

قواعد الرياضيات
الفصل الدراسي الأول
للصف الثاني عشر متقدم

Mr.Magdy Elsayed

056/2721972



العمليات الحسابية



$$a(b + c) = ab + ac$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a+c}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

الأسس والجذور

$$x^m x^n = x^{m+n}$$

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

$$(xy)^n = x^n y^n$$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}$$

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$



تذكر ان

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$$

$$(\sqrt{x})^2 = x$$

تحليل المقادير الجبرية

1- تحليل العامل المشترك

العامل المشترك لعددين هو أكبر عدد يقسم العددين معًا في نفس الوقت

دون وجود باقي القسمة وبالنسبة للمتغيرات نأخذ أصغر أس مشترك

$$3x^3y - 9x^2y^2 - 12xy^4 = 3xy(x^2 - 3xy - 4y^3)$$

2- الفرق بين مربعين

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

3- فرق بين مكعبين

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

4- مجموع مكعبين

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + ab + b^2)$$

5- المقدار الثلاثي

$$ax^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$$

$$mn = \frac{c}{a}, m + n = \frac{-b}{a} \quad \text{حيث}$$

ويمكن استخدام الآلة الحاسبة (mode 5 3)

6- التحليل بالتقسيم

$$ax + bx + ay + by = (a + b)(x + y)$$

الضرب في المرافق

المقدار الجبري	المرافق	حاصل الضرب
$x - a$	$x + a$	$x^2 - a^2$
$\sqrt{x} + a$	$\sqrt{x} - a$	$x - a^2$
$\sqrt{x - b} - a$	$\sqrt{x - b} + a$	$x - b - a^2$

إذا كان

مرافق الجذر التكعيبي

المقدار الجبري	المرافق التكعيبي	نتائج الضرب
$\sqrt[3]{x} - 2$	$(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4$	$x - 8$
$\sqrt[3]{x - 1} - \sqrt[3]{x + 6}$	$(\sqrt[3]{x - 1})^2 + (\sqrt[3]{x - 1} - \sqrt[3]{x + 6})^2 + (\sqrt[3]{x + 6})^2$	$x - 1 - (x + 6)$

دالة المطلق

$$|3| = 3$$

$$|-3| = 3$$

$$\frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right| \quad |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$[3] = 3$$

$$[3.9] = 3$$

$$[-3.9] = -4$$

دالة الصحيح

$$[x + n] = [x] + n \quad \text{حيث } n \text{ عدد صحيح}$$

المسافة بين نقطتين ونقطة المنتصف

• المسافة بين النقطتين $P_2(x_2, y_2), P_1(x_1, y_1)$ هي

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

• إحداثي نقطة منتصف القطعة المستقيمة P_1P_2

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

• ميل المستقيم المار بالنقطتين $P_2(x_2, y_2), P_1(x_1, y_1)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad m = \tan \theta$$

حيث θ الزاوية التي يصنعها المستقيم مع المحور x الموجب , $0 < \theta < \pi$

• معادلة المستقيم المار بالنقطة $P_1(x_1, y_1)$ وميله m

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

قوانين اللوغاريتمات

إذا كانت b, x, y أعداداً حقيقية موجبة , وكان p عدداً حقيقياً , حيث $b \neq 1$

فإن: $\ln 1 = 0$ ▪ $\log_b 1 = 0$

$\ln e = 1$ ▪ $\log_b b = 1$

$\ln e^x = x$ ▪ $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$ **قانون الضرب**

$\ln x^b = b \ln x$ ▪ $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$ **قانون القسمة**

$e^{\ln x} = x$ ▪ $\log_b x^p = p \log_b x$ **قانون القوة**

▪ $\log_b b^p = p$

▪ $b^{\log_b x} = x$

▪ $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$ ▪ $b^x = e^{x \ln b}$ **خاصية تغيير الأساس**

العلاقة بين الصورة الأسية واللوغاريتمية

إذا كان $b \neq 1, b > 0, x > 0$

الصورة الأسية

$$b^y = x$$

↑ ↑
الأس
الأساس

الصورة اللوغاريتمية

$$\log_b x = y$$

↑ ↑
الأس
الأساس

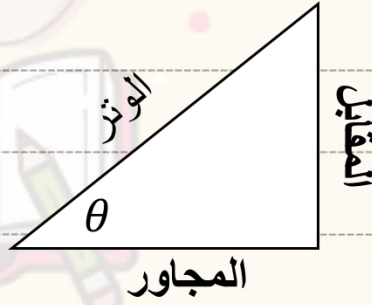
حساب المثلثات

قياسات الزوايا

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$



$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$$

متطابقات نسبية

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

متطابقات قبلية

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}, \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$$

متطابقات المقلوب

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

متطابقات فيثاغورس

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

المتطابقات المثلثية

متطابقات الزاويتين المتتامتين

$$\sin \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$\cos \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$\tan \theta = \cot \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$\cot \theta = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$\sec \theta = \csc \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$\csc \theta = \sec \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

تكون المعادلة متطابقة إذا كان طرفها الأيسر مساوياً لطرفها الأيمن لجميع قيم المتغير المعرف في كلا طرفي المعادلة وتسمى متطابقة مثلثية لأنها تحتوي على دوال مثلثية

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

متطابقات الدوال الزوجية والفردية

$$\csc(-\theta) = -\csc \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec \theta$$

$$\cot(-\theta) = -\cot \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

متطابقات المجموع والفرق

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

متطابقات ضعف الزاوية

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

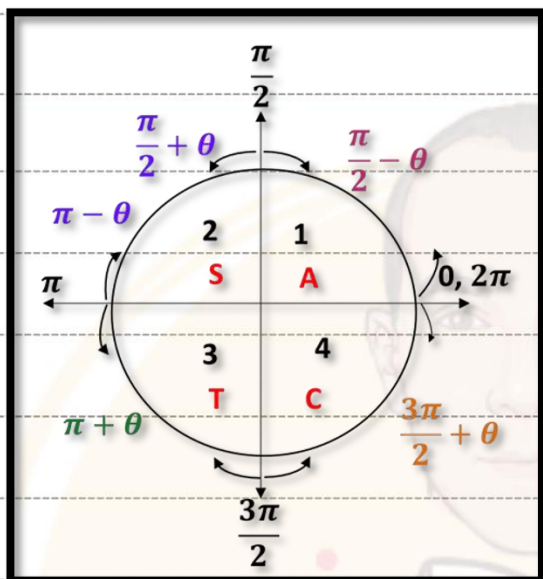
$$\square \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x}$$

أوجد كلا مما يلي:

مثال

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

متطلبات قباية



النسبة المثلثية تتغير مع مراعاة الإشارة في ذلك الربع

$$\left(\begin{array}{c} \sin \\ \cos \\ \tan \end{array} \right) \left(\frac{\pi}{2} \pm \theta \right) \quad (1)$$

$$\sin x \leftrightarrow \cos x$$

$$\tan x \leftrightarrow \cot x$$

$$\rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$$

$$\rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$\rightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos \theta$$

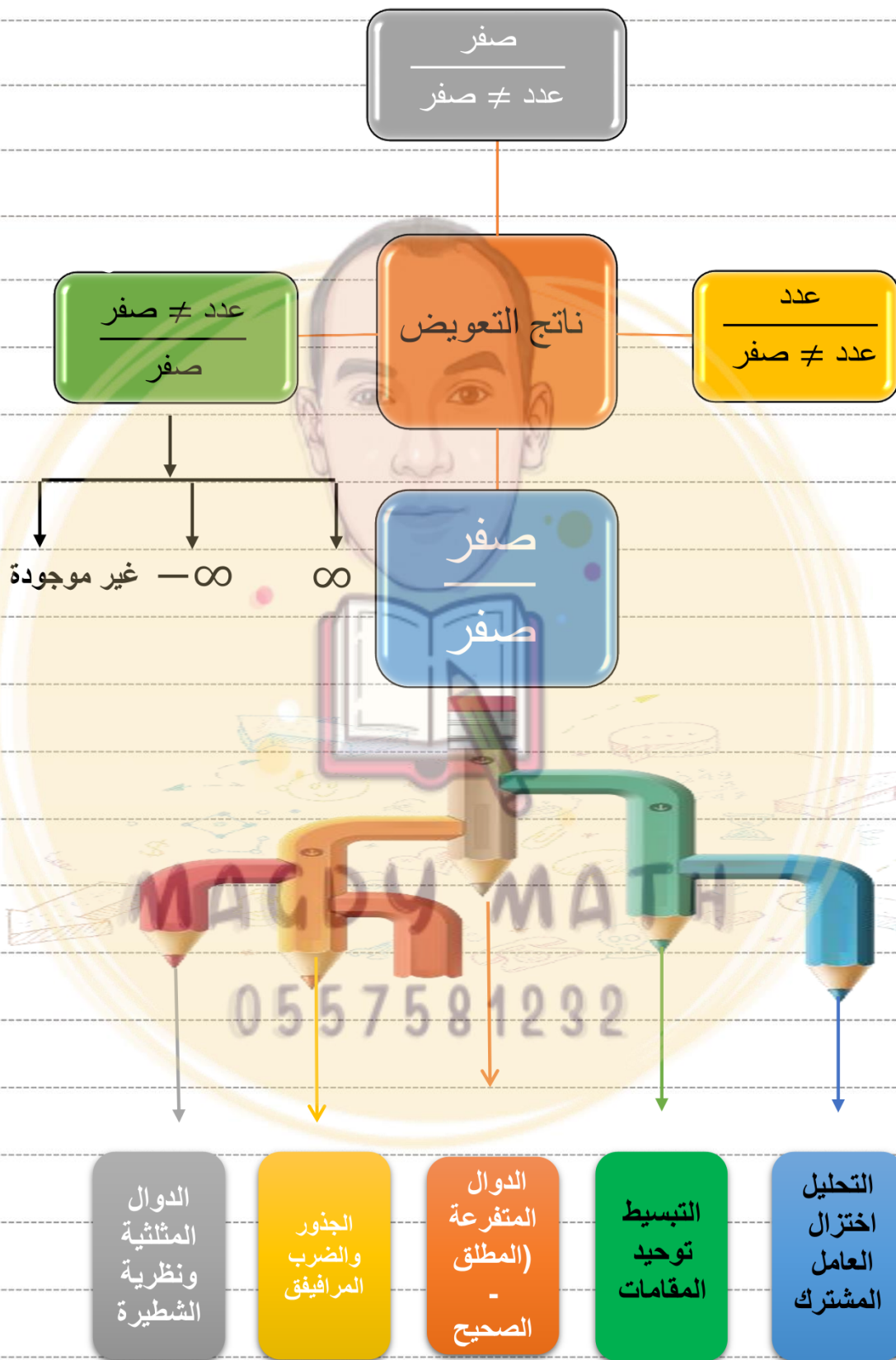
النسبة المثلثية لا تتغير مع مراعاة الإشارة في ذلك الربع

$$\left(\begin{array}{c} \sin \\ \cos \\ \tan \\ \cot \end{array} \right) \left(\pi \pm \theta \right) \quad (2)$$

$$\rightarrow \sin(\pi + \theta) = \sin \theta$$

$$\rightarrow \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

في كل مسائل النهايات تتم خطوة التعويض المباشر ومن خلال ناتج التعويض نحدد



$$\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \text{ if } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n$$

تذكر أن:

$$\frac{0}{0} = \pm\infty, \quad \frac{a}{\pm\infty} = 0, \quad \infty^\infty = \infty$$

$$a^\infty = \begin{cases} \infty & \text{if } a > 1 \\ 0 & \text{if } a < 1 \end{cases}$$

حيث $a \neq 0$

حيث $a > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^m}{bx^n}$$

$$m < n$$

$$0$$

$$m = n$$

$$a$$

$$8$$

$$m > n$$

$$\pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty \text{ and } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty \text{ and } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\text{If } r > 0 \text{ then } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^r} = 0$$

$$\text{If } r > 0 \text{ \& } x^r \text{ is real for } x < 0 \text{ then } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^r} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^r = \infty \text{ for even } r$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^r = \infty \text{ \& } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^r = -\infty \text{ for odd } r$$

x

$\sin x$

$\tan x$

$\sin^{-1} x$

$\tan^{-1} x$

$\approx$
بشرط
 $\lim_{x \rightarrow 0}$

النهايات في الدوال المثلثية العكسية

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow \infty} \cot^{-1} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \cot^{-1} x = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \csc^{-1} x = 0$$



نظرية الإحاطة (الشطيرة)

إذا كانت الدوال $h(x), g(x), f(x)$ لها نهايات عندما تؤول إلى a وكان

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l \text{ وإذا كانت}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \text{ فإن}$$

تذكر ان:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-\infty \leq \tan x \leq \infty$$

قواعد الاشتقاق

القاعدة	التعميم
عدد ثابت	$\frac{d}{dx} [c] = 0$
الوحدة	$\frac{d}{dx} [x] = 1$
قاعدة القوة	$\frac{d}{dx} [x^n] = nx^{n-1}$
الدوال الأسية	$\frac{d}{dx} [e^x] = e^x$ $\frac{d}{dx} [a^x] = \ln(a)a^x$
اللوغاريتمات	$\frac{d}{dx} [\ln(x)] = \frac{1}{x}$ $\frac{d}{dx} [\log_a(x)] = \frac{1}{x \ln(a)}$
الدوال المثلثية	$\frac{d}{dx} [\sin(x)] = \cos(x)$ $\frac{d}{dx} [\cos(x)] = -\sin(x)$ $\frac{d}{dx} [\tan(x)] = \sec^2(x)$ $\frac{d}{dx} [\cot(x)] = -\csc^2(x)$ $\frac{d}{dx} [\sec(x)] = \sec(x)\tan(x)$ $\frac{d}{dx} [\csc(x)] = -\csc(x)\cot(x)$
الدوال المثلثية العكسية	$\frac{d}{dx} [\sin^{-1}(x)] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{d}{dx} [\cos^{-1}(x)] = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{d}{dx} [\tan^{-1}(x)] = \frac{1}{1+x^2}$ $\frac{d}{dx} [\cot^{-1}(x)] = \frac{-1}{1+x^2}$ $\frac{d}{dx} [\sec^{-1}(x)] = \frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}$ $\frac{d}{dx} [\csc^{-1}(x)] = \frac{-1}{ x \sqrt{x^2-1}}$
	$\frac{d}{dx} [\sin(g(x))] = \cos(g(x))g'(x)$ $\frac{d}{dx} [\cos(g(x))] = -\sin(g(x))g'(x)$ $\frac{d}{dx} [\tan(g(x))] = \sec^2(g(x))g'(x)$ $\frac{d}{dx} [\cot(g(x))] = -\csc^2(g(x))g'(x)$ $\frac{d}{dx} [\sec(g(x))] = \sec(g(x))\tan(g(x))g'(x)$ $\frac{d}{dx} [\csc(g(x))] = -\csc(g(x))\cot(g(x))g'(x)$
	$\frac{d}{dx} [\sin^{-1}(g(x))] = \frac{1}{\sqrt{1-(g(x))^2}}g'(x)$ $\frac{d}{dx} [\cos^{-1}(g(x))] = \frac{-1}{\sqrt{1-(g(x))^2}}g'(x)$ $\frac{d}{dx} [\tan^{-1}(g(x))] = \frac{1}{1+(g(x))^2}g'(x)$ $\frac{d}{dx} [\cot^{-1}(g(x))] = \frac{-1}{1+(g(x))^2}g'(x)$ $\frac{d}{dx} [\sec^{-1}(g(x))] = \frac{1}{ g(x) \sqrt{(g(x))^2-1}}g'(x)$ $\frac{d}{dx} [\csc^{-1}(g(x))] = \frac{-1}{ g(x) \sqrt{(g(x))^2-1}}g'(x)$

الضرب بعدد ثابت

$$\frac{d}{dx} [cf(x)] = cf'(x)$$

الجمع والطرح

$$\frac{d}{dx} [f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$$

حاصل ضرب

$$\frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

القسمة

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

المركبة

$$\frac{d}{dx} [f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

العكسية

$$\frac{d}{dx} [f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

التقريب الخطي

التقريب الخطي (المماس) للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

طريقة نيوتن

لتقريب اصفار الدالة

$$\therefore x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{حيث } n = 0, 1, 2, 3$$

قاعدة لوبيتال

$$\text{If } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ or } \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \text{ then } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

توجد كميات أخرى غير معرفة ولكن يجب تعديل الدالة لتصبح دالة نسبية نهايتها بالتعويض $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

$$\infty - \infty, 0 \times \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

بالتوفيق للجميع

ونسألكم الدعاء