# ملخصات إنفوجرافيك

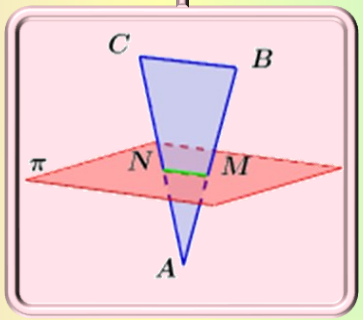
# للصف الحادي عشر علمي "لمادة الرياضيات"

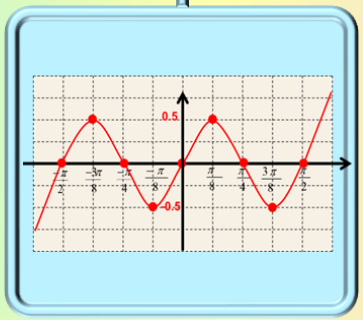
# للفصل الدراسي الثاني

مدرسة الروضة الثانوية للبنات

حادي عشر علمي

منطقة العاصمة التعليمية
التوجيه الفني لمادة الرياضيات





مديرة مدرسة الروضة الثانوية للبنات
أ. فاطمة علي

الموجه الأول
لمادة الرياضيات منطقة العاصمة التعليمية
أ. شيخة الحجرف

الموجه الفني
لمادة الرياضيات
أ. علي الخضري

إعداد كل من :
أ. حنان علي
أ. رانيا عبدالغفار
أ. بدر عزت محمد

# إهداء

المنافسة الحقيقية دائماً ما تكون بين قدراتك الخاصة وما تقوم به من عمل، فإن استطعت أن تحول قدراتك الخاص إلى واقع ملموس، فأنت حقا من المتميزين أهدي لكم طلابي الأعزاء عملي هذا رغبةً مني في السعي معكم إلى طريقٍ مضيءٍ بمصابيح التميز ، لأنكم أمل مستقبلنا المشرق ونهضة الغد بإذن الله تحقيقاً لرؤية صاحب السمو الشيخ نواف الأحمد حفظه الله ورعاه ، فخالص الدعاء لكم بالتوفيق والسداد .

معلمة الرياضيات

فصول الموهبة والإبداع

أ. حنان علي جمعة

إعداد كل من

بدر عزت محمد

رانيا عبدالغفار

حنان علي جمعة

معلمات مدرسة الروضة الثانوية للبنات

فصول الموهبة والإبداع

تصميم وإخراج الشرائح

أ. حنان علي جمعة

# الفهرس


الأعداد المركبة

حساب المثلثات

هندسة الفضاء تعامد مستقيم مع مستوى

ختاماً للملاحظات والإضافات

هندسة الفضاء المستقيمات و المستويات المتوازية في الفضاء

"تطبيقات على حساب المثلثات"



تصميم : حنان علي



7ananmath

# منطقة الشرح



7ananmath

# "الأعداد المركبة"

تصميم : حنان علي

7ananmath

# الأعداد المركبة

## تعريفات

**الوحدة التخيلية**

هي العدد الذي مربعه (−1) ويرمز إليه بالرمز $i$

$i=\sqrt{-1}$ , $i^2=-1$

**الأعداد التخيلية:**

لأي عدد حقيقي موجب $m$ , $\sqrt{-m}=\sqrt{m}\,i$ وتسمى الأعداد التي على الصورة $bi$ حيث $b\in R$ أعدادا تخيلية

مثال: $\sqrt{-8}=\sqrt{8}i=2\sqrt{2}\,i$

$\sqrt{-9+6}=3i+6=6+3i$

**تعريف: العدد المركب** Complex Number

العدد المركب هو عدد على الصورة $a+bi$ حيث $a$ , $b$ عددان حقيقيان، $i$ الوحدة التخيلية.

يمكن كتابة أي عدد مركب على الصورة $z=a+bi$

الصورة $a+bi$ تسمى **الصورة الجبرية** للعدد المركب.

ويسمى $a$ الجزء الحقيقي Real Part

ويسمى $b$ الجزء التخيلي Imaginary Part

ويرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$

$z=a+bi$: $a$ الجزء الحقيقي، $b$ الجزء التخيلي

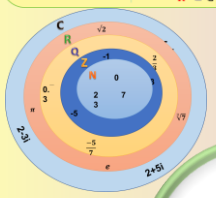
$$c=\{a+bi: a\in R, b\in R, i=\sqrt{-1}\}$$

**ملاحظات خاصة**

الأعداد المركبة على الصورة $z=a+bi$

① إذا كانت $b=0$ تأخذ الأعداد الصورة $z=a$ فتحصل على مجموعة الأعداد الحقيقية $R$ أي أن $R\subset\mathbb{C}$

② إذا كانت $a=0$, $b\neq 0$ تأخذ الأعداد الصورة $z=bi$ وتسمى أعدادا تخيلية مثل: $z=2i$ , $z=-5i$




## تساوي الأعداد المركبة وتمثيلها بيانياً

**تساوي عددين مركبين:**

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان

ليكن: $z_1=a_1+b_1i$ , $z_2=a_2+b_2i$

$z_1=z_2 \Leftrightarrow a_1=a_2$ , $b_1=b_2$

أوجد قيم كل من المتغيرات الحقيقية

$12+3i=4x-9yi$

$12=4x$ , $x=3$ ‖ $3=-9y$ , $y=-\frac{1}{3}$

$x^2-y^2i=9-25i$

$x^2=9$ , $x=\pm3$ ‖ $y^2=25$ , $y=\pm5$

$2x+yi=1$

$2x=1$ , $x=\frac{1}{2}$ ‖ $y=0$

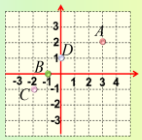
مثل كلاً مما يلي في المستوى المركب:

$z_1=3+2i$ تمثله النقطة $A(3,2)$

$z_2=-1$ تمثله النقطة $B(-1,0)$

$z_3=-i-2$ تمثله النقطة $C(-2,-1)$

$z_4=i$ تمثله النقطة $D(0,1)$




## جمع وطرح الأعداد المركبة

إذا كان

$z_1=-2+5i$

$z_2=3.4-1.2i$

$z_3=-0.3i$

فأوجد:

ⓐ $z_1+z_2$

$=(-2+5i)+(3.4-1.2i)$

$=(-2+3.4)+(5+(-1.2))i$

$=1.4+3.8i$

ⓑ $z_2-z_1$

$=(3.4-1.2i)-(-2+5i)$

$=(3.4-(-2))+(-1.2-5)i$

$=5.4-6.2i$

ⓒ $z_3-z_2-z_1$

$=z_3-(z_2+z_1)$

$=-0.3i-(1.4+3.8i)$

$=-0.3i-1.4-3.8i$

$=-1.4-4.1i$

## ضرب الأعداد المركبة

إذا كان $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ , $c\in R$

حيث $z_1=a_1+b_1i$ , $z_2=a_2+b_2i$ فإن:

① $cz_1=ca_1+cb_1i$

② $z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$

**أوجد الناتج:**

ⓐ $(6-5i)(4-3i)=$

$24-18i-20i+15i^2=$

$24-38i+15(-1)=$

$24-38i-15=9-38i$

ⓑ $(9+4i)(4-9i)=$

$36-81i+16i-36i^2=$

$36-65i-36(-1)=$

$36-65i+36=72-65i$

ⓒ $(12i)(7i)(i+1)=$

$84i^2(i+1)=$

$-84(i+1)=-84-84i$

## المعكوس الضربي للعدد المركب والمرافق

**مرافق العدد المركب**

مرافق العدد المركب $z=a+bi$ هو العدد المركب $\bar{z}=\overline{a+bi}=a-bi$

**خواص مرافق العدد المركب:**

إذا كان $z_1=a_1+b_1i$ , $z_2=a_2+b_2i$

فإن:

- $z_1+\bar{z_1}=2a_1$
- $z_1-\bar{z_1}=2bi$
- $z_1\cdot\bar{z_1}=a_1^2+b_1^2$
- $\overline{z_1+z_2}=\bar{z_1}+\bar{z_2}$
- $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z_1}\cdot\bar{z_2}$
- $\overline{(\bar{z_1})}=z_1$

إذا كان $z_2=3+5i$ فأوجد: $z_1=2-7i$

$\bar{z_1}=\overline{(2-7i)}=2+7i$

$\bar{z_2}=\overline{(3+5i)}=3-5i$

ⓐ $\bar{z_1}+\bar{z_2}=$

$2+7i+3-5i=5+2i$

ⓑ $\overline{z_1-z_2}=$

$\overline{(2-7i-(3+5i))}=$

$\overline{(2-7i-3-5i)}=$

$\overline{(-1-12i)}=-1+12i$

ⓓ $\overline{z_1\cdot z_2}=$

$\overline{(2-7i)(3+5i)}=$

$\overline{6+10i-21i-35i^2}=$

$\overline{6-11i+35}=$

$\overline{41-11i}=41+11i$

**المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري:**

$z^{-1}$ يرمز له بالرمز $z=a+bi$

ويكون: $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}\times\frac{a-bi}{a-bi}$

$z^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$

أوجد المعكوس الضربي لكل من:

ⓐ $z_1=-3i-7=-7-3i$

$z_1^{-1}=\frac{-7}{(-7)^2+(-3)^2}+\frac{3}{(-7)^2+(-3)^2}i$

$=\frac{-7}{58}+\frac{3}{58}i$

ⓑ $z_2=5+11i$

$z_2^{-1}=\frac{5}{5^2+11^2}-\frac{11}{5^2+11^2}i$

$=\frac{5}{146}-\frac{11}{146}i$

ⓒ $z_3=6i$

$z_3^{-1}=-\frac{6}{0^2+6^2}i$

$=-\frac{6}{36}i=-\frac{1}{6}i$

## قسمة الأعداد المركبة

أوجد ناتج قسمة 2i-3 على 1+2i

$\frac{2i-3}{1+2i}=\frac{-3+2i}{1+2i}\times\frac{1-2i}{1-2i}=$

$\frac{-3+6i+2i-4i^2}{1+4}=$

$\frac{-3+8i+4}{5}=$

$\frac{1+8i}{5}=\frac{1}{5}+\frac{8}{5}i$

$\frac{\overline{5+i}}{2-3i}=\frac{5-i}{2+3i}=$

$\frac{5-i}{2+3i}\times\frac{2-3i}{2-3i}=$

$\frac{10-15i-2i+3i^2}{4+9}=$

$\frac{10-17i-3}{13}=$

$\frac{7-17i}{13}=\frac{7}{13}-\frac{17}{13}i$

تلخيص : حنان علي

تصميم : حنان علي

7ananmath

# الصور للأعداد المركبة

## صورة جبرية

$$z = a + bi$$

ضع كلاً مما يلي في الصورة الجبرية :

$$z_1 = 4(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$z_1 = 4(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) = \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}}i$$

## إحداثيات قطبية

$$(r, \theta)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

أوجد الزوج المرتب (x,y) الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية للنقطة $A(5,300^\circ)$

الزوج المرتب يمثل الإحداثيات القطبية $A(5,300^\circ)$

$r = 5 \quad \theta = 300^\circ$

$x = r\cos\theta \Rightarrow x = 5\cos 300^\circ = \frac{5}{2}$

$y = r\sin\theta \Rightarrow y = 5\sin 300^\circ = \frac{-5\sqrt{3}}{2}$

الزوج المرتب $\left(\frac{5}{2}, \frac{-5\sqrt{3}}{2}\right)$ يمثل الإحداثيات الديكارتية

ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية مستخدماً السعة الأساسية

$z = -2 + 2i\sqrt{3}$

$r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

$\tan\alpha = \left|\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right| = \sqrt{3}$ نفرض أن α زاوية الإسناد

$\alpha = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ النقطة تنتمي إلى الربع الثاني

الزوج المرتب يمثل الإحداثيات الديكارتية $(-2, 2\sqrt{3})$

الصورة المثلثية هي $z_3 = 4(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

صورة جبرية إلى صورة مثلثية — المعطى — صورة مثلثية إلى صورة جبرية

$z = a + bi$ — $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

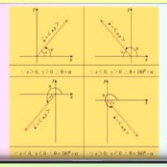
$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right|$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

حسب الربع $\theta$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

التعويض والتبسيط



ديكارتي إلى قطبي — المعطى — قطبي إلى ديكارتي

$z = a + bi$ — $(r, \theta)$

$z = x + yi$

$(x, y)$

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right|$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

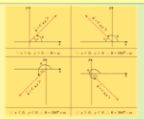
حسب الربع $\theta$

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$(x, y)$



أوجد الزوج المرتب $(r,\theta)$ حيث $0 \le \theta \le 2\pi$ ، للنقطة $D(3\sqrt{3},3)$

الزوج المرتب يمثل الإحداثيات الديكارتية $D(3\sqrt{3},3)$

$r = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (3)^2} = 6$

$\tan\alpha = \left|\frac{3}{3\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ نفرض أن α زاوية الإسناد

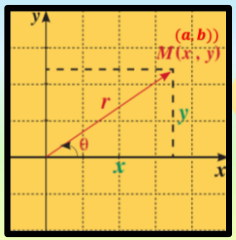
$\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

$\theta = \alpha = \frac{\pi}{6}$ D تنتمي إلى الربع الأول

الزوج المرتب يمثل الإحداثيات القطبية $D(6, \frac{\pi}{6})$

## صورة مثلثية

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$




## إحداثيات ديكارتية

$$(x, y)$$

| | $z = 5$ | $z = \frac{-3}{4}$ | $z = \frac{5}{2}i$ |
|---|---|---|---|
| الزوج المرتب يمثل الإحداثيات الديكارتية | $(5, 0)$ | $(\frac{-3}{4}, 0)$ | $(0, \frac{-5}{2})$ |
| $r = \lvert z \rvert$ | $\lvert 5 \rvert = 5$ | $\left\lvert\frac{-3}{4}\right\rvert = \frac{3}{4}$ | $\left\lvert\frac{-5}{2}\right\rvert = \frac{5}{2}$ |
| المحور | الـX الموجب | الـX السالب | الـy السالب |
| السعة | $0$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
| الصورة المثلثية | $z = 5(\cos 0 + i\sin 0)$ | $z = \frac{3}{4}(\cos\pi + i\sin\pi)$ | $z = \frac{5}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ |

ضع العدد المركب التالي في الصورة المثلثية مستخدماً السعة الأساسية

$z = 3i$

$r = \sqrt{(0)^2 + (3)^2} = 3$

الصورة المثلثية هي $z_3 = 3(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

الزوج المرتب يمثل الإحداثيات الديكارتية $(0,3)$


تلخيص : حنان علي
تصميم : حنان علي



7ananmath

# الأعداد المركبة

# حل معادلات

## حل المعادلة التالية

$$5z - 4 + 2i = 3z + 1 - 4i$$

$$5z - 3z = 1 - 4i + 4 - 2i$$

$$2z = 5 - 6i$$

$$z = \frac{5}{2} - 3i$$

## حل المعادلة التالية في مجموعة الأعداد المركبة

$$3z + 1 - i = 7 + 3i$$

$$3z = 7 + 3i - 1 + i$$

$$3z = 6 + 4i$$

$$z = \frac{6+4i}{3}$$

$$z = 2 + \frac{4}{3}i$$

مجموعة الحل =

$$\left\{2 + \frac{4}{3}i\right\}$$

## حل المعادلة التالية في مجموعة الأعداد المركبة

$$4z^2 + 16z + 25 = 0$$

$$a = 4, b = 16, c = 25$$

نوجد المميز $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (16)^2 - 4 \times 4 \times 25 = -144$$

نوجد z $z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$= \frac{-16 \pm \sqrt{-144}}{2 \times 4} = \frac{-16 \pm 12i}{8}$$

$$z = -2 \pm \frac{3}{2}i$$

$$z_1 = -2 + \frac{3}{2}i \quad z_2 = -2 - \frac{3}{2}i$$

مجموعة الحل =

$$\left\{-2 + \frac{3}{2}i, -2 - \frac{3}{2}i\right\}$$

## حل المعادلة التالية في مجموعة الأعداد المركبة

$$3x^2 + 48 = 0$$

$$3x^2 = -48$$

$$x^2 = -16$$

$$x = \pm\sqrt{-16}$$

$$x = \pm 4i$$

مجموعة الحل =

$$\{4i, -4i\}$$

## حل المعادلة التالية في مجموعة الأعداد المركبة

$$2z + i\bar{z} = 5 - 2i$$

نفرض أن $z = x + yi$ و $\bar{z} = x - yi$

$$2(x + yi) + i(x - yi) = 5 - 2i$$

$$2x + 2yi + xi - yi^2 = 5 - 2i$$

$$2x + 2yi + xi + y = 5 - 2i$$

$$2x + y + 2yi + xi = 5 - 2i$$

$$2x + y + (2y + x)i = 5 - 2i$$

نفصل الوحدات التخيلية بعواملها عن الوحدات الحقيقية بعواملها

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ x + 2y &= -2 \end{aligned}\right\}$$ بالضرب في -2

$$\left.\begin{aligned} -4x - 2y &= -10 \\ x + 2y &= -2 \end{aligned}\right\}$$

$$-3x = -12 \Rightarrow x = 4$$

$$2 \times 4 + y = 5 \Rightarrow y = -3$$

مجموعة الحل = $\{4 - 3i\}$

## حل المعادلة التالية في مجموعة الأعداد المركبة

$$z + i = 2\bar{z} + 1$$

نفرض أن $z = x + yi$ و $\bar{z} = x - yi$

$$x + yi + i = 2(x - yi) + 1$$

$$x + yi + i = 2x - 2yi + 1$$

$$x + yi - 2x + 2yi = 1 - i$$

$$-x + 3yi = 1 - i$$

نساوي الوحدات التخيلية والحقيقية بين في الطرفين

$$-x = 1 \qquad 3y = -1$$

$$x = -1 \qquad y = -\frac{1}{3}$$

مجموعة الحل =

$$\left\{-1 - \frac{1}{3}i\right\}$$

## حل المعادلة التالية في مجموعة الأعداد المركبة

$$3x^2 + 48 = 0$$

$$3x^2 = -48$$

$$x^2 = -16$$

$$x = \pm\sqrt{-16}$$

$$x = \pm 4i$$

مجموعة الحل = $\{4i, -4i\}$

## حل المعادلة التالية في مجموعة الأعداد المركبة

$$-5x^2 - 150 = 0$$

$$-5x^2 = 150$$

$$x^2 = -30$$

$$x = \pm\sqrt{-30}$$

$$x = \pm\sqrt{30}\, i$$

مجموعة الحل =

$$\left\{\sqrt{30}\, i, -\sqrt{30}\, i\right\}$$

# حل المعادلات

**درجة أولى**

المتغيرات بطرف والأعداد بالطرف الآخر

**$z, \bar{z}$**

تعويض

**درجة الثانية**

جذر ، تحليل أو قانون

تلخيص : حنان علي

تصميم : حنان علي

7ananmath

# "حساب المثلثات"

تصميم : حنان علي

7ananmath

# "رسم الدوال المثلثية"

## دالة الجيب
## "Sin x"

$$y = a\,\mathrm{Sin}(bx)$$

**خطوات رسم دالة الجيب**

١) نوجد قيم كل من a ,b
٢) نوجد السعة $|a|$
٣) نوجد الدورة $\frac{2\pi}{|b|}$
٤) نوجد ربع الدورة $\frac{1}{4}\left(\frac{2\pi}{|b|}\right)$
٥) نكون جدول ونرسم دورة موجبة ونعكسها حول نقطة الأصل لرسم الدورة السالبة
٦) مجالها R
٧) دالة فردية " متناظرة حول نقطة الأصل"

أوجد السعة والدورة ، ثم ارسم بيان الدالة :-

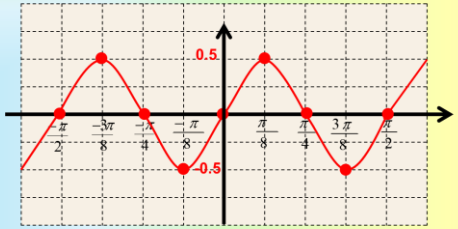
a $y = \frac{1}{2}\sin(4x)$

السعة: $|a| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

الدورة: $\frac{2\pi}{|4|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

ربع الدورة: $\frac{\pi}{2} \div 4 = \frac{\pi}{8}$

| x | 0 | $\frac{\pi}{8}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{8}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 0 | 0.5 | 0 | -0.5 | 0 |




## دالة الظل
## " Tan x "

$$y = a\,\mathrm{Tan}(bx)$$

**خطوات رسم دالة الظل**

١)نوجد قيم كل من a ,b
٢)ليس لها سعة
٣)نوجد الدورة $\frac{\pi}{|b|}$
٤)نوجد ربع الدورة $\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{|b|}\right)$
٥)نكون جدول ونرسم دورة موجبة و دورة سالبة
٦)مجالها $R - \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in z\right\}$
٧)دالة فردية " متناظرة حول نقطة الأصل"

أوجد السعة والدورة ، ثم ارسم بيان الدالة :-

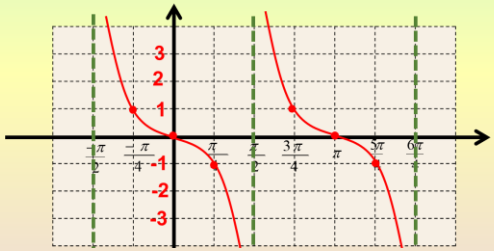
$y = -\tan x$ ,

دالة دورية

الدورة: $\frac{\pi}{|1|} = \pi$

ربع الدورة: $\frac{\pi}{4}$

| x | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 0 | -1 | غير معرف | 1 | 0 |



## دالة جيب التمام
## "Cos x"

$$y = a\,\mathrm{Cos}(bx)$$

**خطوات رسم دالة جيب التمام**

١)نوجد قيم كل من a ,b
٢)نوجد السعة $|a|$
٣)نوجد الدورة $\frac{2\pi}{|b|}$
٤)نوجد ربع الدورة $\frac{1}{4}\left(\frac{2\pi}{|b|}\right)$
٥)نكون جدول ونرسم دورة موجبة ونعكسها حول محور الصادات لرسم الدورة السالبة
٦)مجالها R
٧)دالة زوجية " متناظرة حولة محور الصادات"

أوجد السعة والدورة ، ثم ارسم بيان الدالة :-

$y = -2\cos\left(\frac{3}{4}x\right), 0 \le x \le 2\pi$

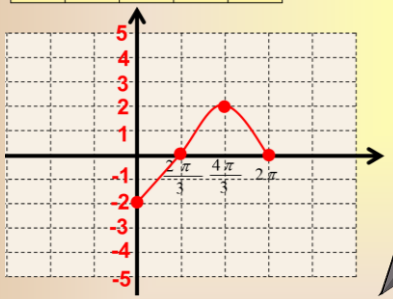
السعة: $|a| = |-2| = 2$

الدورة: $\frac{2\pi}{\left|\frac{3}{4}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8\pi}{3}$

ربع الدورة: $\frac{8\pi}{3} \div 4 = \frac{2\pi}{3}$

$y = -2\cos\left(\frac{3}{4}x\right), 0 \le x \le 2\pi$

| x | 0 | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|
| y | -2 | 0 | 2 | 0 |




تلخيص : رانيا عبدالغفار
تصميم : حنان علي


7ananmath

# حل المثلث باستخدام

## قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

القانون

مجموع قياسات زوايا المثلث = 180

ضرب تقاطعي

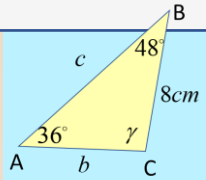
إذا علم طول ضلع وقياس الزاوية المقابلة له

### حالة (١) :

زاويتين وضلع غير واصل بينهما

حل المثلث $\Delta ABC$ حيث

$\alpha=36^\circ,\beta=48^\circ,a=8cm$




مجموع قياسات زوايا المثلث = 180

$\gamma=180^\circ-(36^\circ+48^\circ)$

$\gamma=96^\circ$

قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 36^\circ}{8}=\frac{\sin 48^\circ}{b}=\frac{\sin 96^\circ}{c}$$

الضرب التقاطعي

$$\frac{\sin 36^\circ}{8}=\frac{\sin 48^\circ}{b}\Rightarrow b=\frac{8\times\sin 48^\circ}{\sin 36^\circ}\approx 10.115cm$$

الضرب التقاطعي

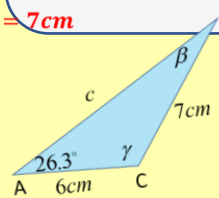
$$\frac{\sin 36^\circ}{8}=\frac{\sin 96^\circ}{c}\Rightarrow c=\frac{8\times\sin 96^\circ}{\sin 36^\circ}\approx 13.536cm$$

### حالة (٢) :

ضلعين وزاوية لا تقع بينهما

حل المثلث $\Delta ABC$ حيث

$\alpha=26.3^\circ,\ b=6cm,\ a=7cm$




قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 26.3^\circ}{7}=\frac{\sin\beta}{6}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

الضرب التقاطعي

$$\frac{\sin 26.3^\circ}{7}=\frac{\sin\beta}{6}$$

$$\sin\beta=\frac{6\times\sin 26.3^\circ}{7}$$

$$\sin\beta=0.38$$

إما

$$\beta_1\approx 22.32^\circ$$

$$\gamma\approx 180^\circ-(26.3^\circ+22.32^\circ)$$

$$\gamma\approx 131.38^\circ$$

الضرب التقاطعي

$$\frac{\sin 26.3^\circ}{7}=\frac{\sin 131.38^\circ}{c}$$

$$c=\frac{7\times\sin 131.38^\circ}{\sin 26.3^\circ}$$

$$c\approx 11.58cm$$

أو

$$\beta_2\approx 180^\circ-22.32^\circ\approx 157.68^\circ$$

$$\alpha+\beta_2=26.3^\circ+157.68^\circ=183.98^\circ>180^\circ$$

مرفوضة

مجموع قياسات زوايا المثلث = 180

## قانون جيب التمام

"لإيجاد الأضلاع"

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

"لإيجاد الزوايا"

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

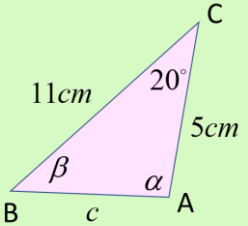
$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

### حالة (١) :

اذا علم طول ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

حل المثلث $\Delta ABC$ حيث

$a=11cm,b=5cm,\gamma=20^\circ$




قانون جيب التمام

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

$$c^2=11^2+5^2-2\times 11\times 5\times\cos 20^\circ=42.63$$

$$c=6.53cm$$

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5^2+(6.53)^2-11^2}{2\times 5\times 6.53}=-0.817$$

$$\alpha=\cos^{-1}(-.817)=144.8^\circ$$

مجموع قياسات زوايا المثلث = 180

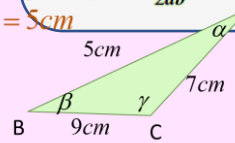
$$\beta=180^\circ-(20^\circ+144.8^\circ)=15.2^\circ$$

### حالة (٢) :

اذا علم أطوال أضلاعة الثلاثة

حل المثلث $\Delta ABC$ حيث

$a=9cm,b=7cm,c=5cm$




قانون جيب التمام

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{7^2+5^2-9^2}{2\times 7\times 5}=-0.1$$

$$\alpha=\cos^{-1}(-0.1)=95.73^\circ$$

قانون جيب التمام

$$\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$=\frac{9^2+5^2-7^2}{2\times 9\times 5}=\frac{19}{30}$$

$$\beta=\cos^{-1}(\frac{19}{30})=50.7^\circ$$

$$\gamma=180^\circ-(95.73^\circ+50.7^\circ)=33.57$$

مجموع قياسات زوايا المثلث = 180

ملاحظات مهمة :

١- لا يمكن حل المثلث بمعلومية قياسات زواياه الثلاثة فقط

٢- قياس الزاوية الكبرى في المثلث تقابل الضلع الأكبر في أطوال الأضلاع


تلخيص : رانيا عبدالغفار

تصميم : حنان علي



7ananmath

# مساحة المثلث

## قاعدة هيرون

يمكن إيجاد مساحة المثلث باستخدام قاعدة هيرون " إذا كانت اطوال الأضلاع الثلاثة معلومة"

الخطوة الأولى:
إيجاد نص محيط المثلث

$$S = {}^{1}/_{2}\,(a+b+c)$$

الخطوة الثانية :
التعويض بالقانون

$$area\Delta = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

أوجد مساحة المثلث ABC حيث:
a=5cm , b=6cm , c=8cm

$$S = \frac{1}{2}(\ 6+8+5\ ) = 9.5$$

$$Area(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$Area(ABC) = \sqrt{9.5\,(9.5-6)\,(9.5-8)\,(9.5-5)}$$

$$Area(ABC) = 14.98\ cm^2$$

أوجد مساحة المثلث ABC حيث:
$m(\widehat{A}) = 47^{\circ}, b = 32cm, C = 19cm$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$a^2 = (32)^2 + (19)^2 - 2(32)(19)\cos(47)$$

$$a = \sqrt{555,68} = 23,57cm$$

$$S = \frac{1}{2}(32+19+23,57) = 37,285$$

$$Area(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

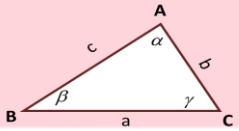
$$= \sqrt{37,285\,(37,285-19)\,(37,285-32)\,(37,285-23,57)}$$

$$Area(ABC) = 222.297\ cm^2$$

## قاعدة Sin

يمكن تطبيق القاعدة في حال توفر طولي ضلعين في مثلث والزاوية الواقعة بينهما

$$area\Delta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$




أوجد مساحة المثلث ABC حيث:
$m(\widehat{A}) = 47^{\circ}, b = 32cm, C = 19cm$

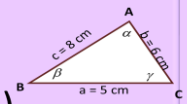
$$Area\Delta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

$$Area(ABC) = (,5)(32)(19)\sin(47^{\circ})$$

$$= 222.33\ cm^2$$

أوجد مساحة المثلث ABC حيث:
$a = 5cm, b = 6\ cm, C = 8cm$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c}$$




$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{5^2 + 8^2 - 6^2}{2(5)(8)}\right) = 92.14^{\circ}$$

$$Area\Delta = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

$$Area(ABC) = (,5)(5)(8)\sin(92.14^{\circ})$$

$$= 19,985\ cm^2$$


تلخيص : رانيا عبدالغفار
تصميم : حنان علي



7ananmath

حل المعادلات المثلثية

"9-3"

متطابقات المجموع والفرق

"9-4"

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

"9-5"

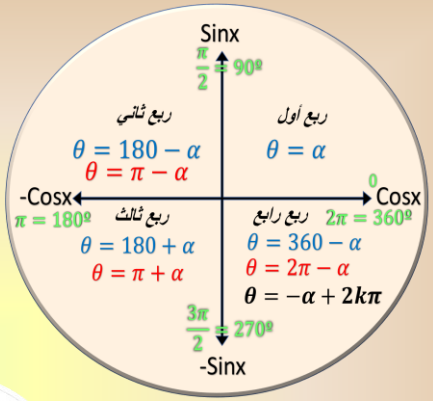
"تطبيقات على حساب المثلثات"

7ananmath

تصميم : حنان علي

# "حل المعادلات المثلثية"

| | النسبة | القانون | | النسبة | القانون |
|---|---|---|---|---|---|
| ١ | $\sin(x)$ | $\frac{\text{المقابل } x}{\text{الوتر}}$ | ٤ | $\csc(x) = \frac{1}{\sin x}$ | $\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل } x}$ |
| ٢ | $\cos x$ | $\frac{\text{المجاور } x}{\text{الوتر}}$ | ٥ | $\sec(x) = \frac{1}{\cos x}$ | $\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور } x}$ |
| ٣ | $\tan x$ | $\frac{\text{المقابل } x}{\text{المجاور } x}$ | ٦ | $\cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ | $\frac{\text{المجاور } x}{\text{المقابل } x}$ |




## حل المعادلة

$$\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$$

$\cos\theta(\sin\theta - 1) = 0$

$\cos\theta = 0$ أو $\sin\theta = 1$

$\cos\theta = 0$

$\theta$ زاوية ربعية

$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$\sin\theta = 1$

$\theta$ زاوية ربعية

$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

حل المعادلة

$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

## حل المعادلة

$$\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$$

$(\cos x + 2)(\cos x + 1) = 0$

إما $\cos x + 1 = 0$

$\cos x = -1$

X زاوية ربعيه

$X = \pi + 2\pi k$

أو $\cos x + 2 = 0$

$\cos x = -2$

الدالة $\cos x$

مداها $[-1,1]$

$-2 \notin [-1,1]$

ليس لها حل

حل المعادلة هو

$X = \pi + 2\pi k \quad ,k \in Z$

## حل المعادلة

$$2\sin^2 x + 3\sin x = 2$$

$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$(2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$

$2\sin x - 1 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}, \sin x > 0$ الربع الأول أو الثاني

$\sin\alpha = |\sin x| = \frac{1}{2}$

$\alpha = \sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

إذا X تقع في الربع الأول $\alpha = \frac{\pi}{6}$

إذا X تقع في الربع الثاني $\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$\sin x + 2 = 0$

$\sin x = -2$ مرفوضة

حل المعادلة هو

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

## حل المعادلة

$$\tan^2 x = 3$$

$\tan x = \pm\sqrt{3}$ نفرض أن زاوية الإسناد للزاوية x هي $\alpha$

$\tan\alpha = |\tan x| = |\pm\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

$\alpha = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

$\tan x > 0$ إذا X تقع في الربع الأول أو الثالث

$\tan x < 0$ إذا X تقع في الربع الثاني أو الرابع

$x = \alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi$ إذا X تقع في الربع الأول أو الثالث

$x = (\pi - \alpha) + k\pi = (\pi - \frac{\pi}{3}) + k\pi = (\frac{2\pi}{3}) + k\pi$ إذا X تقع في الربع الثاني أو الرابع

حل المعادلة هو

$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

## حل المعادلة

$$\sin x = \frac{-1}{2}$$

$\sin x = \frac{-1}{2}$ نفرض أن زاوية الإسناد للزاوية x هي $\alpha$

$\sin\alpha = |\sin x| = \left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$\alpha = \sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$\sin x < 0$ إذا X تقع في الربع الثالث أو الرابع

$x = (\pi + \alpha)$ إذا X تقع في الربع الثالث

$= (\pi + \frac{\pi}{6}) + 2k\pi$

$= \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

$x = (2\pi - \alpha) + 2k\pi$ إذا X تقع في الرابع

$= (2\pi - \frac{\pi}{6}) + 2k\pi$

$= \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

حل المعادلة هو

$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

## حل المعادلة

$$\sqrt{2}\cos x = 1$$

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ نفرض أن زاوية الإسناد للزاوية x هي $\alpha$

$\cos\alpha = |\cos x| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\alpha = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$

$\cos x > 0$ إذا X تقع في الربع الأول أو الرابع

$x = \alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ إذا X تقع في الربع الأول

$x = (2\pi - \alpha) + 2k\pi$ إذا X تقع في الرابع

$= (2\pi - \frac{\pi}{4}) + 2k\pi$

$= \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$

حل المعادلة هو

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$


تلخيص : حنان علي
تصميم : حنان علي



7ananmath

# متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

## أثبت صحة كلا مما يلي

- $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta$

الطرف الأيمن $= \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

$= \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$

$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$= -\cos\theta$ = الطرف الأيسر

- $\sec\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \csc\theta$

الطرف الأيمن $= \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$

$= \frac{1}{\sin(\theta)}$

$= \csc\theta$ = الطرف الأيسر

## دون استخدام الآلة الحاسبة أوجد كلا من :

**sin 15**

= sin ( 60 - 45 )

= sin 60 cos 45 - cos60 sin 45

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

**tan 75**

= tan ( 30 + 45 )

$= \frac{\tan 30 + \tan 45}{1 - \tan 30 \tan 45}$

$= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1)}$

$= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$

$= 2 + \sqrt{3}$

## متطابقات الدوال المتكافئة

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$

$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$

$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc\theta$

$\csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$

## متطابقات المجموع والفرق

$\cos(\beta + \alpha) = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha$

$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha$

$\sin(\beta + \alpha) = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha$

$\sin(\beta - \alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha$

$\tan(\beta + \alpha) = \frac{\tan\beta + \tan\alpha}{1 - \tan\beta\tan\alpha}$

$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}$

## أكتب المقدار التالي بصورة (جيب – جيب التمام- ظل) الزاوية :

$(\sin 3x)(\cos x) - (\cos 3x)(\sin x)$

$(\sin 3x - x)$

$\sin 2x$

$(\sin\frac{\pi}{3})(\cos\frac{\pi}{7}) + (\cos\frac{\pi}{3})(\sin\frac{\pi}{7})$

$(\sin\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{7})$

$(\sin\frac{10\pi}{21})$

$\frac{(\tan\frac{\pi}{5}) - (\tan\frac{\pi}{3})}{1 + (\tan\frac{\pi}{5})(\tan\frac{\pi}{3})}$

$(\tan\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{3}) = (\tan\frac{2\pi}{15})$

إذا كان: $\sin\alpha = \frac{4}{5}\ ,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos\beta = \frac{-12}{13}\ ,\ \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

أوجد كلًّا مما يلي:

a) $\cos(\alpha + \beta)$ b) $\tan(\alpha + \beta)$ c) $\sin(\beta - \alpha)$

| الربع الأول $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ | الربع الثالث $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|
| $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ | $\cos\beta = \frac{-12}{13}$ |
| $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - (\frac{4}{5})^2 = \frac{9}{25}$ <br> $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ | $\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - (\frac{-12}{13})^2 = \frac{25}{169}$ <br> $\sin\beta = \frac{-5}{13}$ |
| $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$ | $\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{-5}{13}}{\frac{-12}{13}} = \frac{5}{12}$ |

❖ $\cos(\alpha + \beta)$

$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$= \frac{3}{5} \times \frac{-12}{13} - \frac{4}{5} \times \frac{-5}{13}$

$= \frac{-36}{65} - \frac{(-20)}{65} = \frac{-16}{65}$

❖ $\sin(\beta - \alpha)$

$= \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha$

$= \frac{-5}{13} \times \frac{3}{5} - \frac{-12}{13} \times \frac{4}{5}$

$= \frac{-15}{65} - \frac{(-48)}{65} = \frac{33}{65}$

❖ $\tan(\alpha + \beta)$

$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$= \frac{\frac{4}{3} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{4}{3} \times \frac{5}{12}}$

$= \frac{\frac{21}{12}}{\frac{16}{36}} = \frac{61}{16}$

تلخيص : حنان علي
تصميم : حنان علي

7ananmath

# متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

## متطابقات نصف الزاوية

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

إذا كانت: $180° < \theta < 270°$

$\sin\theta = -\frac{24}{25}$

أوجد: $\cos\frac{\theta}{2}$ , $\tan\frac{\theta}{2}$

نوجد أولا : $\cos\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{-24}{25}\right)^2 = \frac{49}{225}$

$\cos\theta = \frac{-7}{25}$ لان $\theta$ تقع في الربع الثالث

نوجد الآن $\frac{\theta}{2}$

$\therefore 90 < \frac{\theta}{2} < 135$

ومنه $\frac{\theta}{2}$ في الربع الثاني

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{-7}{25}}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{-7}{25}}{1+\frac{-7}{25}}}$$

أثبت صحة المتطابقة:

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

الطرف الأيسر $= \sin 3\theta = \sin(\theta + 2\theta)$

$= \sin\theta\cos 2\theta + \cos\theta\sin 2\theta$

$= \sin\theta(1 - 2\sin^2\theta) + \cos\theta(2\sin\theta\cos\theta)$

$= \sin\theta - 2\sin^3\theta + 2\sin\theta\cos^2\theta$

$= \sin\theta - 2\sin^3\theta + 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta)$

$= \sin\theta - 2\sin^3\theta + 2\sin\theta - 2\sin^3\theta$

$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ = الطرف الأيمن

أولًا: جيب تمام ضعف الزاوية

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

ثانيًا: جيب ضعف الزاوية

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

ثالثًا: ظل ضعف الزاوية

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

اختصر كلا من التعابير التالية:

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

أثبت صحة المتطابقة:

$$2\cos 2\theta = 4\cos^2\theta - 2$$

$\because \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\therefore 2\cos 2\theta = 2(2\cos^2\theta - 1)$

$\therefore 2\cos 2\theta = 4\cos^2\theta - 2$

أكتب المقدار التالي بدلالة cos x أو Sin x

❖ Sin 2x + cos x

$= 2\sin x\cos x + \cos x$

$= \cos x(2\sin x - 1)$

❖ Cos 3x

$= \cos(x + 2x)$

$= \cos x.\cos 2x - \sin x.\sin 2x$

$= \cos x.(\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x.(2\sin x\cos x)$

$= \cos^3 x - \cos x\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x$

استخدم متطابقة النصف لايجاد

❖ $\cos(15) = +\sqrt{\frac{1+\cos 30}{2}}$

$= +\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$

$= +0,96592$

❖ $\tan(195) = +\sqrt{\frac{1-\cos 390}{1+\cos 390}}$

$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}$

$= 2 - \sqrt{3}$

$= 0,2679$

إذا كان $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

وكان $\cos\theta = \frac{3}{5}$ فأوجد $\sin 2\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$\sin^2\theta = \frac{16}{25}$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\quad \sin\theta = \frac{4}{5}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$= 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$

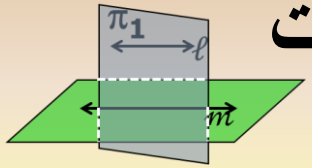
إذا كان $\sin x = \frac{5}{13}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد $\cos 2x$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

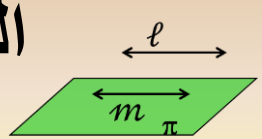
$= 1 - 2\left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{119}{169}$

تلخيص : حنان علي
تصميم : حنان علي

7ananmath

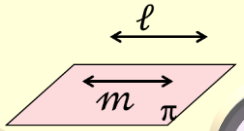



# المستقيمات و المستويات المتوازية في الفضاء



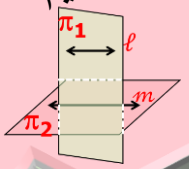

## نظرية "١"

إذا وازي مستقيم خارج مستو مستقيما في المستوي فإنه يوازي المستوي



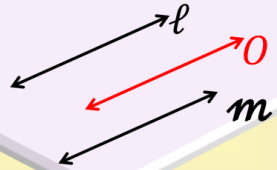

## نظرية "٢"

إذا وازى مستقيم مستويا فكل مستو مار بالمستقيم ويقطع المستوى ، قطعه في مستقيم مواز للمستقيم المعلوم .



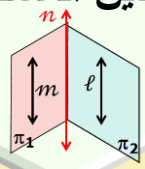

## نظرية "٣"

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيا



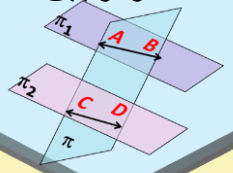

## نتيجة "١"

إذا توازى مستقيمان و مر بهما مستويان متقاطعان فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلا من هذين المستقيمين




## نظرية "٤"

إذا قطع مستو مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين




## اختر النظرية للإنتقال إليها

7ananmath

تصميم : حنان علي

النظرية 3Ds في الفصل

تجسيد للنظرية في الحياة الواقعية

شرح النظرية

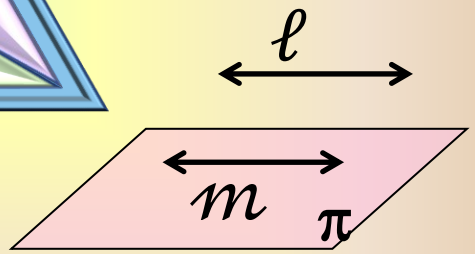
# نظرية "١"

$\because \overleftrightarrow{\ell} \not\subset \pi$

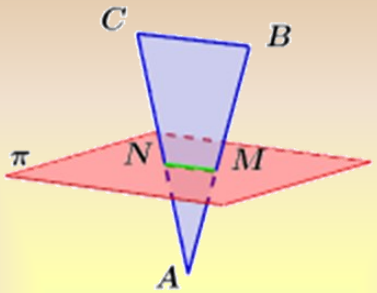
$\because \overleftrightarrow{\ell} // \overleftrightarrow{m}$

$\because \overleftrightarrow{m} \subset \pi$

$\therefore \overleftrightarrow{\ell} // \pi$




إذا وازي مستقيم خارج مستو مستقيما في المستوي فإنه يوازي المستوي




في الشكل المقابل:المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$ ,N منتصف $\overline{AC}$

M,N, تنتميان إلى المستوي π

إثبت أن $\overleftrightarrow{CB} // \pi$

$\because$ M منتصف $\overline{AB}$

$\because$ N منتصف $\overline{AC}$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} // \overleftrightarrow{BC}$

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفين ضلعين في مثلث توازى الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طولة

$\because \overleftrightarrow{MN} \subset \pi$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{BC} // \pi$ (نظرية)

إذا وازي مستقيم خارج مستو مستقيما في المستوي فإنه يوازي المستوي

تلخيص : حنان علي
تصميم : حنان علي

7ananmath

# نظرية "٢"

النظرية 3Ds في الفصل

تجسيد للنظرية في الحياة الواقعية

شرح النظرية

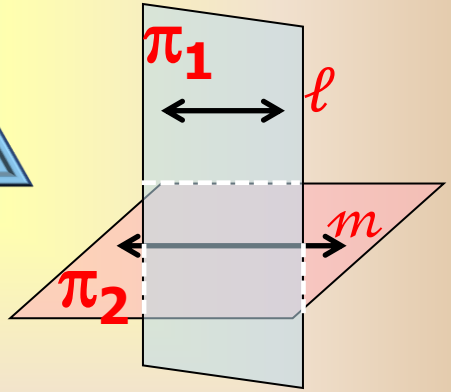
$\because \overleftrightarrow{\ell} \,//\, \pi_2$

$\because \overleftrightarrow{\ell} \subset \pi_1$

$\because \overleftrightarrow{m} \subset \pi_2$

$\because \pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{m}$

$\therefore \overleftrightarrow{\ell} \,//\, \overleftrightarrow{m}$



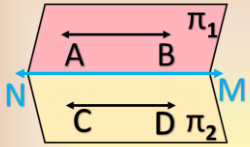

إذا وازى مستقيم مستويا، فكل مستو مار بالمستقيم ويقطع المستوى، قطعه في مستقيم مواز للمستقيم المعلوم .

ليكن $\pi_1$, $\pi_2$ مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{MN}$ حيث

$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$ , $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \pi_2$

و $\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$ , $\overleftrightarrow{CD} \,//\, \pi_1$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$




$\because \overleftrightarrow{AB} \,//\, \pi_2$

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$

$\because \pi_2 \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{MN}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{MN}$ (1

إذا وازى مستقيم مستويا ، فكل مستو مار بالمستقيم و يقطع المستوى ، قطعه في مستقيم مواز للمستقيم المعلوم .

$\because \overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$

$\because \overleftrightarrow{CD} \,//\, \pi_1$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \,//\, \overleftrightarrow{MN}$ (2

إذا وازى مستقيم مستويا ، فكل مستو مار بالمستقيم و يقطع المستوى ، قطعه في مستقيم مواز للمستقيم المعلوم .

من 1 و2 ينتج أن $\therefore \overleftrightarrow{CD} \,//\, \overleftrightarrow{AB}$

المستقيمان الموازيان لثالث في الفضاء متوازيان


تلخيص : حنان علي
تصميم : حنان علي



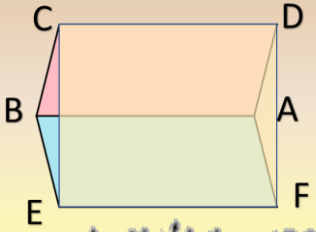
7ananmath

النظرية 3Ds في الفصل

تجسيد للنظرية في الحياة الواقعية

شرح النظرية

# نظرية "٣"




ABCD ,ABEF متوازيا أضلاع غير مستويين معًا ويقاطعان في AB أثبت أن: CDFE متوازي أضلاع

$\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{AB}$ (1 من خواص متوازي الأضلاع ABCD

$CD = AB$ (3

$\overleftrightarrow{EF} // \overleftrightarrow{AB}$ (2 من خواص متوازي الأضلاع ABEF

$EF = AB$ (4

$\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{EF}$ (1 المستقيمان الموازيان لثالث في الفضاء متوازيان

$CD = EF$ (2 من خواص المساوات

$\overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{EF}$ يعينان المستوى وحيد EFDC

من 1 و2 ينتج أن EFCD متوازي أضلاع

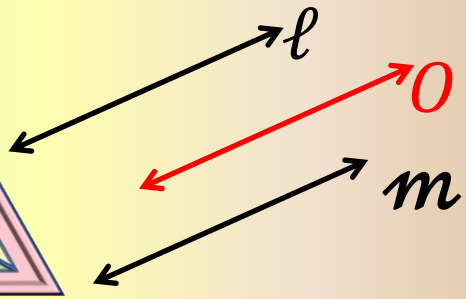
ضلعين متقابلين متطابقين و متوازيين

المستقيمان الموازيان لثالث في الفضاء متوازيان

$\because \overleftrightarrow{\ell} // \overleftrightarrow{m}$

$\because \overleftrightarrow{o} // \overleftrightarrow{m}$

$\therefore \overleftrightarrow{\ell} // \overleftrightarrow{o}$





تلخيص : حنان علي
تصميم : حنان علي


7ananmath

النظرية 3Ds في الفصل

تجسيد للنظرية في الحياة الواقعية

شرح النظرية

# نتيجة "١"

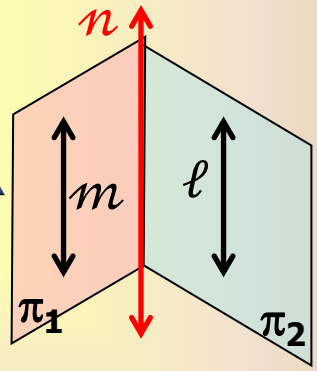
$\because \overleftrightarrow{\ell} \,//\, \overleftrightarrow{m}$

$\because \overleftrightarrow{m} \subset \pi_1$

$\because \overleftrightarrow{\ell} \subset \pi_2,$

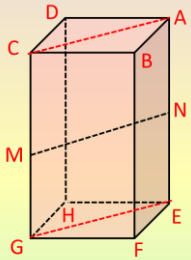
$\because \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{n}$

$\therefore \overleftrightarrow{\ell} \,//\, \overleftrightarrow{m} \,//\, \overleftrightarrow{n}$




إذا توازى مستقيمان و مر بهما مستويان متقاطعان ، فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلا من هذين المستقيمين

$ABCDEFGH$ شبه مكعب . $M$ منتصف $\overline{CG}$
$N$ منتصف $\overline{AE}$ ، أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overline{MN}$




$\because \overline{AE} \,//\, \overline{CG} \;,\; \overline{AE} = \overline{CG}$ من خواص شبه المكعب

$M$ منتصف $\overline{CG}$ ، $N$ منتصف $\overline{AE}$

$\therefore \overline{NA} \,//\, \overline{MC} \;,\; \overline{NA} = \overline{MC}$ من خواص التوازي

$\therefore \overline{NE} \,//\, \overline{MG} \;,\; \overline{NE} = \overline{MG}$ و المساوات

$\because \overline{AC} \,//\, \overline{GE}$ من خواص شبه المكعب

$\overline{NA} \;,\; \overline{MC}$ يعينان المستوى **MCAN**

$\overleftrightarrow{AC} \subset MCAN$

$\overline{NE} \;,\; \overline{MG}$ يعينان المستوى **MGEN**

$\overleftrightarrow{GE} \subset EFGH$

$MCAN \cap MGEN = \overline{MN}$

$\therefore \overline{AC} \,//\, \overline{MN} \,//\, \overline{GE}$

إذا توازى مستقيمان و مر بهما مستويان متقاطعان ، فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلا من هذين المستقيمين

$\overleftrightarrow{GE} \subset EFGH$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \,//\, (EFGH)$

إذا وازي مستقيم خارج مستو مستقيما في المستوي فإنه يوازي المستوي

تلخيص : حنان علي
تصميم : حنان علي

7ananmath

# نظرية "٤"

النظرية 3Ds في الفصل

تجسيد للنظرية في الحياة الواقعية

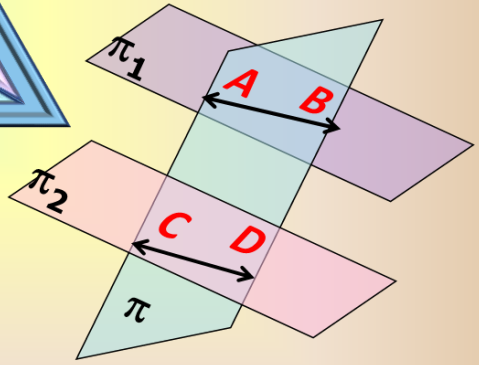
شرح النظرية

$\because \pi_2 // \pi_1$

$\because \pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB}$

$\because \pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

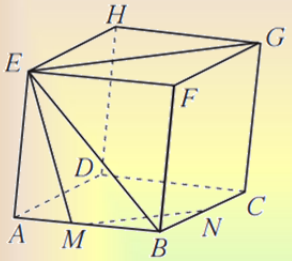



إذا قطع مستو مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين

$ABCDEFGH$ مكعب.

$M \in \overline{AB}$، المستوي $GEM$ يقطع $\overline{BC}$ في النقطة $N$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{GE} // \overleftrightarrow{MN}$




$GEM \cap \overline{BC} = N$

$\overline{BC} \subset ABCD$

$N \in ABCD$ (1

$N, M \in GEMN$

$\overline{MN} \subset GEMN$

$M \in \overline{AB}$ ، $M \in ABCD$ (2

$\overline{MN} \subset ABCD$ من 1 و2 ينتج أن

$HGFE // ABCD$ (A من خواص المكعب

$ABCD \cap GEMN = \overline{MN}$ (B

$HGFE \cap GEMN = \overline{GE}$ (C

$\overline{MN} // \overline{GE}$ من A,B,C

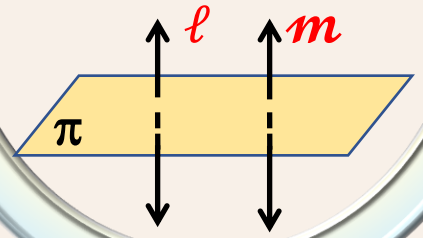
إذا قطع مستو مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين


تلخيص : حنان علي
تصميم : حنان علي


7ananmath

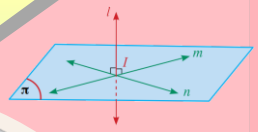
# اختر النظرية للإنتقال إليها

## تعامد مستقيم مع مستوى



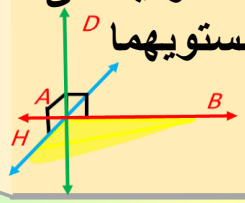

**تعريف**

المستقيم العامودي على مستوى عامودي على كل مستقيم بالمستوى



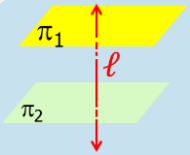
**نظرية "٥"**

المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديا على مستويهما



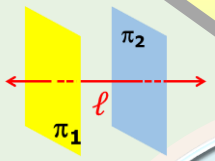

**نظرية "٦"**

إذا كان مستقيم عموديا على كل من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيان



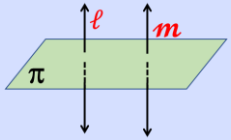

**نظرية "٧"**

إذا كان مستقيم عموديا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديا على المستوى الأخر



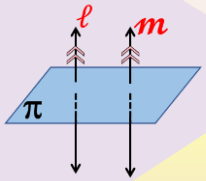

**نظرية "٨"**

المستقيمان العموديان على مستوى متوازيان




**نظرية "٩"**

إذا توازى مستقيمان أحدهما عموديا على مستو كان المستقيم الأخر عموديا على المستوى أيضا



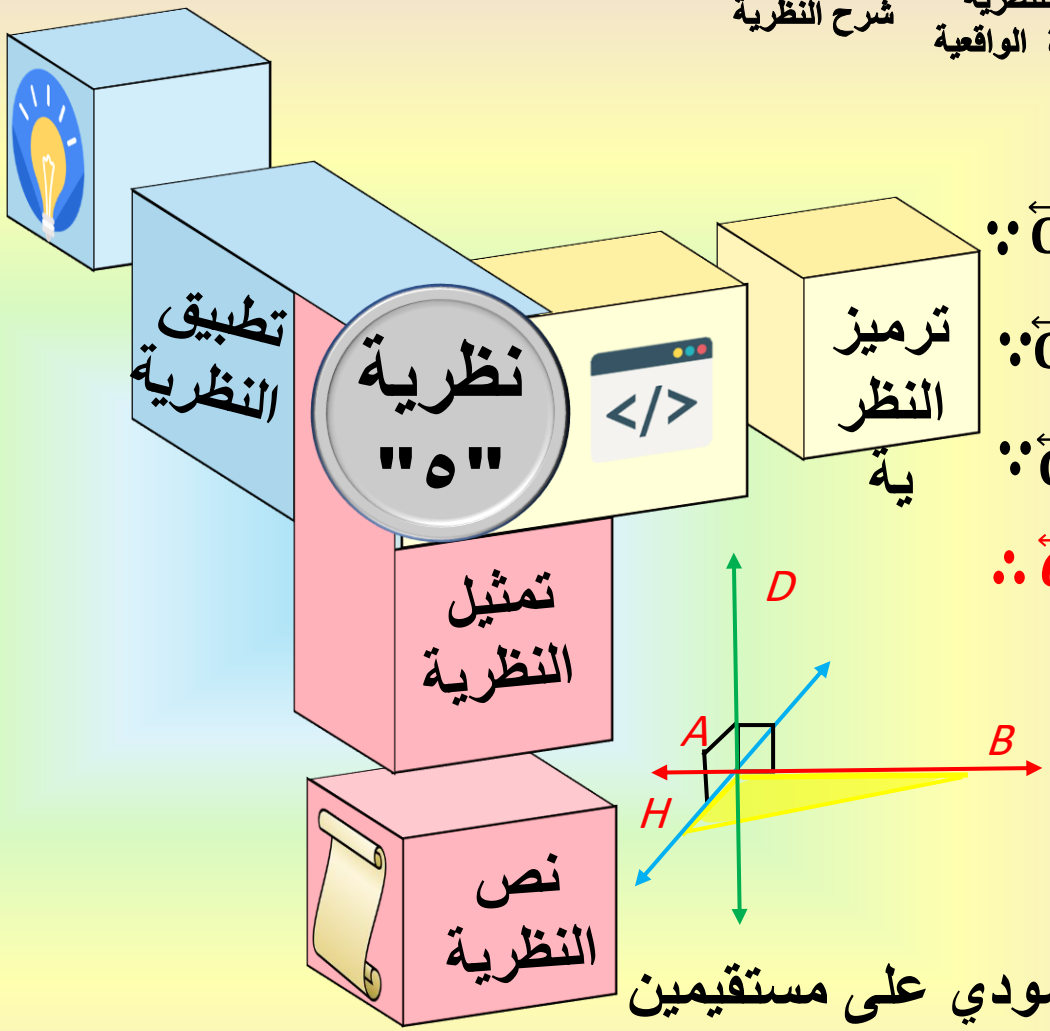

7ananmath

تصميم : حنان علي

النظرية 3Ds في الفصل

تجسيد للنظرية في الحياة الواقعية

شرح النظرية




$\because \overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GH}$

$\because \overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GF}$

$\because \overleftrightarrow{GF} \cap \overleftrightarrow{GH} = \{G\}$

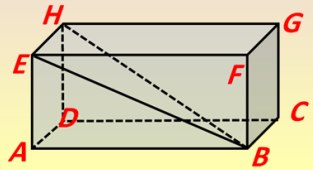
$\therefore \overleftrightarrow{CG} \perp (EFGH)$




المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديا على مستويهما

في شبه المكعب المقابل

أثبت أن المثلث $BEH$ قائم في $\hat{E}$




$\because \overline{EH} \perp \overline{EF}$ من خواص المستطيل

$\overline{EH} \perp \overline{EA}$ "لأن أوجة شبة المكعب مستطيلات"

$\overline{EF} \cap \overline{EA} = \{E\}$

$\therefore \overleftrightarrow{EH} \perp (AEFB)$ المستقيم العامودي على مستقيمين متقاطعين عامودي على مستوييهما

$\because \overleftrightarrow{EB} \subset (AEFB)$

$\therefore \overline{EH} \perp \overline{EB}$ المستقيم العامودي على مستوى عامودي على كل مستقيم بالمستوى

المثلث $BEH$ قائم في $\hat{E}$

تلخيص : حنان علي

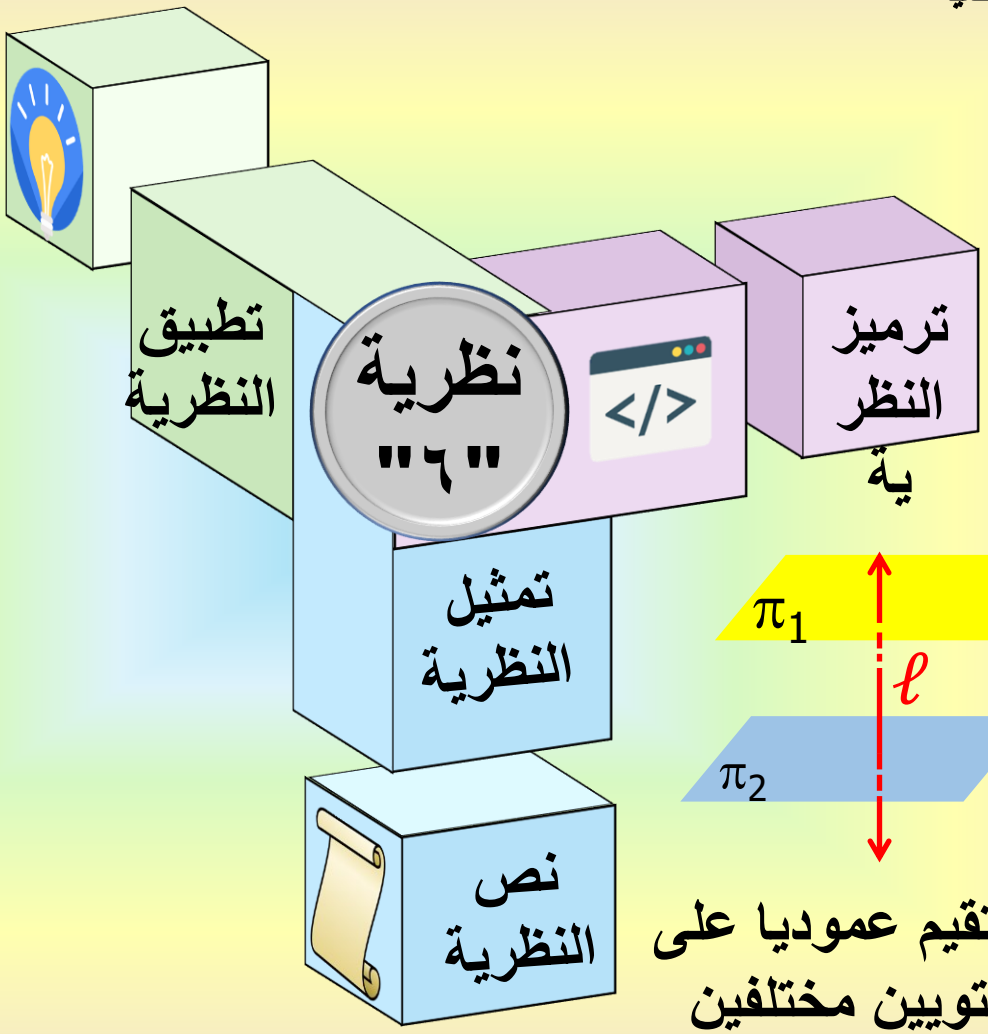
تصميم : حنان علي

7ananmath

النظرية 3Ds في الفصل

تجسيد للنظرية في الحياة الواقعية

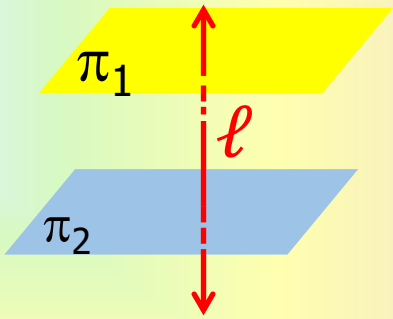
شرح النظرية




$\because \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_1$

$\because \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_2$

$\therefore \pi_1 // \pi_2$

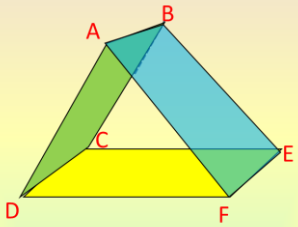



**إذا كان مستقيم عموديا على كل من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيان**

في الشكل المقابل :

$ABEF, ABCD$ مستطيلان

أثبت أن: $(AFD) // (BEC)$




$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AF}$ من خواص مستطيل $ABEF$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$ من خواص مستطيل $ABCD$

$\overleftrightarrow{AF} \cap \overleftrightarrow{AD} = \{A\}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (AFD)$ (١) المستقيم العامودي على مستقيمين متقاطعين عامودي على مستوييهما

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$ من خواص مستطيل $ABEF$

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ من خواص مستطيل $ABCD$

$\overline{BE} \cap \overline{BC} = \{B\}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (EBC)$ (٢) المستقيم العامودي على مستقيمين متقاطعين عامودي على مستوييهما

من (١) ، (٢) $\therefore (AFD) // (BEC)$

إذا كان مستقيم عموديا على كل من مستويين متخلفين فإنهما يكونان متوازيين


تلخيص : حنان علي

تصميم : حنان علي



7ananmath

النظرية 3Ds في الفصل

تجسيد للنظرية في الحياة الواقعية

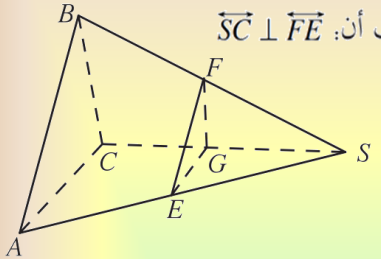
شرح النظرية

في الشكل المقابل، $(ABC) // (EFG)$

$S$ نقطة خارج $(ABC),(EFG)$ فإذا كان: $BC = 6\,cm$

$SB = 10\,cm , SC = 8\,cm$ بحيث $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{AC}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{FE}$




$\overleftrightarrow{SB} \cap \overleftrightarrow{SC} = \{S\}$

$\overleftrightarrow{SB}, \overleftrightarrow{SC}$ يعينان المستوى $SBC$

$(BS)^2 = 10^2 = 100$

$(BC)^2 + (CS)^2 = (8)^2 + (6)^2 = 100$

$(BC)^2 + (CS)^2 = (BS)^2$

المثلث $BSC$ قائم الزاوية في $\hat{B}$ ( عكس نظرية فيثاغورث)

$\therefore \overleftrightarrow{CB} \perp \overleftrightarrow{CS}$ ، $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CS}$

$\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{C\}$

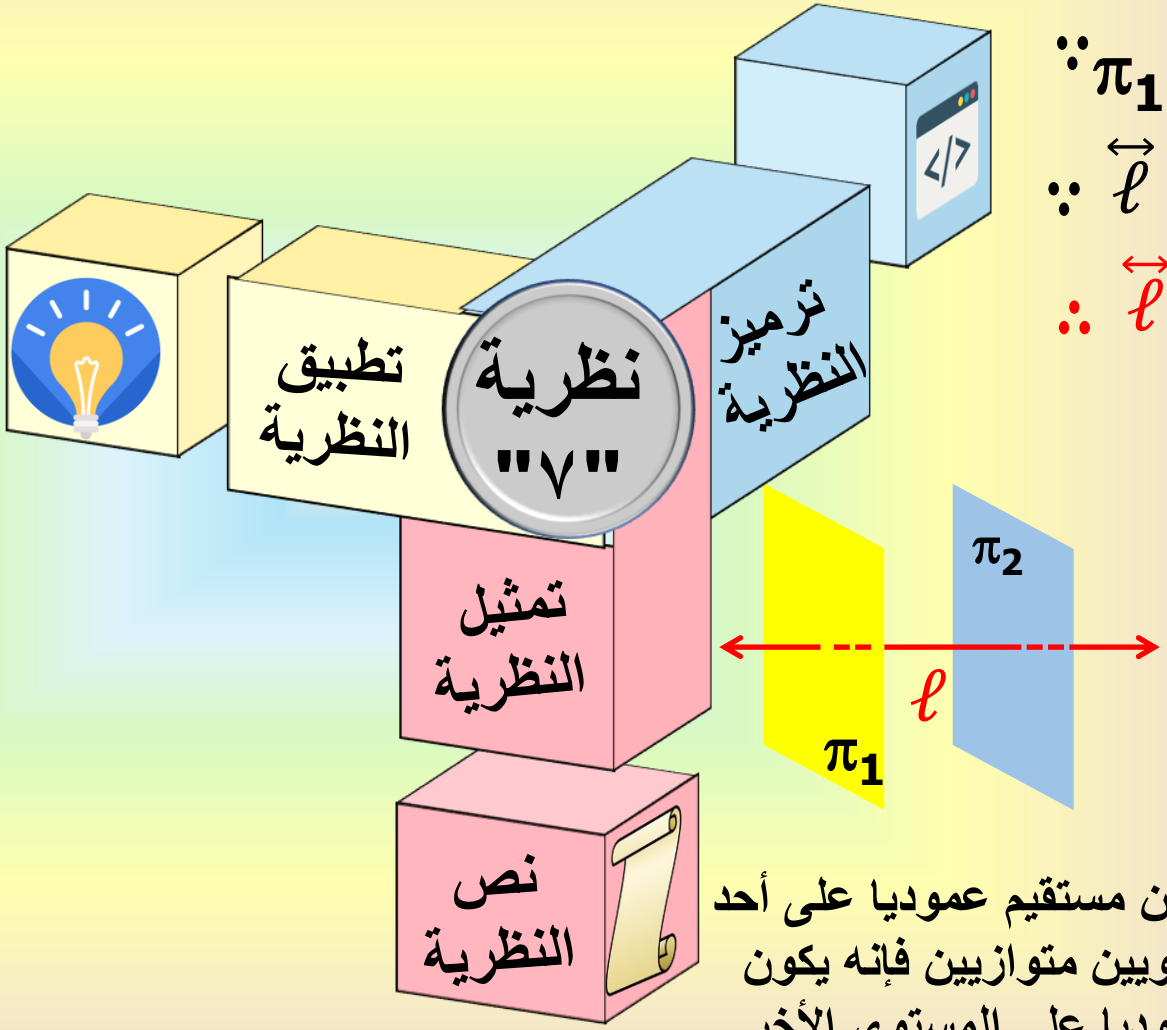
$\therefore \overleftrightarrow{CS} \perp (ABC)$ المستقيم العامودي على مستقيمين متقاطعين عامودي على مستوييهما

$\because ABC // EGF$

$\therefore \overleftrightarrow{SC} \perp EGF$ المستقيم العامودي على أحد المستويين المتوازيين عامودي على المستوى الآخر

$\because \overleftrightarrow{SC} \subset EGF$

$\therefore \overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{CS}$ المستقيم العامودي على مستوى عامودي على كل مستقيم في المستوى




$\because \pi_1 // \pi_2$

$\because \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_2$

$\therefore \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_1$

إذا كان مستقيم عموديا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديا على المستوى الأخر

تلخيص : حنان علي

تصميم : حنان علي

7ananmath

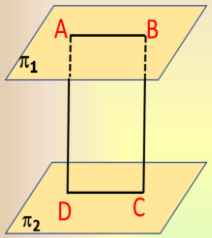
النظرية 3Ds في الفصل

تجسيد للنظرية في الحياة الواقعية

شرح النظرية

في الشكل المقابل : $\pi_1 // \pi_2$ , A,B نقطتان في $\pi_1$

C,D نقطتان في $\pi_2$ حيث A,B,C,D في مستوى واحد , $\overleftrightarrow{BC} \perp \pi_2$ , $\overleftrightarrow{AD} \perp \pi_2$




اثبت أن ABCD مستطيل

$\because \overline{AD} \perp \pi_2 , \overline{BC} \perp \pi_2$

$\therefore \overline{AD} // \overline{BC} \rightarrow (1)$ المستقيمان العموديان على مستوى متوازيان

$\therefore$ المستقيمان يعينان مستويا ABCD

$\because \pi_1 // \pi_2$ ,

المستوي ABCD يقطع

كلا من $\pi_1$ و $\pi_2$ في $\overleftrightarrow{AB}$ , $\overleftrightarrow{DC}$

$\therefore \overline{AB} // \overline{DC} \rightarrow (2)$ إذا توازى مستويان وقطعهما مستوى ثالث فإن خطي التقاطع متوازيان

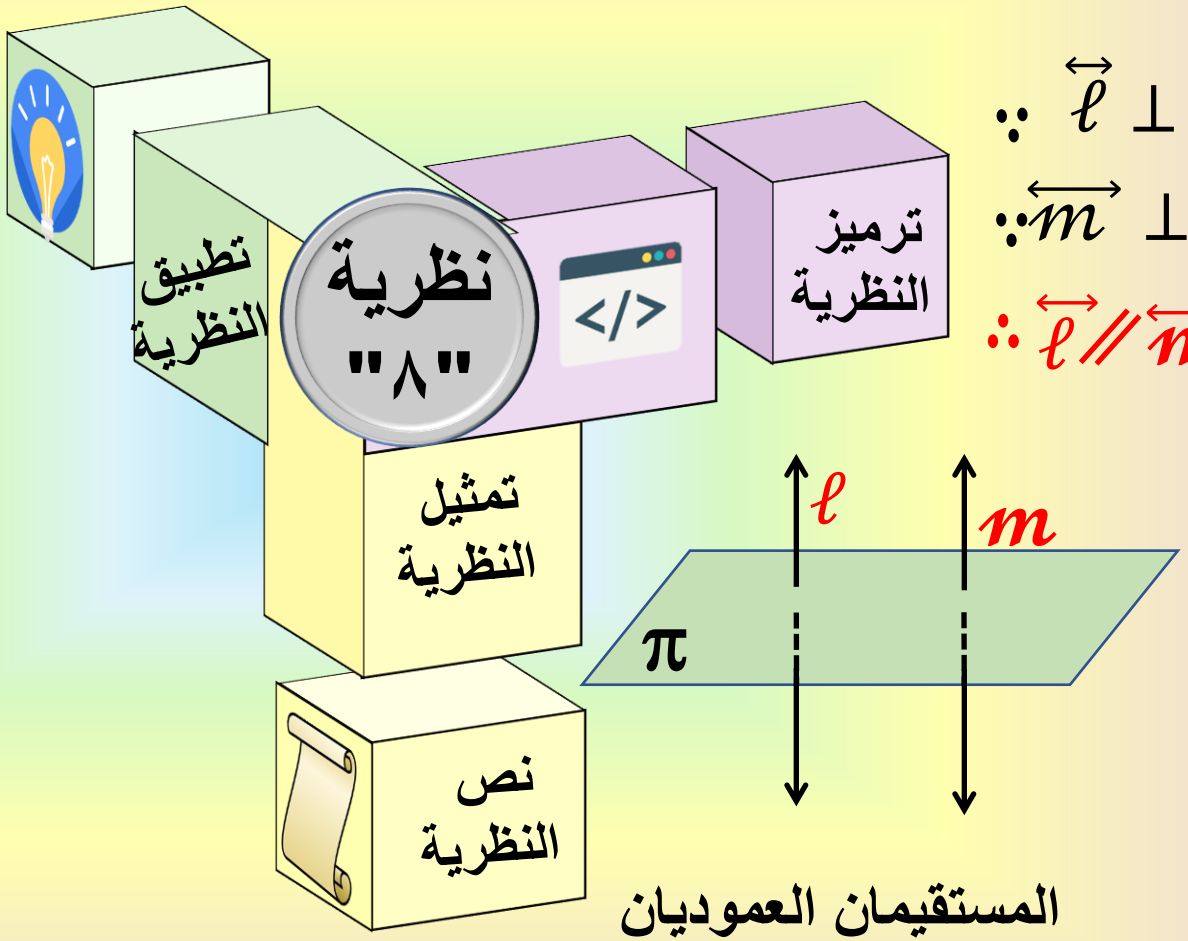
ABCD متوازي أضلاع كل ضلعين متقابلين متوازيين

$\because \overline{AD} \perp \pi_2 , \overline{DC} \subset \pi_2$

$\overline{AD} \perp \overline{DC} \rightarrow (3)$ المستقيم العامودي على مستوى عامودي على كل مستقيم في المستوى

من ( 3 ), ( 2 ) , (1) ينتج أن

ABCD مستطيل متوازي أضلاع زواياه قوائم




المستقيمان العموديان على مستوى متوازيان

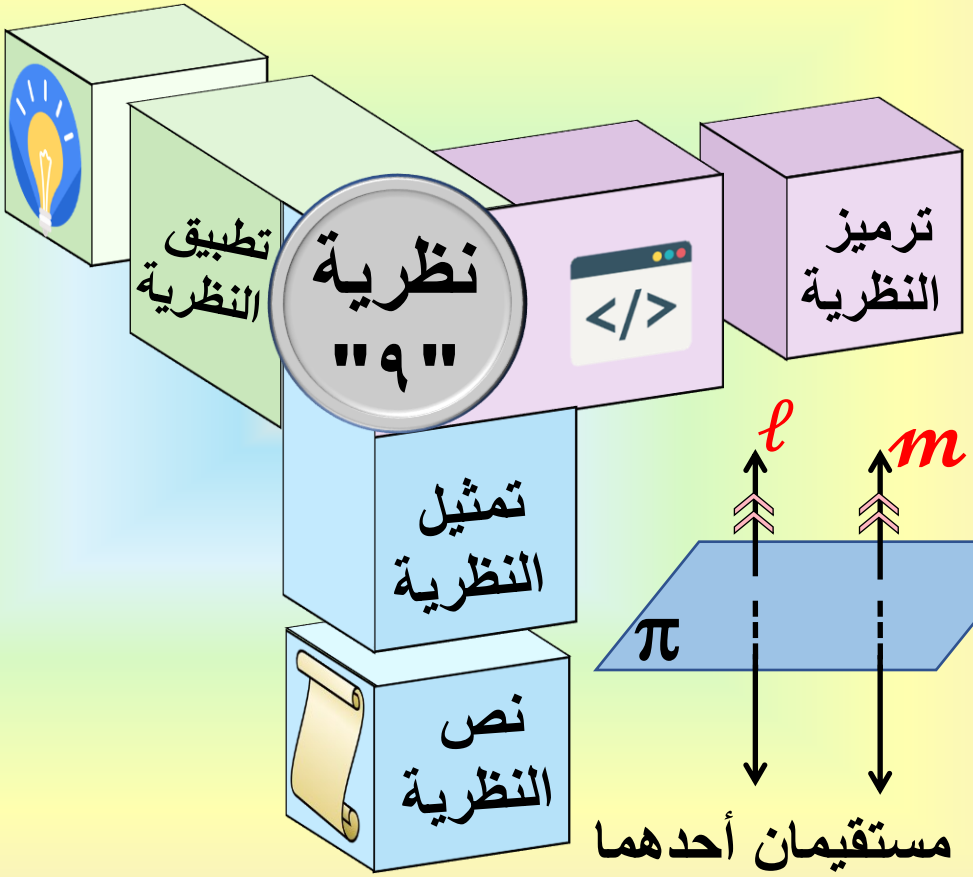
تلخيص : حنان علي
تصميم : حنان علي

7ananmath

النظرية 3Ds في الفصل

تجسيد للنظرية في الحياة الواقعية

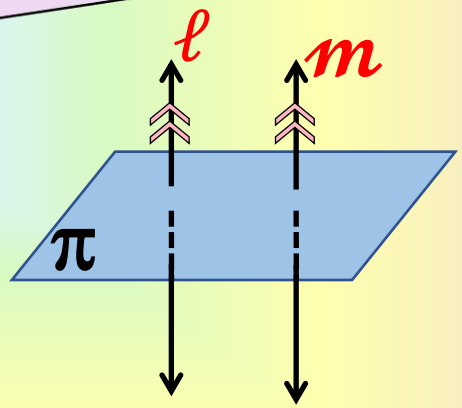
شرح النظرية




$\because \overleftrightarrow{\ell} // \overleftrightarrow{m}$

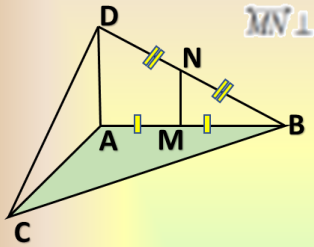
$\because \overleftrightarrow{m} \perp \pi$

$\therefore \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi$




إذا توازى مستقيمان أحدهما عموديا على مستو كان المستقيم الأخر عموديا على المستوى أيضا

$ABC$ مثلث، أخذت النقطة $D$ خارج مستوي المثلث بحيث كان: $\overleftrightarrow{DA}$ عموديًا على كل من $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{AC}$ فإذا كانت $M$ منتصف $\overline{AB}$، $N$ منتصف $\overline{DB}$، أثبت أن: $\overleftrightarrow{MN} \perp (ABC)$




$\overline{AD} \cap \overline{AB} = \{A\}$

$\overline{AD}, \overline{AB}$ يعينان المستوى وحيد $ABC$

$M$ منتصف $\overline{AB}$، $N$ منتصف $\overline{DB}$

$\therefore \overline{AD} // \overline{NM}$ القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصف ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طولة

$\because \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AC}$

$\because \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$\overline{AC} \cap \overline{AB} = \{A\}$

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$ المستقيم العامودي على مستقيمان متقاطعان عامودي على مستوييهما

$\therefore \overleftrightarrow{NM} \perp ABC$ إذا توازى مستقيمين و كان أحدهما عامودي على المستوى كان الآخر عامودي عل المستوى

7ananmath

# تم بفضل الله وعونه

لأي ملاحظة أو اقتراح، يسعدني تواصلكم عن طريق:

7ananmath

7ananmath@gmail.com

معلمة الرياضيات
فصول الموهبة والإبداع
أ. حنان علي جمعة