11

الرياضيات

الصف الحادي عشر علمي

أ/ وائل زيدان

الفصل الدراسي الثاني

دفتر متابعة الطالب

الجزء الأول

اسم الطالب:.............................

تصميم وائل زيدان

الأعداد المركبة

Complex Numbers

Imaginary Unit — **الوحدة التخيلية**

هي العدد الذي مربعه (1 −) ويرمز إليه بالرمز i

$i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$

الأعداد التخيلية:

- لأي عدد حقيقي موجب m ،

$$\sqrt{-m}=\sqrt{m}\,i$$

- تسمى الأعداد التي على الصورة bi حيث $b\in\mathbb{R}^*$ أعدادًا تخيلية.

معلومة رياضية:
يستخدم أيضًا الحرف الأبجدي ت للتعبير عن الوحدة التخيلية i.

مثال (1)

بسِّط كلًّا مما يلي مستخدمًا الوحدة التخيلية i :

a $\sqrt{-4}$ **b** $\sqrt{-8}$

الحل:

a $\sqrt{-4}=2i$ — استخدم $\sqrt{-m}=\sqrt{m}\,i$

b $\sqrt{-8}=\sqrt{8}\,i$ — بسِّط $\sqrt{8}$

$=2\sqrt{2}\,i$

حاول أن تحل

1 بسِّط كل عدد مما يلي مستخدمًا الوحدة التخيلية i:

a $\sqrt{-2}$ **b** $-\sqrt{-12}$ **c** $\sqrt{-36}$

تعريف: العدد المركب Complex Number

العدد المركب هو عدد على الصورة $a+bi$ حيث a , b عددان حقيقيان، i الوحدة التخيلية.

$z = a + bi$

الجزء الحقيقي — الجزء التخيلي

ملاحظة:
يجب التمييز بين الجزء التخيلي b والعدد التخيلي bi

مثال (2)

اكتب كلًّا من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية:

a) $\sqrt{-9}+6$ b) $\dfrac{1+\sqrt{-25}}{4}$ c) $1-\sqrt{-20}$

الحل:

$\sqrt{-9} = \sqrt{9}\,i = 3i$

الصورة الجبرية $a+bi$

a) $\sqrt{-9}+6 = 3i+6$
$= 6+3i$

$\sqrt{-25} = \sqrt{25}\,i = 5i$

الصورة الجبرية

b) $\dfrac{1+\sqrt{-25}}{4} = \dfrac{1+5i}{4}$
$= \dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{4}i$

$\sqrt{-20} = \sqrt{20}\,i$

$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

c) $1-\sqrt{-20} = 1-\sqrt{20}\,i$
$= 1-2\sqrt{5}\,i$

حاول أن تحل

2 اكتب كلًّا من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية:

a) $\sqrt{-18}+7$ b) $\dfrac{10-\sqrt{-100}}{5}$ c) $\dfrac{\sqrt{-9}+5}{7}$

Complex Numbers الأعداد المركبة

$3+2i$, $1-5i$, $\sqrt{2}i+4$, $2.7+5.1i$

الأعداد التخيلية Imaginary Numbers	الأعداد الحقيقية Real Numbers
$2i$, $-\sqrt{3}i$, $7.3i$, $-\frac{3}{5}i$	الأعداد غير النسبية Irrational Numbers: $-\sqrt{2}$, π , e , $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ Rational Numbers الأعداد النسبية: $\frac{4}{7}$, $0.\overline{3}$, $\frac{8}{5}$ Integers الأعداد الصحيحة: -1 , -2 , -3 Whole Numbers الأعداد الكلية: 0 , 1 , 3 , 7

تساوي عددين مركبين Equal Complex Numbers

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان.

ليكن: $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$

مثال (3)

أوجد قيم كل من $x, y \in \mathbb{R}$ في كل مما يلي:

a $12+3i = 4x - 9yi$

b $x^2 - y^2 i = 9 - 25i$

c $2x + yi = 1$

الحل:

a $12+3i = 4x-9yi$

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$

$\therefore\ 12 = 4x \Rightarrow x = 3$,

بسّط

$3 = -9y \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$

b $x^2 - y^2 i = 9 - 25i$

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$

$\therefore\ x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$, $x = -3$,

بسّط

$-y^2 = -25 \Rightarrow y = 5$, $y = -5$

c $2x + yi = 1$

$1 = 1 + 0i$

$\therefore\ 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$y = 0$

حاول أن تحل

3 أوجد قيم كل من $x, y \in \mathbb{R}$ في كل مما يلي:

a $x + 5i = 7 - 3yi$

b $(x+3) + y^2 i = 5 - yi$

c $3i = 2x - 5yi$

مثال (4)

مثّل كلًّا مما يلي في المستوى المركب:

a $z_1 = 3 + 2i$ b $z_2 = -1$ c $z_3 = -i - 2$ d $z_4 = i$

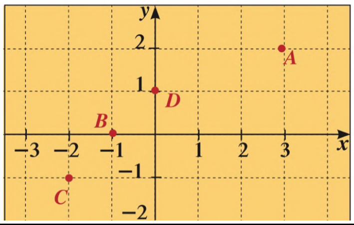
الحل:

a $z_1 = 3 + 2i$ تمثله النقطة $A(3\,,2)$.

b $z_2 = -1$ تمثله النقطة $B(-1\,,0)$.

c $z_3 = -i - 2 = -2 - i$ تمثله النقطة $C(-2\,,-1)$.

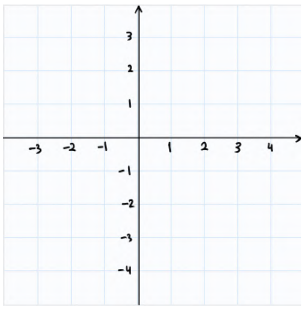
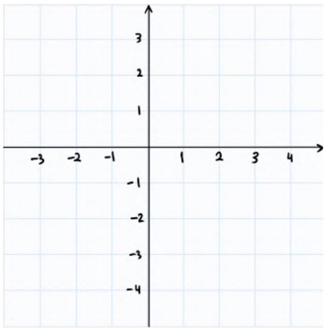
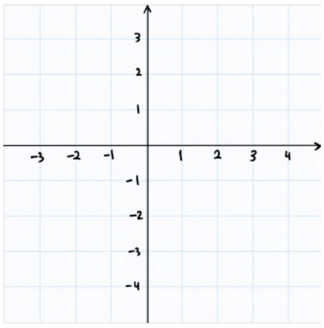
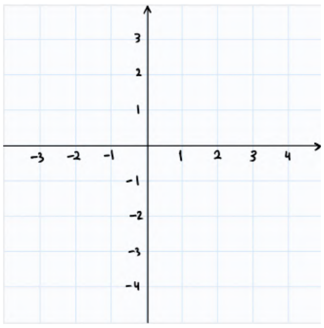
d $z_4 = i$ تمثله النقطة $D(0\,,1)$.



حاول أن تحل

4 مثّل كلًّا مما يلي في المستوى المركب:

a $z_1 = 4 - i$ b $z_2 = -3i$ c $z_3 = -4 - 3i$ d $z_4 = 2$

مثال (5)

اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط: $M(3,2)$, $L(2,-1)$, $J(0,-5)$.

الحل:

النقطة $J(0\,,-5)$ تمثل العدد المركب $z_1 = 0 - 5i = -5i$.

النقطة $L(2\,,-1)$ تمثل العدد المركب $z_2 = 2 - i$.

النقطة $M(3\,,2)$ تمثل العدد المركب $z_3 = 3 + 2i$.

حاول أن تحل

5 اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط $N(-4\,,1)$, $H(1,-2)$, $K(7,0)$.

مثال (6)

إذا كان: $z_3 = 2i$, $z_2 = 4 - 7i$, $z_1 = 2 + 3i$ فأوجد:

a $z_1 + z_2$ b $z_1 - z_2$ c $z_3 + z_2 + z_1$

الحل:

a
$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (4 - 7i)$$
$$= (2 + 4) + (3 - 7)i$$
$$= 6 - 4i$$

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

بسّط

b
$$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (4 - 7i)$$
$$= (2 - 4) + (3 - (-7))i$$
$$= -2 + 10i$$

$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

بسّط

c
$$z_3 + z_2 + z_1 = z_3 + (z_2 + z_1)$$
الخاصية التجميعية
$$= z_3 + (z_1 + z_2)$$
الخاصية الإبدالية
$$= 2i + 6 - 4i$$
$$= 6 - 2i$$

حاول أن تحل

6 إذا كان $z_3 = -0.3i$, $z_2 = 3.4 - 1.2i$, $z_1 = -2 + 5i$ فأوجد:

a $z_1 + z_2$ b $z_2 - z_1$ c $z_3 - z_2 - z_1$

ملاحظات:

- الصفر هو العنصر المحايد لعملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة $(0 = 0 + 0i)$.
- المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $-z = -a - bi$

  مثلًا: إذا كان $z = 2 + 5i$ فإن $-z = -2 - 5i$
- إذا كان مجموع عددين مركبين يساوي صفرًا فإن كلًّا منهما معكوس جمعي للآخر والعكس صحيح.

  أي أن: $z_1 = -z_2 \Longleftrightarrow z_1 + z_2 = 0$
- لإيجاد ناتج طرح: $z_1 - z_2$ يمكن إضافة المعكوس الجمعي لِـ z_2 إلى z_1 أي $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

ثانيًا: ضرب الأعداد المركبة Multiplying Complex Numbers

ويمكن استخدام قاعدة الضرب التالية:

إذا كان $z_1 \, , z_2 \in \mathbb{C} \, , c \in \mathbb{R}$

حيث $z_1 = a_1 + b_1 i \, , z_2 = a_2 + b_2 i$ فإن:

1. $c\, z_1 = ca_1 + c\, b_1 i$
2. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

خواص عملية الضرب على مجموعة الأعداد المركبة:

الخاصية	$\forall \; z_1 , z_2 , z_3 \in \mathbb{C}$
الإبدالية	$z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$
التجميعية	$z_1 \times (z_2 \times z_3) = (z_1 \times z_2) \times z_3$
التوزيعية	$z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$ $z_1 \times (z_2 - z_3) = z_1 \times z_2 - z_1 \times z_3$

العدد 1 هو العنصر المحايد لعملية ضرب الأعداد المركبة $(1 = 1 + 0i)$

لضرب عددين مركبين يمكن:

استخدام الخواص أعلاه وحقيقة $i^2 = -1$ والخطوات نفسها التي تستخدم في عملية ضرب كثيرات الحدود.

مثال (7)

أوجد الناتج:

a. $(5i)(-4i)$

b. $3(7 + 5i)$

c. $(2 + 3i)(-3 + 5i)$

d. $4i\left(1 - \frac{1}{2}i\right)\left(1 + \frac{1}{2}i\right)$

الحل:

a. $(5i)(-4i) = -20i^2$ — خاصية ضرب كثيرات الحدود

$= -20(-1)$ — عوّض عن i^2 بـ -1

$= 20$ — بسّط

b. $3(7 + 5i) = 3 \times 7 + 3 \times 5i$ — الخاصية التوزيعية

$= 21 + 15i$ — بسّط

c. $(2 + 3i)(-3 + 5i) = -6 + 10i - 9i + 15i^2$ — خاصية ضرب كثيرات الحدود

$= -6 + i + 15(-1)$ — عوّض عن i^2 بـ -1

$= -21 + i$ — بسّط

d. $4i\left(\left(1 - \frac{1}{2}i\right)\left(1 + \frac{1}{2}i\right)\right) = 4i\left((1)^2 - \left(\frac{1}{2}i\right)^2\right)$ — المتطابقة $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

$= 4i\left(1 - \frac{1}{4}(-1)\right)$ — عوّض عن i^2 بـ -1

$= 4i\left(\frac{5}{4}\right)$ — بسّط

$= 5i$

حاول أن تحل

7 أوجد الناتج:

c $(12i)(7i)(i+1)$ b $(9+4i)(4-9i)$ a $(6-5i)(4-3i)$

مثال (8)

إذا كان $z_1 = 2+3i \;,\; z_2 = 5-i$ فأوجد:

b $z_1 \cdot z_2$

a $-3z_2$

الحل:

a
$$-3z_2 = -3(5-i)$$
$$= -3(5) - 3(-i)$$
$$= -15 + 3i$$

b
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$
$$= ((2)(5) - (3)(-1)) + ((2)(-1) + (5)(3))i$$
$$= (10+3) + (-2+15)i$$
$$= 13 + 13i$$

حاول أن تحل

8 إذا كان $z_1 = 2 - 3i \ , \ z_2 = 1 + 4i$ فأوجد:

a $\frac{1}{2} z_1$ **b** $z_1 \cdot z_2$

قوى العدد المركب Powers of a Complex Number

نستطيع حساب قوى (i) كما يلي:

$$i^2 = -1 \ , \quad i^3 = i^2 \cdot (i) = -1 \times i = -i \ ,$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \times (-1) = 1$$

بصورة عامة:

إذا كان p عدد كلي فإن:

$$i^{4p} = 1 \ , \ i^{4p+1} = i \ , \ i^{4p+2} = -1 \ , \ i^{4p+3} = -i$$

لاحظ أنه عند رفع (i) لعدد كلي فإن الناتج يكون أحد عناصر المجموعة $\{-1 , 1 , i , -i\}$

فمثلًا:

$$i^{29} = i^{4\times 7+1} = i \quad , \quad i^{15} = i^{4\times 3+3} = -i \quad , \quad i^{2013} = i^{4\times 503+1} = i$$

مثال (9)

إذا كان $z_1 = i \ , \ z_2 = -2i \ , \ z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

فأوجد:

a z_1^{21} **b** z_2^{6} **c** z_3^{2}

الحل:

a $z_1^{21} = i^{21} = i^{4\times 5+1} = i$

b $z_2^{6} = (-2i)^6 = (-2)^6 \times i^6$

$= 64 \times i^{4+2} = 64 \times i^2 = 64 \times (-1) = -64$

c $z_3^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$

$= \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2$ $\quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4}$ $\quad$ بسّط $(i^2 = -1)$

$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

حاول أن تحل 9 أوجد:

a $5(i)^{73}$

ثالثًا: قسمة الأعداد المركبة Dividing Complex Numbers

مرافق العدد المركب Complex Conjugate

ناتج ضرب العددين المركبين $a - bi$, $a + bi$ غير الصفريين هو عدد حقيقي موجب:

$$(a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

للاستفادة من هذه العلاقة الخاصة نعرض ما يلي:

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $\overline{z} = \overline{a+bi} = a - bi$

معلومة:
إذا كان $z = a$ عدد حقيقي
فإن $\overline{z} = z = a$

فمثلًا: مرافق العدد $2 + 3i$ هو $2 - 3i$

والعدد $\overline{-7i + 2}$ هو $2 + 7i$

ملاحظة: لإيجاد المرافق $(\overline{z})$ يجب أن يكون z على الصورة الجبرية $z = a + bi$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$.

خواص مرافق العدد المركب:

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$

فإن:

- $z_1 + \overline{z_1} = 2a_1$
- $z_1 - \overline{z_1} = 2bi$
- $z_1 \cdot \overline{z_1} = a_1^2 + b_1^2$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{(\overline{z_1})} = z_1$

مثال (10)

إذا كان $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 5 - 2i$ فأوجد:

a $z_1 + \overline{z_1}$ $\quad$ b $z_1 - \overline{z_1}$ $\quad$ c $\overline{(\overline{z_1})}$

d $\overline{z_1 + z_2}$ $\quad$ e $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ $\quad$ f $\overline{z_1 \cdot z_2}$

الحل:

نوجد كل من: $\overline{z}_2 = 5 + 2i$, $\overline{z}_1 = 3 - 4i$

a $z_1 + \overline{z_1} = 3 + 4i + 3 - 4i = 6$

b $z_1 - \overline{z_1} = 3 + 4i - (3 - 4i) = 8i$

c $\overline{(\overline{z_1})} = \overline{(\overline{3 + 4i})} = \overline{3 - 4i} = 3 + 4i$

d $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(3 + 4i) + (5 - 2i)} = \overline{3 + 4i + 5 - 2i}$

$= \overline{8 + 2i} = 8 - 2i$

e $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{3 + 4i} \cdot \overline{5 - 2i}$

$= (3 - 4i)(5 + 2i)$

$= 15 + 6i - 20i + 8$

$= 23 - 14i$

f $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(3 + 4i)(5 - 2i)}$

$= \overline{15 - 6i + 20i + 8}$

$= \overline{23 + 14i}$

$= 23 - 14i$

حاول أن تحل

10 إذا كان $z_2 = 3 + 5i$, $z_1 = 2 - 7i$ فأوجد:

a $\overline{z_1} + \overline{z_2}$

b $\overline{z_1 - z_2}$

d $\overline{z_1 \cdot z_2}$

e $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري $z = a + bi$ يرمز له بالرمز z^{-1}:

ويكون: $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \times \frac{a-bi}{a-bi}$

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

مثال (11)

أوجد المعكوس الضربي لكل من:

a $z_1 = 3 - 5i$ b $z_2 = 2i - 1$ c $z_3 = -7i$

الحل:

اضرب البسط والمقام في مرافق z_1

a $z_1^{-1} = \frac{1}{3-5i} \times \frac{3+5i}{3+5i}$

$= \frac{3}{9+25} + \frac{5}{9+25}i$

$= \frac{3}{34} + \frac{5}{34}i$

اكتب المقام في الصورة الجبرية

b $z_2^{-1} = \frac{1}{2i-1} = \frac{1}{-1+2i}$

$= \frac{1}{-1+2i} \times \frac{-1-2i}{-1-2i}$

$= \frac{-1}{1+4} - \frac{2}{1+4}i$

$= \frac{-1}{5} - \frac{2}{5}i$

c $z_3^{-1} = \frac{1}{-7i}$

$= \frac{1}{-7i} \times \frac{i}{i}$

$= \frac{i}{-7 \times (-1)} = \frac{i}{7} = \frac{1}{7}i$

حاول أن تحل

11 أوجد المعكوس الضربي لكل من:

a $z_1 = -3i - 7$ b $z_2 = 5 + 11i$ c $z_3 = 6i$

ملاحظة: يمكنك التحقق من أن: $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{a^2+b^2}$

لقسمة عدد مركب z_1 على عدد مركب آخر غير صفري z_2، نكتبهما على شكل كسر على الصورة $\frac{z_1}{z_2}$، نبسط الكسر بضرب كلّ من البسط والمقام في مرافق المقام.

مثال (12)

أوجد ناتج قسمة $5-6i$ على $2+3i$

الحل:

$$\begin{aligned}\frac{5-6i}{2+3i} &= \frac{5-6i}{2+3i}\times\frac{2-3i}{2-3i}\\ &= \frac{10-15i-12i+18i^2}{(2)^2+(3)^2}\\ &= \frac{10-18}{13}-\frac{15+12}{13}i\\ &= \frac{-8}{13}-\frac{27}{13}i\end{aligned}$$

حاول أن تحل

12 أوجد ناتج قسمة $3-2i$ على $1+2i$

مثال (13)

اكتب كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية للعدد المركب:

a $\dfrac{2}{3-i}$ b $\overline{\left(\dfrac{5+i}{2-3i}\right)}$

الحل:

a ضرب البسط والمقام في مرافق المقام

$$\begin{aligned}\frac{2}{3-i} &= \frac{2}{3-i}\times\frac{3+i}{3+i}\\ &= \frac{6+2i}{3^2+1^2}\\ &= \frac{6}{10}+\frac{2}{10}i \quad \text{بسّط}\\ &= \frac{3}{5}+\frac{1}{5}i\end{aligned}$$

b ضرب البسط والمقام في مرافق المقام

$$\begin{aligned}\frac{5+i}{2-3i} &= \frac{5+i}{2-3i}\times\frac{2+3i}{2+3i}\\ &= \frac{10+15i+2i+3i^2}{2^2+3^2} \quad \text{خاصية ضرب كثيرات الحدود}\\ &= \frac{7+17i}{13} = \frac{7}{13}+\frac{17}{13}i \quad \text{بسّط}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \overline{\left(\frac{5+i}{2-3i}\right)} = \overline{\left(\frac{7+17i}{13}\right)} = \frac{7}{13}-\frac{17}{13}i$$

حاول أن تحل

13 اكتب كلًا مما يلي في الصورة الجبرية:

a $\frac{3+i}{2+5i}$ b $\frac{2-i}{2+i}$ c $\frac{\overline{5+i}}{2-3i}$

ملاحظة: مرافق ناتج قسمة عدد مركب على عدد مركب آخر غير صفري يساوي ناتج قسمة مرافق العدد المركب الأول على مرافق العدد المركب الثاني.

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

تمرَّن
7−1

الأعداد المركبة

Complex Numbers

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1−4)، بسّط كل عدد مستخدمًا الوحدة التخيلية i

(1) $\sqrt{-16}$

(2) $\sqrt{-15}$

(3) $3\sqrt{-9}$

(4) $-\frac{1}{2}\sqrt{-100}$

في التمارين (5−8)، اكتب كل عدد في الصورة الجبرية.

(5) $2+\sqrt{-3}$

(6) $\sqrt{-1}+2$

(7) $\dfrac{-\sqrt{-50}-2}{6}$

(8) $\dfrac{\sqrt{-8}+8}{2}$

في التمرينين (9−11)، حل المعادلات التالية:

(9) $2x+3yi=-14+9i$

(10) $3x+19i=16-8yi$

(11) $14i^2-3i=2x+(y+5)i$

(12) مثّل كلًّا مما يلي في المستوى المركب:

(a) $z_1=-2+3i$ (b) $z_2=-4$ (c) $z_3=-i$ (d) $z_4=2(2+i)$

(13) اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط التالية:

(a) $L(4,5)$ (b) $M(-4,-2)$ (c) $N(-2,6)$ (d) $P(0,-3)$

في التمارين (14−23)، بسّط كل تعبير مما يلي:

(14) $(2+4i)+(4-i)$

(15) $6-(8+3i)$

(16) $(4+\sqrt{-9})+(6-\sqrt{-49})$

(17) $(8-\sqrt{-1})-(-3+\sqrt{-16})$

(18) $(-2i)(5i)$

(19) $(4i)(-9i)^2$

(20) $-5(1+2i)+3i(3-4i)$

(21) $(-6-5i)(1+3i)$

(22) $(-2+\sqrt{-9})(6+\sqrt{-25})$

(23) $i(-6i)^3$

(25) إذا كان $z_2 = -3 + 4i$, $z_1 = 2 + i$ فأوجد:

(a) $-\frac{1}{3}z_2$ **(b)** $z_1 . z_2$

(e) $\overline{z}_1 - \overline{z}_2$ **(f)** $z_1 . \overline{z}_2$

(27) أوجد المعكوس الضربي لكل مما يلي:

(a) $-3 - 2i$ **(b)** $5i$ **(c)** $3i - 4$

(28) إذا كان $z_2 = -\sqrt{3} + 2i$, $z_1 = \sqrt{3} + i$ فأوجد: $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$, $\frac{z_1}{\overline{z}_2}$, $\frac{\overline{z}_1}{z_2}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الصورة الجبرية للعدد: $3+\sqrt{-4}$ هي: $3+2i$ — (a) (b)

(2) مرافق العدد المركب: $z=3+4i$ هو: $\bar{z}=-3-4i$ — (a) (b)

(3) المعكوس الجمعي للعدد المركب $z=3-2i$ هو: $-z=3+2i$ — (a) (b)

(4) الصورة المبسّطة للتعبير: $(12+5i)-(2-i)$ هي: $10+6i$ — (a) (b)

في التمارين (5–14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) العدد: $32+\sqrt{-225}$ يكتب بالصورة الجبرية كما يلي:

(a) $-15+6i$ (b) $6+15i$ (c) $6-15i$ (d) $32+15i$

(6) حل المعادلة: $-10-6i=2x+3yi$ هو:

(a) $x=5\ ,\ y=-2$ (b) $x=-5\ ,\ y=-2$ (c) $x=-5\ ,\ y=2$ (d) $x=5\ ,\ y=2$

(7) إذا كان $z_1=5i+2$ ، $z_2=-3-i$ فإنّ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{10}+\frac{17}{10}i$ (b) $\frac{-1}{10}-\frac{17}{10}i$ (c) $\frac{-1}{10}+\frac{17}{10}i$ (d) $\frac{1}{10}-\frac{17}{10}i$

(8) إذا كان: $x\,i^2+3\,y\,i=5+3\,i^5$ فإن $(x\ ,\ y)$ تساوي

(a) $(5,\ 1)$ (b) $(-5,\ -1)$ (c) $(5,\ -1)$ (d) $(-5,\ 1)$

(9) أبسط صورة للتعبير: $(3+\sqrt{-4})(4+\sqrt{-9})$ هي:

(a) $18+17i$ (b) $18+3\sqrt{-9}+4\sqrt{-4}$
(c) $6+17i$ (d) 18

(10) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(1+2i)^2$ هي:

(a) $z=-3+4i$ (b) $z=5+4i$ (c) $z=-3$ (d) $z=5$

(12) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\frac{i}{i+2}$ هي:

(a) $z=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ (b) $z=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$
(c) $z=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ (d) $z=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$

(13) إذا كان $z=i$ فإنّ z^{250} يساوي:

(a) $-i$ (b) i (c) 1 (d) -1

(14) ليكن $x\in\mathbb{Z}^+$ فإنّ مجموعة قيم x التي تجعل العدد $(5+i^x)$ عددًا حقيقيًّا هي:

(a) $\mathbb{Z}^+$ (b) $\{0,2,4,6,...\}$ (c) $\{1,3,5,...\}$ (d) $\{2,4,6,...\}$

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

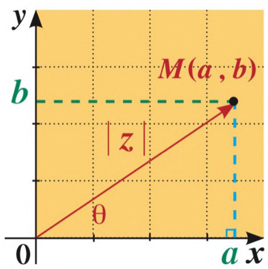
Polar Coordinates and Trigonometric Form of a Complex Number

القيمة المطلقة لعدد مركب Absolute Value of a Complex Number

القيمة المطلقة للعدد المركب هي المسافة بين النقطة التي تمثل هذا العدد ونقطة الأصل في المستوى الإحداثي المركب والتي يمكنك إيجادها باستخدام نظرية فيثاغورث.

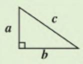
بصفة عامة إذا كان $z = a + bi$

فإن: $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$



معلومة: يمكن استخدام التعبير Modulus للدلالة على القيمة المطلقة للعدد المركب.

تذكر: نظرية فيثاغورث:



$c^2 = a^2 + b^2$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

مثال (1)

أوجد:

a $|5i|$ b $|3 - 4i|$

الحل:

a $5i$ هي 5 وحدات انطلاقًا من نقطة الأصل على المحور التخيلي.

$\therefore \ |5i| = 5$

b $|3 - 4i|$

$= \sqrt{3^2 + (-4)^2}$ $\qquad |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$= \sqrt{9 + 16}$ $\qquad$ بسِّط

$= 5$

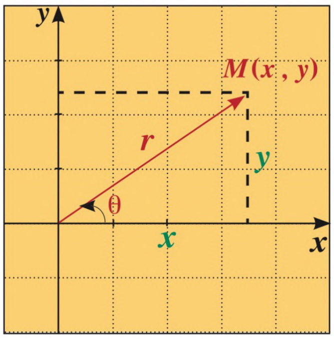
حاول أن تحل

1 أوجد:

a $|6 - 4i|$ b $|-2 + 5i|$

الإحداثيات القطبية Polar Coordinates

يمثّل الزوج المرتب (r , θ) الإحداثيات القطبية للنقطة M على المستوى الإحداثي المركب ونعلم أيضًا أن الزوج المرتب (x , y) يمثل الإحداثيات الديكارتية للنقطة M في نفس المستوى الإحداثي.



يمكن التحويل بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية باستخدام:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

حيث θ هي الزاوية الموجهة في الوضع القياسي التي يمر ضلعها النهائي بالنقطة M .

مثال (2)

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية:

a $M\left(5 , \frac{\pi}{4}\right)$

b $N\left(\sqrt{2} , \frac{5\pi}{6}\right)$

الحل:

a $M\left(5 , \frac{\pi}{4}\right)$

الزوج المرتب $\left(5 , \frac{\pi}{4}\right)$ يمثل الإحداثيات القطبية للنقطة M حيث: $r = 5 \ , \ \theta = \frac{\pi}{4}$

$y = r\sin\theta$	$x = r\cos\theta$
$= 5\sin\frac{\pi}{4}$	$= 5\cos\frac{\pi}{4}$
$= 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$	$= 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$
$= \frac{5\sqrt{2}}{2}$	$= \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ الزوج المرتب الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية للنقطة M : $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2} , \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

b $N\left(\sqrt{2} , \frac{5\pi}{6}\right)$

الزوج المرتب $\left(\sqrt{2} , \frac{5\pi}{6}\right)$ يمثل الإحداثيات القطبية للنقطة N حيث: $r = \sqrt{2} \ , \ \theta = \frac{5\pi}{6}$

$y = r\sin\theta$	$x = r\cos\theta$
$= \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{6}$	$= \sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{6}$
$= \sqrt{2} \times \frac{1}{2}$	$= \sqrt{2} \times \frac{-\sqrt{3}}{2}$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}$	$= \frac{-\sqrt{6}}{2}$

$\therefore$ الزوج المرتب الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية للنقطة N : $\left(\frac{-\sqrt{6}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

تذكر:

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

تذكر:

عند استخدام الآلة الحاسبة تأكد من وضعها بما يناسب قياس الزاوية:

الستيني DEG

الدائري: RAD

للتحويل من الإحداثيات الديكارتية (x, y) إلى الإحداثيات القطبية (r, θ) نوجد قيمة r باستخدام القاعدة: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ثم نوجد قياس زاوية الإسناد α باستخدام: $\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right|$
بعد ذلك تحديد الربع الذي تقع فيه هذه الزاوية θ من إشارة كلٍّ من x, y ونوجدها.

مثال (3)

حوّل من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية (r, θ) لكل مما يلي:

a $L(1, -\sqrt{3})$, $0 \le \theta < 2\pi$ **b** $M(-3, -4)$, $0^\circ \le \theta < 360^\circ$

تذكر:
إذا كانت α زاوية الإسناد للزاوية التي قياسها θ فإن:

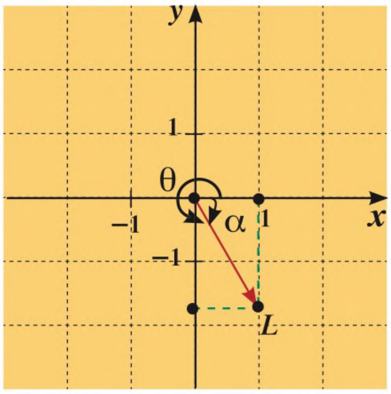
$$\theta = \begin{cases} \alpha & : x > 0, y > 0 \\ \pi - \alpha & : x < 0, y > 0 \\ \pi + \alpha & : x < 0, y < 0 \\ 2\pi - \alpha & : x > 0, y < 0 \end{cases}$$

الحل:

a $L(1, -\sqrt{3})$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2}$$
$$= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

نفرض أن α زاوية الإسناد



$$\therefore \tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = |-\sqrt{3}|$$
$$= \sqrt{3}$$

وبالتالي: $\alpha = \tan^{-1}\sqrt{3}$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\because x > 0 \quad , \quad y < 0$$

$\therefore$ L تنتمي إلى الربع الرابع،

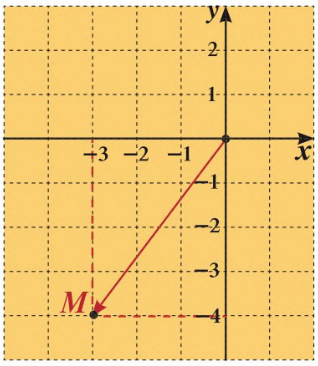
$$\therefore \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

وبالتالي الإحداثيات القطبية هي: $L\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$

تذكر:
عندما نتحدث عن الإحداثيات القطبية نعني الزوج المرتب (r, θ).
وعندما نتحدث عن الإحداثيات الديكارتية نعني الزوج المرتب (x, y).

b $M(-3, -4)$

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{9+16}$$
$$= \sqrt{25}$$
$$= 5$$



نفرض أن α زاوية الإسناد

$$\therefore \tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{-4}{-3}\right| = \frac{4}{3}$$

وبالتالي: $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

$$\because x < 0, \quad y < 0$$

$\therefore$ M تنتمي إلى الربع الثالث

استخدم الآلة الحاسبة

$$\therefore \theta = 180^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\theta = 233^\circ\, 7'\, 48.37''$$

وبالتالي الإحداثيات القطبية هي $M(5, 233^\circ\, 7'\, 48.37'')$

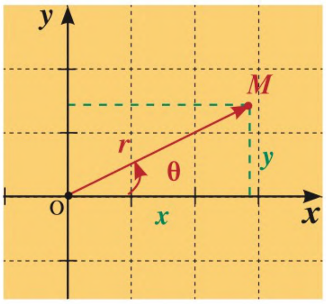
حاول أن تحل

3 أوجد الزوج المرتب (r, θ) لكل نقطة مما يلي حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$

a $D(3\sqrt{3}, 3)$

b $C(4, -2\sqrt{5})$

الصورة المثلثية Trigonometric Form



النقطة $M(x, y)$ تمثل العدد المركب $z = x + yi$

المسافة بين نقطة الأصل O والنقطة M هي $OM = r\ ,\ r > 0$

θ هي قياس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$

يمكن كتابة العدد المركب $z = x + yi$ على الصورة:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ وتعرف **بالصورة المثلثية** للعدد المركب z.

يسمى r **مقياس العدد** أو القيمة المطلقة ويرمز إليه أحيانًا بالرمز $|z|$ ويتعين بالعلاقة:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

تسمى θ **سعة** العدد المركب وتتعيّن من $\sin\theta = \dfrac{y}{r}\ ,\ \cos\theta = \dfrac{x}{r}$

أو تتعين من $\tan\theta = \dfrac{y}{x}\ ,\ x \neq 0$ وتحديد الربع.

الصورة المثلثية للعدد المركب ليست وحيدة، لأنه إذا كانت θ سعة العدد المركب $x + yi$ فإن كلًّا مما يلي سعة للعدد نفسه: $\theta + 2\pi\ ,\ \theta + 4\pi, \ldots\ ,\ \theta + 2\pi k\ :\ k \in \mathbb{Z}$.

إذا كانت $\theta \in [0, 2\pi)$ أو $0^\circ \leqslant \theta < 360^\circ$ فتسمى السعة في هذه الحالة **بالسعة الأساسية**.

معلومة:

يستخدم أحيانًا التعبير «الصورة المثلثية» بدلًا من «الصورة القطبية».

مثال (4)

ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية:

a $z_1 = 1+\sqrt{3}\,i$ b $z_2 = -2-2i$ c $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

الحل:

a $z_1 = 1+\sqrt{3}\,i$

$x_1 = 1,\ y_1 = \sqrt{3}$

$r_1 = |z_1| = \sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

نفرض أن α_1 زاوية الإسناد:

$\therefore\ \tan\alpha_1 = \left|\frac{y_1}{x_1}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{1}\right| = \sqrt{3}$

$\therefore\ \alpha_1 = \frac{\pi}{3}$

$\because\ x_1 > 0\ ,\ y_1 > 0$

$\therefore$ θ_1 تقع في الربع الأول من المستوى الإحداثي المركب.

$\therefore\ \theta_1 = \alpha_1 = \frac{\pi}{3}$

الصورة المثلثية هي: $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

b $z_2 = -2-2i$

$x_2 = -2,\ y_2 = -2$

$r_2 = |z_2| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

نفرض أن α_2 زاوية الإسناد: $\tan\alpha_2 = \left|\frac{y_2}{x_2}\right| = \left|\frac{-2}{-2}\right| = 1$

$\therefore\ \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$

$\because\ x_2 < 0\ ,\ y_2 < 0$

$\therefore$ θ_2 تقع في الربع الثالث.

$\therefore\ \theta_2 = \pi+\alpha_2 = \pi+\frac{\pi}{4}$

$= \frac{5\pi}{4}$

الصورة المثلثية هي: $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

c $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ y_3 = \frac{1}{2}$

$r_3 = |z_3| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$

نفرض أن α_3 زاوية الإسناد:

$$\tan \alpha_3 = \left|\frac{y_3}{x_3}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{6}$$

$$\because \quad x_3 < 0 \ , \ y_3 > 0$$

$\therefore$ θ_3 تقع في الربع الثاني.

$$\therefore \quad \theta_3 = \pi - \alpha_3 = \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{5\pi}{6}$$

الصورة المثلثية هي: $z_3 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$

تذكر:

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

معلومة:

إذا كانت θ بالقياس السالب فإن السعة الأساسية تساوي:

$\theta + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{N}$

حاول أن تحل

4 ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية:

a $z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}i$

b $z_2 = -1 - i$

c $z_3 = -2 + 2\sqrt{3}i$

رياضيات وبس الحادي عشر علمي الفصل الدراسي الثاني

مثال (5) مستخدماً السعة الأساسية:

ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

a $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b $z_2 = \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}$

c $z_3 = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

d $z_4 = \frac{9}{2}(\cos 30^\circ + i\sin 390^\circ)$

الحل:

a $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) \qquad x > 0 \ , \ y < 0$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

b $z_2 = \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6} \qquad x > 0 \ , \ y > 0$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

c $z_3 = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$= \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) \qquad x < 0 \ , \ y < 0$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

d $z_4 = \frac{9}{2}(\cos 30^\circ + i\sin 390^\circ) \ , \ x > 0 \ , \ y > 0$

$$= \frac{9}{2}(\cos 30^\circ + i\sin(360^\circ + 30^\circ))$$

$$= \frac{9}{2}(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$$

رياضيات وبس الحادي عشر علمي الفصل الدراسي الثاني

حاول أن تحل

مستخدماً السعة الأساسية:

5 ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

a $3\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

b $2\left(\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}\right)$

c $-\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

d $3(\cos 50^\circ - i\sin(-130^\circ))$

رياضيات وبس الحادي عشر علمي الفصل الدراسي الثاني

مثال (6)

ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

a $z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

b $z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

الحل:

a
$$z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$
$$z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$
$$z_1 = -\sqrt{3} - i$$

b
$$z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$$
$$z_2 = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$
$$z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

تذكر:

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$

تذكر:

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

تذكر:

$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$

$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$

حاول أن تحل

6 ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

a $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b $z_2 = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

الصورة المثلثية في حالات خاصة Trigonometric Form In Special Cases

كل عدد حقيقي يمثل بنقطة على المحور الحقيقي (محور السينات). وكل عدد تخيلي يمثل بنقطة على المحور التخيلي (محور الصادات). يمثل الجدول التالي الحالات الأربع الخاصة. a, b عددان حقيقيان موجبان.

العدد	المقياس	سعة (بالراديان) (rad)
a	a	0
$-a$	$\lvert -a \rvert = a$	π
bi	b	$\frac{\pi}{2}$
$-bi$	$\lvert -b \rvert = b$	$\frac{3\pi}{2}$

ملاحظة:
إذا كان $z = 0$، فإن:
$x = 0 \ , y = 0 \ , r = 0$
θ غير معيّنة.

مثال (7)

ضع في الصورة المثلثية كلًّا من الأعداد التالية:

a $z_1 = 3$ b $z_2 = -5$ c $z_3 = i$ d $z_4 = -3i$

الحل:

a $r_1 = |z_1| = |3| = 3$, السعة الأساسية $= 0$ $\Longrightarrow z_1 = 3(\cos 0 + i\sin 0)$

b $r_2 = |z_2| = |-5| = 5$, السعة الأساسية $= \pi$ $\Longrightarrow z_2 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$

c $r_3 = |z_3| = |i| = 1$, السعة الأساسية $= \frac{\pi}{2}$ $\Longrightarrow z_3 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

d $r_4 = |z_4| = |-3i| = 3$, السعة الأساسية $= \frac{3\pi}{2}$ $\Longrightarrow z_4 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

حاول أن تحل

7 ضع في الصورة المثلثية كلًّا من الأعداد التالية:

a $z_1 = 2i$ b $z_2 = 5$ c $z_3 = \frac{-3}{4}$ d $z_4 = -\frac{5}{2}i$

تمرَّنْ 7-2

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

Polar Coordinates and Trigonometric Form of a Complex Number

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد:

(a) $|5+12i|$ (b) $|2-2i|$ (c) $|2i|$

في التمارين (2–7)، حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية:

(2) $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ (3) $\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$

(4) $\left(1.5, \frac{7\pi}{3}\right)$ (5) $(2, \pi)$

(6) $(2, 270^\circ)$ (7) $\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$

في التمارين (8–13)، أوجد الإحداثيات القطبية لكل من النقاط التالية:

(8) $(1, 1)$ (9) $(-2, 5)$

(10) $(-3, 0)$ (11) $(0, 4)$

(12) $(-2, -2\sqrt{3})$ (13) $(3\sqrt{3}, -3)$

في التمارين (14–21)، ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية مستخدمًا السعة الأساسية:

(14) $3i$ (15) $2 + 2i$

(16) $-2+2i\sqrt{3}$ (17) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(18) $-2i$ (19) $\sqrt{3}+i$

(20) 8 (21) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

في التمارين (22–28)، اكتب الأعداد التالية في الصورة المثلثية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$:

(22) $5\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ (23) $8(\cos 30^\circ - i\sin(-150^\circ))$

(24) $-\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ (25) $2(\cos 45^\circ + i\sin 405^\circ)$

(26) $4\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ (27) $5(\cos(-60^\circ) + i\sin(-60^\circ))$

(28) $3\left(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}\right)$

في التمارين (29–33)، ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

(29) $2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ (30) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(31) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$ (32) $7\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

(33) $\sqrt{3}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4, \frac{7\pi}{6}\right)$ هي: $A(-2\sqrt{3}, 2)$ — (a) (b)

(2) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $B(\sqrt{2}, 135^\circ)$ هي: $B(-1, 1)$ — (a) (b)

(3) الإحداثيات القطبية للنقطة: $M\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي: $M\left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$ — (a) (b)

(4) العدد المركب: $z = \sqrt{3} - i$ بصورة المثلثية هو: $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ — (a) (b)

(5) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ هي: $z = 1 - i$ — (a) (b)

في التمارين (7—13)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4, \frac{5\pi}{3}\right)$ هي:

(a) $A(2, 2\sqrt{3})$ (b) $A(-2, 2\sqrt{3})$ (c) $A(-2, -2\sqrt{3})$ (d) $A(2, -2\sqrt{3})$

(8) الإحداثيات القطبية للنقطة: $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ هي:

(a) $B\left(1, \frac{-\pi}{4}\right)$ (b) $B\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ (c) $B\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $B\left(1, \frac{-3\pi}{4}\right)$

(9) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$ هي:

(a) $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$
(b) $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
(c) $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
(d) $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(10) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = \frac{-4}{1-i}$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

(a) $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$
(b) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$
(c) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
(d) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

(a) $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$
(b) $z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$
(c) $z = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$
(d) $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(12) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ فإنّ قيمة $(i^{2n+2} + i^{2n+8})$ تساوي:

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) i^{-2n}

(13) $(6 - 2i + 3i^5)^2$ تساوي:

(a) $35 - 12i$ (b) $35 + 12i$ (c) $81 - 12i$ (d) $81 + 12i$

حل معادلات

Solving Equations

أولًا: حل معادلات من الدرجة الأولى في $\mathbb{C}$

Solving First Degree Equations in $\mathbb{C}$

تحل معادلات الدرجة الأولى في مجموعة الأعداد المركبة بالطريقة نفسها التي تستخدم لحل معادلات الدرجة الأولى في مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال (1)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $3z + 1 - i = 7 + 3i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

الحل:

$$3z + 1 - i = 7 + 3i$$

افصل المتغير z

$$3z = 7 + 3i - 1 + i$$

بسّط

$$3z = 6 + 4i$$

$$z = \frac{6 + 4i}{3}$$

$$z = 2 + \frac{4}{3}i$$

مجموعة الحل = $\left\{2 + \frac{4}{3}i\right\}$

حاول أن تحل

1 أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i = 3 + 2i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

مثال (2)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i\bar{z} = 5 - 2i$ في $\mathbb{C}$.

الحل:

لتكن $z = x + yi$ حيث x, y عددان حقيقيان.

$$2z + i\bar{z} = 5 - 2i$$

عوّض عن z بـ $x + yi$

$$2(x + yi) + i(\overline{x + yi}) = 5 - 2i$$

مرافق $x + yi$ هو $x - yi$

$$2(x + yi) + i(x - yi) = 5 - 2i$$

$$2x + 2yi + xi - y(i)^2 = 5 - 2i$$

$i^2 = -1$

$$2x + 2yi + xi + y = 5 - 2i$$

تجميع الأعداد الحقيقية معًا و الأعداد التخيلية معًا

$$2x + y + (x + 2y)i = 5 - 2i$$

خاصية تساوي عددين مركبين

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$$

بحل المعادلتين نحصل على:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$$

مجموعة الحل: $= \{4 - 3i\}$.

حاول أن تحل

2 أوجد مجموعة حل المعادلة: $z + i = 2\bar{z} + 1$ في $\mathbb{C}$.

ثانيًا: حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد في $\mathbb{C}$

Solving Quadratic Equations With One Variable in $\mathbb{C}$

مثال (3)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $4x^2 + 100 = 0$ حيث $x \in \mathbb{C}$.

الحل:

$$4x^2 + 100 = 0$$

$$4x^2 = -100$$

$$x^2 = -25$$

$$x = \pm\sqrt{-25}$$

$$x = \pm 5i$$

$\sqrt{-a^2} = ai$

مجموعة الحل = $\{5i, -5i\}$.

حاول أن تحل

3 أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي حيث $x \in \mathbb{C}$:

a $3x^2 + 48 = 0$ b $-5x^2 - 150 = 0$ c $8x^2 + 2 = 0$

مثال (4)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $4z^2 + 16z + 25 = 0$ في $\mathbb{C}$.

الحل:

نحسب أولًا المميز Δ.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (16)^2 - 4(4)(25)$$

$$= -144$$

$$= (-1) \times (12)^2$$

$$= 12^2 \times i^2 \qquad i^2 = -1$$

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 - 12i}{2 \times 4} = -2 - \frac{3}{2}i$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 + 12i}{2 \times 4} = -2 + \frac{3}{2}i$$

مجموعة الحل = $\left\{-2 - \frac{3}{2}i,\ -2 + \frac{3}{2}i\right\}$.

تذكر:
في المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a, b, c \in \mathbb{R}$ ، $a \neq 0$
مجموع الجذرين $\frac{-b}{a}$
حاصل ضرب الجذرين $\frac{c}{a}$

معلومة:
إذا كان $z = a + bi, b \neq 0$ جذرًا لمعادلة معاملاتها أعدادًا حقيقية فإن $\overline{z} = a - bi$ هو جذر آخر لها.

معلومة:
إذا كان z_1, z_2 جذرين تربيعيين للعدد z فإن:
$z_1 + z_2 = 0$

حاول أن تحل

4 أوجد مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$ في $\mathbb{C}$.

الجذر التربيعي لعدد مركب Square Root of a Complex Number

لإيجاد جذر تربيعي لعدد مركب z نبحث عن عدد w يكون مربعه يساوي z.

ليكن $z = a + bi$

ابحث عن $w = m + ni$، بحيث يكون $w^2 = z$

$$(m+ni)^2 = a + bi$$

$$m^2 - n^2 + 2mni = a + bi$$

$$\therefore \begin{cases} m^2 - n^2 = a \\ 2mn = b \end{cases}$$

للمساعدة على حل هذا النظام ندخل معادلة ثالثة ناتجة عن كون $|w|^2 = |z|$،

أي $(\sqrt{m^2+n^2})^2 = \sqrt{a^2+b^2}$.

معلومة:

إذا $z_1 = z_2$ فيكون:

$|z_1| = |z_2|$.

مثال (6)

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 3 + 4i$

الحل:

ليكن $w = m + ni$ جذرًا تربيعيًا للعدد z، فيكون $w^2 = z$

بالتعويض: $(m+ni)^2 = 3 + 4i$

خاصية ضرب كثيرات الحدود: $m^2 - n^2 + 2mni = 3 + 4i$

خاصية المساواة لعددين مركبين:

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = 3 & (1) \\ 2mn = 4 & (2) \end{cases}$$

نضيف المعادلة:

$$|w|^2 = |z|$$

$$(\sqrt{m^2+n^2})^2 = \sqrt{(3)^2+(4)^2}$$

$$m^2 + n^2 = 5 \qquad (3)$$

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = 5 \\ m^2 - n^2 = 3 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين (1), (3) نحصل على: $2m^2 = 8 \Rightarrow m^2 = 4$

بالتعويض في (1) نحصل على: $\therefore\ n^2 = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 2\ ,\ m = -2 \\ n = 1\ ,\ n = -1 \end{cases}$$

من المعادلة $2mn = 4$ نستنتج أن m, n لهما الإشارة نفسها

$\therefore\ m = 2\ ,\ n = 1$ أو $m = -2\ ,\ n = -1$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = 3 + 4i$ هما: $w_1 = 2 + i\ ,\ w_2 = -2 - i$

حاول أن تحل

6 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -3 - 4i$

مثال (7)

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 7 - 24i$.

الحل:

ليكن $w = m + ni$ جذرًا تربيعيًّا للعدد z، فيكون $w^2 = z$

بالتعويض $(m+ni)^2 = 7 - 24i$

خاصية ضرب كثيرات الحدود $m^2 - n^2 + 2mni = 7 - 24i$

خاصية المساواة لعددين مركبين

$$\therefore \begin{cases} m^2 - n^2 = 7 & (1) \\ 2mn = -24 & (2) \end{cases}$$

نضيف المعادلة:

$$|w|^2 = |z|$$

$$\left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2 = \sqrt{(7)^2 + (24)^2}$$

$$m^2 + n^2 = 25 \qquad (3)$$

بجمع المعادلتين $(1), (3)$ نحصل على:

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = 25 \\ m^2 - n^2 = 7 \end{cases}$$

$$2m^2 = 32 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$$

بالتعويض في (1) نحصل على:

$$n^2 = 9 \Rightarrow n = \pm 3$$

$$\because 2mn = -24 \quad , \quad -24 < 0$$

من المعادلة $2mn = -24$ نستنتج أن m, n لهما إشارتان مختلفتان.

$\therefore$ $m = 4$, $n = -3$ أو $m = -4$, $n = 3$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $7 + 24i$ هما:

$w_1 = 4 - 3i$, $w_2 = -4 + 3i$

حاول أن تحل

7 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 5 + 12i$.

مثال (8)

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -21 - 20i$.

الحل:

ليكن $w = m + ni$ جذرًا تربيعيًّا للعدد z، فيكون $w^2 = z$

بالتعويض $(m+ni)^2 = -21 - 20i$

خاصية ضرب كثيرات الحدود $m^2 - n^2 + 2mni = -21 - 20i$

خاصية المساواة لعددين مركبين
$$\therefore \begin{cases} m^2 - n^2 = -21 & (1) \\ 2mn = -20 & (2) \end{cases}$$

نضيف المعادلة:
$$|w|^2 = |z|$$
$$\left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2 = \sqrt{(-21)^2 + (-20)^2}$$
$$m^2 + n^2 = 29 \qquad (3)$$

المعادلتان $(1), (3)$ تعطيان $m^2 = 4$، $n^2 = 25$ أي $m = \pm 2$، $n = \pm 5$

المعادلة (2) تبين أن m, n مختلفتان في الإشارة.

$\therefore \; n = -5 \;,\; m = 2$ أو $n = 5 \;,\; m = -2$

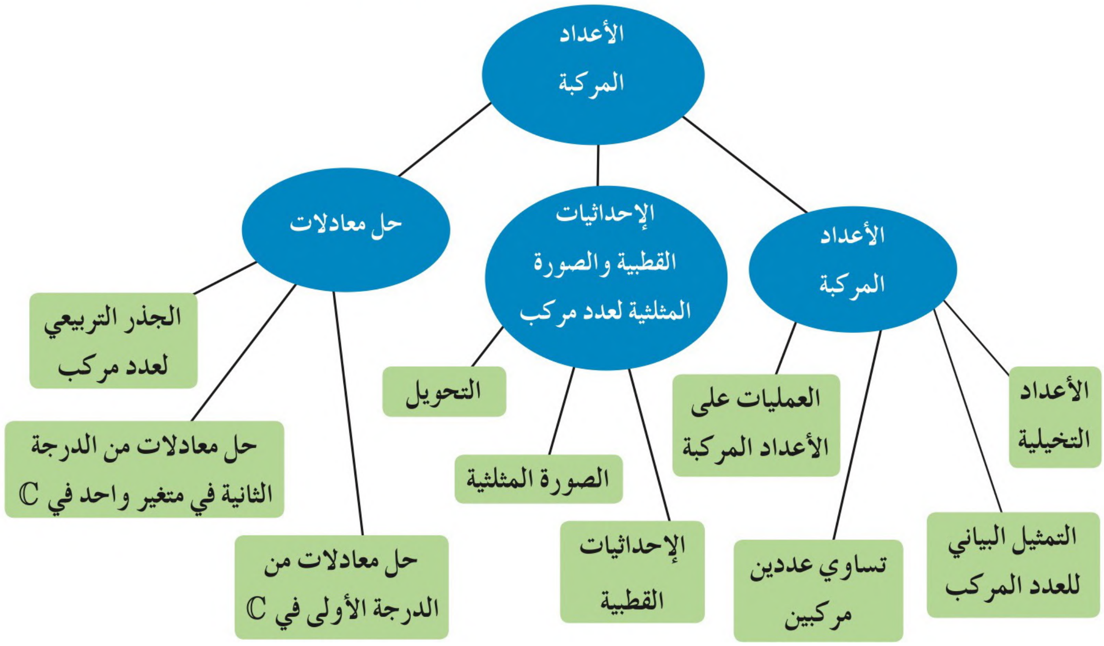
الجذران التربيعيان للعدد المركب $-21 - 20i$ هما:

$w_1 = 2 - 5i \;,\; w_2 = -2 + 5i$

حاول أن تحل

8 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 7 + 24i$

مخطط تنظيمي للوحدة السابعة



ملخص

- العدد المركب هو عدد على الصورة $a+bi$ حيث a, b عددان حقيقيان.
- لأي عدد حقيقي موجب a، $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$
- الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=a+bi$ حيث a, b عددان حقيقيان ويسمى a الجزء الحقيقي و b الجزء التخيلي.
- يكون عددان مركبان متساويان إذا وفقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان.
- إذا ساوى عدد مركب الصفر فإن جزءه الحقيقي يساوي الصفر وجزءه التخيلي يساوي الصفر أيضًا.
- يمكن تمثيل العدد المركب $z=a+bi$ بالزوج المرتب (a, b) وتعرف بالصورة الديكارتية للعدد المركب.
- لجمع (أو طرح) أعداد مركبة نجمع (أو نطرح) الأجزاء الحقيقية معًا والأعداد التخيلية معًا كل منهما بشكل منفصل عن الآخر.
- المعكوس الجمعي للعدد المركب $z=a+bi$ هو العدد المركب $-z=-a-bi$
- إذا كان $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$ فإن $z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$
- إذا كان p عدد كلي: $i^{4p}=1$, $i^{4p+1}=i$, $i^{4p+2}=-1$, $i^{4p+3}=-i$
- مرافق العدد المركب $z=a+bi$ هو العدد المركب $\bar{z}=a-bi$
- خواص المرافق:
  - $z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$
  - $z-\bar{z}=2bi$
  - $z+\bar{z}=2a$
  - $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2\neq 0$
  - $\overline{(\overline{z_1})}=z_1$
  - $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
  - $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$
- لقسمة عدد مركب z_1 على عدد مركب z_2 غير صفري نكتبهما على شكل كسر على الصورة $\frac{z_1}{z_2}$، نبسط الكسر ثم نضرب البسط والمقام في مرافق مقام الكسر.
- القيمة المطلقة للعدد المركب $z=a+bi$ هي المسافة بين الصورة الديكارتية (a, b) لهذا العدد ونقطة الأصل $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$
- الإحداثيات القطبية للنقطة M هي الزوج المرتب (r, θ) حيث $r=OM$، θ قياس الزاوية الموجهة في الوضع القياسي.
- الصورة المثلثية للعدد المركب $z=a+bi$ هي $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$، حيث $r=\sqrt{a^2+b^2}$
  $\sin\theta=\frac{y}{r}$, $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$

اختبار الوحدة السابعة

في التمارين (1–4)، بسّط كلًّا من التعابير التالية:

(1) $4\sqrt{-9}-2$ **(2)** $(4-i)+(5-9i)$

(3) $(-3+2i)-(6+i)$ **(4)** $(2+3i)(8-5i)$

(5) أوجد المعكوس الجمعي والمعكوس الضربي للعدد $3-7i$

(6) أوجد القيمة المطلقة للعدد $7-2i$

(7) أوجد كلًّا مما يلي:

(a) $-3i^{77}$ **(b)** i^{50} **(c)** $(-2+3i)^2$

(8) أوجد مجموعة حلّ المعادلة: $2x^2+10=0$

(9) اكتب الكسر $\frac{1+3i}{3+2i}$ في الصورة الجبرية، ثم حوّلها إلى صورة المثلثية.

(10) أوجد مجموعة حل المعادلة: $\frac{z+1}{z-1}=2i$

(11) أوجد مرافق العدد $\frac{3-i}{1+i}$

(12) حل المعادلة: $2z^2-6z+5=0$

(13) اكتب الأعداد المركبة التالية في صورة المثلثية:

(a) $\frac{1}{2}$ **(b)** $-3i$ **(c)** $2\sqrt{3}+6i$

(14) اكتب العدد $-3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ في الصورة المثلثية مستخدمًا السعة الأساسية.

(15) اكتب العدد $\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ في الصورة الجبرية.

(16) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $-8+6i$

(17) **(a)** أثبت أن $-2+\frac{3}{2}i$ هو أحد جذري المعادلة: $4z^2+16z+25=0$

(b) أوجد الجذر الآخر.

تمرَّنْ
7 – 3

حل معادلات

Solving Equations

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1—4)، أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

(1) $3z - 1 + i = 5 - 2i$

(2) $z + 2\overline{z} = 4 + i$

(3) $5z - 4 + 2i = 3z + 1 - 4i$

(4) $z + 3(1+i)z - 8(2-i) = 0$

في التمارين (5—9)، أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

(5) $16x^2 + 64 = 0$

(6) $x^2 - 5x + 7 = 0$

(7) $x^2 + 6x + 25 = 0$

(8) $z^2 - 2z + 4 = 0$

(9) $z + \dfrac{4}{z} = 2$

(11) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = -3 + 4i$

(12) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = 5 + 12i$

(13) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = -7 - 24i$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة: $\bar{z}+2=5-i$ هو: $z=3+i$ (a) (b)

(2) حل المعادلة: $2z+\bar{z}-3-5i=0$ هو: $z=1-5i$ (a) (b)

(3) مجموعة حل المعادلة: $z^2-4z+5=0$ هي: $\{-2-i, 2+i\}$ (a) (b)

(4) الجذران التربيعيان للعدد -1 هما: $-1, 1$ (a) (b)

(5) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z=16+30i$ هما: $z_1=5+3i,\ z_2=-5-3i$ (a) (b)

(6) إذا كان z_1, z_2 جذران تربيعيان للعدد z فإن $z_1+z_2=0$ (a) (b)

في التمارين (7–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) حل المعادلة: $2z-5+6i=-3\bar{z}$ هو:

(a) $z=1+6i$ (b) $z=-1+6i$ (c) $z=1-6i$ (d) $z=-1-6i$

(8) مجموعة حل المعادلة: $z^2-4z+20=0$ هي:

(a) $\{2-4i, -2-4i\}$ (b) $\{-2+4i, -2-4i\}$

(c) $\{2-4i, -2+4i\}$ (d) $\{2-4i, 2+4i\}$

(9) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z=33-56i$ هما:

(a) $\begin{cases} z_1=-7-4i \\ z_2=7+4i \end{cases}$ (b) $\begin{cases} z_1=7-4i \\ z_2=-7+4i \end{cases}$

(c) $\begin{cases} z_1=7+4i \\ z_2=7-4i \end{cases}$ (d) $\begin{cases} z_1=-7-4i \\ z_2=-7+4i \end{cases}$

(10) حل المعادلة $(3-4i)z=5-2i$ هو:

(a) $\frac{5}{3}+\frac{1}{2}i$ (b) $\frac{5}{3}-\frac{1}{2}i$ (c) $\frac{23}{25}+\frac{14}{25}i$ (d) $\frac{23}{25}-\frac{14}{25}i$

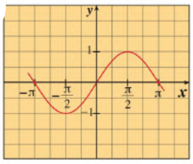
التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل)

Graphs of Trigonometric Functions (Sine, Cosine and Tangent)

الدوال الجيبية Sinusoidal Functions

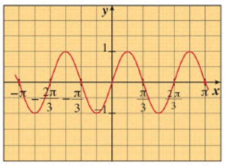
تسمّى الدالة على الصورة $y = a\sin bx$ **دالة الجيب** والدالة على الصورة $y = a\cos bx$ **دالة جيب التمام** حيث $b \neq 0$, $a \neq 0$ وهما دالتان جيبيتان وكل منهما دورية.

تمثل الأشكال التالية بيانات بعض دوال الجيب:



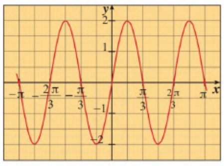
$y = \sin x$

شكل (1)



$y = \sin 3x$

شكل (2)



$y = 2\sin 3x$

شكل (3)

1. تسمى $|a|$ سعة الدالة الجيبية.
2. $|b|$ تمثل عدد الدورات في الفترة $[0, 2\pi]$
3. $\dfrac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة.

وبالمثل يمكننا إيجاد **السعة والدورة** لدالة جيب التمام على الصورة $y = a\cos bx$

مثال (1)

أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

(a) $y = 2\cos x$ (b) $y = -5\cos\frac{x}{3}$

الحل:

(a) $y = 2\cos x$ هي دالة على الصورة

$y = a\cos bx$ فيكون: $a = 2$, $b = 1$

$\therefore$ سعة الدالة: $|a| = 2$

دورة الدالة: $\dfrac{2\pi}{|b|} = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$

(b) $y = -5\cos\frac{x}{3}$ هي دالة على الصورة

$y = a\cos bx$ فيكون: $a = -5$, $b = \frac{1}{3}$

$\therefore$ سعة الدالة: $|a| = |-5| = 5$

دورة الدالة: $\dfrac{2\pi}{|b|} = \dfrac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$

حاول أن تحل

1. أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

(a) $y = -2\cos 5x$ (b) $y = \frac{1}{2}\cos(-x)$

مثال (2)

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\sin bx$ إذا كانت:

(a) الدورة هي $\frac{\pi}{2}$ ، $a = 3$

(b) الدورة هي 2π ، $a = -\frac{1}{2}$

(c) الدورة هي 3 ، $a = 1.5$

الحل:

(a) الدورة هي $\frac{\pi}{2}$

$\therefore \dfrac{2\pi}{|b|} = \dfrac{\pi}{2}$

$|b| = 4 \Leftrightarrow b = 4$, $b = -4$

$\because a = 3$

$\therefore$ معادلة الدالة هي: $y = 3\sin(-4x)$ أو $y = 3\sin 4x$

(b) الدورة هي 2π

$\therefore \dfrac{2\pi}{|b|} = 2\pi$

$|b| = 1 \Leftrightarrow b = 1$, $b = -1$

$\because a = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ معادلة الدالة هي: $y = -\frac{1}{2}\sin(-x)$ أو $y = -\frac{1}{2}\sin x$

(c) الدورة هي 3

$\therefore \dfrac{2\pi}{|b|} = 3$

$|b| = \dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow b = \dfrac{2\pi}{3}$, $b = -\dfrac{2\pi}{3}$

$\because a = 1.5$

$\therefore$ معادلة الدالة هي: $y = 1.5\sin\left(\dfrac{-2\pi}{3}x\right)$ أو $y = 1.5\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}x\right)$

حاول أن تحل

2. اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\cos bx$ إذا كانت:

(a) الدورة هي $\frac{\pi}{3}$ ، $a = -2$

(b) الدورة هي π ، $a = 0.25$

(c) الدورة هي 2 ، $a = 1$

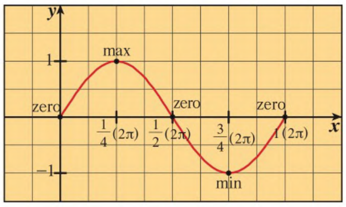
التمثيل البياني للدوال المثلثية
Graph of Trigonometric Functions

أولًا: دالة الجيب
The Sine Function

$y=\sin x$ هي دالة مثلثية مجالها $\mathbb{R}$ ومداها $[-1,1]$، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.

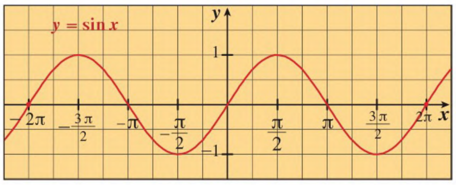
للحصول على التمثيل البياني لِـ $y=\sin x$ في دورة واحدة، تقسم الدورة الواحدة إلى أرباع، ثم نكوّن الجدول في الفترة $[0,2\pi]$ كالتالي:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0



وحيث إنها دالة دورية، دورتها 2π فإنها تكرر قيمها ومن ذلك يمكن رسم بيان الدالة: $f(x)=\sin x\ ,\ x\in\mathbb{R}$

يمكنك التحقق باستخدام آلة حاسبة.



من بيان دالة الجيب نلاحظ:

1. لأي عدد صحيح n فإن $\sin(n\pi)=0$
2. لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x)=\sin x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x=\frac{3\pi}{2}+2n\pi$
3. دالة الجيب دالة فردية لأن: $\sin(-x)=-\sin x\ ,\forall x\in\mathbb{R}$
4. منحنى الدالة متناظر حول نقطة الأصل.
5. سعة الدالة هي: $\frac{\max f-\min f}{2}$

حاول أن تحل

3. أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a. $y=\frac{1}{2}\sin 4x$

b. $y=-4\sin x\ ,\ x\in[-\pi\ ,\ 2\pi]$

مثال (3)

أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a. $y=3\sin 2x$

b. $y=-2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\ ,\ -4\pi\le x\le 4\pi$

الحل:

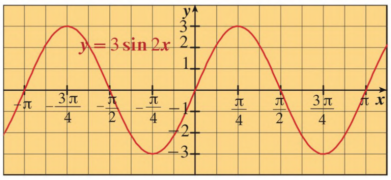
a. $y=3\sin 2x$ هي دالة دورية مجالها $\mathbb{R}$.

السعة: $|a|=|3|=3$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $=\frac{\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0
$y=3\sin 2x$	0	3	0	-3	0



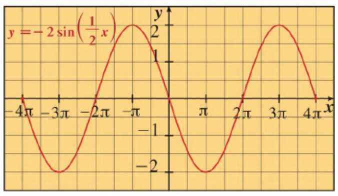
b. $y=-2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ هي دالة دورية.

السعة: $|a|=|-2|=2$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=4\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $=\pi$

x	0	π	2π	3π	4π
$\frac{1}{2}x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$	0	1	0	-1	0
$y=-2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$	0	-2	0	2	0



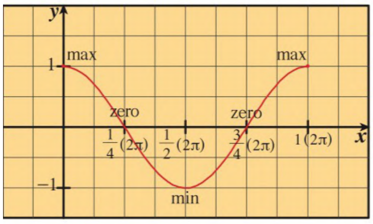
وحيث أن منحنى الدالة متناظر حول نقطة الأصل يتم كذلك رسم المنحنى على الفترة $[-4\pi,0]$

ثانيًا: دالة جيب التمام — The Cosine Function

$y = \cos x$ هي دالة مثلثية مجالها هو أيضًا $\mathbb{R}$ ومداها هو $[-1,1]$، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.

ونستطيع الحصول على التمثيل البياني للدالة $y = \cos x$ على مجالها عن طريق رسمها على الفترة $[0,2\pi]$ تمامًا مثلما فعلنا في دالة الجيب.

وتكرر نفسها ونحصل على البيان التالي:

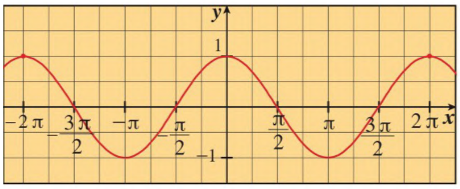


x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1

يمكنك التحقق باستخدام الآلة الحاسبة.

من بيان دالة جيب التمام نلاحظ أن:

1. لأي عدد صحيح n فإن $\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=0$
2. لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x)=\cos x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x = 2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x = \pi + 2n\pi$
3. دالة جيب التمام دالة زوجية لأن: $\cos(-x) = \cos x \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$
4. محور الصادات هو خط تناظر لمنحنى الدالة.
5. سعة الدالة هي: $\frac{\max f - \min f}{2}$



مثال (4)

أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي، ثم ارسم بيانها.

(a) $y = 2\cos 4x$

(b) $y = -5\cos\left(\frac{2}{3}x\right) \ , \ x \in [-3\pi \ , \ 3\pi]$

الحل:

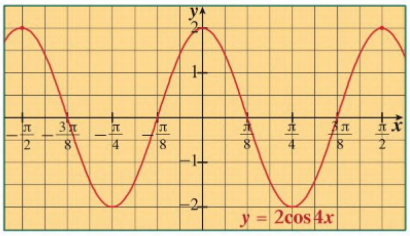
(a) الدالة $y = 2\cos 4x$ هي دالة دورية.

السعة: $|a| = |2| = 2$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{8}$

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$4x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos 4x$	1	0	-1	0	1
$2\cos 4x$	2	0	-2	0	2



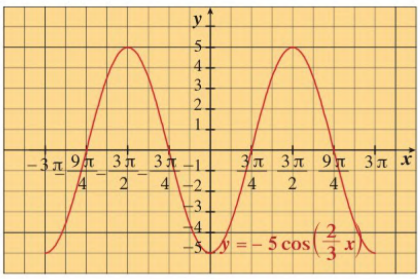
(b) الدالة $y = -5\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$ هي دالة دورية.

السعة: $|a| = |-5| = 5$

الدورة: $\frac{2\pi}{\left|\frac{2}{3}\right|} = \frac{3}{2} \times 2\pi = 3\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{3\pi}{4}$

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{4}$	3π
$\frac{2x}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos\left(\frac{2x}{3}\right)$	1	0	-1	0	1
$y = -5\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$	-5	0	5	0	-5



حاول أن تحل

4 أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها.

a $y = 3\cos 2x$

b $y = -2\cos\left(\frac{3}{4}x\right)\ ,\ 0 \le x \le 2\pi$

ثالثًا: دالة الظل

Tangent Function

هي الدالة المثلثية على الصورة $y = \tan x$ وتكتب:

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\ :\ \cos x \ne 0$

مجالها: $D = \mathbb{R} - \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + n\pi\ ,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$

ومداها: $\mathbb{R}$

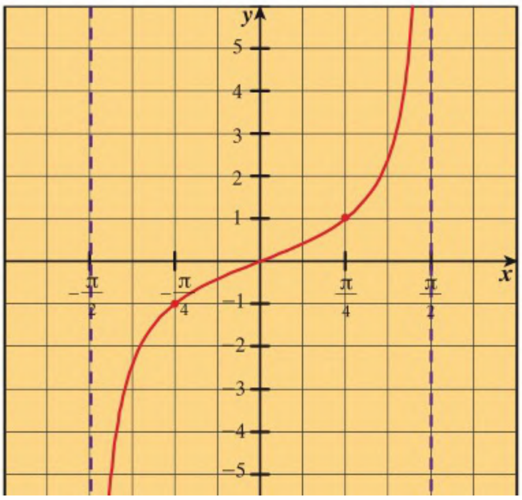
وهي دالة دورية ذات دورة π

وللحصول على التمثيل البياني لـ: $y = \tan x$

في دورة واحدة $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

نقسم الدورة إلى أرباع كما هو في الجدول التالي:

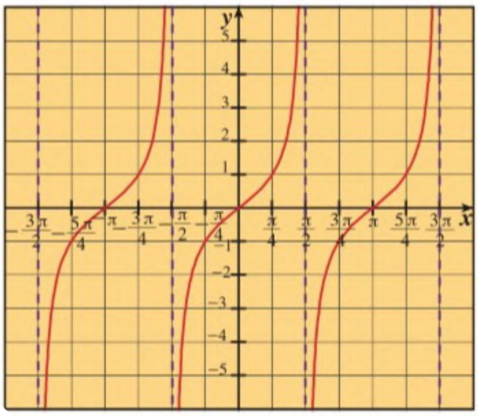
x	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف



وحيث إنها دالة دورية دورتها π فإنها تكرر قيمتها.

ومن ذلك يمكننا رسم الدالة $y = \tan x$ على مجالها.

من بيان دالة الظل نلاحظ أن دالة الظل:



1. ليس لها سعة.
2. لأي عدد صحيح n فإن $\tan(n\pi) = 0$
3. لأي عدد صحيح n فإن $\tan\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ غير معرف.
وتسمى المستقيمات $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ محاذيات رأسية لبيان الدالة $y = \tan x$
4. دالة فردية لأن: $\tan(-x) = -\tan x \; , \; \forall x \in D$
5. منحناها متناظر حول نقطة الأصل.

وبصفة عامة: الدالة $y = a \tan bx$، دورتها: $\frac{\pi}{|b|}$ أي في الفترة $\left(\frac{-\pi}{2b} , \frac{\pi}{2b}\right)$ وتكرر منحناها على مجالها.

مثال (5)

أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها.

a) $y = \tan 2x \; , \; x \in \left(\frac{-\pi}{4} , \frac{3\pi}{4}\right)$

b) $y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$

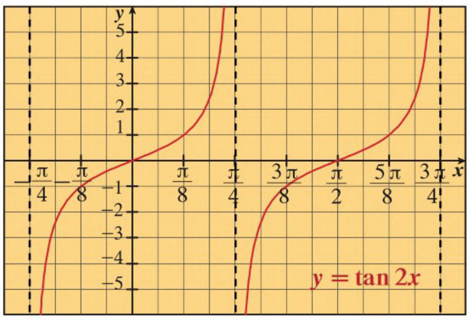
الحل:

a) الدالة $y = \tan 2x$ هي دالة دورية.

الدورة: $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{8}$

x	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
$2x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = \tan 2x$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف

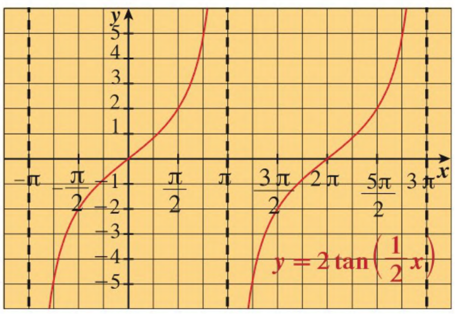


b) الدالة $y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$ هي دالة دورية.

الدورة: $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{2}$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\frac{1}{2}x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف
$y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$	غير معرف	-2	0	2	غير معرف



حاول أن تحل

5 أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a $y = -\tan x$

b $y = \frac{1}{2}\tan x$

خصائص الدوال المثلثية باعتبار $n \in \mathbb{Z}$

الخاصية	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
الدورة	2π	2π	π
المجال	$(-\infty , \infty)$	$(-\infty , \infty)$	$\mathbb{R} - \left\{x , x = \frac{\pi}{2} + n\pi\right\}$
المدى	$[-1 , 1]$	$[-1 , 1]$	$(-\infty , \infty)$
الأصفار	$x = n\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$	$x = n\pi$
زوجية أو فردية	فردية	زوجية	فردية

تمرّن 8-1

التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل)

Graphs of Trigonometric Functions (Sine, Cosine and Tangent)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) حدّد دورة كل دالة مما يلي وسعتها:

(a) $y = 3\cos x$

(b) $y = \sin 2x$

(c) $y = 3\sin\frac{x}{3}$

(d) $y = \frac{1}{3}\cos\frac{x}{2}$

(2) اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\sin(bx)$ في كل من الحالات التالية:

(a) الدورة $\frac{2\pi}{3}$ ، $a = 1$

(b) الدورة π ، $a = \frac{1}{3}$

(c) الدورة 4π ، $a = -4$

(3) اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\cos(bx)$ في كل من الحالات التالية:

(a) الدورة 3π ، $a = 5$

(b) الدورة π ، $a = -\frac{1}{2}$

(c) الدورة $\frac{\pi}{2}$ ، $a = \frac{3}{5}$

(4) مثّل بيانيًّا دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية:

(a) $y = 2\sin x$

(b) $y = -3\sin x$

(c) $y = 0.5\sin 2x$

(d) $y = 4\sin\frac{1}{2}x$

(e) $y = -\sin 5x$

(f) $y = 3\cos x$

(g) $y = 3\cos 5x$

(h) $y = -\cos 3x$

(i) $y = \cos 2x$

(5) حدّد دورة كل دالة مما يلي:

(a) $y = \tan 5x$

(b) $y = \tan\frac{3x}{2}$

(6) اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = \tan(bx)$ في كل من الحالات التالية:

(a) الدورة $\frac{\pi}{5}$

(b) الدورة $\frac{2\pi}{3}$

(c) الدورة $\frac{\pi}{4}$

(7) مثّل بيانيًّا دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية:

(a) $y = \tan 2x$

(b) $y = \tan\frac{x}{2}$

(c) $y = -3\tan x$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) معادلة الدالة المثلثية $y = a\sin(b\theta)$ حيث السعة 5 والدورة 3π هي $y = 5\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$ — (a) (b)

(2) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{2}$ وسعتها 3 يمكن أن تكون $y = 3\sin\left(\frac{\pi\theta}{2}\right)$ — (a) (b)

(3) الدالة $y = 3\tan\left(\frac{3}{4}x\right)$ دورتها $\frac{4}{3}\pi$ — (a) (b)

(4) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{3}$ وسعتها 4 يمكن أن تكون $y = -4\cos(6x)$ — (a) (b)

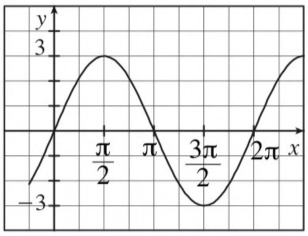
(5) سعة الدالة $y = -5\cos 2x$ هي -5 — (a) (b)

(6) في الدالة f حيث $f(x) = a\cos bx$ يكون: $2|a| = \max f + \min f$ — (a) (b)

(7) الدالتان f, g حيث $g(x) = \tan 4x$ ، $f(x) = \cos 8x$ لهما نفس الدورة. — (a) (b)

في التمارين (8–17)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(8) البيان التالي يمثل بيان الدالة:



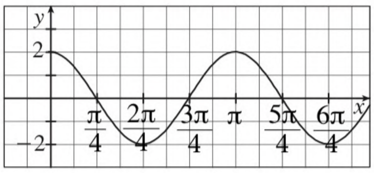
(a) $f(x) = 3\cos x$ (b) $f(x) = 3\sin x$

(c) $f(x) = -3\sin x$ (d) $f(x) = \sin 3x$

(9) لتكن $f(x) = 3\tan 2x$ فإن:

(a) السعة = 1 (b) السعة = 2 (c) السعة = 3 (d) f ليس لها سعة

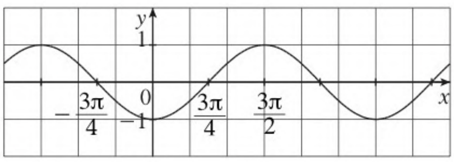
(10) ليكن بيان f كما في الشكل التالي:



فإن f يمكن أن تكون:

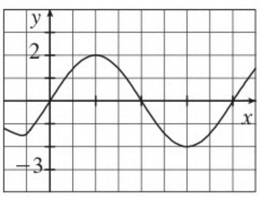
(a) $2\cos 2x$ (b) $\cos 2x$ (c) $\cos\frac{x}{2}$ (d) $\sin 2x$

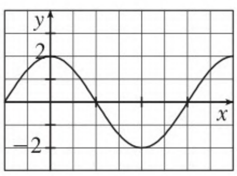
(11) ليكن g دالة دورية بيانها كما في الشكل التالي فإن الدورة تساوي:

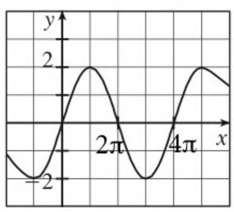


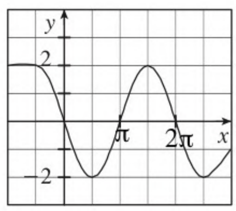
(a) π (b) 2π (c) 3π (d) $\frac{6\pi}{4}$

(12) لتكن الدالة g حيث: $g(x) = a\sin bx$ فإن بيان g لا يمكن أن يكون:

(a)


(b)


(c)


(d)


(13) معادلة الدالة المثلثية $y = a\cos(bx)$ حيث السعة 4 والدورة 6 يمكن أن تكون:

ⓐ $y = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

ⓑ $y = -4\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

ⓒ $y = -4\cos\left(\frac{3}{\pi}x\right)$

ⓓ $y = 4\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

(14) الدالة $y = a\cos(bx)$ حيث $a = 2$ ودورتها $\frac{\pi}{4}$ يمكن أن تكون:

ⓐ $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

ⓑ $y = 8\cos(8x)$

ⓒ $y = 2\cos(8x)$

ⓓ $y = 8\cos\left(\frac{x}{4}\right)$

(15) معادلة الدالة المثلثية $y = a\sin(bx)$ حيث السعة 3 والدورة $\frac{\pi}{2}$ يمكن أن تكون:

ⓐ $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

ⓑ $y = 3\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$

ⓒ $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

ⓓ $y = 3\sin(4x)$ أو $y = -3\sin(4x)$

(16) معادلة الدالة المثلثية $y = \tan(bx)$ حيث الدورة $\frac{3}{4}$ يمكن أن تكون:

ⓐ $y = \tan\left(\frac{4}{3}\pi x\right)$

ⓑ $y = \tan\left(\frac{3}{4}x\right)$

ⓒ $y = \tan\left(\frac{4}{3}x\right)$

ⓓ $y = \tan\left(\frac{3}{4}\pi x\right)$

(17) في الدالة المثلثية $y = -2\sin\left(\frac{3}{5}x\right)$ السعة والدورة هما:

ⓐ $-2 , \frac{3\pi}{5}$

ⓑ $2 , \frac{10\pi}{3}$

ⓒ $2 , \frac{3\pi}{5}$

ⓓ $2 , \frac{2\pi}{15}$

قانون الجيب

قانون الجيب Law of Sine Law of Sine

ينص قانون الجيب على أنه بالنسبة لكل زاوية من زوايا المثلث تكون النسبة بين جيب الزاوية وطول الضلع المقابل لها هي نسبة ثابتة، أي أن جيوب زوايا المثلث تتناسب مع أطوال الأضلاع المقابلة لها.

قانون الجيب

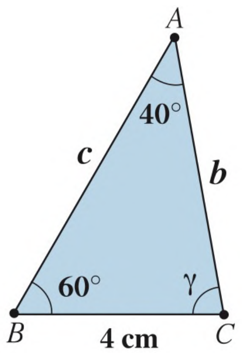
في أي مثلث ABC :

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

استخدام قانون الجيب Using the Law of Sine

يسمح قانون الجيب بحل مثلث إذا علم طول ضلع وقياس زاويتين.

مثال (1)



حل ΔABC حيث: $a=4\text{ cm}$, $\beta=60^\circ$, $\alpha=40^\circ$

الحل:

يبيّن الشكل المقابل المثلث المطلوب حله.

يجب إيجاد: γ , b , c

مجموع زوايا المثلث 180°

$$\gamma=180^\circ-(40^\circ+60^\circ)=80^\circ$$

قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 40^\circ}{4}=\frac{\sin 60^\circ}{b}=\frac{\sin 80^\circ}{c}$$

$$b=\frac{4\times\sin 60^\circ}{\sin 40^\circ}\implies b\approx 5.389$$

$$c=\frac{4\times\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ}\implies c\approx 6.128$$

حاول أن تحل

1 حل ΔABC حيث: $a=8\text{ cm}$, $\beta=48^\circ$, $\alpha=36^\circ$

كما ذكرنا يسمح قانون الجيب بحل مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.

مثال (2)

حل ΔABC حيث: $a = 3\text{ cm}\ ,\ b = 2\text{ cm}\ ,\ \alpha = 40^\circ$

الحل:

نستخدم قانون الجيب لإيجاد β

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

عوّض

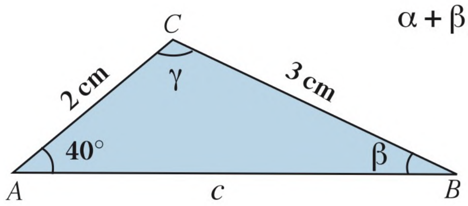
$$\frac{\sin 40^\circ}{3} = \frac{\sin\beta}{2}$$

$$\sin\beta = \frac{2\times\sin 40^\circ}{3} \implies \sin\beta \approx 0.43$$

توجد زاويتان β، $0^\circ < \beta < 180^\circ$ تحققان $\sin\beta = 0.43$

$\beta_1 \approx 25.4^\circ$ أو $\beta_2 \approx 154.6^\circ$

الحالة $\beta_2 \approx 154.6^\circ$ مرفوضة، لأن $\alpha + \beta_2 \approx 194.6^\circ$ وهو أكبر من 180°



باستخدام $\beta_1 \approx 25.4^\circ$ نحصل على:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta_1$$
$$\approx 180^\circ - 40^\circ - 25.4^\circ$$
$$\gamma \approx 114.6^\circ$$

يمكن الآن معرفة طول الضلع الثالث c

قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 40^\circ}{3} = \frac{\sin 114.6^\circ}{c}$$

$$c = \frac{3\sin 114.6^\circ}{\sin 40^\circ}$$

$$c \approx 4.24\text{ cm}$$

معلومة:

إذا كانت $\sin\alpha > 0$ فإن α تقع في الربع الأول وتكون حادة أو تقع في الربع الثاني وتكون منفرجة.

حاول أن تحل

2 حل ΔABC حيث: $a=7\text{ cm}$, $b=6\text{ cm}$, $\alpha=26.3^\circ$

مثال (3)

حل ΔABC حيث: $a=5\text{ cm}$, $b=8\text{ cm}$, $\alpha=30^\circ$

الحل:

قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{5}=\frac{\sin\beta}{8}$$

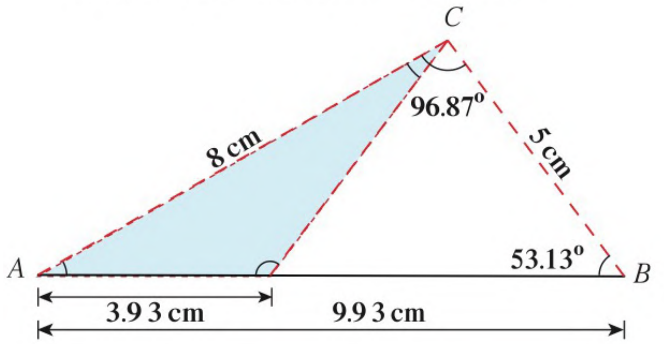
عوّض

$$\sin\beta=\frac{8\times\sin 30^\circ}{5}\Rightarrow\sin\beta=0.8\ ,\ \sin\beta>0$$

$$\therefore\ \beta_1\approx 53.13^\circ\ ;\ \beta_2\approx 180^\circ-53.13^\circ\approx 126.87^\circ$$

$$\alpha+\beta_1\approx 30^\circ+53.13^\circ\approx 83.13^\circ$$

$$\alpha+\beta_2\approx 30^\circ+126.87^\circ\approx 156.87^\circ$$



$\therefore$ لكل من قيمتي β نحصل على: $\alpha+\beta<180^\circ$

$\therefore$ يوجد مثلثان يحققان المعطى.

كذلك يوجد قياسان للزاوية γ

$$\gamma_1=180-(\alpha+\beta)$$

$$\gamma_1\approx 180^\circ-83.13^\circ$$

$$\approx 96.87^\circ$$

$$\gamma_2=180-156\cdot 87^\circ\approx 23.13^\circ$$

يبقى إيجاد c

في المثلث الثاني

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\gamma_2}{c_2}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{5}=\frac{\sin 23.13^\circ}{c_2}$$

$$c_2=\frac{5\times\sin 23.13^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$c_2\approx 3.93\text{ cm}$$

في المثلث الأوّل

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\gamma_1}{c_1}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{5}=\frac{\sin 96.87^\circ}{c_1}$$

$$c_1=\frac{5\times\sin 96.87^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$c_1\approx 9.93\text{ cm}$$

حاول أن تحل

3 حل ΔABC حيث: $\alpha=45^\circ$, $b=7\text{ cm}$, $a=6\text{ cm}$

تمرّنْ
8−3

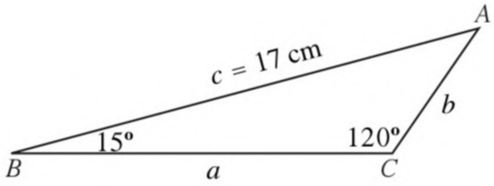
قانون الجيب

Law of Sine

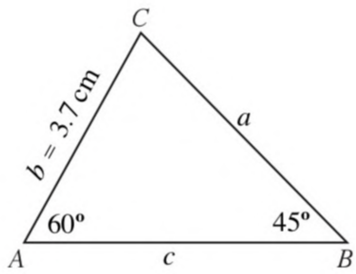
المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2—1)، حلّ كلًّا من المثلثين التاليين:

(1)



(2)



في التمرينين (4—3)، حلّ المثلث ABC:

(3) $m(\widehat{A}) = 32^\circ , a = 17\text{ cm} , b = 11\text{ cm}$

(4) $m(\widehat{A}) = 43^\circ , a = 32\text{ cm} , b = 28\text{ cm}$

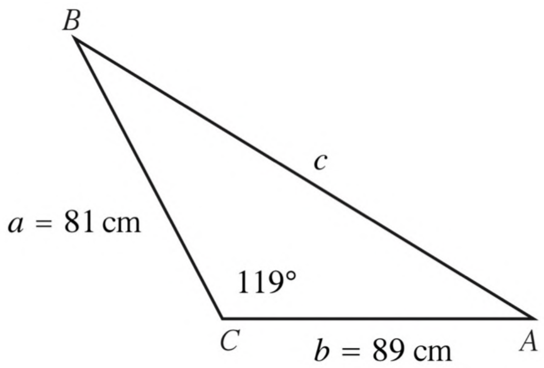
في التمرينين (6—5)، يمكن تكوين مثلثين باستخدام القياسات المعطاة، حلّ كلًّا منهما:

(5) $m(\widehat{C}) = 68^\circ , a = 19\text{ cm} , c = 18\text{ cm}$

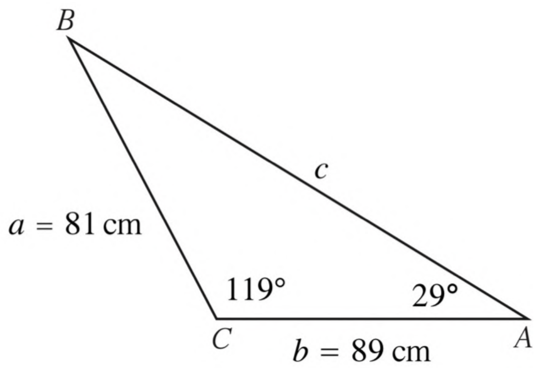
(6) $m(\widehat{B}) = 57^\circ , a = 11\text{ cm} , b = 10\text{ cm}$

في التمرينين (8—7)، قرر ما إذا كان يمكن حلّ المثلث باستخدام قانون الجيب، ثم حلّه إذا كان ذلك ممكنًا. وإذا لم يكن ممكنًا فاشرح السبب.

(7)



(8)



المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–3)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 100^\circ$ ، $m(\widehat{B}) = 30^\circ$ ، $BC = 20\,\text{cm}$ فإنّ: $AC = 10.154\,\text{cm}$ (a) (b)

(2) في المثلث ABC: $m(\widehat{B}) = 80^\circ$ ، $AB = 12\,\text{cm}$ ، $AC = 16\,\text{cm}$ فإنّ: $m(\widehat{C}) = 50^\circ$ (a) (b)

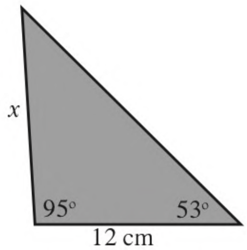
(3) في كل مثلث ABC يكون: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$ (a) (b)

في التمارين (4–9)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(4) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 80^\circ$ ، $m(\widehat{B}) = 40^\circ$ ، $AC = 10\,\text{cm}$ فإنّ طولي $\overline{BC}$ ، $\overline{AB}$ يساويان:

(a) 7.43 cm , 15.32 cm
(b) 6.53 cm , 13.47 cm
(c) 13.47 cm , 15.32 cm
(d) 7.43 cm , 6.53 cm

(5) في المثلث المقابل، x تساوي حوالي:



(a) 8.6 cm
(b) 15 cm
(c) 18.1 cm
(d) 19.2 cm

(6) مثلث قياسات زواياه: $50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$ ، طول أصغر ضلع فيه هو 9 cm
طول أطول ضلع حوالي:

(a) 11 cm
(b) 11.5 cm
(c) 12 cm
(d) 12.5 cm

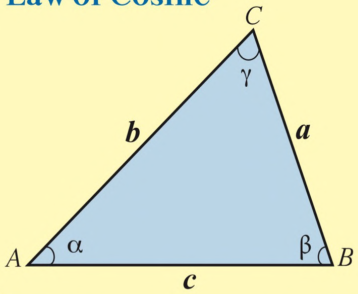
(7) القياسات المعطاة في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 56^\circ$ ، $AC = 23\,\text{cm}$ ، $AB = 19\,\text{cm}$ ، طول $\overline{BC}$ يساوي:

(a) 12 cm
(b) 18 cm
(c) 19 cm
(d) لا يمكن استخدام قانون الجيب

قانون جيب التمام

Law of Cosine

Law of Cosine — **قانون جيب التمام**



في ΔABC

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

معلومة:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

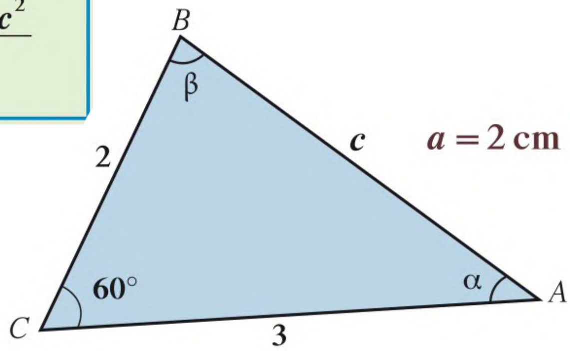
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Using the Law of Cosine — استخدام قانون جيب التمام

يسمح قانون جيب التمام بحل مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

مثال (1)



حل ΔABC حيث: $a = 2\text{ cm} \ , \ b = 3\text{ cm} \ , \ \gamma = 60^\circ$

الحل:

يجب إيجاد β , α , c

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$= 4 + 9 - 12\cos 60^\circ$$

$$= 13 - 12 \times \frac{1}{2}$$

$$= 7$$

$$c = \sqrt{7}\text{ cm}$$

لإيجاد قياسي الزاويتين β , α يمكن استخدام قانون الجيب ولكن قانون جيب التمام يسمح بالتمييز بين الزاوية الحادة والزاوية المنفرجة.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9 + 7 - 4}{2 \times 3 \times \sqrt{7}}$$

$$= \frac{12}{6\sqrt{7}}$$

$$\alpha \approx 40.9^\circ$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4 + 7 - 9}{4\sqrt{7}} = \frac{2}{4\sqrt{7}}$$

$$\beta \approx 79.1^\circ$$

تذكر:

إذا كانت $\cos\theta = k$

فإن: $\theta = \cos^{-1}(k)$

حاول أن تحل

1 حل ΔABC حيث: $\gamma = 20^{\circ}$, $b = 5\,\text{cm}$, $a = 11\,\text{cm}$

يسمح قانون جيب التمام أيضًا بحل مثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة.

مثال (2)

حل ΔABC حيث: $c = 6\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$, $a = 4\,\text{cm}$

الحل:

يتوجب علينا إيجاد قياسات الزوايا الثلاث في ΔABC

نستخدم قانون جيب التمام:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9 + 36 - 16}{2 \times 3 \times 6} = \frac{29}{36}$$

$$\therefore\ \alpha \approx 36.4^{\circ}$$

كذلك:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

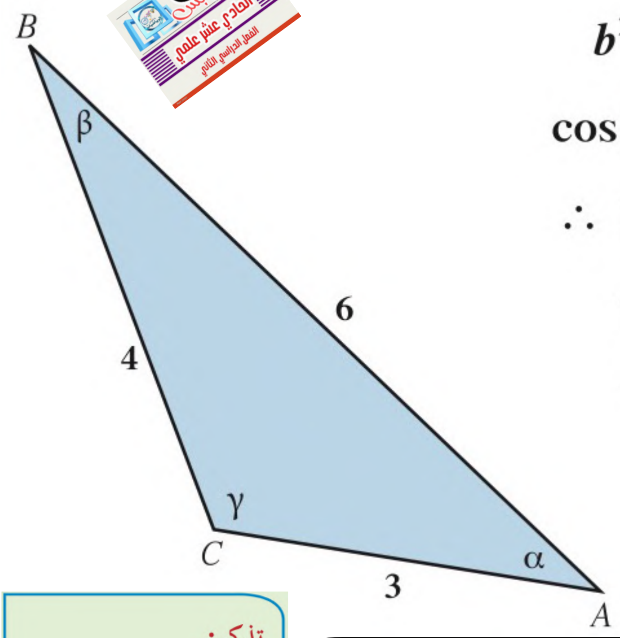
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{16 + 36 - 9}{2 \times 4 \times 6} = \frac{43}{48}$$

$$\therefore\ \beta \approx 26.4^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\gamma \approx 180^\circ - 36.4^\circ - 26.4^\circ$$

$$\approx 117.2^\circ$$



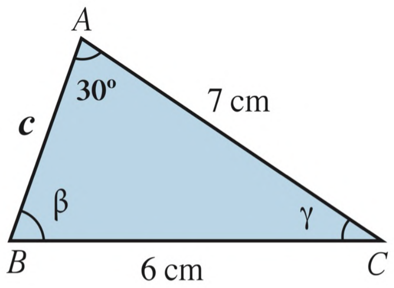
تذكر: في أي مثلث يكون الضلع الأكبر طولًا مقابلًا للزاوية الأكبر قياسًا والعكس صحيح.

حاول أن تحل

2 في ΔABC حيث: $a = 9\text{ cm}$, $b = 7\text{ cm}$, $c = 5\text{ cm}$

أوجد قياس الزاوية الأكبر.

مثال (3)



حل ΔABC حيث: $a = 6\text{ cm}$, $b = 7\text{ cm}$, $\alpha = 30^\circ$

الحل:

علينا إيجاد γ , β , c

حاول أن تحل

3 حل ΔABC حيث: $a = 5\text{ cm}$, $b = 6.5\text{ cm}$, $\alpha = 25^\circ$

تمرَّنْ
8–4

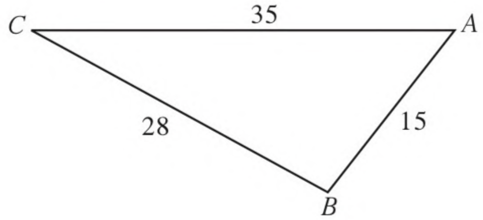
قانون جيب التمام

Law of Cosine

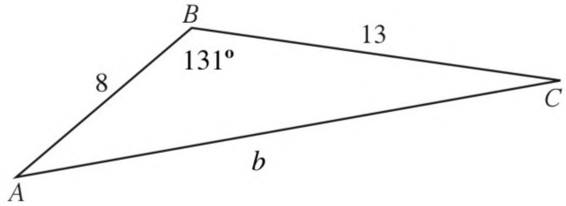
المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (1–2)، حلّ كلًّا من المثلثين التاليين:

(1)



(2)



في التمارين (3–8)، حلّ كل مثلث مما يلي:

(3) $a = 12, b = 21, m(\widehat{C}) = 95^\circ$

(4) $b = 22, c = 31, m(\widehat{A}) = 82^\circ$

(5) $a = 2, b = 5, c = 4$

(6) $a = 3.2, b = 7.6, c = 6.4$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC: $AB = 24\text{ cm}$, $AC = 19\text{ cm}$, $BC = 27\text{ cm}$ فإنّ: $m(\widehat{A}) \approx 76.82^\circ$ — (a) (b)

(2) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 60^\circ$, $BC = 44\text{ cm}$, $AB = 20\text{ cm}$ فإنّ: $AC \approx 50.5\text{ cm}$ — (a) (b)

(3) في المثلث ABC: $b^2 + c^2 < 2bc\cos A$ — (a) (b)

(4) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث تساوي $5\text{ cm}, 8\text{ cm}, 12\text{ cm}$ فإن قياس الزاوية الكبرى في هذا المثلث يساوي حوالي 133.4° — (a) (b)

في التمارين (5–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) في المثلث ABC : $m(\widehat{C}) = 60^\circ$, $AC = 10\text{ cm}$, $BC = 20\text{ cm}$ فإن طول $\overline{AB}$ يساوي:

(a) $AB = 10\sqrt{7}\text{ cm}$ (b) $AB = 10\sqrt{3}\text{ cm}$ (c) $AB = 12.4\text{ cm}$ (d) $AB = 29\text{ cm}$

(6) في المثلث ABC : $m(\widehat{A}) = 120^\circ$, $AB = 30\text{ cm}$, $AC = 40\text{ cm}$ فإنّ طول $\overline{BC}$ يساوي:

(a) $BC \approx 60.8\text{ cm}$ (b) $BC \approx 36\text{ cm}$ (c) $BC \approx 68\text{ cm}$ (d) $BC \approx 21\text{ cm}$

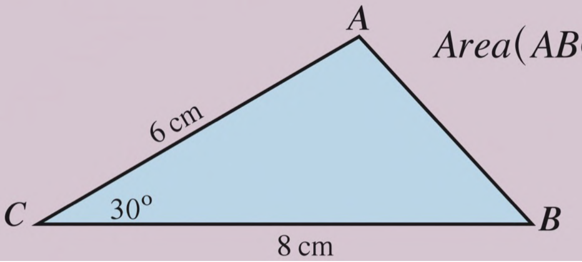
(7) إذا كان $BC = 25\text{ cm}$, $AC = 17\text{ cm}$, $AB = 12\text{ cm}$ فإنّ قياس الزاوية الكبرى في المثلث ABC يساوي حوالي:

(a) 118° (b) 110° (c) 125° (d) 100°

مساحة المثلث

Area of Triangle

تعلمت سابقًا أنه يمكن إيجاد مساحة مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما كما يلي:



$$Area(ABC) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$
$$= \frac{1}{2}ac\sin\beta$$
$$= \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

مثال (1)

أوجد مساحة المثلث ABC حيث $c = 7\text{ cm}$ ، $b = 5\text{ cm}$ ، $a = 8\text{ cm}$

حاول أن تحل

1 أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $c = 8\text{ cm}$, $b = 6\text{ cm}$, $a = 5\text{ cm}$

قاعدة هيرون Heron's Formula

يمكننا أيضًا إيجاد مساحة مثلث بمعرفة أطوال أضلاعه الثلاثة بالقاعدة التالية:

قاعدة هيرون

تعطى مساحة مثلث ABC أطوال أضلاعه a, b, c بالقاعدة:

$$\text{Area}(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

حيث: $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \text{semiperimeter}$ **(نصف محيط المثلث)**

مثال (2)

أوجد مساحة سطح مثلث أطوال أضلاعه: 7 cm , 5 cm , 8 cm

الحل:

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(8+5+7) = 10$$

باستخدام قاعدة هيرون

$$\begin{aligned}\text{Area} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\ &= \sqrt{10(10-8)(10-5)(10-7)} = \sqrt{10(2)(5)(3)}\\ &= 10\sqrt{3}\end{aligned}$$

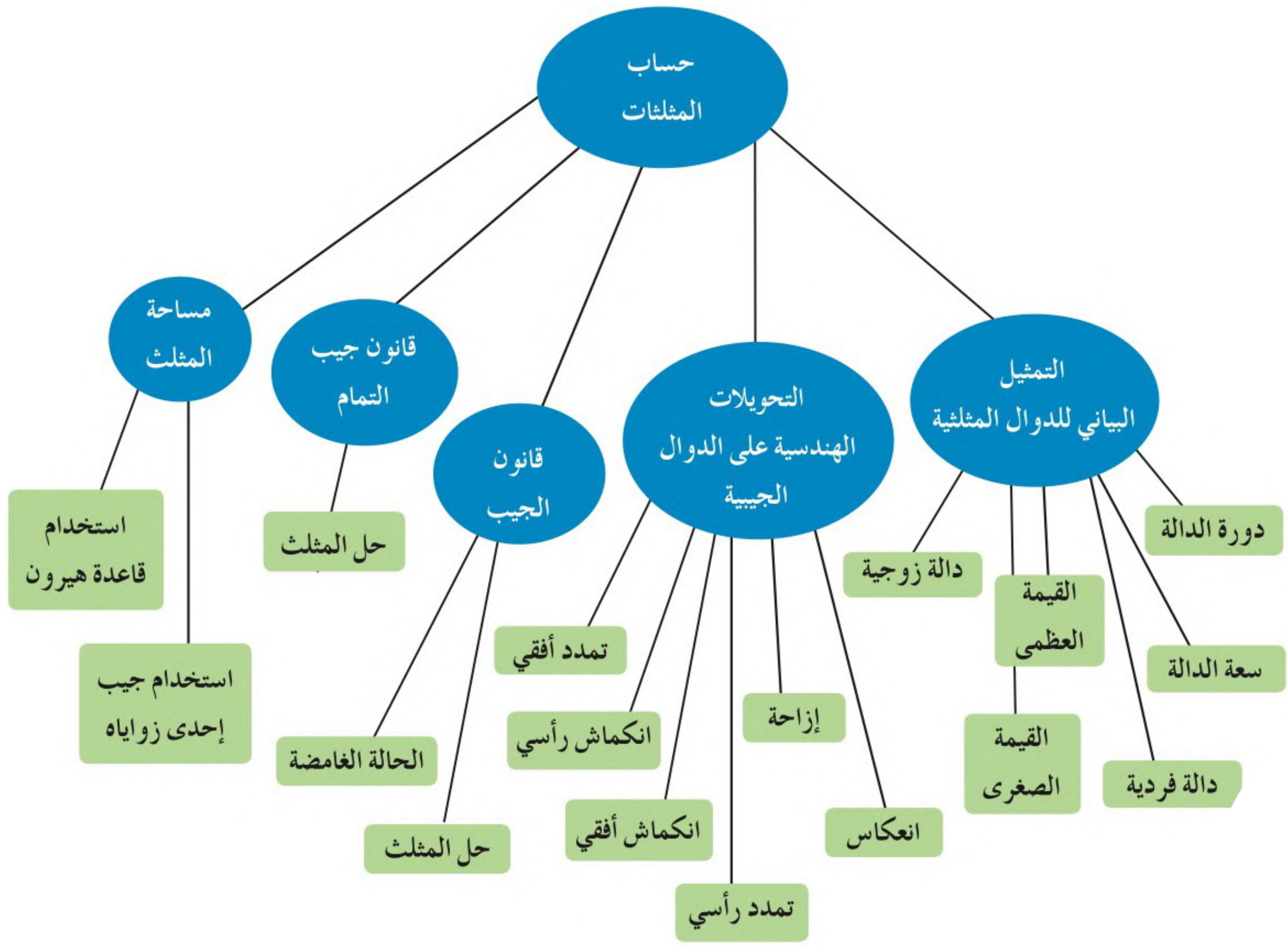
$$\text{Area} \approx 17.32$$

مساحة سطح المثلث تساوي $10\sqrt{3}\text{ cm}^2$ أي حوالي 17.32 cm^2

حاول أن تحل

2 أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $a = 4\text{ cm}$, $b = 4\text{ cm}$, $c = 3\text{ cm}$

مخطط تنظيمي للوحدة الثامنة



ملخص

- دالة الجيب دالة دورية ذات دورة 2π. المقاطع السينية: $x=\pm n\pi$، القيمة العظمى $=1$ عند $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ حيث n عدد صحيح. والقيمة الصغرى $=-1$ عند $x=\frac{3\pi}{2}+2n\pi$، حيث n عدد صحيح.
- دالة جيب التمام دالة دورية ذات دورة 2π، المقاطع السينية: $x=\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi$، القيمة العظمى $=1$ عند $x=+2n\pi$، حيث n عدد صحيح والقيمة الصغرى $=-1$ عند $x=\pi\pm 2n\pi$، حيث n عدد صحيح.
- التحويلات: تمدد رأسي: $|a|>1$ انكماش رأسي: $|a|<1$
  تمدد أفقي: $\frac{1}{|b|}>1$ انكماش أفقي: $\frac{1}{|b|}<1$
- سعة الدالة: $f(x)=a\sin(bx-h)+k$ أو $f(x)=a\cos(bx-h)+k$ هي $|a|$
- دورة $y=a\sin(bx)$ أو $y=a\cos(bx)$ هي $\frac{2\pi}{|b|}$

- دالة الظل دالة دورية ذات دورة π، الأصفار: $x = \pm n\pi$
- دالة الجيب، دالة الظل هما دالتان فرديتان. نقطة الأصل مركز تناظر.
- دالة جيب التمام دالة زوجية. محور الصادات محور تناظر.
- قانون الجيب: $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$
- قانون جيب التمام: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
- مساحة المثلث $= \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$
- قاعدة هيرون: $\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

حيث s = semiperimeter (نصف محيط المثلث).

تمرَّنْ 8–5

مساحة المثلث

Area of Triangle

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (1–2)، أوجد مساحة المثلث ABC بطريقتين مختلفتين.

(1) $m(\hat{A}) = 47^\circ$, $b = 32\text{ cm}$, $c = 19\text{ cm}$

(2) $a = 4\text{ cm}$, $b = 5\text{ cm}$, $c = 8\text{ cm}$

في التمارين (3–6)، استخدم قاعدة هيرون لإيجاد مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه كالتالي. (الأطوال بالسنتيمتر).

(3) $a = 5$, $b = 9$, $c = 7$

(4) $a = 23$, $b = 19$, $c = 12$

(5) $a = 19.3$, $b = 22.5$, $c = 31$

(6) $a = 18.2$, $b = 17.1$, $c = 12.3$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1—6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا عرفت أطوال أضلاع مثلث فيمكن استخدام قاعدة هيرون لإيجاد مساحته. (a) (b)

(2) لا يمكن إيجاد مساحة مثلث بمعلومية قياسات زواياه الثلاثة. (a) (b)

(3) لا يمكن استخدام قاعدة هيرون إذا كان المثلث قائم الزاوية. (a) (b)

(4) إن معرفة قياس إحدى زوايا مثلث هو شرط ضروري لإيجاد مساحته. (a) (b)

(5) إذا كان a, b طولا ضلعين متتاليين في متوازي أضلاع و θ قياس الزاوية بينهما فإن مساحة متوازي الأضلاع تساوي $ab\sin\theta$ (a) (b)

(6) في المثلث ABC: $BC = 5\text{ cm}$, $AB = 7\text{ cm}$, $AC = 9\text{ cm}$
فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالي 15 cm^2 (a) (b)

في التمارين (7—10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كان: $m(\widehat{C}) = 40^\circ$, $b = 3\text{ cm}$, $a = 2\text{ cm}$ فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالي:

(a) 4.6 cm^2 (b) 3.86 cm^2
(c) 1.93 cm^2 (d) 2.3 cm^2

(8) مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه 9 cm , 8 cm , 7 cm هي:

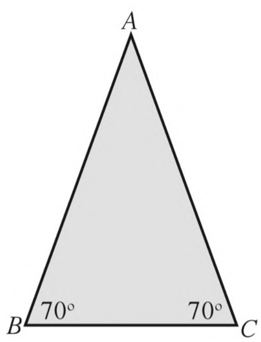
(a) $6\sqrt{15}\text{ cm}^2$ (b) $12\sqrt{5}\text{ cm}^2$
(c) $16\sqrt{3}\text{ cm}^2$ (d) $18\sqrt{3}\text{ cm}^2$

(9) مساحة مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه a هي:

(a) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\text{ units}^2$ (b) $a^2\text{ units}^2$
(c) $\frac{1}{2}a^2\text{units}^2$ (d) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\text{ units}^2$

(10) إذا كانت مساحة المثلث ABC تساوي حوالي 8 cm^2 فإن طول $\overline{AB}$ هو حوالي:

(a) 5 cm (b) 8 cm
(c) 4 cm (d) 6 cm



اختبار الوحدة الثامنة

في التمارين (3–1)، ارسم بيان كل دالة.

(1) $y=-2\cos x$ (2) $y=2\sin 2x$ (3) $y=\tan\frac{3}{2}x$

في التمارين (8–4)، حدّد دورة كل دالة وسعتها إذا كان ممكنًا.

(4) $y=1.5\sin x$ (5) $y=5\cos\frac{x}{2}$ (6) $y=-4\sin\frac{\pi}{3}x$

(7) $y=\tan 2.5x$ (8) $y=-\tan\frac{\pi}{6}x$

(9) اكتب معادلة دالة على صورة $y=a\sin(bx)$ إذا كانت السعة 3، الدورة 4π

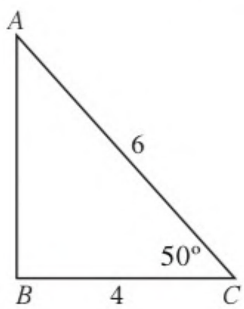
في التمارين (15–12)، أوجد مساحة كل مثلث.

(12) $m(\widehat{A})=20^{\circ}, b=5\,\text{cm}, c=5\,\text{cm}$ (13) $a=4\,\text{cm}, b=3\,\text{cm}, c=5\,\text{cm}$

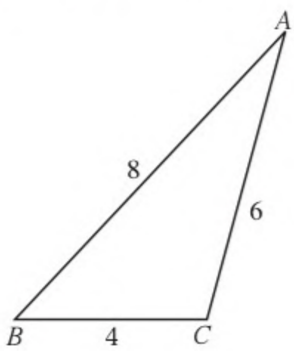
(14) $m(\widehat{A})=10^{\circ}, m(\widehat{C})=40^{\circ}, c=3\,\text{cm}$ (15) $a=4\,\text{cm}, b=2\,\text{cm}, c=3\,\text{cm}$

في التمارين (18–16)، أوجد العناصر المجهولة (قياس زاوية أو طول ضلع) في كل مثلث مما يلي:

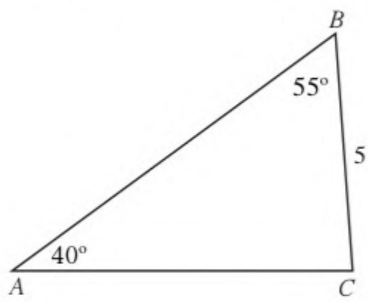
(16)



(17)



(18)



المتطابقات المثلثية

The Trigonometric Identities

Trigonometric Identities   المتطابقات المثلثية الأساسية

- متطابقات القسمة (الظل وظل التمام)   Quotient Identities (Tangent and Cotangent)

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

- متطابقات المقلوب   Reciprocal Identities

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- متطابقات فيثاغورث   Pythagorian Identities

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad , \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad , \quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

إثبات صحة متطابقات مثلثية

Confirming Trigonometric Identities

إثبات صحة متطابقة — Confirming an Identity

لإثبات أن معادلة ما هي متطابقة نحتاج إلى محاولة إثبات أن طرفي المعادلة متساويان عند كل قيم المتغير نفسها. من خلال استخدام إحدى الإستراتيجيات التالية:

1. تبسيط الطرف الأيمن بصورة الطرف الأيسر أو العكس.
2. تبسيط كلًّا من الطرفين على حدة حتى يتطابق ناتج تبسيطهما.

ويتم تبسيط كل طرف باستخدام إحدى الطرق التالية:

- دمج الحدود
- فصل الحدود
- ضرب العوامل
- التحليل
- استخدام متطابقات معلومة
- تبسيط الكسور
- التحويل إلى الجيب وجيب التمام

مثال (1)

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta}=\tan^2\theta$

الحل:

نبسط الطرف الأيسر إلى صورة الطرف الأيمن

ضرب العوامل

$$\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta}=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$

متطابقة فيثاغورث

$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$$

متطابقة القسمة

$$=\tan^2\theta$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

حاول أن تحل

1. أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\csc\theta$

مثال (2)

أثبت صحة المتطابقة: $2\cot x \csc x = \frac{1}{\sec x - 1} + \frac{1}{\sec x + 1}$

الحل:

نبسط الطرف الأيمن إلى صورة الطرف الأيسر

أوجد مقامًا مشتركًا

$$\frac{1}{\sec x - 1} + \frac{1}{\sec x + 1} = \frac{(\sec x + 1) + (\sec x - 1)}{(\sec x - 1)(\sec x + 1)}$$

بسّط

$$= \frac{2\sec x}{\sec^2 x - 1}$$

متطابقة فيثاغورث

$$= \frac{2\sec x}{\tan^2 x}$$

استخدم متطابقة المقلوب

$$= 2\sec x \cot^2 x$$

بسّط

$$= \frac{2}{\cos x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{2\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$= 2\cot x \csc x$$

$\therefore$ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

حاول أن تحل

2 أثبت صحة المتطابقة: $\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} - \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4\tan x \cdot \sec x$

مثال (3)

أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{1+\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

الحل:

نبدأ بالطرف الأيسر ونصل إلى صورة الطرف الأيمن

ضرب كل من البسط والمقام في $(1+\sin x)$

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{\cos x}{1-\sin x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x}$$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$= \frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$$

متطابقة فيثاغورث

$$= \frac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x}$$

اختصار العامل المشترك

$$= \frac{1+\sin x}{\cos x}$$

$\therefore$ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

حاول أن تحل

3 أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} = (\csc x - \cot x)^2$

مثال (4)

أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = (\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$

الحل:

نبسّط الطرف الأيسر:

متطابقة فيثاغورث
$$\frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = \frac{\csc^2\theta - 1}{1+\csc\theta}$$

حلّل
$$= \frac{(\csc\theta - 1)(\csc\theta + 1)}{1+\csc\theta}$$

بسّط
$$= \csc\theta - 1$$

نبسّط الطرف الأيمن:

اكتب بدلالة $\sin\theta$، $\cos\theta$
$$(\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

خاصية التوزيع
$$= \frac{1}{\sin\theta} - 1$$

متطابقة المقلوب
$$= \csc\theta - 1$$

$\because$ كلا الطرفين يكافئ $\csc\theta - 1$

$$\therefore \frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = (\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$$

حاول أن تحل

4 أثبت أن: $\dfrac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \sin x + \sin x \tan^2 x$

رياضيات وبس الحادي عشر علمي الفصل الدراسي الثاني

تمرَّنْ 9−2

إثبات صحة متطابقات مثلثية

Confirming Trigonometric Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1—14)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(1) $(\cos x)(\tan x + \sin x \cot x) = \sin x + \cos^2 x$

(2) $(\sin x)(\cot x + \cos x \tan x) = \cos x + \sin^2 x$

(3) $(1 - \tan x)^2 = \sec^2 x - 2\tan x$

(4) $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$

(5) $\tan x + \cot x + 2 = \dfrac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x}$

(6) $\dfrac{1}{1 - \cos x} + \dfrac{1}{1 + \cos x} = 2\csc^2 x$

(7) $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \dfrac{1 - \cos x}{\cos x}$

(8) $\cot^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x \cot^2 x$

(9) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

(10) $\dfrac{\tan x}{\sec x - 1} = \dfrac{\sec x + 1}{\tan x}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $3\sin x = \sin(3x)$ تمثل متطابقة. (a) (b)

(2) $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$ تمثل متطابقة. (a) (b)

(3) $\sec x - \cos x = \tan x \sin x$ تمثل متطابقة. (a) (b)

في التمارين (5—10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) المقدار: $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sin x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sin x \tan x$ (b) $\sin x \sec^2 x$
(c) $\cos x \sec^2 x$ (d) $\sin x \csc x$

(6) المقدار: $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$ متطابق مع المقدار:

(a) $-4\sin x \cos x$ (b) 2
(c) -2 (d) $4\sin x \cos x$

(7) المقدار: $\dfrac{1}{\tan x} + \tan x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sec x \csc x$ (b) $\sec x \sin x$
(c) $\sec x \cos x$ (d) $\sin x \cos x$

(8) المقدار: $\tan^2 x - \sin^2 x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\tan^2 x$ (b) $\cot^2 x$
(c) $\tan^2 x \sin^2 x$ (d) $\cot^2 x \cos^2 x$

(9) المقدار: $\dfrac{\sin x}{\csc x} + \dfrac{\cos x}{\sec x} + 1$ متطابق مع المقدار:

(a) 1 (b) -1
(c) 2 (d) -2

(10) المقدار: $\dfrac{\cos^2 x - 1}{\cos x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $-\tan x \sin x$ (b) $-\tan x$
(c) $\tan x \sin x$ (d) $\tan x$

حل معادلات مثلثية

Solving Trigonometric Equations

تذكر:

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $(\pi-\theta)$ تقع في الربع الثاني ويكون:

$\sin\theta=\sin(\pi-\theta)$

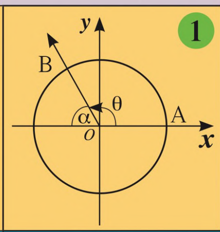
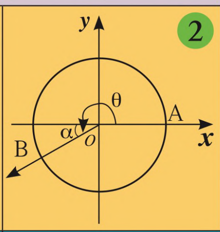
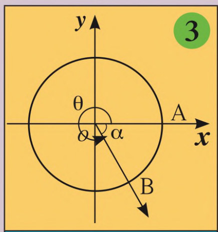
وحل المعادلة:

$\sin x=\sin\theta$

هو: $x=\theta+2k\pi$

أو $x=(\pi-\theta)+2k\pi$

حيث $k\in\mathbb{Z}$

الشكل	1	2	3
			
الربع من المستوى الإحداثي	θ تقع في الربع ...	θ تقع في الربع ...	θ تقع في الربع ...
زاوية الإسناد	$\alpha=$	$\alpha=$	$\alpha=2\pi-\theta$
الزاوية في الوضع القياسي	$\theta=$	$\theta=$	$\theta=2\pi-\alpha$

معلومة:

إذا كانت θ تقع في الربع الأول، فإن زاوية الإسناد α تساوي θ

تذكر:

إذا كانت θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $(-\theta)$ تقع في الربع الرابع ويكون:

$\cos\theta=\cos(-\theta)$

وحل المعادلة:

$\cos x=\cos\theta$

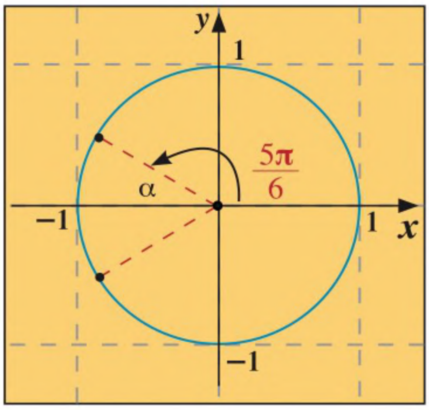
هو: $x=\theta+2k\pi$

أو $x=-\theta+2k\pi$

حيث $k\in\mathbb{Z}$

مثال (1)

حل المعادلة: $2\cos x+\sqrt{3}=0$



الحل:

$$2\cos x+\sqrt{3}=0$$

$$2\cos x=-\sqrt{3}$$

$$\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$$\therefore\ \cos\alpha=|\cos x|$$

$$=\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{6}$$

$$\because\ \cos x<0$$

$\therefore$ x تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث

عندما x تقع في الربع الثاني: $x=\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$

$$\therefore\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$$

وعندما x تقع في الربع الثالث: $x=\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$

$$=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$$

$\therefore$ حل المعادلة: $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ أو $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$، حيث $k\in\mathbb{Z}$

حاول أن تحل

1 حل المعادلة: $\sqrt{2}\cos x = 1$

مثال (2)

حل المعادلة: $4\sin\theta + 1 = \sin\theta$، حيث $0 \leq \theta < 2\pi$

الحل:

$$4\sin\theta + 1 = \sin\theta$$

فصل المتغير

$$4\sin\theta - \sin\theta = -1$$

بسّط

$$3\sin\theta = -1$$

$$\sin\theta = -\frac{1}{3}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\therefore\ \sin\alpha = |\sin\theta|$$

$$= \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$$

$\therefore \ \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0.34$ radians

$\because \ \sin\theta < 0 \ \therefore$ θ تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع

عندما θ تقع في الربع الثالث

$\therefore \ \theta \approx \pi + 0.34$

$\approx 3.4816 \quad , \quad 3.4816 \in [0, 2\pi)$

عندما θ تقع في الربع الرابع

$\therefore \ \theta \approx 2\pi - 0.34$

$\approx 5.9432 \quad , \quad 5.9432 \in [0, 2\pi)$

حل المعادلة: $\theta \approx 5.9432$ أو $\theta \approx 3.4816$

تذكر:

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $(\pi + \theta)$ تقع في الربع الثالث ويكون:

$\tan\theta = \tan(\pi + \theta)$

وحل المعادلة:

$\tan x = \tan\theta$

هو: $x = \theta + k\pi$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

حاول أن تحل

2 حل المعادلة: $5\sin\theta - 3 = \sin\theta$

مثال (3)

حل المعادلة: $\tan x = \sqrt{3}$

الحل:

$$\tan x = \sqrt{3}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x.

$$\therefore\ \tan\alpha = |\tan x|$$

$$= |\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

$$\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$\because\ \tan x > 0 \quad \therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث

ولكن الدالة $\tan x$ هي دالة دورية ودورتها π

فيكون: $\tan(\pi + x) = \tan x$

ومنه يكون حل المعادلة: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

حاول أن تحل

3 حل المعادلة: $\tan x = 1$

مثال (4)

حل المعادلة: $2\cos\theta\sin\theta = -\sin\theta$

الحل:

$2\cos\theta\sin\theta = -\sin\theta$

$2\cos\theta\sin\theta + \sin\theta = 0$

$\sin\theta(2\cos\theta + 1) = 0$ تحليل إلى عوامل

$\sin\theta = 0$ أو $2\cos\theta + 1 = 0$

$\sin\theta = 0$ أو $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ خاصية الضرب في الصفر

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ أو $\sin\theta = 0$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$\therefore \cos\alpha = |\cos\theta|$

$= \left|-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\right|$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\because \cos\theta < 0$

$\therefore$ θ تقع في الربع الثاني أو في الربع الثالث.

عندما تقع θ في الربع الثاني:

$\theta = (\pi - \alpha) + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

$= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

عندما θ تقع في الربع الثالث

$\therefore \theta = \pi + \alpha + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

$= \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

$\therefore$ θ زاوية ربعية

$\therefore \theta = 0$ أو $\theta = \pi$

$\therefore \theta = 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

حل المعادلة: $\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi$ أو $\theta = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

حاول أن تحل

4 حل المعادلة: $\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

مثال (5)

حل المعادلة: $4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$

الحل:

المعادلة: $4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$ هي معادلة تربيعية في $\sin x$

بالتحليل:

$(2\sin x - 1)(2\sin x - 3) = 0$

$2\sin x - 1 = 0$ أو $2\sin x - 3 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$ أو $\sin x = \frac{3}{2}$

$\sin x = \frac{3}{2}$

$\because$ $y = \sin x$ مداها $[-1, 1]$

$\frac{3}{2} \notin [-1, 1]$

$\therefore$ $\sin x = \frac{3}{2}$ ليس لها حل

أو

$\sin x = \frac{1}{2}$

نأخذ $\sin x = \frac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x.

$\therefore \sin\alpha = |\sin x|$

$= \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$

$\because \sin x > 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الثاني.

عندما x تقع في الربع الأول

$\therefore \quad x = \alpha + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

عندما x تقع في الربع الثاني

$\therefore \quad x = (\pi - \alpha) + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

$= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

حل المعادلة: $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

حاول أن تحل

5 حل المعادلة: $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$

تمرَّنْ
9–3

حل معادلات مثلثية

Solving Trigonometric Equations

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–7)، حل كلًّا من المعادلات التالية:

(1) $\sin x = \frac{-1}{2}$

(2) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $2\cos x = -1$

(4) $\sqrt{3}\tan a = 1$

(5) $2\cos x \sin x - \cos x = 0$

(6) $\tan^2 x = 3$

(7) $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$

في التمرينين (11–12)، حلّ المعادلات التالية:

(11) $\sin^2 x - 2\sin x = 0$

(12) $2\sin^2 x + 3\sin x = 2$

رياضيات وبس الحادي عشر علمي الفصل الدراسي الثاني

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(2) حل المعادلة $\cos x = \sqrt{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(3) حل المعادلة $\tan x = -\sqrt{3}$ هو: $x = +\frac{5\pi}{6} + k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(4) حلول المعادلة $\sin x \tan^2 x = \sin x$ على الفترة $(0, \pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ (a) (b)

(5) حلول المعادلة $2\sin^2 x = 1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ (a) (b)

في التمارين (6—11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $\sin x + \cos x = 0$ فإن x تقع في الربع:

(a) الأول
(b) الأول أو الثالث
(c) الثالث
(d) الثاني أو الرابع

(7) حلول المعادلة: $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$
(b) $\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$
(c) $\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$
(d) $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

(8) حلول المعادلة: $2\sqrt{2}\sin x \cos x - \sqrt{2}\cos x - 2\sin x = -1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$
(b) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}$
(c) $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}$
(d) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$

متطابقات المجموع والفرق

Sum and Difference Identities

متطابقات الدوال المتكافئة Cofunction Identities

تربط متطابقات الدوال المتكافئة بين الدوال المثلثية الأساسية والدوال المكافئة لها (الجيب وجيب التمام، الظل وظل التمام، القاطع وقاطع التمام).

متطابقات الدوال المتكافئة

$$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$

مثال (1)

أثبت أن: $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta$

الحل:

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right] \qquad b-a=-(a-b)$$

$$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \qquad \sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$$

$$=-\cos\theta \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

حاول أن تحل

1 أثبت أن: $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta$

مثال (2)

أثبت أن: $\csc\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\sec\theta$

الحل:

$b-a=-(a-b)$

$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

$$\begin{aligned}\csc\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)&=\csc\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]\\&=\frac{1}{\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]}\\&=\frac{1}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\\&=\frac{-1}{\cos\theta}\\&=-\sec\theta\end{aligned}$$

حاول أن تحل

2 أثبت أن: $\sec\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\csc\theta$

متطابقات المجموع و الفرق

$$\cos(\beta+\alpha)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha$$

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta+\alpha)=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$$

$$\tan(\beta+\alpha)=\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$$

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

مثال (3)

أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة كلًّا مما يلي:

a $\cos 15°$ b $\sin 105°$ c $\tan 75°$

الحل:

متطابقة الفرق

a
$$\cos 15° = \cos(60° - 45°)$$
$$= \cos 60° \cos 45° + \sin 60° \sin 45°$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

b $\sin 105°$
$$\because \quad 105° = 60° + 45°$$
$$\therefore \sin 105° = \sin(60° + 45°)$$
$$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

c $\tan 75°$
$$\because \quad 75° = 45° + 30°$$
$$\therefore \quad \tan 75° = \tan(45° + 30°)$$
$$= \frac{\tan 45° + \tan 30°}{1 - \tan 45° \tan 30°}$$
$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$
$$= 2 + \sqrt{3}$$

$\tan 45° = 1$

حاول أن تحل

3 أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة كلًّا مما يلي:

a $\sin 15°$ b $\cos 75°$ c $\tan 105°$

مثال (4)

إذا كان: $\sin\alpha = \frac{4}{5}\ ,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos\beta = \frac{-12}{13}\ ,\ \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

أوجد كلًّا مما يلي:

a $\sin(\alpha+\beta)$ **b** $\cos(\alpha-\beta)$ **c** $\tan(\alpha-\beta)$

الحل:

نوجد أولًا: $\cos\alpha\ ,\ \sin\beta\ ,\ \tan\alpha\ ,\ \tan\beta$

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ متطابقة فيثاغورث

$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$ تعويض

- $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

- $\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{-5}{13}}{\frac{-12}{13}} = \frac{5}{12}$

a $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)$

$= \frac{-48}{65} - \frac{15}{65} = -\frac{63}{65}$

b $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)$

$= \frac{-36}{65} - \frac{20}{65} = -\frac{56}{65}$

c $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$= \frac{\frac{4}{3} - \frac{5}{12}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{12}\right)}$

$= \frac{\frac{11}{12}}{\frac{56}{36}} = \frac{33}{56}$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}$ فصل المتغير

$\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$ بسّط

$\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ أو $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

$\because\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha > 0$

$\therefore\ \cos\alpha = \frac{3}{5}$

- $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ متطابقة فيثاغورث

$\sin^2\beta + \left(\frac{-12}{13}\right)^2 = 1$ تعويض

$\sin^2\beta = 1 - \frac{144}{169}$ فصل المتغير

$\sin^2\beta = \frac{25}{169}$ بسّط

$\sin\beta = -\frac{5}{13}$ أو $\sin\beta = \frac{5}{13}$

$\because\ \pi < \beta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin\beta < 0$

$\therefore\ \sin\beta = \frac{-5}{13}$

حاول أن تحل

4 باستخدام المعطيات من المثال (4)، أوجد كلًّا مما يلي:

a $\cos(\alpha + \beta)$ b $\tan(\alpha + \beta)$ c $\sin(\beta - \alpha)$

تمرَّن 9–4

متطابقات المجموع والفرق

Sum and Difference Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–3)، استخدم متطابقات المجموع والفرق في إيجاد القيمة الدقيقة.

(1) $\sin 15°$ **(2)** $\tan 135°$ **(3)** $\cos 75°$

(4) إذا كان $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$، $\sin\gamma = \frac{4}{5}$

$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$، $\cos\beta = \frac{-8}{17}$

(a) أوجد: $\sin(\beta+\gamma)$

(b) أوجد: $\cos(\beta-\gamma)$

(c) أوجد: $\tan(\gamma+\beta)$

في التمارين (5–10)، اكتب المقدار على صورة جيب أو جيب التمام أوظل الزاوية.

(5) $\sin 42° \cos 17° - \cos 42° \sin 17°$

(6) $\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{5}$

(7) $\dfrac{\tan 19° + \tan 47°}{1 - \tan 19° \tan 47°}$

(8) $\cos\frac{\pi}{7}\cos x + \sin\frac{\pi}{7}\sin x$

(9) $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$

(10) $\dfrac{\tan 2y + \tan 3x}{1 - \tan 2y \tan 3x}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (a) (b)

(2) $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (a) (b)

(3) $\cos(h+\frac{\pi}{2}) = -\cos h$ (a) (b)

(4) $\tan^2\frac{\pi}{12} + \tan^2\frac{5\pi}{12} = 14$ (a) (b)

في التمارين (5—11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) $\tan\frac{7\pi}{12}$ تساوي:

(a) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ (b) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

(c) $2+\sqrt{3}$ (d) $-2-\sqrt{3}$

(6) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ (b) $\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

(7) $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

(a) $1+\tan h$ (b) $\frac{1-\tan h}{1+\tan h}$

(c) $\frac{1+\tan h}{1-\tan h}$ (d) $1-\tan h$

(8) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$ (b) $\sqrt{2}(\cos x + \sin x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x + \sin x)$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$

(9) $\cos 94° \cos 18° + \sin 94° \sin 18°$ تساوي:

(a) $\cos 112°$ (b) $\cos 76°$

(c) $\sin 112°$ (d) $\sin 76°$

(10) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{3}$ تساوي:

(a) $\cos\frac{4\pi}{21}$ (b) $\sin\frac{4\pi}{21}$

(c) $\cos\frac{10\pi}{21}$ (d) $\sin\frac{10\pi}{21}$

(11) $\frac{\tan\frac{\pi}{5} - \tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{\pi}{3}}$ تساوي:

(a) $\tan\frac{2\pi}{15}$ (b) $\tan\frac{8\pi}{15}$

(c) $\tan\left(\frac{-8\pi}{15}\right)$ (d) $\tan\left(\frac{-2\pi}{15}\right)$

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

Double–Angle and Half–Angle Identities

عمل تعاوني

تعلمت في ما سبق:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

إذا كانت $\alpha=\beta$ فإن:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos(\alpha+\alpha)\\&=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha\\&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\end{aligned}$$

وبالمثل استخدم قوانين مجموع زاويتين في إيجاد كل من:

a $\sin 2\alpha$ b $\tan 2\alpha$

متطابقات ضعف الزاوية Double–Angle Identities

أولًا: جيب تمام ضعف الزاوية Cosine Double–Angle

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$

مثال (1)

أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية: $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta-1$

الحل:

من عمل تعاوني (1) $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

من متطابقة فيثاغورث $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

نحصل على $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

في المعادلة (1) نعوّض عن $\sin^2\theta$ بـ $1-\cos^2\theta$

نحصل على $\cos 2\theta=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)$

$$=\cos^2\theta-1+\cos^2\theta$$

$$=2\cos^2\theta-1$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta-1$$

$$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$$

حاول أن تحل

1 أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية: $\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$

مثال (2)

إذا كان $\cos x = \frac{3}{5}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد $\cos 2x$

الحل:

متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية

$$\therefore \ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1$$

$$= 2 \times \frac{9}{25} - 1$$

$$= \frac{18}{25} - 1$$

$$= -\frac{7}{25}$$

حاول أن تحل

2 إذا كان $\sin x = \frac{5}{13}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد: $\cos 2x$

ثانيًا: جيب ضعف الزاوية Sine Double−Angle

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

مثال (3)

إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ، $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ، فأوجد $\sin 2\theta$.

الحل:

متطابقة فيثاغورث $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$= 1 - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}$$

$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad \therefore \quad \cos\theta < 0$ $\qquad \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

متطابقة جيب ضعف الزاوية $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$\sin 2\theta = 2 \times \frac{-1}{\sqrt{2}} \times \frac{-1}{\sqrt{2}} = 1$$

حاول أن تحل

3 إذا كان $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، $\cos\theta = \frac{3}{5}$ فأوجد $\sin 2\theta$.

ثانيًا: جيب ضعف الزاوية Sine Double–Angle

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

مثال (4)

إذا كان: $\tan\theta = -1+\sqrt{2}$، استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

الحل:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$= \frac{2(-1+\sqrt{2})}{1-(-1+\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{2(-1+\sqrt{2})}{1-(1+2-2\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2(-1+\sqrt{2})}{-2+2\sqrt{2}} = \frac{2(-1+\sqrt{2})}{2(-1+\sqrt{2})} = 1$$

حاول أن تحل

4 إذا كان $\tan\theta = \sqrt{3}$، استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

مثال (5)

أثبت صحة المتطابقة: $\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

الحل:

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

المقام المشترك

$$= \frac{\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

بسّط

$$= \frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

متطابقة فيثاغورث

$$= \cos^2\theta-\sin^2\theta$$

متطابقة الضعف

$$= \cos 2\theta = \text{الطرف الأيسر}$$

حاول أن تحل

5 أثبت صحة المتطابقة: $2\cos 2\theta = 4\cos^2\theta - 2$

مثال (6)

أثبت صحة المتطابقة: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

الحل:

الطرف الأيسر $= \cos 3\theta = \cos(\theta + 2\theta)$

متطابقة المجموع $= \cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta$

متطابقة الضعف $= \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - \sin\theta(2\sin\theta\cos\theta)$

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$

متطابقة فيثاغورث $= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta$

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta$

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta =$ الطرف الأيمن

حاول أن تحل

6 أثبت صحة المتطابقة: $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

متطابقات نصف الزاوية Half–Angle Identities

يمكن استخدام متطابقة ضعف الزاوية لإيجاد متطابقات نصف الزاوية.

لتكن: $\theta = \frac{\alpha}{2}$

متطابقة ضعف الزاوية لجيب التمام $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

عوض عن θ بـ $\frac{\alpha}{2}$ $\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$

بسّط $\cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$

حل في $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ $\frac{1+\cos\alpha}{2} = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

وبالمثل $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

تذكر:

الدالة	موجبة في الربع
$\sin x$	الأول والثاني
$\cos x$	الأول والرابع
$\tan x$	الأول والثالث

ملاحظة: عند استخدام متطابقات نصف الزاوية تحتاج إلى تعيين الربع الذي تقع فيه الزاوية $\frac{\alpha}{2}$ ومن ثم تستخدم الإشارة الصحيحة + أو − للدالة المثلثية في هذا الربع.

متطابقات نصف الزاوية

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

مثال (7)

استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد $\sin 15^\circ$

الحل:

$$\sin 15^\circ = \sin\left(\frac{30^\circ}{2}\right)$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}$$

خذ الجذر الموجب، لأن 15° توجد في الربع الأول

$$= +\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}$$

عوّض $\cos 30^\circ$ بـ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

حاول أن تحل

7 استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد $\cos 15^\circ$

مثال (8)

إذا كانت: $180^\circ < \theta < 270^\circ$ ، $\sin\theta = -\frac{24}{25}$ ،

فأوجد $\sin\frac{\theta}{2}$.

الحل:

نوجد أولًا $\cos\theta$

متطابقة فيثاغورث

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

عوّض

$$\cos^2\theta + \left(\frac{-24}{25}\right)^2 = 1$$

$$\cos^2\theta = \frac{49}{625}$$

لأن θ في الربع الثالث

$$\cos\theta = \frac{-7}{25}$$

نوجد الآن $\frac{\theta}{2}$

$$\because\ 180^\circ < \theta < 270^\circ$$

ومنه $\frac{\theta}{2}$ في الربع الثاني

$$\therefore\ 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ$$

متطابقة نصف الزاوية

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

عوّض، اختر الجذر الموجب، لأن $\frac{\theta}{2}$ في الربع الثاني

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{-7}{25}\right)}{2}} = \frac{4}{5}$$

حاول أن تحل

8 في المثال (8)، أوجد: $\cos\frac{\theta}{2}$, $\tan\frac{\theta}{2}$

تمرَّنْ
9−5

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

Double−Angle and Half−Angle Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1−4)، اكتب المقدار بدلالة $\sin x$ أو $\cos x$.

(1) $\sin 2x + \cos x$

(2) $\sin 2x + \cos 2x$

(3) $\cos 3x$

(4) $\cos 4x$

في التمارين (5−7)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(5) $2\csc 2x = \csc^2 x \tan x$

(6) $\sin 3x = (\sin x)(4\cos^2 x - 1)$

(7) $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$

في التمارين (8−10)، استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد كل من:

(8) $\sin 15^{\circ}$

(9) $\tan 195^{\circ}$

(10) $\cos 75^{\circ}$

(12) إذا كانت $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ ، $\sin x = -\frac{12}{13}$ فأوجد $\sin\frac{x}{2}$

رياضيات وبس الحادي عشر علمي الفصل الدراسي الثاني

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$ (a) (b)

(3) $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ (a) (b)

(4) $\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1$ (a) (b)

(5) $\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$ (a) (b)

في التمارين (6–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $2\cos^2 \frac{x}{2}$ تساوي:

(a) $\frac{1+\cos x}{2}$ (b) $1+\cos x$

(c) $1+\cos 2x$ (d) $\frac{1-\cos 2x}{2}$

(7) $\cos\frac{\pi}{8}$ تساوي:

(a) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ (b) $\sqrt{2}-1$

(c) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (d) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$

(8) إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\cos\theta = \frac{-7}{25}$ فإن $\cos\frac{\theta}{2}$ يساوي:

(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{-2}{5}$

(c) $\frac{-3}{5}$ (d) $\frac{3}{5}$

اختبار الوحدة التاسعة

في التمارين (1–3)، حوّل المقادير إلى sin وcos. اكتب إجابتك على صورة كسر واحد.

(1) $\tan x + \cot x$

(2) $\sin x \cot x - \cos x \tan x$

(3) $\dfrac{\sec y}{\cos y} - \dfrac{\sin y}{\csc y \cos^2 y}$

في التمارين (4–8)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(4) $\dfrac{\cos x}{1+\sin x} + \dfrac{\cos x}{1-\sin x} = 2\sec x$

(5) $\dfrac{1-3\cos x - 4\cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1-4\cos x}{1-\cos x}$

(6) $\sqrt{1-\cos x} \times \sqrt{1+\cos x} = \sin x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

(7) $\dfrac{2\sin x \times \cos x}{1+\cos^2 x - \sin^2 x} = \tan x$

(8) $\dfrac{1+2\sin x \times \cos x}{\sin x + \cos x} = \sin x + \cos x$

في التمارين (9–13)، استخدم متطابقات المجموع والفرق في إيجاد القيمة الدقيقة.

(9) $\tan \dfrac{5\pi}{12}$

(10) $\sin \dfrac{-\pi}{12}$

(11) $\cos(x-y) - \cos(x+y)$

(12) $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

(13) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

(14) **(a)** أوجد ناتج: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{3}$

(b) أوجد القيمة الصحيحة لكلّ مما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

(1) $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ **(2)** $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

(15) أوجد قيمة $\sin 2x$، إذا كان $\sin x - \cos x = \dfrac{1}{5}$

(16) أوجد: $\cos 2x$، إذا كان $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$