

حل تمارين الدرس (3-3)
حساب المشتقات : قاعدة القوة

تمرين ① ص 162 المطلوب إيجاد المشتقة :

$$f(x) = x^3 - 2x + 1 \rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(-2x) + \frac{d}{dx}(1)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2 + 0$$

تمرين ② $f(x) = x^9 - 3x^5 + 4x^2 - 4$

$$f'(x) = 9x^8 - 3(5x^4) + 4(2x) - 4$$

$$= 9x^8 - 15x^4 + 8x - 4$$

تمرين ③ $f(t) = 3t^3 - 2\sqrt{t}$

$$f(t) = 3t^3 - 2t^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(t) = 3(3t^2) - 2(\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1})$$

$$= 9t^2 - t^{-\frac{1}{2}} = 9t^2 - \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} = 9t^2 - \frac{1}{\sqrt{t}}$$

تمرين ④ $f(s) = 5\sqrt{s} - 4s^2 + 3$

$$= 5s^{\frac{1}{2}} - 4s^2 + 3$$

$$f'(s) = 5(\frac{1}{2}s^{\frac{1}{2}-1}) - 4(2s) + 0$$

$$= \frac{5}{2}s^{-\frac{1}{2}} - 8s = \frac{5}{2\sqrt{s}} - 8s$$

تمرين ⑤ $f(w) = \frac{3}{w} - 8w + 1$

$$= 3w^{-1} - 8w + 1$$

$$f'(w) = 3(-1w^{-1-1}) - 8 + 0$$

$$= -3w^{-2} - 8 = \frac{-3}{w^2} - 8$$

تمرين ⑥ $f(y) = \frac{2}{y^4} - y^3 + 2$

$$= 2y^{-4} - y^3 + 2$$

$$f'(y) = 2(-4y^{-4-1}) - 3y^2 + 0$$

$$= -8y^{-5} - 3y^2 = \frac{-8}{y^5} - 3y^2$$

مَرَبِنِ (7) $h(x) = \frac{10}{\sqrt[3]{x}} - 2x + \pi$ المطلوب إيجاد $\frac{1}{2}$ بقعة

$$= 10x^{-\frac{1}{3}} - 2x + \pi$$

$$f'(x) = 10\left(-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1}\right) - 2 + 0$$

$$= -\frac{10}{3}(x)^{-\frac{4}{3}} - 2 = -\frac{10}{3}(x)^{\frac{4}{3}} - 2$$

$$= -\frac{10}{3\sqrt[3]{x^4}} - 2 = -\frac{10}{3\sqrt[3]{x^3 \cdot x}} - 2 = -\frac{10}{3\sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x}} - 2$$

$$= -\frac{10}{3x\sqrt[3]{x}} - 2$$

مَرَبِنِ (8) $h(x) = 12x - x^2 - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$

$$= 12x - x^2 - 3(x)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = 12 - 2x - 2\left(-\frac{2}{3}(x)^{-\frac{2}{3}-1}\right)$$

$$= 12 - 2x + 2(x)^{-\frac{5}{3}}$$

$$= 12 - 2x - 2x \frac{1}{(x)^{\frac{5}{3}}} = 12 - 2x - \frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}$$

$$= 12 - 2x - \frac{2}{\sqrt[3]{x^3 \cdot x^2}} = 12 - 2x - \frac{2}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}}$$

مَرَبِنِ (9) $f(s) = 2s^{\frac{3}{2}} - 5s^{-\frac{1}{3}}$

$$f'(s) = 2 \times \frac{3}{2}(s)^{\frac{3}{2}-1} - 5(-\frac{1}{3})(s)^{-\frac{1}{3}-1}$$

$$= 3s^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{3}s^{-\frac{4}{3}}$$

$$= 3\sqrt{s} + \frac{5}{3(s)^{\frac{4}{3}}} = 3\sqrt{s} + \frac{5}{3\sqrt[3]{s^4}}$$

$$= 3\sqrt{s} + \frac{5}{3\sqrt[3]{s^3 \cdot s}} = 3\sqrt{s} + \frac{5}{3s\sqrt[3]{s}}$$

مَرَبِنِ (10) $f(t) = 3t^\pi - 2t^{1.3}$

$$f'(t) = 3(\pi t^{\pi-1}) - 2(1.3 t^{1.3-1})$$

$$= 3\pi t^{\pi-1} - 2.6 t^{0.3}$$

$$f(x) = \frac{3x^2 - 3x + 1}{2x}$$

تمرين (11) ص 162

نفرق البكسر لنأخذ كسور
(نوافق المقام)

$$= \frac{3x^2}{2x} - \frac{3x}{2x} + \frac{1}{2x}$$

$$= \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x^{-1}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} - 0 + \frac{1}{2}(-1x^{-2})$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2x^2}$$

من المثلث الاستيفان
باستخدام قاعدة
صيغة العنصر (البرس بقدم)

$$f(x) = \frac{4x^2 - x + 3}{\sqrt{x}}$$

تمرين (12) ص 162

$$f(x) = \frac{4x^2}{\sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$= 4(x)^{2-\frac{1}{2}} - (x)^{1-\frac{1}{2}} + 3(x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 4(x)^{\frac{3}{2}} - (x)^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}}$$

نشتق الآن

$$f'(x) = 4\left(\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}\right) - \frac{1}{2}(x)^{\frac{1}{2}-1} + 3\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}\right)$$

$$= 6(x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}(x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 6\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2\sqrt{x^3}}$$

تذكر $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
وتذكر: $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

$$f(x) = x(3x^2 - \sqrt{x})$$

تمرين (13)

$$= 3x^2 - x' \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3x^2 - x^{\frac{3}{2}}$$

نشتق الآن

$$f'(x) = 3(2x^1) - \frac{3}{2}(x^{\frac{3}{2}-1})$$

$$= 6x - \frac{3}{2}(x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 6x - \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$f(x) = (x+1)(3x^2-4)$$

تمرين (14)

$$= 3x^3 - 4x + 3x^2 - 4$$

$$f'(x) = 3(3x^2) - 4 + 3(2x) - 0$$

$$= 9x^2 - 4 + 6x$$

x

تمرین (15) ص 162 مطلوب: $f(t) = t^4 + 3t^2 - 2$ $f''(t)$

$$f'(t) = 4t^3 + 3(2t) - 0$$

$$= 4t^3 + 6t$$

$$f''(t) = 4(3t^2) + 6 = 12t^2 + 6$$

تمرین (16) مطلوب: $f(t) = 4t^2 - 12 + \frac{4}{t^2}$

$$= 4t^2 - 12 + 4(t)^{-2}$$

$$f'(t) = 4(2t) - 0 + 4(-2t^{-2-1}) = 8t - 8t^{-3}$$

$$f''(t) = 8 - 8(-3t^{-3-1}) = 8 + 24t^{-4}$$

$$f'''(t) = 0 + 24(-4t^{-4-1}) = -96t^{-5} = -\frac{96}{t^5}$$

تمرین (17) مطلوب: $f(x) = 2x^4 - \frac{3}{\sqrt{x}}$

$$f(x) = 2x^4 - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 2(4x^3) - \frac{3}{2}(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1})$$

$$= 8x^3 + \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = 8(3x^2) + \frac{3}{4}(-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1})$$

$$= \frac{36x^2}{24} - \frac{9}{4}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$= 36x^2 - \frac{9}{4\sqrt{x^5}} = 36x^2 - \frac{9}{4x^2\sqrt{x}}$$

تمرین (18) مطلوب: $f(x) = x^6 - \sqrt{x}$

$$= x^6 - (x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 6x^5 - \frac{1}{2}(x)^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= 6x^5 - \frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = 6(5x^4) - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1})$$

$$= 30x^4 + \frac{1}{4}(x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 30x^4 + \frac{1}{4\sqrt{x^3}} = 30x^4 + \frac{1}{4 \cdot x \cdot \sqrt{x}}$$

تمرین (19) ص 162

مطلب: $f(x) = x^4 + 3x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}}$

(أ) $f'(x)$

$$f'(x) = 4x^3 + 3(2x^1) - 2(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1})$$

$$= 4x^3 + 6x + (x)^{-\frac{3}{2}}$$

(ب) $f''(x)$

$$f''(x) = 4(3x^2) + 6 - \frac{3}{2}(x)^{-\frac{3}{2}-1}$$

$$= 12x^2 + 6 - \frac{3}{2}(x)^{-\frac{5}{2}}$$

(ج) $f'''(x)$

$$f'''(x) = 12(2x^1) + 0 - \frac{3}{2}(-\frac{5}{2}x^{-\frac{5}{2}-1})$$

$$= 24x + \frac{15}{4}(x)^{-\frac{7}{2}}$$

(د) $f^{(4)}(x)$

$$f^{(4)}(x) = 24 + \frac{15}{4}(-\frac{7}{2}x^{-\frac{7}{2}-1})$$

$$= 24 - \frac{105}{8}x^{-\frac{9}{2}}$$

$$= 24 - \frac{105}{8\sqrt{x^9}}$$

$$= 24 - \frac{105}{8x^4\sqrt{x}}$$

تمرین (20) ص 162

مطلب: $f(x) = x^{10} - 3x^4 + 2x - 1$

(أ) $f^{(5)}(x)$

$$f'(x) = 10x^9 - 12x^3 + 2 - 0$$

$$f''(x) = 10(9x^8) - 12(3x^2) + 0$$

$$= 90x^8 - 36x^2$$

$$f'''(x) = 90(8x^7) - 36(2x^1) = 720x^7 - 72x$$

$$f^{(4)}(x) = 720(7x^6) - 72 = 5040x^6 - 72$$

$$f^{(5)}(x) = f^{(4)}(x) = 5040(6x^5) - 0 = 30240x^5$$

تمرین (21) ص 162

مطلب: $S(t) = -16t^2 + 40t + 10$

دالة السرعة: $v(t) = S'(t) = -16(2t) + 40 + 0$

$$= -32t + 40$$

دالة التسارع: $a(t) = v'(t) = S''(t) =$

$$= -32 + 0$$

$$= -32$$

تمرين (22) ص 162 $S(t) = -4.9t^2 + 12t - 3$ المطلوب إيجاد دالة السرعة المتجهة و دالة التسارع

$$v(t) = -4.9(2t) + 12 = -9.8t + 12$$

$$a(t) = -9.8$$

تمرين (23) $S(t) = \sqrt{t} + 2t^2$

$$S(t) = t^{\frac{1}{2}} + 2t^2$$

$$v(t) = \frac{1}{2}(t)^{\frac{1}{2}-1} + 2(2t)$$

$$= \frac{1}{2}(t)^{-\frac{1}{2}} + 4t = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} + 4t \right)$$

$$a(t) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) (t)^{-\frac{1}{2}-1} + 4$$

$$= -\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}} + 4$$

$$= \left(\frac{-1}{4\sqrt{t^3}} + 4 \right)$$

$$= \left(\frac{-1}{4t\sqrt{t}} + 4 \right)$$

تمرين (24) $S(t) = 10 - \frac{10}{t}$

$$= 10 - 10t^{-1}$$

$$v(t) = 0 - 10(-1)t^{-1-1} = 10t^{-2}$$

$$a(t) = 10(-2)(t)^{-2-1} = -20t^{-3} \quad (= -\frac{20}{t^3})$$

تمرين (25) ص 163 $h(t) = -16t^2 + 40t + 5$ المطلوب

أ) حساب السرعة المتجهة عند $t_0 = 1$ و التسارع

ب) تحديد هذين بؤرتي الجسم لأعلى ثم للأسفل

$$v(t) = -16(2t) + 40 = -32t + 40$$

السرعة المتجهة عند $t_0 = 1$ $v(1) = -32(1) + 40 = 8$ ويتجه الجسم لأعلى

$$a(t) = -32$$

التسارع عند $t_0 = 1$: $a(1) = -32$

ب) نفس المطلوب السابق عند $t_0 = 2$

$$v(2) = -32(2) + 40 = -24$$

$$a(2) = -32$$

السرعة تزداد (بسبب الجاذبية الأرضية) بمقدار 32 (حسب الوحدة) ft/s^2 مثلاً
غوا لا ينفر

تمرین (26) ص 163

$$h(t) = 10t^2 - 24t$$

الف) مطلوب السرعة المتجهة والارتفاع عند $t_0 = 2$ وهذا يتحرك الجسم لأعلى أم لأسفل

$$v(t) = 10(2t) - 24 = 20t - 24$$

$$a(t) = 20 + 0 = 20$$

$$v(2) = 20(2) - 24 = 16$$

الجسم يتحرك لأعلى

$$a(2) = 20$$

ب) عند $t_0 = 1$

$$v(1) = 20(1) - 24 = -4$$

الجسم يتحرك لأسفل

$$a(1) = 20$$

تمرین (27) المطلوب إيجاد معادلة المماس عند $a=2$

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$f'(x) = 2x - 0 = 2x$$

ميل المماس عند $a=2$ يساوي قيمة المشتقة عند 2 :

$$m = f'(2) = 2(2) = 4$$

$$x_1 = 2 \rightarrow y_1 = (2)^2 - 2 = 2 \quad \text{نقطة النما هي: } (2, 2)$$

معادلة المماس المطلوب:

$$y = m(x - x_1) + y_1 \rightarrow y = 4(x - 2) + 2 \rightarrow y = 4x - 6$$

تمرین (28) المطلوب معادلة المماس عند $a=2$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$x=2 \text{ ميل المماس عند } = f'(2) = 2(2) - 2 = 2 = m$$

$$x_1 = 2 \rightarrow y_1 = (2)^2 - 2(2) + 1 = 1 \quad \text{نقطة النما هي: } (2, 1)$$

$$y = m(x - x_1) + y_1 \quad \text{معادلة المماس:}$$

$$y = 2(x - 2) + 1 \rightarrow y = 2x - 3$$

تمرین (29) المطلوب معادلة المماس عند $a=4$

$$f(x) = 4\sqrt{x} - 2x$$

$$f(x) = 4x^{\frac{1}{2}} - 2x \rightarrow f'(x) = 4(\frac{1}{2})x^{\frac{1}{2}-1} - 2$$

$$f'(x) = 2(x)^{-\frac{1}{2}} - 2$$

$$m = f'(4) = 2(4)^{-\frac{1}{2}} - 2 = -1$$

$$x=4 \rightarrow y = 4\sqrt{4} - 2(4) = 0 \quad \text{نقطة النما هي: } (4, 0)$$

$$y = -1(x - 4) + 0$$

$$y = -x + 4$$

تمرین (30) ص 163 $f(x) = 3\sqrt{x} + 4$ مطلوب معادله مماسه لهما که کند $a=2$

$$f(x) = 3x^{\frac{1}{2}} + 4$$

$$f'(x) = 3(\frac{1}{2})x^{\frac{1}{2}-1} + 0 = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$m = f'(2) = \frac{3}{2}(2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

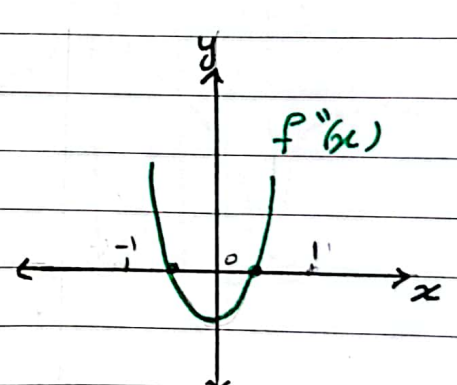
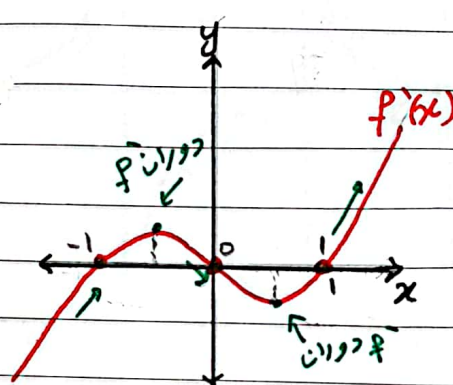
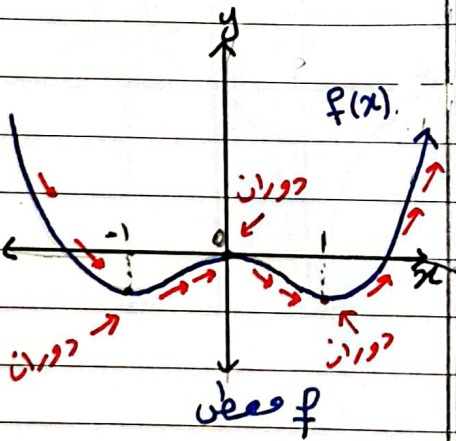
$$x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 3\sqrt{2} + 4$$

نقطه تماس:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

$$y = \frac{3}{2\sqrt{2}}(x - 2) + 3\sqrt{2} + 4$$

تمرین (31) ص 163 رسم بیان $f(x)$ مطلوب استفاده رسم بیان f'' (ملاحظه: رسم اولاً بیان f')



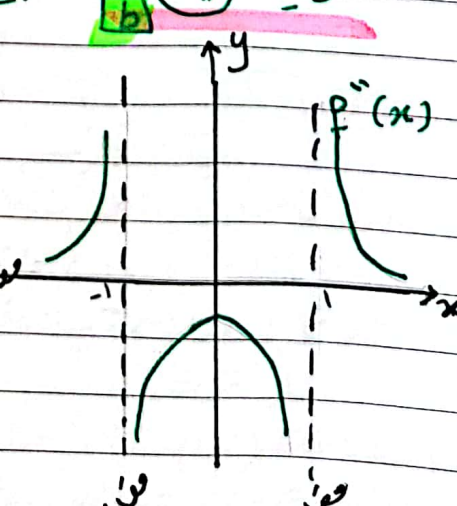
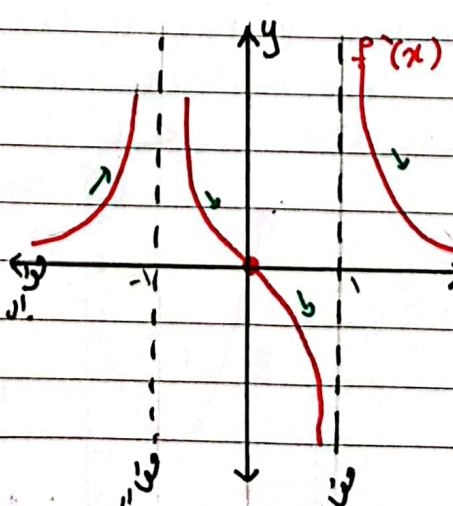
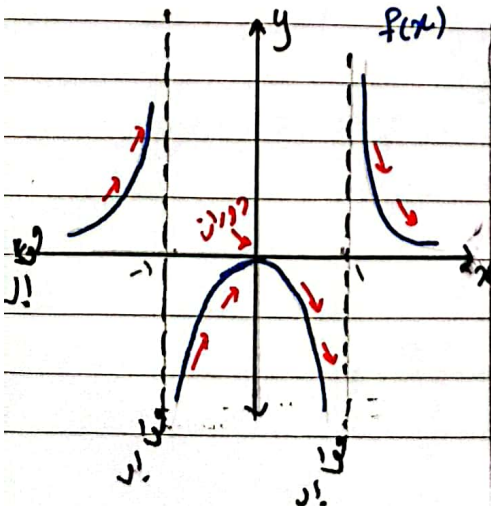
f' (نقطه دوران f می باشد)
(نقطه تقاطع f' و f'' محو می شود)

f نزایه f' یعنی f' فوق محو می شود
 f تناقص f' یعنی f' تحت محو می شود

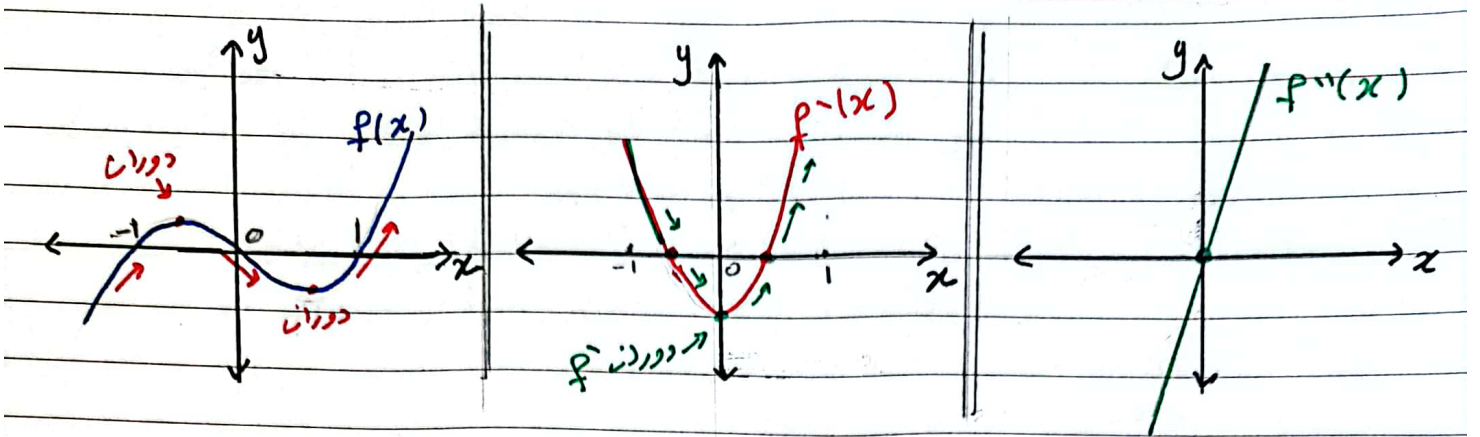
f'' (نقطه دوران f' می باشد)
(نقطه تقاطع f'' و f''' محو می شود)

f' نزایه f'' یعنی f'' فوق محو می شود
 f' تناقص f'' یعنی f'' تحت محو می شود

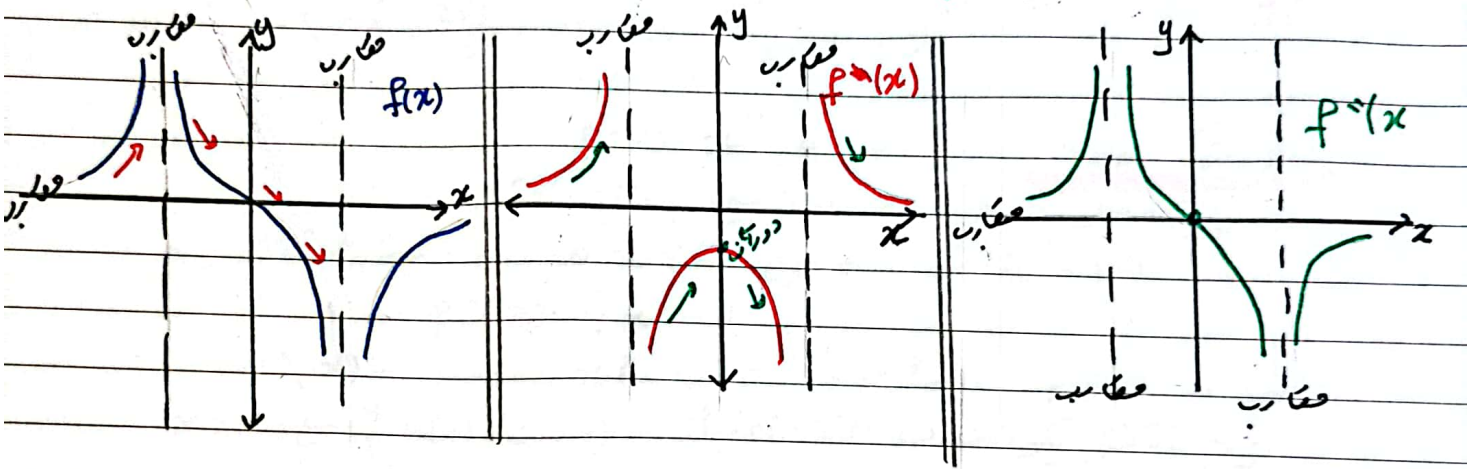
تمرین (31) ص 163 رسم بیان $f(x)$ و مطلوب رسم بیان $f''(x)$ (بعد رسم $f'(x)$ اولاً کتوبه)



تمرین (32) ص 163 **a** مرسوم بیان $f(x)$ و مطلوب رسم بیان $f''(x)$ (اولاً رسم f')



b مرسوم بیان $f(x)$ و مطلوب رسم بیان $f''(x)$ (اولاً رسم f')



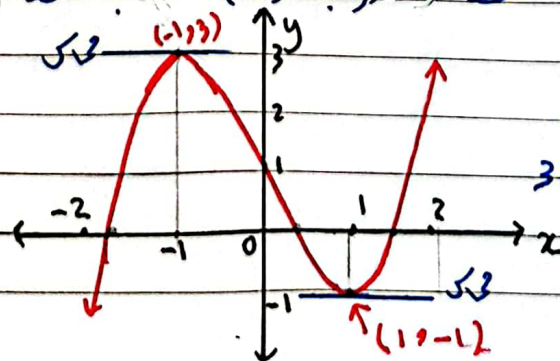
تمرین (33) ص 163 **a** $f(x) = x^3 - 3x + 1$ نقطه یگون عندها الحاک افقی: (صلیه $0 = 0$: $f'(x) = 0$)

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

نقطتان $(1, -1)$ و $(-1, 3)$ $x = 1 \rightarrow y = 1^3 - 3(1) + 1 = -1$ و $x = -1 \rightarrow y = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$

b متلب بیاناً ذلک و حدد دلالة بیانیه لها یکن الرسم باستخدام نقطه (جه لود) او باستخدام برامج الرسم



الدلالة البینیه عند نقطه:
• عند نقطه $(-1, 3)$ الحاک افقی و تكون للدالة قیمة عظمی علیه
(قیمة)

• عند نقطه $(1, -1)$ الحاک افقی للدالة قیمة صغری علیه

تابع
تمرين (33) ص 163 [C] مطلوب تحديد قيم x التي تقطع المحاور عند x عند زاوية قياسها 45°

نظام (قياس زاوية مستقيم مع المحور x) لو كان معلوماً هنا 45° سيكون ميل المستقيم مائلاً ظل هذه الزاوية $\tan 45^\circ = m$
أي هنا ميل المحاور : $m = \tan 45^\circ = 1$
أي هنا صيغة المشتقة : $f'(x) = 1$ والمطلوب إيجاد x

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 1 \quad \text{نحل المعادلة :}$$

$$3x^2 = 4 \rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ أو } x = \frac{2\sqrt{3}}{3} : \text{أي})$$

تمرين (34) ص 163 [C] مطلوب x التي يكون فيها المحاور أفقياً

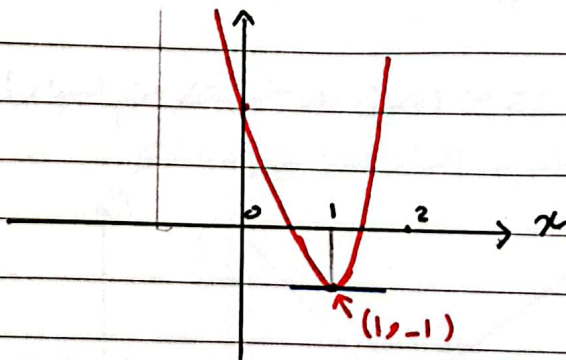
المحاور أفقية $\rightarrow$ ميل المحاور $= 0 \rightarrow$ صيغة المشتقة $= 0$

$$f'(x) = 4x^3 - 4$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 4 = 0 \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = 1$$

نوجد نقطة يكون عندها المحاور أفقياً : $x = 1 \rightarrow y = 1^4 - 4(1) + 2 = -1$
(1-1)

[A] مطلوب التمثيل البياني (النقطة) والدالة وتحديد اللازم البيانية لها



مكن الرسم باستخدام برامج الرسم

أو باختيار قيم x ووضع النقطة

مثلاً	2	1	0	-1
x	2	1	0	-1
y	10	-1	2	7

عند نقطة (1-1) المحاور أفقية

وتوجد للدالة قيمة صغرى

[C] المطلوب قيم x التي تقطع المحاور على المماس عند زاوية 45°

$$m = f'(x) = \tan 45^\circ = 1$$

$$4x^3 - 4 = 1 \rightarrow 4x^3 = 5 \rightarrow x^3 = \frac{5}{4} \rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$$

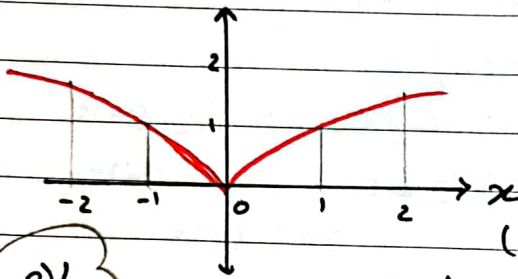
تمرين (35) ص 163 (a) مطلوب $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ (أي f' غير موجودة غير صفرية)
 قيم x التي لا يوجد ميل للمماس عندها $f'(x) = \frac{2}{3}(x)^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$

وهذه ليس لها نهاية عندما $x=0$ (لا يوجد ميل للمماس)
 مطلوب تمثيل بياني للدالة وتفسير الدلالات البيانية عند النقطة السابقة (0)

يمكن الرسم باستخدام برامج الرسم
 أو باختيار نقط من الدالة

x	-2	-1	0	1	2
y	1.6	1	0	1	1.6

لاحظ عند نقطة (0,0) يوجد رأس مدبب (ناب)
 وتكون المستقيمة غير موجودة (الميل للمماس غير موجود)



راجع ص 151
 الرسم البياني
 (الرسم)

(35) (b) $f(x) = |x-5|$

مطلوب قيم x التي لا يوجد ميل للمماس عندها

نفيد تعريف المطلق : $f(x) = \begin{cases} x-5 & : x-5 \geq 0 \\ -(x-5) & : x-5 < 0 \end{cases}$

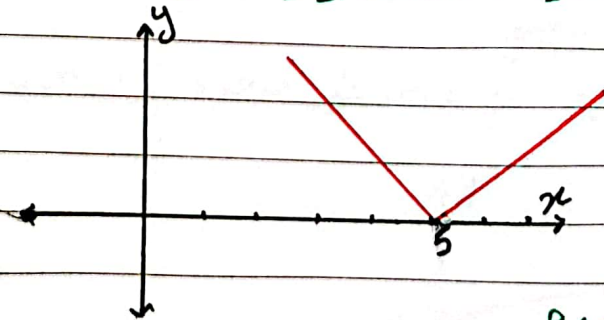
$f(x) = \begin{cases} x-5 & : x \geq 5 \\ -x+5 & : x < 5 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 1 & : x > 5 \\ -1 & : x < 5 \end{cases}$

$f'(x)$ غير موجود عند $x=5$ (استقيمة من اليمين $\neq$ استقيمة من اليسار)

مطلوب تمثيل بياني للدالة وتفسير الدلالات البيانية عند

ميل المحاك غير موجود عند $x=5$
 يوجد ركن (زاوية) (رأس مدبب)



(35) (c) $f(x) = |x^2 - 3x - 4|$

نفيد تعريف المطلق : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 4 & : (x^2 - 3x - 4) \geq 0 \\ -(x^2 - 3x - 4) & : (x^2 - 3x - 4) < 0 \end{cases}$

تذكر ان $(x^2 - 4x - 4)$ حيث عندما $x^2 - 3x - 4 = 0$
 $x = 4$
 $x = -1$

x	-1	4						
$(x^2 - 3x - 4)$	+	+	0	-	-	0	+	+

تابع ص 35

تابع حل (35) ص 163 (C) $f(x) = |x^2 - 3x - 4|$

تابع [a] لاحظ مما سبق: $x^2 - 3x - 4 < 0$ عندما $-1 < x < 4$
 $x^2 - 3x - 4 \geq 0$ عندما $x \leq -1$ أو $x \geq 4$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 4 & : (x \geq 4 \text{ أو } x \leq -1) \\ -x^2 + 3x + 4 & : -1 < x < 4 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & : (x \geq 4 \text{ أو } x \leq -1) \\ -2x + 3 & : -1 < x < 4 \end{cases}$$

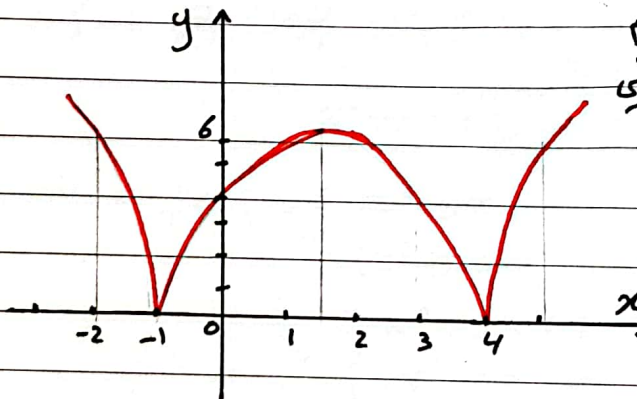
لاحظ للنقطة لإيجاد f' عند $x = -1$ من اليسار: $2(-1) - 3 = -5$
 من اليمين: $-2(-1) + 3 = 5$ (غير موجودة)

ولإيجاد f' عند $x = 4$ من اليمين: $2(4) - 3 = 5$
 من اليسار: $-2(4) + 3 = -5$ (غير موجودة)

وبالتالي لا يوجد ميل للحاصل (مشتقة لـ f) وذلك عند $x = -1$ وعند $x = 4$

[b] قبل بيانياً واذكر الدلالة البيانبة عند $x = -1$ وعند $x = 4$

يمكن الرسم باستخدام برامج الرسم
 أو بأخذ نقاط (جدول) ثم نرسم لمعني



ونلاحظ عند النقطتين $x = -1$ و $x = 4$

يوجد رأس مدبب (ناح)

ولا توجد مشتقة لـ f عند كلاهما

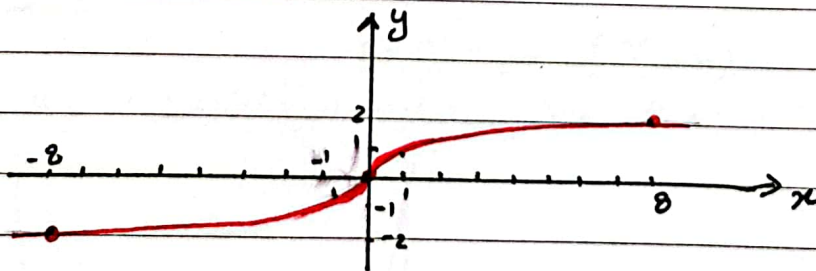
تمرين (36) (a) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

[a] مطلوب قيم x التي يكون عندها $f'(x)$ غير موجود

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{1}{3(x)^{\frac{2}{3}}}$$

غير معرف عندها $x = 0$ وبالتالي ميل الحاصل غير موجود عند $x = 0$

[b] بالرسم البياني:



عند نقطة 0

يعتد الحاصل رأسيًا

وميله غير معرف

تمرين 36 ص 163 (ب) $f(x) = |x+2|$

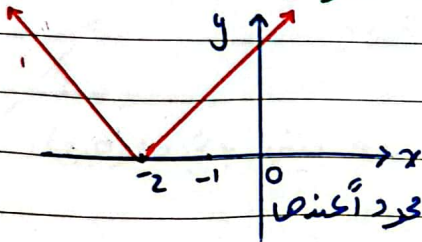
[a] المطلوب فتح x إلى لا يوجد ميل للمماس عند x

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & : x+2 \geq 0 \\ -(x+2) & : x+2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+2 & : x \geq -2 \\ -x-2 & : x < -2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & : x > -2 \\ -1 & : x < -2 \end{cases}$$

إذن $f'(x)$ غير موجود عند $x = -2$ أي ميل للمماس لـ $f(x)$ غير موجود عند 2

[b] المطلوب التمثيل البياني لـ $f(x)$ وتحديد الدلالة البيانية عند 2



يتم الرسم باستخدام برامج الرسم

ويمكن باختبار نقطتين قبل وبعد -2 (↗)

ويمكن ملاحظة انزاغة الخاعدات للبيان

ويوجد عند $x = -2$ ركن (زاوية) ولا يكون $f'(2)$ محددًا

تمرين 36 (c) $f(x) = |x^2 + 5x + 4|$

[a] عند درجتي $x^2 + 5x + 4$ داخل المطلق : $x^2 + 5x + 4$ الأصغر هي -4 و -1

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & & -4 & & -1 & & \\ \hline x^2 + 5x + 4 & + & + & 0 & - & - & 0 & + & + \end{array}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 4 & : x^2 + 5x + 4 \geq 0 \\ -(x^2 + 5x + 4) & : x^2 + 5x + 4 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 + 5x + 4 & : (x \leq -4 \text{ أو } x \geq -1) \\ -x^2 - 5x - 4 & : -4 < x < -1 \end{cases}$$

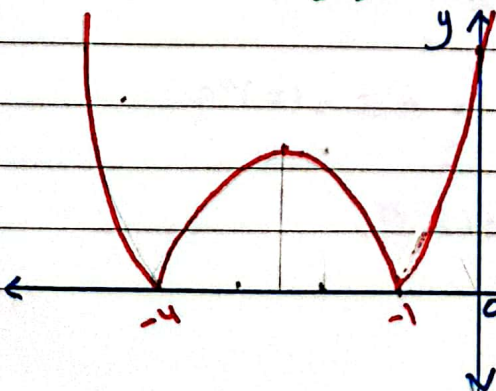
$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 5 & : (x < -4 \text{ أو } x > -1) \\ -2x - 5 & : -4 < x < -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{ونجد: } x > -1 : f'(x) = 2x + 5 \Rightarrow f'_+(-1) = 2(-1) + 5 = 3 \\ x < -1 : f'(x) = -2x - 5 \Rightarrow f'_-(-1) = -2(-1) - 5 = -3 \end{aligned}$$

$f'(-1)$ غير موجود

وكذلك نجد $f'(-4)$ غير موجود

[b] المطلوب التمثيل البياني لـ $f(x)$ وتحديد الدلالة البيانية عند -4 و -1



باستخدام برامج الرسم

أو بأخذ نقط مختلفة

نجد عند $x = -4$ وعند $x = -1$ يوجد

رأسين محدبين (ثنائي) ولا يوجد مماس لـ $f(x)$

وميل المماس غير محدد

تمرين (37) ص 163 $y = x^3 - 3x + 1$
 المطلوب إيجاد قيم x التي يكون عندها المماس زاوية 45° مع المحور x

ميل المماس : $P'(x) = m = \tan 45^\circ = 1$

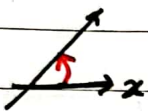
$P'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

المطلوب إيجاد قيم x التي يكون عندها المماس زاوية 30° مع المحور x

$m = P'(x) = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (أو $\frac{1}{\sqrt{3}}$)

$3x^2 - 3 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (أو $\frac{1}{\sqrt{3}}$)

$3x^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} + 3 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3\sqrt{3}} + 1 \rightarrow x = \pm \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \approx \pm 1.1$



(عبارة تقاس الزاويتان بقاسي عكاسية يعني بالتجاوؤ)

تمرين (38) ص 163 $y = x^4 + x^3 + 3$ و $y = x^3 + 2x + 1$
 المطلوب إيجاد قيم x ليتوازي المماسان للمختصين السابقين

التوازي لتتقين يعني أن تتساوى ميلاهما $\leftarrow P_1'(x) = P_2'(x)$

$3x^2 + 2 = 4x^3 + 3x^2 \rightarrow 2 = 4x^3 \rightarrow x^3 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

تمرين (39) المطلوب إيجاد : $ax^2 + bx + c$ بحيث :

$c = -2 \leftarrow -2 = a(0)^2 + b(0) + c \leftarrow P(0) = -2$

$P'(x) = 2ax + b \leftarrow P'(0) = 2$ (نحقق أولاً)

$2 = 2a(0) + b \rightarrow b = 2$

$P''(x) = 2a \leftarrow P''(0) = 3$ (نحقق مرة ثانية)

$3 = 2a \rightarrow a = \frac{3}{2}$

المطلوب هو : $P(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x - 2$

$c = 0 \leftarrow 0 = a(0)^2 + b(0) + c \leftarrow P(0) = 0$

$P'(x) = 2ax + b = 1 \leftarrow P'(0) = 1$

$\rightarrow b = 1$

$P''(x) = 2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2} \leftarrow P''(0) = 1$

المطلوب هو :

$P(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 0$

توقع أنه صعب على الطلاب

$f^{(n)}$	f'	f''	f'''	$f^{(4)}$
$(-1)^n$	$(-1)^{n-1}$	$(-1)^{n-2}$	$(-1)^{n-3}$	$(-1)^{n-4}$
$(-1)^n$	$(-1)^{n-1}$	$(-1)^{n-2}$	$(-1)^{n-3}$	$(-1)^{n-4}$

تمرين (40) ص 163

$$f(x) = \sqrt{x} \quad f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}-1} = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}-1} = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f^{(4)}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) x^{-\frac{5}{2}-1}$$

ملاحظات: المعاملات تتناوب مرة موجبة ومرة سالبة الإشارة $(-1)^{n-1}$ حسب رتبة المشتقة

المقام الثاني مشتق 2 مرتين: 2^2

المقام الثالث مشتق 3 ثلاث مرات: 2^3

المقام الرابع مشتق 4 (4 مرات): 2^4

المقام 2^n المشتق من الرتبة n هو:

المعاملات: البسط لأول مشتق 1

البسط الثاني مشتق: 1×1

البسط الثالث مشتق: $1 \times 1 \times 3$

البسط الرابع مشتق: $1 \times 1 \times 3 \times 5$

البسط الخامس مشتق: $1 \times 1 \times 3 \times 5 \times 7$

البسط 2^n المشتق من الرتبة n هو $1 \times 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-3)$

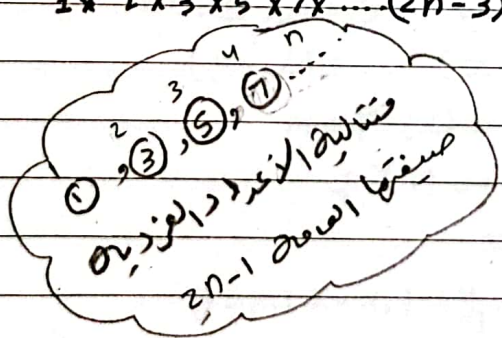
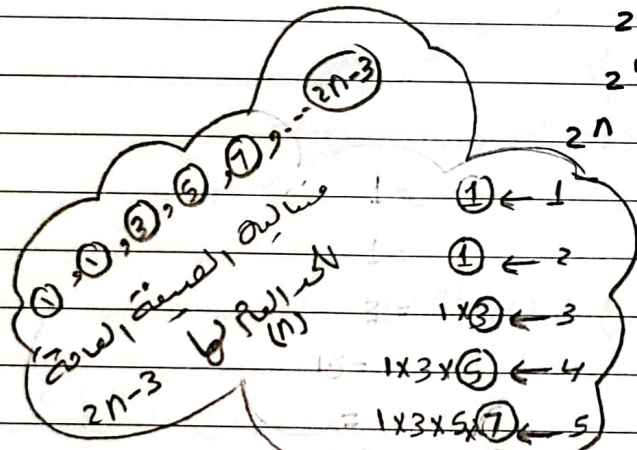
لأس x : الأس الأول $-\frac{1}{2}$

الأس الثاني $-\frac{3}{2}$

الأس الثالث $-\frac{5}{2}$

الأس الرابع $-\frac{7}{2}$

الأس عند n : $-\frac{(2n-1)}{2}$



$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-3)}{2^n} x^{-\frac{(2n-1)}{2}}$$

$$1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3) \leftarrow \text{البسط يصبح } (2n-2)!$$

$$2^n [2 \times 4 \times 6 \times \dots] \leftarrow \text{المقام يصبح } 2^{2n-1} (n-1)!$$

$$= 2^n [2^{n-1} \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1)] = 2^n \times 2^{n-1} (n-1)! = 2^{2n-1} (n-1)!$$

ملاحظات للبكر:

جواب نهائي:

$$(-1)^{n-1} \times \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} (n-1)!} x^{-\frac{(2n-1)}{2}}$$

تمرين (40) ص 163 (ب) مطلوب صيغة عامة لـ $f^{(n)}(x)$

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad f'(x) = 2x^{-1}$$

$$f'(x) = 2(-1)x^{-2} = -2x^{-2}$$

$$f''(x) = -2(-2)x^{-3} = 4x^{-3}$$

$$f'''(x) = 4(-3)x^{-4} = -12x^{-4}$$

$$f^{(4)}(x) = -12(-4)x^{-5} = +48x^{-5}$$

ملاحظات للإثباتات:

$(-1)^n$	← موجب	← سالب	← موجب	← سالب
$f^{(n)}$	$f^{(4)}$	$f^{(3)}$	$f^{(2)}$	f'
$x^{-(1+n)}$	$(-1-4)$	$(-1-3)$	$(-1-2)$	$(-1-1)$
$x^{-(1+n)}$				

المعاملات:

48	12	4	2
$f^{(4)}$	$f^{(3)}$	$f^{(2)}$	f'
$2(1 \times 2 \times 3 \times 4)$	$2(1 \times 2 \times 3)$	$2(1 \times 2)$	$2(1)$
$2(n!)$ هو: $f^{(n)}$			

الصيغة العامة: $f^{(n)}(x) = (-1)^n \times 2(n!) x^{-1-n}$

تمرين (41) مطلوب مساحة مثلث حدوده: $x=0$ و $y=0$ والمحور y عند $y=\frac{1}{x}$
 أو "أكبر" الحدود هي: المحاور و محور السينات و محور الصادات (المحور y)

المحور المعنى $y = \frac{1}{x}$ ميله: $m = f'(x) = -1(x)^{-2}$

$f'(1) = -1(1)^{-2} = -1$

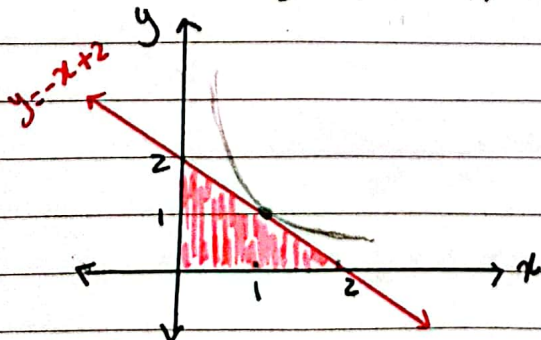
نقطة التماس: $x=1 \rightarrow y = \frac{1}{1} = 1$

معادلة: $y = m(x-x_1) + y_1 \rightarrow y = -1(x-1) + 1$

$y = -x + 2$

لاحظ لرسم المستقيم نقطتين

x	0	2
y	2	0



مساحة المثلث القائم في الكل
 (ولحدود الضلع 2 ولحدود ارتفاعه 2)

وحدة مربعه $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$

يتبع حل التمرين (41) لما سبق

تابع حل (41) ص 163 : ثانياً :

ثانياً المحاسب نجد : $y=0$ و $x=0$ المحاور
 المحاسب $\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ x=2 \end{array} \right.$ المحاسب

ميل المحاسب : $f'(x) = -x^{-2}$

$m = f'(2) = -(2)^{-2} = -\frac{1}{4}$

$x=2 \rightarrow y = \frac{1}{2}$

نقطة التقاطع :

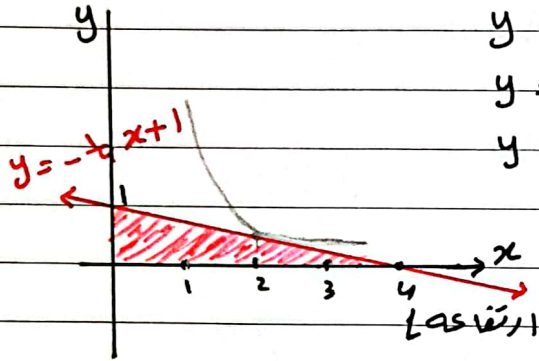
$y = m(x - x_1) + y_1$

معادلة المحاسب :

$y = -\frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{4}x + 1$

لاحظ لرسم المحاسب نقطتين منه :



لاحظ أنه المثلث قائم وطول قاعدته 4 وارتفاعه 1 وطول ارتفاعه 1

مساحته $\frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 2$

الآن لاحظ في أولاً وفي ثانياً حصلنا على نفس المساحة للمثلث وهي 2

ثانياً المحاسب نجد : $y=0$ و $x=0$ المحاور
 المحاسب $\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ x=a \end{array} \right.$ المحاسب

ميل المحاسب : $m = f'(x) = -x^{-2}$

عند $x=a$ الميل : $m = -a^{-2} = -\frac{1}{a^2}$

$x_1 = a \rightarrow y_1 = \frac{1}{a}$

نقطة التقاطع :

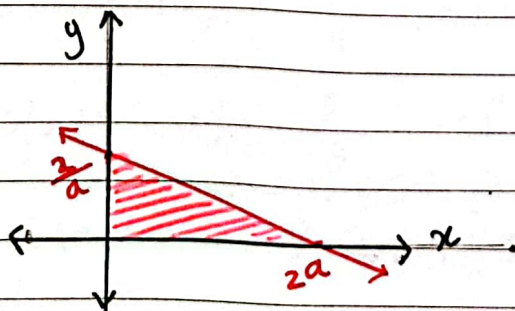
$y = m(x - x_1) + y_1$

معادلة المحاسب :

$y = -\frac{1}{a^2}(x - a) + \frac{1}{a}$

$y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{1}{a^2}(a) + \frac{1}{a} \Rightarrow y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{2}{a}$



لرسم المحاسب نحتاج نقطتين :

x	0	$2a$
y	$\frac{2}{a}$	0

افتراضاً : $y=0$

$0 = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$

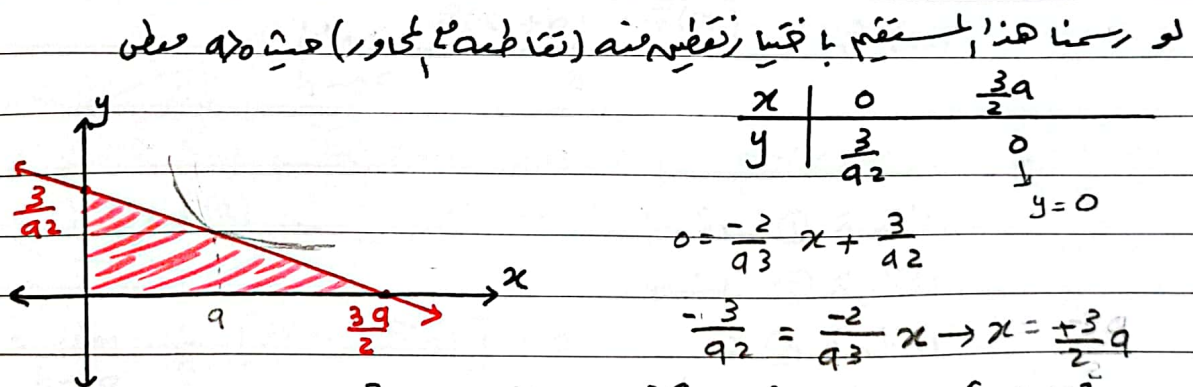
$-\frac{2}{a} = -\frac{1}{a^2}x \Rightarrow x = 2a$

المساحة = $\frac{1}{2} \times 2a \times \frac{2}{a} = 2$

عبر هذه الطريقة (حيث $a > 0$) نحصل على مساحة طول قاعدته $2a$ وارتفاعه $\frac{2}{a}$

تمرين (42) ص 163 المطلوب مساحة المثلث المحصور بين $y=0$ و $x=0$ و المحاك للمعنى $y = \frac{1}{x^2}$ عند $x=a$ بقدر على متبة a (بكن المركزين اب بقا لإحالة لها ب a) وجبنا:

نقطة التماس: $x_1 = a \rightarrow y_1 = \frac{1}{a^2}$
 ميل التماس: $p(x) = x^{-2} \rightarrow p'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$
 $m = p'(a) = -\frac{2}{a^3}$
 معادلة التماس: $y = m(x - x_1) + y_1$
 $y = -\frac{2}{a^3}(x - a) + \frac{1}{a^2}$
 $y = -\frac{2}{a^3}x + \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^2} \rightarrow y = -\frac{2}{a^3}x + \frac{3}{a^2}$



فلك قائم طول قاعدته $\frac{3a}{2}$ وارتفاعه $\frac{3}{a^2}$
 المساحة = $\frac{1}{2} \left(\frac{3a}{2} \times \frac{3}{a^2} \right) = \frac{9}{4a}$
 له علاقة ب a وليس ثابتاً

طريقة أخرى لكل: معادلة معادلة التماس بكل عام: $y = -\frac{2}{a^3}(x - a) + \frac{1}{a^2}$

نختار حالتين: مثلاً $a = 1$

مساحة المثلث: $\frac{9}{4}$ (بإعادة الخلد والركم للمكان)

ثم مثلاً: $a = 2$

مساحة المثلث: $\frac{9}{8}$ (بإعادة الخلد ورسوم التماس)

تغيرت المساحة فهي ليست ثابتة كما في المركزين اب بقا.

ولا تنطبق كما في المركزين اب بقا (لا نقدر على a)

تمرين (43) ص 163

معطى : f قابل لارتقاء لكل $x > a$
معطى : $g(x) = \max_{a \leq t \leq x} f(t)$ لكل $x > a$

المطلوب : $g'(x)$ في حالتين :
الحالة الأولى : $f'(x) > 0$
لافت : $f' > 0 \Rightarrow f$ تزايدية أي $f(x) > f(t) > f(a) \leftarrow x > t > a$
وتكون $g(x) = f(x)$
الحل كما ورد في دليل المعلم : E
① $g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$

$$② = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} x \left[\max_{a \leq t \leq x+h} f(t) - \max_{a \leq t \leq x} f(t) \right]$$

$$③ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} x \left[f(x+h) - f(x) \right]$$

$$④ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

الحالة الثانية : $f'(x) < 0$
لافت : $f' < 0 \Rightarrow f$ تناقصية أي $f(x) < f(t) < f(a) \leftarrow x > t > a$
وتكون $g(x) = f(a)$

الخطوة ① نفسها

الخطوة ② نفسها

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(a) - f(a)] = 0$$

الخطوة ③ :

تمرين (44) ص 163 : معطى : f قابل لارتقاء لكل $x > a$
المطلوب : $g'(x)$ في حالتين

الحالة الأولى : $f'(x) > 0$

لافت : f تزايدية أي $f(x) > f(t) > f(a) \leftarrow x > t > a$
وتكون $g(x) = f(x)$
① $g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$

$$② = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} x \left[\min_{a \leq t \leq x+h} f(t) - \min_{a \leq t \leq x} f(t) \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(a) - f(a)] = 0$$

الحالة الثانية : $f'(x) < 0$
لافت : f تناقصية أي $f(x) < f(t) < f(a) \leftarrow x > t > a$
وتكون $g(x) = f(x)$

الخطوة ① نفسها

الخطوة ② نفسها

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)]$$

الخطوة ③ :

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

مَرْنِي (45) ص 163 مطلوب $f(x)$ دالة حيث $f'(x) = 4x^3$

الإجابة السريعة الموقعة: $f(x) = x^4$

(توجد إجابات أخرى مثل $f(x) = x^4 + c$ حيث c ثابت)

مَرْنِي (46) ص 163 مطلوب $f(x)$ دالة حيث: $f'(x) = 5x^4$

$$f(x) = x^5$$

(توجد إجابات أخرى)

مَرْنِي (47) مطلوب $f(x)$ دالة بحيث: $f'(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \frac{2}{3}(x)^{\frac{3}{2}}$$

(توجد إجابات أخرى)

مَرْنِي (48) مطلوب $f(x)$ دالة بحيث: $f'(x) = \frac{1}{x^2}$

$$f'(x) = x^{-2}$$

$$f(x) = -x^{-1}$$