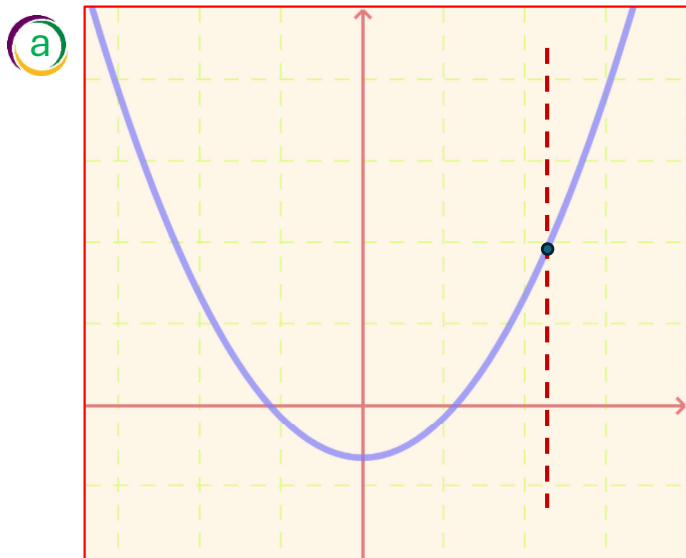


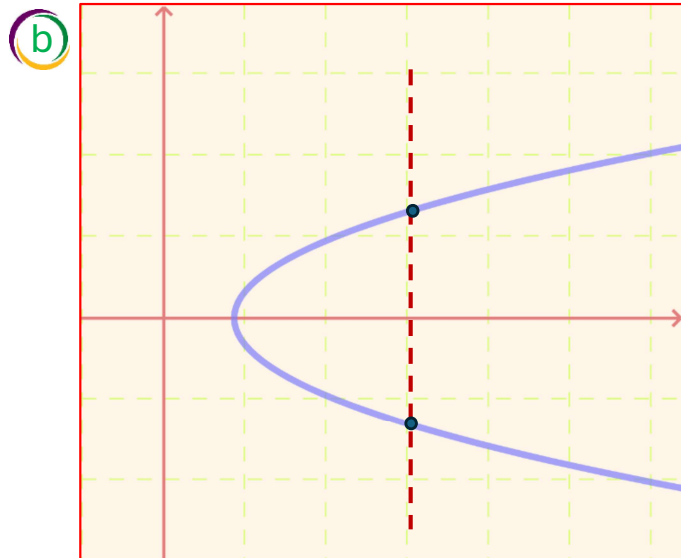
الوحدة الثانية : الدوال الحفيفية

2-1 : مجال الدالة

مثال (1) استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان بيان كل علاقة مما يلي يمثل دالة أم لا :



البيان يمثل دالة
كل مستقيم رأسي يقطع المنحنى بنقطة واحدة
على الأكثر



البيان لا يمثل دالة
لأنه يمكن رسم على الأقل مستقيم رأسي واحد
يقطع المنحنى بأكثر من نقطة واحدة

قواعد تحديد مجال الدالة

1 مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

مثال (2) أوجد مجال كل دالة مما يلي :

(a) $f(x) = 2x + 1$

الحل : f دالة كثيرة حدود (حدودية) مجالها $\mathbb{R}$

(b) $g(x) = x^2 + 3x + 1$

الحل : g دالة كثيرة حدود (حدودية) مجالها $\mathbb{R}$

② مجال الدالة الحدودية النسبية هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ عدا مجموعة أصفار المقام

مثال (3) أوجد مجال كل دالة مما يلي :

(a) $f(x) = \frac{2x + 5}{x - 4}$

الحل : f دالة حدودية نسبية

بمجالها $\mathbb{R} - \{\text{أصفار المقام}\}$

$$\text{المقام} \rightarrow x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = 4$$

مجال f هو $\mathbb{R} - \{4\}$

(b) $g(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$

الحل : g دالة حدودية نسبية

بمجالها $\mathbb{R} - \{\text{أصفار المقام}\}$

$$\text{المقام} \rightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ أو } x = 1$$

مجال g هو $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

(c) $h(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 4}$

الحل : h دالة حدودية نسبية

بمجالها $\mathbb{R} - \{\text{أصفار المقام}\}$

$$\text{المقام} \rightarrow x^2 + 4 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

مجال h هو $\mathbb{R}$

تطبيق أوجد مجال كل دالة مما يلي :

① $f_1(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$

الحل : f دالة كثيرة حدود (حدودية)

مجال f_2 هو : $\mathbb{R}$

② $f_2(x) = -\frac{3x - 1}{5 - 2x}$

الحل : f_1 دالة حدودية نسبية بمجالها $\mathbb{R} - \{\text{أصفار المقام}\}$

$$\text{المقام} \rightarrow 5 - 2x = 0 \Rightarrow -2x = -5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

مجال f_1 هو $\mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{2}\right\}$

③ مجال الدالة $f(x) = |x|$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

④ مجال الدالة $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد زوجي (دالة الجذر التربيعي)

هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق $g(x) \geq 0$

مثال (4) أوجد مجال كل دالة مما يلي :

(a) $f(x) = \sqrt{3x - 4}$

الحل : f دالة جذر تربيعي بمجالها بحيث يتحقق

$$3x - 4 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 4 \Rightarrow x \geq \frac{4}{3}$$

مجال f هو : $\left[\frac{4}{3}, \infty\right)$

(b) $g(x) = \sqrt{6 - 2x}$

الحل : g دالة جذر تربيعي بمجالها بحيث يتحقق

$$6 - 2x \geq 0 \Rightarrow -2x \geq -6 \xrightarrow{\times(-1)} 2x \leq 6$$

$$\Rightarrow x \leq 3$$

مجال g هو $(-\infty, 3]$

٥ مجال الدالة $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد فردي (دالة الجذر التكعيبي) هو مجال الدالة g

(مثال 5) أوجد مجال كل دالة مما يلي :

(a) $f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$

الحل: f دالة جذر تكعيبي لدالة كثيرة حدود
مجالها هو $\mathbb{R}$

(b) $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2-5x}{x}}$

الحل: g دالة جذر تكعيبي لدالة حدودية نسبية
مجالها هو $\mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R} - \{\text{أصفار المقام}\}$

٦ مجال الدالة $f(x) = g(x) \pm h(x)$ هو $\text{مجال } g \cap \text{مجال } h$

(مثال 6) أوجد مجال كل دالة مما يلي :

(a) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4 + \sqrt{x-9}$

الحل :

نفرض : $a(x) = x^3 - 4x^2 - 4$

a دالة كثيرة حدود مجالها هو $\mathbb{R}$

نفرض : $b(x) = \sqrt{x-9}$

b دالة جذر تربيعي مجالها بحيث يتحقق

$x-9 \geq 0 \Rightarrow x \geq 9$

مجال b هو $[9, \infty)$

مجال $f = \text{مجال } a \cap \text{مجال } b = (f(x) = a(x) + b(x))$

مجال f هو : $D_f = \mathbb{R} \cap [9, \infty) = [9, \infty)$

(b) $g(x) = 2x^3 - 4x - \sqrt{2x-6}$

الحل :

نفرض : $a(x) = 2x^3 - 4x$

a دالة كثيرة حدود مجالها هو $\mathbb{R}$

نفرض : $b(x) = \sqrt{2x-6}$

b دالة جذر تربيعي مجالها بحيث يتحقق

$2x-6 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 6 \Rightarrow x \geq 3$

مجال b هو $[3, \infty)$

مجال $g = \text{مجال } a \cap \text{مجال } b = (g(x) = a(x) - b(x))$

مجال g هو : $D_g = \mathbb{R} \cap [3, \infty) = [3, \infty)$

7 مجال الدالة $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ هو مجال $g \cap$ مجال h

مثال (7) أوجد مجال كل دالة مما يلي :

(a) $f(x) = (2x^2 + x)\sqrt{8 - 2x}$

الحل :

نفرض : $a(x) = 2x^2 + x$

a دالة كثيرة حدود مجالها هو $\mathbb{R}$

نفرض : $b(x) = \sqrt{8 - 2x}$

b دالة جذر تربيعي مجالها بحيث يتحقق

$$8 - 2x \geq 0 \Rightarrow -2x \geq -8 \xrightarrow{\times(-1)} 2x \leq 8 \Rightarrow x \leq 4$$

مجال b هو $(-\infty, 4]$

مجال $f = (f(x) = a(x) \times b(x))$ مجال $a \cap$ مجال b

$D_f = \mathbb{R} \cap (-\infty, 4] = (-\infty, 4]$

(b) $g(x) = (\sqrt[3]{x^2 - 2})(\sqrt{2x - 3})$

الحل :

نفرض : $a(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2}$

a دالة جذر تكعيبي لكثيرة حدود مجالها هو $\mathbb{R}$

نفرض : $b(x) = \sqrt{2x - 3}$

b دالة جذر تربيعي مجالها بحيث يتحقق

$$2x - 3 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 3 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

مجال b هو $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$

مجال $g = (g(x) = a(x) \times b(x))$ مجال $a \cap$ مجال b

مجال g هو : $D_g = \mathbb{R} \cap \left[\frac{3}{2}, \infty\right) = \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$

٨ مجال الدالة $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ هو (مجال $g \cap$ مجال h) / مجموعة أصفار المقام.

مثال (8) أوجد مجال كل دالة مما يلي :

(a) $f(x) = \frac{\sqrt{3x-4}}{x-2}$

الحل :

① نوجد مجال دالة البسط

نفرض : $a(x) = \sqrt{3x-4}$

a دالة جذر تربيعي مجالها بحيث يتحقق

$$3x - 4 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 4$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{4}{3}$$

مجال a هو $\left[\frac{4}{3}, \infty\right)$

② نوجد مجال دالة المقام

نفرض : $b(x) = x - 2$

b دالة كثيرة حدود

مجال b هو $\mathbb{R}$

③ نوجد أصفار المقام

$x - 2 = 0 \rightarrow$ المقام

$$\Rightarrow x = 2$$

مجال $f = \left(\text{مجال } a \cap \text{مجال } b \right) / \{ \text{أصفار المقام} \} = \left(\text{مجال } a \cap \text{مجال } b \right) / \{ 2 \}$

مجال f هو : $D_f = \left(\left[\frac{4}{3}, \infty\right) \cap \mathbb{R} \right) - \{ 2 \} = \left[\frac{4}{3}, \infty\right) - \{ 2 \}$

(b) $g(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}}{x^2-9}$

الحل :

① نوجد مجال دالة البسط

نفرض : $a(x) = \sqrt[3]{1+x}$

a دالة جذر تكعيبي لكثيرة حدود

مجال a هو $\mathbb{R}$

② نوجد مجال دالة المقام

نفرض : $b(x) = x^2 - 9$

b دالة كثيرة حدود

مجال b هو $\mathbb{R}$

③ نوجد أصفار المقام

$x^2 - 9 = 0 \rightarrow$ المقام

$$\Rightarrow (x-3)(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ أو } x = -3$$

مجال $g = \left(\text{مجال } a \cap \text{مجال } b \right) / \{ \text{أصفار المقام} \} = \left(\text{مجال } a \cap \text{مجال } b \right) / \{ 3, -3 \}$

مجال g هو : $D_g = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) - \{ 3, -3 \} = \mathbb{R} - \{ 3, -3 \}$

تطبيق أوجد مجال كل دالة مما يلي :

① $f_1(x) = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$

الحل :

نفرض : $a(x) = \frac{3}{x+1}$

a دالة حدودية نسبية مجالها {أصفار المقام} $\mathbb{R} - \{ -1 \}$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$ المقام $\rightarrow$

مجال a هو $\mathbb{R} - \{ -1 \}$

نفرض : $b(x) = \frac{2}{x^2-1}$

b دالة حدودية نسبية مجالها {أصفار المقام} $\mathbb{R} - \{ 1, -1 \}$

$x^2-1=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)=0$ المقام $\rightarrow$

$x=1$ أو $x=-1$

مجال b هو $\mathbb{R} - \{ 1, -1 \}$

مجال $f_1 = \mathbb{R} - \{ -1 \} \cap \mathbb{R} - \{ 1, -1 \} = \mathbb{R} - \{ 1, -1 \}$

$D_{f_1} = \mathbb{R} - \{ -1 \} \cap \mathbb{R} - \{ 1, -1 \} = \mathbb{R} - \{ 1, -1 \}$

② $f_2(x) = \frac{\sqrt{5-4x}}{x^2+4}$

الحل :

① نوجد مجال دالة البسط

نفرض : $a(x) = \sqrt{5-4x}$

a دالة جذر تربيعي مجالها بحيث يتحقق

$5-4x \geq 0 \Rightarrow -4x \geq -5$

$\xrightarrow{\times(-1)} 4x \leq 5 \Rightarrow x \leq \frac{5}{4}$

مجال a هو $(-\infty, \frac{5}{4}]$

② نوجد مجال دالة المقام

نفرض : $b(x) = x^2+4$

b دالة كثيرة حدود

مجال b هو $\mathbb{R}$

③ نوجد أصفار المقام

$x^2+4 \neq 0$ المقام $\rightarrow$

$\forall x \in \mathbb{R}$

لا يوجد أصفار للمقام

مجال $f_2 = \left((-\infty, \frac{5}{4}] \cap \mathbb{R} \right) - \{ \text{أصفار المقام} \} = (-\infty, \frac{5}{4}]$

مجال f_2 هو : $D_{f_2} = \left((-\infty, \frac{5}{4}] \cap \mathbb{R} \right) - \{ \} = (-\infty, \frac{5}{4}]$

$$\textcircled{3} \quad f_3(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{3 + x}}$$

الحل :

① نوجد مجال دالة البسط

نفرض : $a(x) = 2x - 1$
 a دالة كثيرة حدود
 مجال a هو $\mathbb{R}$

② نوجد مجال دالة المقام

نفرض : $b(x) = \sqrt{3 + x}$
 b دالة جذر تربيعي مجالها بحيث يتحقق
 $3 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$
 مجال b هو $[-3, \infty)$

③ نوجد أصفار المقام

$\sqrt{3 + x} = 0 \rightarrow$ المقام
 $\Rightarrow 3 + x = 0$
 $\Rightarrow x = -3$

مجال $f_3 = \left(\text{مجال } a \cap \text{مجال } b \right) / \{ \text{أصفار المقام} \} = \left(f_3(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \right)$

مجال f_3 هو : $D_{f_3} = (\mathbb{R} \cap [-3, \infty)) - \{-3\} = (-3, \infty)$

$$\textcircled{4} \quad f_4(x) = \frac{\sqrt{-2x} + 3}{x - 1}$$

الحل :

① نوجد مجال دالة البسط

نفرض : $a(x) = \sqrt{-2x} + 3$
 $a(x) = a_1(x) + a_2(x)$
 $a_1(x) = \sqrt{-2x}$
 a_1 دالة جذر تربيعي مجالها بحيث يتحقق

$$-2x \geq 0 \xrightarrow{\div (-2) < 0} x \leq 0$$

مجال a_1 هو $(-\infty, 0]$

$$a_2(x) = 3$$

a_2 دالة كثيرة حدود (ثابتة) مجال a_2 هو $\mathbb{R}$

مجال a هو $\mathbb{R} \cap (-\infty, 0] = (-\infty, 0]$

② نوجد مجال دالة المقام

نفرض : $b(x) = x - 1$
 b دالة كثيرة حدود
 مجال b هو $\mathbb{R}$

③ نوجد أصفار المقام

$x - 1 = 0 \rightarrow$ المقام
 $\Rightarrow x = 1$

مجال $f_4 = \left(\text{مجال } a \cap \text{مجال } b \right) / \{ \text{أصفار المقام} \} = \left(f_4(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \right)$

مجال f_4 هو : $D_{f_4} = ((-\infty, 0] \cap \mathbb{R}) - \{1\} = (-\infty, 0]$

البنود الموضوعية 2-1

في التمارين (1 - 5) ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مجال الدالة $f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$ هو $\mathbb{R}$

(a) (b)

(2) مجال الدالة $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-6}}$ هو $[3, \infty)$

(a) (b)

(3) مجال الدالة $f(x) = \sqrt{-x}$ هو $(-\infty, 0]$

(a) (b)

(4) مجال الدالة $f(x) = \frac{1}{x^2} \sqrt{x+3}$ هو $[-3, \infty)$

(a) (b)

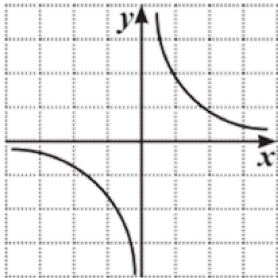
(5) مجال الدالة $f(x) = |x| - 2$ هو $\mathbb{R}$

(a) (b)

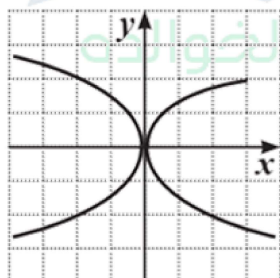
في التمارين (6 - 11) ظلل الرمز الدال على الإجابة صحيحة.

(6) أي مما يلي لا يمثل بيان دالة :

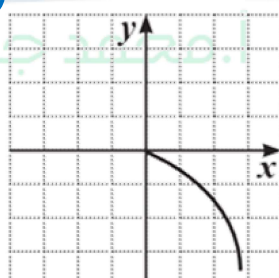
(a)



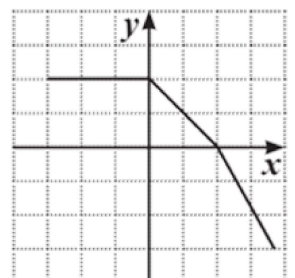
(b)



(c)



(d)



(7) مجال الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$ هو :

(a) $\mathbb{R}$

(b) $\mathbb{R}/\{1\}$

(c) $\mathbb{R}/\{-1, 1\}$

(d) $\mathbb{R}/\{-1\}$

(8) مجال الدالة $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ هو :

(a) $\mathbb{R}/\{0\}$

(b) $[0, \infty)$

(c) $(-\infty, 0)$

(d) $(0, \infty)$

(9) مجال الدالة $f(x) = \frac{x-1}{x-\sqrt{x}}$ هو :

(a) $\mathbb{R}/\{1\}$

(b) $\mathbb{R}/\{0, 1\}$

(c) $\mathbb{R}/\{0\}$

(d) $(0, \infty)/\{1\}$

(10) مجال الدالة $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ هو :

- (a) $(0, \infty)$ (b) $[1, \infty)$ (c) $(-1, \infty)$ (d) $[-1, \infty)/\{0\}$

(11) لتكن $f(x) = x\sqrt{x}$, $g(x): [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ فإن مجال الدالة $f \cdot g$ هو :

- (a) $[-2, 2]$ (b) $[0, 2]$ (c) $(0, 2)$ (d) ليس أيّاً مما سبق صحيحاً

2-2 : الدوال التربيعية و نمذجتها

(مثال 1) حدد ما إذا كانت الدالة خطية أم تربيعية:

(a) $f(x) = 2x(x - 3) = 2x^2 - 6x$ دالة تربيعية

(b) $f(x) = (x - 2)(2x + 1) = 2x^2 + x - 2x - 2 = 2x^2 - x - 2$ دالة تربيعية

(c) $f(x) = 3(x^2 - 4x) - 3x^2 + 4 = 3x^2 - 12x - 3x^2 + 4 = -12x + 4$ دالة خطية

البنود الموضوعية 2-2

في التمارين (1 - 5) ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة $f(x) = kx^2 + x - 3$, $k \in \mathbb{Z}$ يمكن أن تكون خطية

(2) الدالة $f(x) = x + \frac{|x|}{x}$ هي دالة خطية

(3) النقطة $A(1, 6)$ تنتمي إلى منحنى الدالة : $f(x) = (3x)(2x) + 6$

(4) الدالة $y = x(1 - x) - (1 - x^2)$ هي دالة خطية

(5) الدالة $f(x) = \pi^2 - x$ هي دالة تربيعية