

6-3 حل الأنظمة الخطية باستخدام المعكوسات وقاعدة كرامر

ورقة عمل الثاني عشر العام

1- حل أنظمة المعادلات باستخدام المصفوفات العكسية. 2- حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر.

في هذا الدرس سوف نتعلم:

إذا تساوى عدد المعادلات مع المتغيرات في نظام المعادلات الخطية، فإن مصفوفة المعاملات الخاصة به تكون مربعة ويقال حينئذ إن النظام **نظام مربع**. وإذا كانت مصفوفة المعاملات المربعة هذه لها معكوس، فحينها يكون للنظام حل وحيد.

المفهوم الأساسي الأنظمة الخطية المربعة التي لها معكوس

لنفرض أن A هو مصفوفة المعاملات لنظام n من المعادلات الخطية في n من المتغيرات تحدها المعادلة $AX = B$. حيث X هو مصفوفة المتغيرات و B هو مصفوفة الثوابت. إذا كانت A لها معكوس، يكون لنظام المعادلات حل وحيد تحده المعادلة $X = A^{-1}B$

إيجاد حل نظام 2×2 باستخدام مصفوفة عكسية

Use an inverse matrix to solve the system of equations, if possible.

استخدم المصفوفة العكسية لحل نظام المعادلات، إن أمكن.

$$2x - 3y = -1$$

$$-3x + 5y = 3$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1(5) + 3(3) \\ -1(3) + 3(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

حل النظام هو $(4, 3)$

$$-3x + 9y = 36$$

$$7x - 8y = -19$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} = -39$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-39} \begin{bmatrix} -8 & -9 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{39} & \frac{3}{13} \\ \frac{7}{39} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{8}{39} & \frac{3}{13} \\ \frac{7}{39} & \frac{1}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36 \\ -19 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 36(\frac{8}{39}) + (-19)(\frac{3}{13}) \\ 36(\frac{7}{39}) + (-19)(\frac{1}{13}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

حل النظام هو $(3, 5)$

لحل نظام معادلات 3×3 باستخدام المصفوفة العكسية، استخدم الحاسبة.

إيجاد حل نظام 3×3 باستخدام مصفوفة عكسية

① سند x 10 %

② سند y 8 %

③ سند z 6 %

المعرفة المالية تستثمر بدرجة AED 20,000 بشراء ثلاثة سندات ذات عوائد سنوية متوقعة نسبتهما 10% و 8% و 6%. وتكون الاستثمارات ذات العائد المتوقع الأعلى أكثر خطورة غالباً من الاستثمارات الأخرى. وترغب بدرجة في تحقيق متوسط عائد سنوي يبلغ AED 1340. فإذا كانت تريد استثمار مبلغ في السند ذي العائد 6% يساوي ثلاثة أضعاف المبلغ المستثمر في السنتين الآخرين مجتمعين، فكم يكون المبلغ اللازم استثماره في كل سند؟

$$x + y + z = 20000$$

$$0.10x + 0.08y + 0.06z = 1340$$

$$3x + 3y - z = 0$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.10 & 0.08 & 0.06 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3.25 & 50 & -0.25 \\ 3.5 & -50 & 0.5 \\ 0.75 & 0 & -0.25 \end{bmatrix}$$

بالآلة الحاسبة

$$AX = B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$= \begin{bmatrix} -3.25 & 50 & -0.25 \\ 3.5 & -50 & 0.5 \\ 0.75 & 0 & -0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20000 \\ 1340 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20000(-3.25) + 1340(50) + 0(-0.25) \\ 20000(3.5) + 1340(-50) + 0(0.5) \\ 20000(0.75) + 1340(0) + 0(-0.25) \end{bmatrix}$$

استقرت النتيجة :

$$= \begin{bmatrix} 2000 \\ 3000 \\ 15000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

دعم 2000 في السند ذو العائد 10 %
دعم 3000 في السند ذو العائد 8 %
دعم 15000 في السند ذو العائد 6 %

المفهوم الأساسي قاعدة كرامر

لنفرض أن A هو مصفوفة المعاملات في نظام n من المعادلات الخطية في n من المتغيرات، وتحدد المعادلة $AX = B$. فإذا كان $\det(A) \neq 0$ ، فإن الحل الوحيد للنظام تعبر عنه المعادلة

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

حيث يتم الحصول على A_i باستبدال العمود i^{th} الخاص بـ A بعمود الحدود الثابتة B . وإذا كان المحدد $\det(A) = 0$ ، فإن $AX = B$ إما ليس لها حل أو لها عدد لا نهائي من الحلول.

استخدام قاعدة كرامر لحل نظام 2×2

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

Use Cramer's Rule to find the solution of the system of linear equations, if a unique solution exists.

$$3x_1 + 2x_2 = 6$$

$$-4x_1 - x_2 = -13$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -13 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -4 & -13 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-15}{5} = -3$$

حل النظام هو $(4, -3)$

$$-9x + 3y = 8$$

$$2x - y = -3$$

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} -9 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -9 & 8 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{11}{3}$$

حل النظام هو $(\frac{1}{3}, \frac{11}{3})$

استخدام قاعدة كرامر لحل نظام 3x3

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

Use Cramer's Rule to find the solution of the system of linear equations, if a unique solution exists.

$$\begin{cases} -x - 2y = -4z + 12 \\ 3x - 6y + z = 15 \\ 2x + 5y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - 2y + 4z = 12 \\ 3x - 6y + z = 15 \\ 2x + 5y + 0z = -1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 12 \\ 15 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1(-6)(0) + (-2)(1)(2) + 4(3)(5)) - (2(-6)(4) + 5(1)(-1) + 0(3)(-2)) = 109$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 12 & -2 & 4 \\ 15 & -6 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (12(-6)(0) + (-2)(1)(-1) + 4(15)(5)) - (-1(-6)(4) + 5(1)(12) + 0(15)(-2)) = 218$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & 12 & 4 \\ 3 & 15 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1(15)(0) + 12(1)(2) + 4(3)(-1)) - (2(15)(4) + (-1)(1)(-1) + 0(3)(12)) = -109$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 3 & -6 & 15 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (-1(-6)(-1) + (-2)(15)(2) + 12(3)(5)) - (2(-6)(12) + 5(15)(-1) + (-1)(3)(-2)) = 327$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{218}{109} = 2$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-109}{109} = -1$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{327}{109} = 3$$

حل النظام هو
(2, -1, 3)

$$8x + 12y - 24z = -40$$

$$3x - 8y + 12z = 23$$

$$2x + 3y - 6z = -10$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 8 & 12 & -24 \\ 3 & -8 & 12 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -40 \\ 23 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{matrix} & 4 & 5 & 6 \\ (8(-8)(-6) + 12(12)(2) + (-24)(3)(3)) - (2(-8)(-24) + 3(12)(8) + (-6)(3)(12)) \end{matrix} = 0$$

لذلك $\det(A) = 0$ فبشر النظام ليس له حل وحيد، ومن نستطيع استخدام قاعدة كرامر.