ورقة عمل الثاني عشر العام — 7-5 القطع الزائد

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- كتابة معادلة القطع الزائد. 2- تمثيل القطع الزائد بيانيًا.

القطع الزائد هو المحل الهندسي لجميع النقاط الواقعة في المستوى والتي يكون الفرق المطلق (القيمة المطلقة للفرق) بين بعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان (**البؤرتين**) يساوي مقدارًا ثابتًا.

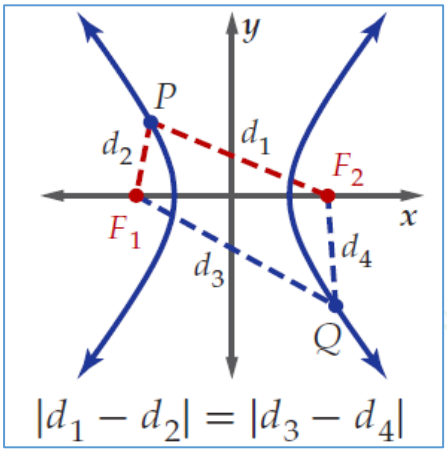
يتكون منحنى القطع الزائد من فرعين منفصلين يحاذيان خطي تقارب، و**مركز** القطع الزائد هو نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين، و**رأسا** القطع الزائد هما نقطتا تقاطع القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين مع كل من فرعي المنحنى.

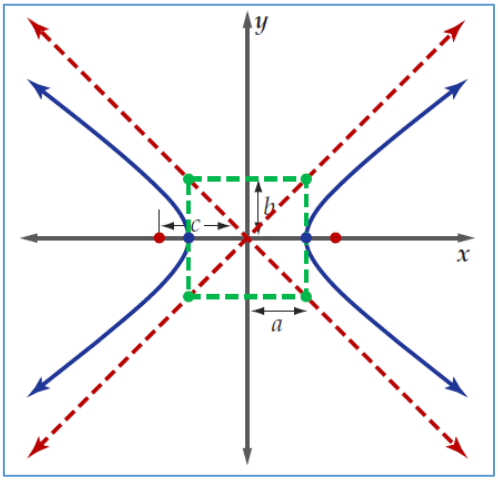
للقطع الزائد محورا تماثل هما: **المحور القاطع** (وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين) ويمر بالمركز، و**المحور المرافق** (وهو القطعة المستقيمة العمودية على المحور القاطع) ويمر بالمركز.

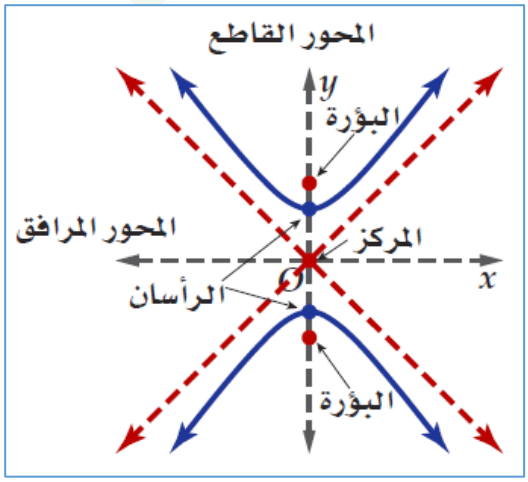
لتكن الأطوال a , b , c كما هو موضح في الشكل أدناه، وتختلف العلاقة بينها عمّا في القطع الناقص، ففي القطع الزائد $c^2 = a^2 + b^2$ ، والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة على منحنى القطع الزائد عن البؤرتين تساوي $2a$.

	القطع الزائد الرأسي	القطع الزائد الأفقي
المعادلة	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
المركز	(h , k)	(h , k)
معادلة خطوط التقارب	$y - k = \mp\frac{a}{b}(x - h)$	$y - k = \mp\frac{b}{a}(x - h)$

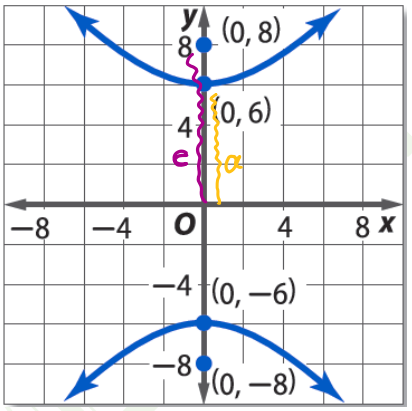
$c^2 = a^2 + b^2$







اكتب معادلة لكل قطع زائد.

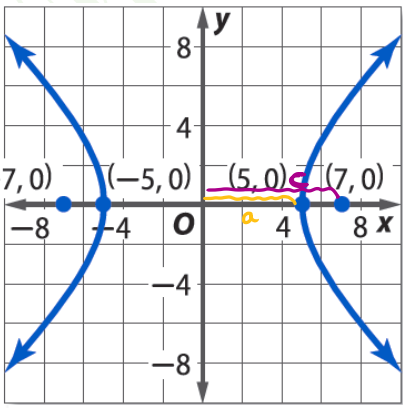


المركز $(0,0)$ ، $a=6$ ، $c=8$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b^2=c^2-a^2=8^2-6^2=28$

المعادلة $\Rightarrow \frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

$\Rightarrow \frac{(y-0)^2}{6^2}-\frac{(x-0)^2}{28}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{28}=1$

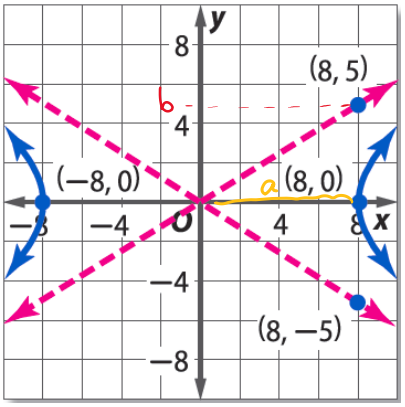


المركز $=(0,0)$ ، $a=5$ ، $c=7$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b^2=c^2-a^2=7^2-5^2=24$

المعادلة $\Rightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

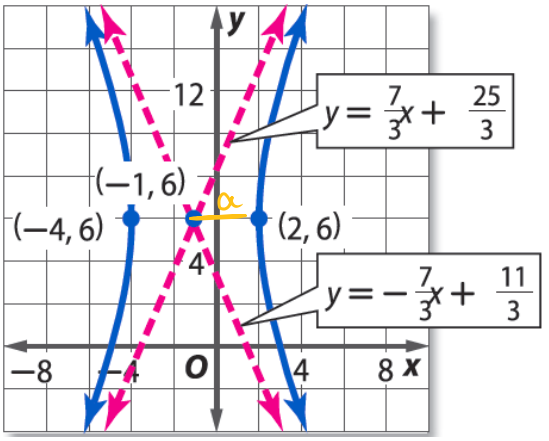
$\Rightarrow \frac{(x-0)^2}{5^2}-\frac{(y-0)^2}{24}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$



المركز $=(0,0)$ ، $a=8$ ، $b=5$

المعادلة $\Rightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

$\Rightarrow \frac{(x-0)^2}{8^2}-\frac{(y-0)^2}{5^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{25}=1$



المركز $=(-1,6)$ ، $a=3$ ،

$a=3$ ، $\frac{7}{3}=\frac{b}{a}$ لأن ميل خط التقارب

$\Rightarrow \frac{7}{3}=\frac{b}{3} \Rightarrow b=\frac{3(7)}{3}=7$

المعادلة $\Rightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{3^2}-\frac{(y-6)^2}{7^2}=1$

$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y-6)^2}{49}=1$

التمثيل البياني للقطع الزائد

① مثّل كل قطع زائد بيانيًا. ② حدّد رأسي ③ وبؤرتي ④ وخطي التقارب

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{49} = 1$$

المركز $\Rightarrow (0,0)$ ، $a = \sqrt{64} = 8$ ، $b = \sqrt{49} = 7$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{64+49} = \sqrt{113} = 10.63$

② الرأس 1 $= (8, 0)$

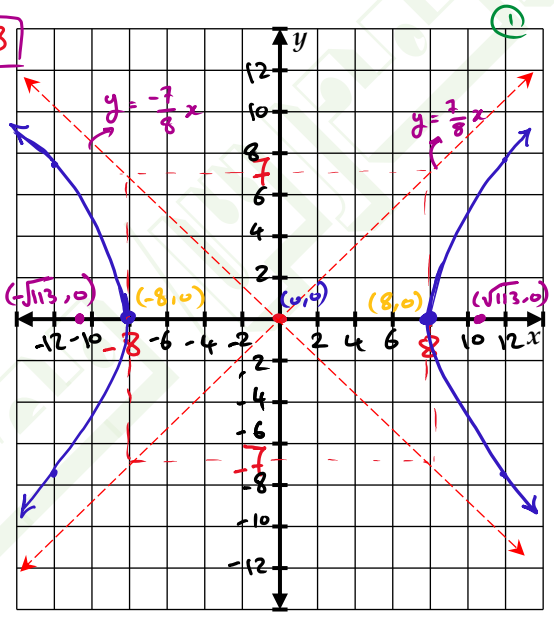
الرأس 2 $= (-8, 0)$

خطي التقارب

④ $y = \mp \frac{b}{a} x \Rightarrow y = \mp \frac{7}{8} x$

③ البؤرة 1 $= (-\sqrt{113}, 0)$

البؤرة 2 $= (\sqrt{113}, 0)$



$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{60} = 1$$

المركز $= (0,0)$ ، $a = \sqrt{36} = 6$ ، $b = \sqrt{60} = 2\sqrt{15} = 7.75$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{36+60} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} = 9.80$

② الرأس 1 $= (0, 6)$

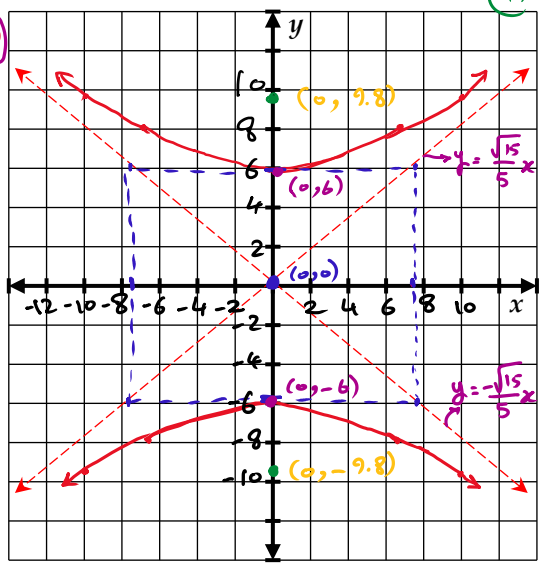
الرأس 2 $= (0, -6)$

④ $y = \mp \frac{a}{b} x \Rightarrow y = \mp \frac{6}{2\sqrt{15}} x$ خطي التقارب

$\Rightarrow y = \mp \frac{\sqrt{15}}{5} x$

③ البؤرة 1 $= (0, 4\sqrt{6}) = (0, 9.80)$

البؤرة 2 $= (0, -4\sqrt{6}) = (0, -9.80)$



مثّل كل قطع زائد بيانيًا. حدّد رأسي وبؤرتي وخطي التقارب

$$9y^2 + 18y - 16x^2 + 64x - 199 = 0$$

$9(y^2+2y+(\frac{2}{2})^2) - 16(x^2-4x+(\frac{4}{2})^2) = 199 + 9(\frac{2}{2})^2 - 16(\frac{4}{2})^2$

$9(y^2+2y+1) - 16(x^2-4x+4) = 144$

$9(y+1)^2 - 16(x-2)^2 = 144 \quad \div 144$

$\frac{(y+1)^2}{\frac{1}{9}(144)} - \frac{(x-2)^2}{\frac{1}{16}(144)} = \frac{144}{144}$

$\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1 \Rightarrow$ الصيغة القياسية

المركز $= (2,-1)$, $a=\sqrt{16}=4$, , $b=\sqrt{9}=3$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{16+9} = 5$

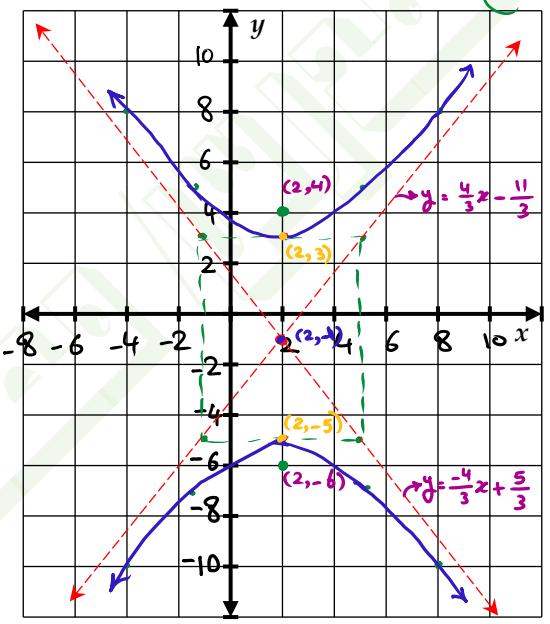
(2) الرأس 1 $= (2, -1+4) = (2,3)$

الرأس 2 $= (2, -1-4) = (2,-5)$

(3) البؤرة 1 $= (2, -1+5) = (2,4)$

البؤرة 2 $= (2, -1-5) = (2,-6)$

(4) خطي التقارب $\Rightarrow y-k = \pm\frac{a}{b}(x-h) \Rightarrow y+1 = \mp\frac{4}{3}(x-2)$



(4)

$y_1 = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}(2) - 1$

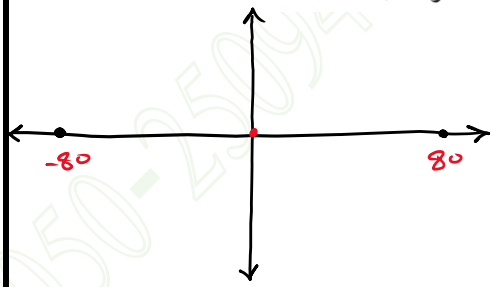
$y_1 = \frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$ ← 3.6

$y_2 = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}(2) - 1$

$y_2 = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$ ← 1.6

من الحياة اليومية: كتابة معادلة قطع زائد

الملاحة افترض أن سفينةً توصلت إلى أن الفرق في بعدها عن محطتين يساوي 60 ميلاً بحريًا. اكتب معادلة القطع الزائد الذي تقع عليه السفينة إذا علمت أن المحطتين تقعان عند النقطتين $(-80, 0)$ و$(80, 0)$.



البؤرتين $(80,0)$, $(-80,0)$

منتصف البؤرتين = المركز $(\frac{80-80}{2}, \frac{0+0}{2}) = (0,0)$

$c = 80$

الفرق الثابت $= 2a \Rightarrow 60 = 2a \Rightarrow a = 30$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = 80^2 - 30^2 = 5500$

المعادلة $\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{30^2} - \frac{y^2}{5500} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{900} - \frac{y^2}{5500} = 1$