle$ ، $\mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$

$$4\mathbf{w} - 8\mathbf{z} \quad (\mathbf{a})$$

$$4\mathbf{w} - 8\mathbf{z} = 4\langle -1, 4, -4 \rangle - 8\langle -2, 0, 5 \rangle$$

$$= \langle 4(-1) - 8(-2), 4(4) - 8(0), 4(-4) - 8(5) \rangle$$

$$= \langle 12, 16, -56 \rangle$$

$$3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w} \quad (\mathbf{b})$$

$$3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w} = 3\langle 3, -6, 2 \rangle + 3\langle -2, 0, 5 \rangle - 6\langle -1, 4, -4 \rangle$$

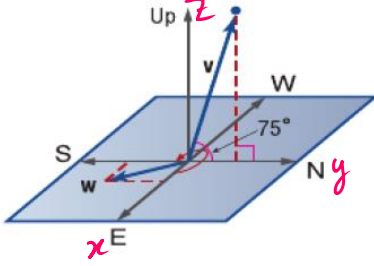
$$= \langle 3(3) + 3(-2) - 6(-1), 3(-6) + 3(0) - 6(4), 3(2) + 3(5) - 6(-4) \rangle$$

$$= \langle 9, -42, 45 \rangle$$





استخدام المتجهات في الفضاء



الصواريخ بعد انطلاق صاروخ نموذجي متجه نحو الشمال بزاوية صعود 75° بالنسبة إلى المركبة الأفقية بسرعة 320 km/h. فإذا هبّ الرياح من الاتجاه الشمالي الغربي بسرعة 8 km/h، جد متجهها يعبر عن سرعة الصاروخ الناتجة بالنسبة إلى نقطة الانطلاق.

$$V = \langle 0, 320 \cos 75, 320 \sin 75 \rangle$$

$$V = \langle 0, 82.8, 309.1 \rangle$$

اتجاه الرياح مع محور x الموجب 315°

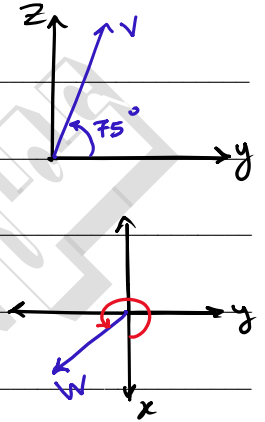
$$\Rightarrow W = \langle 8 \cos 315, 8 \sin 315, 0 \rangle$$

$$W = \langle 5.7, -5.7, 0 \rangle$$

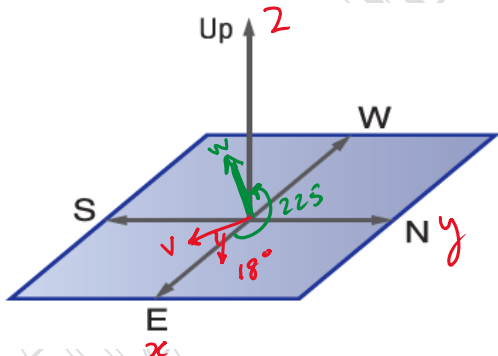
$$\text{متجه الطول بعد تأثير الرياح} = V + W$$

$$\text{النسبة لنقطة الانطلاق} = \langle 0, 82.8, 309.1 \rangle + \langle 5.7, -5.7, 0 \rangle$$

$$= \langle 5.7, 77.1, 309.1 \rangle$$



الطيران بعد إقلاع طائرة، تتجه شرقاً وتستمر في الارتفاع بزاوية 18° بالنسبة للمركبة الأفقية. تبلغ سرعة طيرانها 400 km/h. إذا كانت الرياح تهب من الشمال الشرقي بسرعة 16 km/h. فجد المتجه الذي يمثل سرعة الطائرة الناتجة بالنسبة إلى نقطة الإقلاع. وافترض أن i يتجه نحو الشرق و j يتجه نحو الشمال و k يتجه لأعلى.

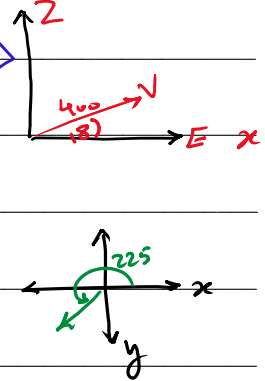


$$V = \langle 400 \cos 18, 0, 400 \sin 18 \rangle$$

$$V = \langle 380.4, 0, 123.6 \rangle$$

$$W = \langle 16 \cos 225, 16 \sin 225, 0 \rangle$$

$$W = \langle -11.3, -11.3, 0 \rangle$$



$$\text{متجه السرعة الناتجة الطائرة} = V + W$$

$$= \langle 380.4, 0, 123.6 \rangle + \langle -11.3, -11.3, 0 \rangle$$

$$= \langle 369.1, -11.3, 123.6 \rangle$$

